HAL
open science

Analyse de stabilité de la convection naturelle thermosolutable dans un milieu de Darcy

Haikel Ben Hamed, Rachid Bennacer, Habib Sammouda, Thierry Langlet

To cite this version:

Haikel Ben Hamed, Rachid Bennacer, Habib Sammouda, Thierry Langlet. Analyse de stabilité de la convection naturelle thermosolutable dans un milieu de Darcy. JITH 2007, Aug 2007, Albi, France. 5p. hal-00154450

HAL Id: hal-00154450

https://hal.science/hal-00154450

Submitted on 29 Aug 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE DE STABILITE DE LA CONVECTION NATURELLE THERMOSOLUTALE DANS UN MILIEU DE DARCY

Haikel Ben Hamed[a,b,c], Rachid Bennacer[a], Habib Sammouda[b], Thierry Langlet[c]
[a] LEEVAM, 5, mail Gay Lussac, Neuville sur Oise, 95031, Cergy-Pontoise, France
[b] LETTM, Faculté des Sciences de Tunis 1002-Tunisie
[c] IUT d'Amiens, chemin du Thil, Amiens France
: haikel.benhamed@u-cergy.fr

Résumé : Ce travail traite l'influence de l'effet de Soret sur la convection naturelle dans un milieu de Darcy cartésien, saturé par un fluide binaire et soumis à un gradient vertical de température appliqué sur les parois horizontales, les autres parois sont adiabatiques. Toutes les frontières sont imperméables à la masse. Ainsi nous abordons l'étude linéaire de la stabilité du mélange. La prévision des nombres de Ra critiques pour la convection naturelle est faite sur la base d'un problème de valeurs propres, déduit d'une analyse linéaire numérique de stabilité 2D marginale et transitoire basée sur la méthode des éléments finis. Nous donnons des diagrammes de stabilité en fonction des paramètres de contrôle du problème.
Mots clés : convection naturelle, stabilité linéaire, éléments finis, effet Soret, Darcy.

1 ANALYSE DE STABILITE LINEAIRE

1.1 Méthode numérique

Le système à étudier consiste à la prise en compte d'une cavité poreuse rectangulaire de rapport d'aspect $A = L'/H'$ saturée par un fluide binaire. Nous considérons le nombre de Darcy de l'écoulement très réduit $Da = 10^{-8}$ de façon à anéantir les effets visqueux près des parois. En conservant l'hypothèse des faibles gradients de température, comme nécessaire pour la validation de l'approximation de Boussinesq, la densité est donnée par :

$$\rho = \rho_0\left[1 - \beta_T\left(T' - T_0'\right) - \beta_N\left(C' - C'_0\right)\right] \tag{1}$$

Les variables adimensionnelles suivantes sont utilisées.

$$\begin{array}{llll} (x,z) = (x',z')/H' & T = (T' - T_0')/\Delta T' & C = C'/\Delta C' & u' = \dfrac{\partial \psi'}{\partial y'} \quad v' = -\dfrac{\partial \psi'}{\partial x'} \\ (u,w) = (u',w')\,H'/\nu & \Delta T' = T_{chaud} - T_{froid} & \Delta C' = -\Delta T' C_0 D^*/D & \end{array} \tag{2}$$

L'équation de continuité est la condition d'existence d'une fonction de courant ψ'. Les équations adimensionnelles décrivant le problème étudié sont données par :

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi = -Pr^{-1} R_T \dfrac{\partial}{\partial x}(T + N.C) \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + \dfrac{\partial \Psi}{\partial z}\dfrac{\partial T}{\partial x} - \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\dfrac{\partial T}{\partial z} = \nabla^2 T \\ \varepsilon \dfrac{\partial C}{\partial t} + \dfrac{\partial \Psi}{\partial z}\dfrac{\partial C}{\partial x} - \dfrac{\partial \Psi}{\partial x}\dfrac{\partial C}{\partial z} = \dfrac{1}{Le}\left(\nabla^2 C - \nabla^2 T\right) \end{cases} \tag{3}$$

Dans le but de faciliter l'usage de la formulation variationnelle, nous allons décomposer la solution générale en la somme d'une solution conductive et convective :

$$\begin{cases} \psi' = \psi_C + \psi(t,x,z) \\ T = T_C + \theta(t,x,z) \\ C = C_C + \phi(t,x,z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi' = \psi_C + \psi_0 e^{pt} F(x,z) \\ T = T_C + \theta_0 e^{pt} G(x,z) \\ C = C_C + \phi_0 e^{pt} H(x,z) \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi_C = 0 \\ T_C = C_C = 1 - z \end{cases} \tag{4}$$

Il est convenable de décomposer les solutions convectives spatio-temporelles en un produit d'une exponentielle temporelle et de fonctions spatiales. Les fonctions *F*, *G* et *H* décrivent les profils de la fonction de courant, de la température et de la concentration juste au moment de la perte de stabilité de la solution, et vérifient les mêmes conditions aux limites

que leurs grandeurs correspondantes. Le paramètre p est le taux d'accroissement de la perturbation.

1.2 Stabilité marginale p=0

On introduit les expressions (4) dans le système (3) et en faisant les transformations variationnelles et après considérablement d'algèbre nous obtenons les équations matricielles gouvernantes suivantes :

$$\begin{cases} \psi_0 [K]\{F\} = -Pr^{-1} R_T [B]\left(\theta_0 \{G\} + N\Phi_0 \{H\}\right) \\ \psi_0 [B]\{F\} = \dfrac{\theta_0}{Pr}[K]\{G\} \\ \psi_0 [B]\{F\} + \dfrac{\theta_0}{Sc}[K]\{G\} = \dfrac{\Phi_0}{Sc}[K]\{H\} \end{cases} \tag{5}$$

Où $[B]$ et $[K]$ sont deux matrices carrées d'ordre m, décrivant respectivement les intégrales du terme de transport, la fonction de courant, et les coefficients de la température et des espèces. {F}, {G} et {H} sont des vecteurs inconnus de dimension m. Ici $m=4n$, où le n est le nombre total des noeuds. Les matrices élémentaires correspondantes sont données ci-dessous. Les fonctions $N_i(x,y)$ définies sur le domaine de calcul comme les fonctions de base, sont les fonctions d'interpolation de forme d'Hermite.

$$(B_{i,j})^e_{1\le i,j\le 4} = \int_\Omega \frac{\partial \mathrm{N}_i}{\partial x} \mathrm{N}_j d\Omega \qquad (K)^e_{1\le i,j\le 4} = \int_\Omega \nabla \mathrm{N}_i . \nabla \mathrm{N}_j \, d\Omega \tag{6}$$

Les intégrales ci-dessus sont évaluées en utilisant l'algorithme d'intégration de Gauss. Nous notons qu'introduit les conditions aux limites dans les matrices d'assemblages sans altérer les dimensions des matrices. En combinant le système (5) on obtient :

$$\left(1 + N\left(1 + Le\right)\right)[K]^{-1}[B][K]^{-1}[B] - Pr\left(R_T\right)^{-1} I_d = 0 \Rightarrow \left(\left(1 + N\left(1 + Le\right)\right)\right)[E] - \lambda I_d = 0 \tag{7}$$

Du point de vue mathématique l'équation (7) admet une solution non triviale si et seulement si le déterminant $\left|E - \lambda I_d\right|$ est nul. Ceci nous conduit à chercher toutes les valeurs propres λ_i. Notons que les valeurs propres obéissent à l'égalité et à la relation d'ordre (9).

$$\lambda = Pr\left(R_T\right)^{-1} \qquad \left|\lambda_j\right| \le \left|\lambda_p\right| \le \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \le \left|\lambda_k\right| \le \ldots\ldots\ldots \le \left|\lambda_m\right| \qquad 1 \le j,p,k,m\ldots. \le n \tag{8}$$

Où λ_m est le rayon spectral de la matrice $[E]$. Vu que les nombres de Ra sont inversement proportionnels aux valeurs propres, la plus petite valeur qui génère la perte de stabilité de l'écoulement sera obtenue à partir du rayon spectral de la matrice $[E]$.

1.3 Stabilité transitoire p≠0

Dans la formulation variationnelle, les fonctions spatiales $\bar{u}$, $\bar{v}$ et $\bar{w}$ admissibles comme fonctions test sont arbitraires et non connues de manière explicite. Elles doivent vérifier les mêmes régularité et conditions aux limites que la solution. Dans ce cas rien n'interdira de prendre les solutions $F(x,y)$, $G(x,y)$ et $H(x,y)$ comme fonctions admissibles. Ainsi la forme intégrale faible des équations se réduit aux équations linéaires :

$$\begin{cases} \psi_0 p\mathrm{M} + \psi_0 \mathrm{K}_\psi = -Pr^{-1} R_T \mathrm{B}\left(\theta_0 + N\phi_0\right) \\ \sigma\theta_0 p\mathrm{M} + \psi_0 \mathrm{B} = \theta_0 Pr^{-1} \mathrm{K}_\theta \\ \varepsilon\phi_0 p\mathrm{M} + \psi_0 \mathrm{B} = Sc^{-1}\left(\phi_0 \mathrm{K}_\phi - \theta_0 \mathrm{K}_\theta\right) \end{cases} \tag{9}$$

$$M = \int_\Omega F^2 d\Omega = \int_\Omega G^2 d\Omega = \int_\Omega H^2 d\Omega \,, \quad B = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial x} F \, d\Omega \,, \quad K = \int_\Omega \nabla G . \nabla H \, d\Omega \tag{10}$$

2 RESULTATS ET INTERPRETATIONS

La convection naturelle en fluide binaire sous l'influence de l'effet Soret dépend trivialement du mélange caractérisé par le nombre de *Le*, et du taux de séparation *N*, qui sont les paramètres essentiels déterminant le seuil de stabilité. En prenant le rayon spectral de la matrice E, on retrouve une valeur qui tend asymptotiquement vers une constante qui ne dépend que de la finesse du maillage et du rapport d'aspect de la cavité. Cette valeur peut être positive signifiant un chauffage par le bas, ou négative signifiant un chauffage par le haut. Physiquement cette valeur devra être la constante de la convection naturelle purement thermique dans un milieu de Darcy, égale à $R^0 = 4\pi^2 \approx 39.4784176$. Nous pouvons construire les courbes de stabilité neutre en fonction de l'élancement du canal (figure 1). Pour un rapport d'aspect inférieur ou égal à l'unité, un écoulement monocellulaire symétrique s'installe, néanmoins pour les cavités élancées cette symétrie est brisée. En augmentant le rapport d'aspect nous remarquons le passage du nombre de Rayleigh Darcy critique par plusieurs maximas et minimas locaux. Les maximas sont atteints pour les valeurs de $A_x = A_n = \sqrt{n(n+1)}$, en ce même moment la transition de *n* à *n+1* rouleaux arrive. Donc pour ces rapports d'aspect une solution multiple est possible. Les minimas sont atteints pour les valeurs entières du rapport d'aspect. La dissipation de l'énergie mécanique est de plus en plus importante quand une solution multiple pourrait s'installer. En introduisant l'effet Soret l'expression du R_T critique, sera donnée par (11).

$$R_T^C = R^0 \big/ \left(1 + N\,(1 + Le)\right) \tag{1}$$

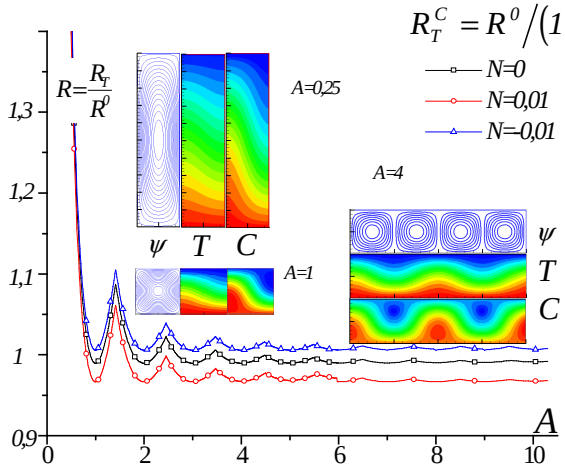

Figure 1: Influence du rapport d'aspect et du taux de séparation N sur le

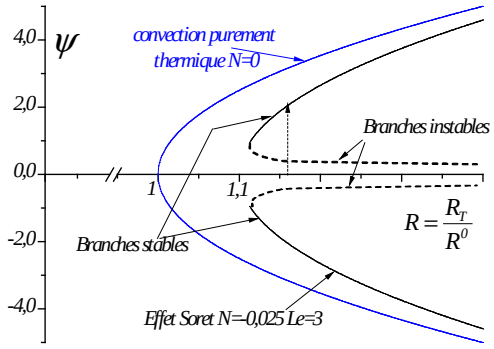

Figure 2: Diagramme de bifurcation de la convection naturelle avec effet Soret.

Si *N=0* alors : $R_T^C = R_{Da}^0 / 1$ donc le *1* du dénominateur correspond à la pondération de la force d'origine calorifique. Le terme $N \times (1 + Le)$ correspondra nécessairement à la pondération de la force d'origine solutale dans le bilan total des forces de volume. Cette quantité signifie la somme barycentrique de la force d'origine double diffusive quantifiée par $N \times Le$ et de la force d'origine l'effet Soret quantifiée par *N*. Connaissant ces interprétations, il est clair que si *Le* est très grand l'action de l'effet Soret sera très faible sur la stabilité du système. Par contre son action est d'autant plus importante lorsque *Le* se réduit à des valeurs voisines de 0^+. Le dénominateur qui ne doit pas s'annuler de point de vue mathématique afin de préserver l'existence de la fonction, pourra-t-il donner en s'annulant une signification dans la physique ? Dans ce cas, le R_T^C sera égal à l'infini, condition suffisante pour affirmer qu'au voisinage de ce point précis il n'y aura jamais d'état supercritique (voir figure 4). On traduira cette condition par :

$$1 + N\,(1 + Le) = 0 \Leftrightarrow N = -1/(1 + Le) \Leftrightarrow Le = -(N + 1)/N \tag{2}$$

La figure 4 montre bien qu'au voisinage du point défini par (12) la valeur supercritique a une pente mur, et les autres bifurcations qui seront définies ultérieurement auront lieu. Lorsque le taux de séparation est négatif, il agit comme stabilisant, puisque les forces solutales poussent vers le bas les composants les plus denses. L'aspect du mouvement du fluide évolue d'un état monocellulaire dans les cavités verticales vers un état où plusieurs ondes peuvent s'installer pour les cellules longues comme le montre la figure 1. Le système bifurque vers deux solutions possibles avec une amplitude nulle dans le cas de la convection thermique et avec une amplitude finie quand les forces solutales ne sont pas négligées. Les figures 1 et 2 montrent également la translation de la valeur supercritique lorsqu'on tient compte de l'effet solutal. Les constantes M, B, K_ψ, K_θ et K_ϕ sont déduites des matrices élémentaires dont les intégrales (16) sont calculées avec la méthode d'intégration de Gauss. En combinant les équations (9) on aboutit à une équation polynomiale fonction *p*.

$$p^2 - (2.p_0.p_1).p - (p_0^2.p_2) = 0 \tag{3}$$

$$p_0 = \frac{K}{2M\,\varepsilon LeR^0}\,;\; p_1 = R_T\,(NLe + \varepsilon\,Le) - R^0\,(1+\varepsilon\,Le)\,;\; p_2 = 4R^0\;\varepsilon\,Le\left[R_T\,(1+N\,(Le+1)) - R^0\right]$$

Dans le cas où *p=0* on se ramène à la stabilité marginale, on retrouve l'expression (11). Le nombre R_T^{Hopf} caractérise la transition de l'écoulement convectif stationnaire vers un autre oscillant. La solution de l'état de repos devient instable pour des perturbations à amplitudes finies si on part d'un état sous critique et pour des perturbations infinitésimales si on part d'un état supercritique. La borne inférieure de la convection oscillatoire est déduite du cas où le paramètre *p* peut prendre des valeurs complexes. La valeur oscillatoire sera déduite de la condition $p_1^2 + p_2 = 0$. Les nombres R_T^{Sur} qui marquent le passage de la convection oscillante vers le mode direct, doivent vérifier l'équation polynomiale (15).

$$R_T^{Hopf} = R_T^{surstab} = \frac{R^0\,(1+\varepsilon\,Le)}{(NLe+\varepsilon\,Le)} \tag{4}$$

$$R_T^2 - 2R_T R^{Hopf}\left[1 + \frac{2\varepsilon Le(1+N(Le+1))}{(NLe+\varepsilon\,Le)(1+\varepsilon\,Le)}\right] + \left(R^{Hopf}\right)^2\left(1 - \frac{4\,\varepsilon\,Le}{(1+\varepsilon\,Le)^2}\right) = 0 \tag{5}$$

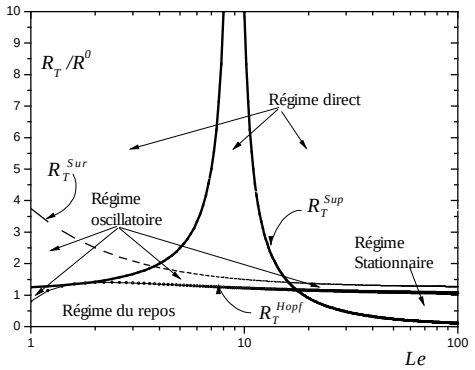

Figure 3: Différentes zones définissant les modes de convection en fonction du nombre de Lewis : N=-0.1 et ε=0.5

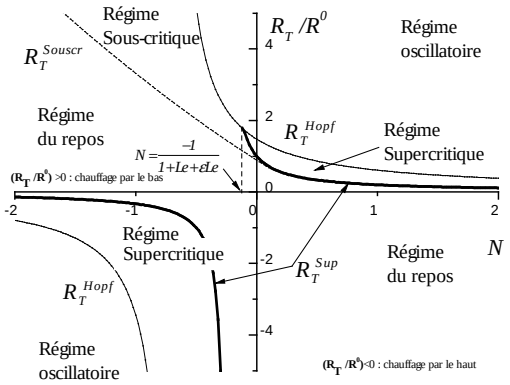

Figure 4: Différentes zones définissant les modes de convection : Le=3 et ε=0.7

La figure 3 illustre sur des lieux (*R*,*Le*), les différentes zones délimitées par les courbes d'équations (11), (14) et (15). On distingue trois zones principales, une zone de repos, une zone de convection stationnaire, une zone de convection oscillante et le reste du plan est le champ du mode direct où les oscillations croient d'une manière exponentielle. Dans la figure 4 nous donnons un diagramme général de stabilité en fonction du rapport de la compétition des forces volumiques thermiques et solutales dans une configuration stabilisante et une autre

déstabilisante. On distingue que les lieux (*R,N*) sont divisés en quatre parties, là où les forces thermiques et solutales sont coopérantes dans le sens stabilisant (*R<0, N<0*), ou déstabilisant (R>0, N>0) ; ou ces dernières sont en compétition. Le plan est divisé en des zones à différents modes de convection détaillées sur la figure. La ligne de bifurcation sous-critique a été obtenue par simulations numériques directes sur un code à volumes finies.

3 CONCLUSION

Le présent travail traite l'influence de l'effet Soret sur la stabilité d'un mélange binaire en milieu de Darcy. La stabilité a été étudiée en linéarisant les équations de Navier stokes par une méthode de Galerkin, et puis on recherchant les modes propres de l'opérateur linéaire obtenu. L'effet d'élancement de la cavité n'a pas été négligé. Des diagrammes généraux de stabilité ont été présentés en fonction du nombre de Le, de N et de ε. Notons que chaque triplet de ces variables a des diagrammes propres à lui. La valeur ajoutée de ce travail est nous permettre de prédire, en fonction des variables de problème, le mode de convection qui pourra s'installer dans un mélange binaire saturant un milieu de Darcy.

NOMENCLATURE

Symboles

A	rapport de forme
a	diffusivité thermique $k/(\rho c)_f$, *m²/s*
C	concentration adimensionnelle
D	diffusivité solutale, *m²/s*
D^*	coefficient de thermodiffusion
g	accélération de pesanteur, *m²/s*
H'	hauteur de la cavité, *m*
L'	longueur de la cavité
Le	nombre de Lewis *a/D*
N	taux de séparation $N = R_{TS}/R_T$
Pr	nombre de Prandtl
R	Darcy-Rayleigh normalisé
R_T	nombre de Rayleigh-Darcy
T	température adimensionnelle
u,w	vitesses adimensionnelles
x,z	système de coordonnées $(x',z')/H'$, *m*

Symboles Grecs

β_C	coefficient d'expansion solutal, *l/mol*
β_T	coefficient d'expansion thermique, *l/mol*
ε	porosité normalisée
λ	valeur propre
ν	viscosité cinématique du fluide
ρ	densité du fluide
Ψ	fonction de courant
ψ	perturbation de la fonction de Ψ
ϕ	perturbation de la concentration

Exposants et indices

$[\ ]^{-1}$	inverse d'une matrice
'	variable dimensionnelle
e	matrice élémentaire
C	état purement diffusif
0	état de référence

Références

[1] T. L. Bergaman and R. Srinivasan, Numerical Simulation of Soret-Induced Double Diffusion in an Initially Uniform Concentration Binary Liquid, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Volume 32, n^0 4, pp 679-687, 1989.

[2] M. Marcoux, M.C. Charrier-Mojtabi and A. Bergamon, Naissance de la thermogravitation dans un mélange binaire imprégnant un milieu poreux, *Entropie*, n^0 214, pp 31-36, 1998.

[3] G. Labrosse, Effet Soret et convection naturelle 2D d'un liquide binaire en cavité verticale allongée, *IV Colloque Interuniversitaire Franco-Quebecois* (Montréal, Canada,), pp 333-338, 1999.

[4] S.R. De Groot and P. Mazur, Non Equilibrium Thermodynamics, North Holland, 1969.

[5] M. Mamou, Convection thermosolutale dans des milieux poreux et fluides confinés, Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique de Montréal, Québec, Canada , 1998.

[6] F. Joly, P. Vasseur, G. Labrosse, Soret-Driven Thermosolutal Convection in a Vertical Enclosure, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, Volume 27, pp 755-764, 2000.

[7] D.A. Nield, The Thermohaline Rayleigh-Jeffreys problem, *J. Fluid Mechanics*, Volume 29, pp 553-560, 1967.