



**HAL**  
open science

# **Solution analytique du transfert de chaleur instationnaire dans un matériau hétérogène en contact imparfait soumis à une source de chaleur en mouvement**

Hamid Belghazi, Mohammed El Ganaoui, Jean-Claude Labbé

## ► To cite this version:

Hamid Belghazi, Mohammed El Ganaoui, Jean-Claude Labbé. Solution analytique du transfert de chaleur instationnaire dans un matériau hétérogène en contact imparfait soumis à une source de chaleur en mouvement. JITH 2007, Aug 2007, Albi, France. 5p. hal-00154421

**HAL Id: hal-00154421**

**<https://hal.science/hal-00154421>**

Submitted on 29 Aug 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# SOLUTION ANALYTIQUE DU TRANSFERT DE CHALEUR INSTATIONNAIRE DANS UN MATERIAU HETEROGENE EN CONTACT IMPARFAIT SOUMIS A UNE SOURCE DE CHALEUR EN MOUVEMENT

Hamid BELGHAZI\*, Mohamed EL GANAOUI, Jean-Claude LABBE

Université de Limoges, SPCTS-UMR 6638 CNRS, Faculté des Sciences et Techniques. 123  
Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex - France.

\* [hamid.belghazi@etu.unilim.fr](mailto:hamid.belghazi@etu.unilim.fr)

**Résumé :** Une étude analytique a été menée pour l'obtention d'une solution exacte du transfert instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait (dépôt/substrat), le dépôt hétérogène est soumis à un flux laser Gaussien en mouvement. La solution obtenue permet d'une part d'accéder à la distribution et l'évolution de la température dans le bicouche, et d'autre part de visualiser l'influence de la qualité du contact sur le saut de température à l'interface. La fabrication de pistes électriques en cuivre sur un substrat en alumine par balayage laser, est traitée à titre d'exemple d'application dans le domaine des traitements de surface. Ce modèle peut servir aussi à l'estimation de la Résistance Thermique de Contact (RTC).

**Mots clés:** analytique, instationnaire, conduction de chaleur, RTC, matériau bicouche.

## 1. INTRODUCTION

Malgré que la majorité des problèmes industriels relatifs aux transferts de chaleur sont résolus par des méthodes numériques, le besoin en matière de solutions exactes dans ce domaine ne cesse de grandir, et en particulier dans le cas des matériaux composites multicouches souvent rencontrés dans le domaine de traitements de surfaces (dépôt sur substrat). Dans cette étude on se focalise sur l'établissement d'une solution analytique de transmission de chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait, soumis à un flux laser continu Gaussien en mouvement. Parmi ces études trouvées en littérature, Adawi et al [1] ont obtenu par la transformée de Laplace une solution analytique 1D, en considérant le substrat comme semi-infini, le flux laser ponctuel et fixe; donc la vitesse du balayage, le profile Gaussien du faisceaux laser, ainsi que la RTC et les pertes convectives aux les bords n'ont été pas pris en compte, ce qui réduit la validité de ce modèle a des temps d'interaction laser-matière très brefs. H. Sheikh et al [2] ont traité ce même type de problème en utilisant les fonctions de Green. F. de Monte a extrait des solutions en 1D et 2D par la méthode de séparation des variables. Egalement en contact parfait [3, 4]. Sauf dans [5] ou l'étude a été faite sous de nombreuses restrictions (les mêmes diffusivités thermiques, cas stationnaire). D'autres solutions analytiques ont été données par H. Salt [6], N. Ozisik [7], Ozisik et Mikhailov [8], et par Jaeger et Carslaw [9].

## 2. PROBLEME PHYSIQUE ET FORMULATION

On s'intéresse au transfert de chaleur instationnaire dans un matériau bicouche en contact imparfait. Le milieu est irradié par un faisceau laser continu Gaussien ( $TEM_{00}$ ), animé d'une vitesse de balayage constante. En outre, dans le cas de couches minces sur un substrat,

ce modèle doit prendre en considération la transmission d'une portion de l'énergie incidente directement au substrat (figure 2). Ce modèle pourra servir à l'estimation du champ thermique dans le bicouche, pour les cas pratiques par exemple: la fabrication de pistes électriques conductrices en cuivre sur un substrat en alumine. Et aussi à l'estimation de la RTC par confrontation des résultats modèle/expérience. Le problème étudié est schématisé dans la figure 1. Sans perte de généralités et pour alléger les calculs, l'interface est située en  $y=0$ . On pose  $\theta_i = T_{amb} - T_i$ , avec  $i=1$  pour la couche supérieure et  $i=2$  pour la couche inférieure. Les matériaux sont considérés homogènes et isotopes, leurs propriétés thermophysiques constantes. les coefficients d'échanges convectifs sont constants, la représentation de la RTC reste uniforme et constante tout au long de l'interface.

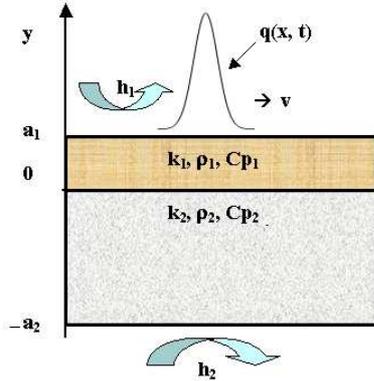


Figure 1: Schéma simplifié du problème.

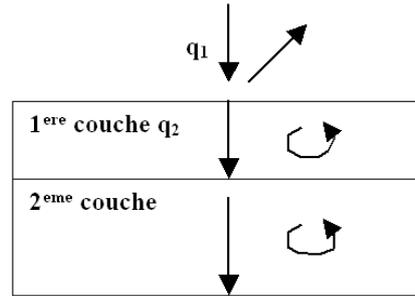


Figure 2: Transmission d'énergie laser aux matériau bicouche (dépôt de faible épaisseur sur un substrat).

Une portion du flux laser incident est réfléchiée,  $(R_1 \cdot q_1)$ , une autre proportion est absorbée par la première couche et convertie en chaleur,  $(A_1 \cdot q_1)$ , et le reste  $((1 - A_1 - R_1) \cdot q_1)$  est transmis à la deuxième couche, et qui à son tour suit le même processus dans la deuxième couche.

Le modèle mathématique du problème physique étudié, est donné en coordonnées cartésiennes comme suit: (avec  $i=1,2$  pour la couche 1 et 2).

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_i} \times \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + \frac{q_i}{k_i} \quad (1)$$

$$\text{avec} \quad q_1 = A_1 \cdot P \cdot \exp\left(-\frac{2}{r_0^2}(r_0 - vt)^2\right) \cdot \delta(y - a_1); \quad 0 = y = a_1 \quad \text{et} \quad p = \frac{2 \cdot P_0}{\pi \cdot r_0^2} \quad (2)$$

$$\text{et} \quad q_2 = A_2 \cdot (1 - \varepsilon_1) \cdot P \cdot \exp\left(-\frac{2}{r_0^2}(r_0 - vt)^2\right) \cdot \delta(y - 0) \quad \text{où} \quad -a_2 = y = 0 \quad (3)$$

- Les conditions aux limites et initiales s'écrivent :

$$\pm k_i \left( \frac{\partial \theta_i}{\partial y} \right)_{y=\pm a_i} + h_i \theta_i(y=\pm a_i, t) = 0 \quad \text{avec le signe (+) est valable pour } i=1, \text{ et (-) pour } i=2. \quad (4)$$

$$k_1 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right)_{y=0} = k_2 \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad \theta_2(y=0, t) - \theta_1(y=0, t) = TCR \times k_1 \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (5)$$

$$\theta_i(y, t=0) = T_{amb} - T_i(y, t=0) \quad (6)$$

### 3. EXTRACTION D'UNE SOLUTION ANALYTIQUE

La solution analytique obtenue par la méthode de séparation des variables, les équations ci-dessus sont résolus en deux étapes, la première consiste à résoudre les équations homogènes (en posant  $q_i=0$ ), et ainsi les valeurs propres sont aisément calculables, et par suite les fonctions propres. Les solutions homogènes dans les bicouche sont exprimées comme le

produit des fonctions à une seule variable la première dépendant de l'espace  $y$  et la deuxième du temps  $t$ . Les valeurs propres  $(\lambda_{i,n})$  sont les racines réelles positives autres que zéro, de l'équation suivante:

$$R_1(\lambda_1) + \left(\frac{k_1 \times \lambda_1}{k_2 \times \lambda_2}\right) \times R_2(\lambda_2) + (\lambda_1 \times k_1 \times TCR) = 0 \quad \text{avec} \quad R_i(\lambda_i) = \frac{k_i \lambda_i + h_i \tan(\lambda_i a_i)}{h_i - k_i \lambda_i \tan(\lambda_i a_i)} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (7)$$

les expressions de températures dans le bicouche:

$$\theta_{iH}(y, t) = D_i \sum_{n=1}^{\infty} C_n \times Y_{iad,n}(y) \times \exp(-\lambda_{i,n}^2 \times \alpha_i \times t), \quad \text{avec} \quad D_1 = 1 \quad \text{et} \quad D_2 = \left(\frac{k_1}{k_2}\right) \times \left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right) \quad (8)$$

les termes non-homogènes  $q_i$  peuvent être exprimés sous forme de combinaisons linéaires des fonctions propres, et par suite on trouve :

$$q_i = D_i \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_n(t) \times Y_{iad,n}(y) \quad (9)$$

$$\text{soit } S_1 \text{ et } S_2 \text{ tel que: } S_1 = \int_0^{a_1} k_2 \times q_1 \times Y_{1ad,n}(y) \times dy = \int_0^{a_1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_n(t) \times k_2 \times Y_{1ad,n}^2(y) \right) \times dy \quad (10)$$

$$S_2 = \int_{-a_2}^0 \left( \frac{k_1}{D_2} \times q_2 \times Y_{2ad,n}(y) \right) \times dy = \int_{-a_2}^0 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_n(t) \times k_2 \times Y_{1ad,n}^2(y) \right) \times dy \quad (11)$$

les coefficients  $N_n$  sont déterminés en utilisant la relation d'orthogonalité suivante :

$$N_n = k_2 \int_0^{a_1} Y_{1ad,n}(y)^2 dy + k_1 \int_{-a_2}^0 Y_{2ad,n}(y)^2 dy \quad (12)$$

$$\phi'_n(t) = \frac{1}{N_n} \left( \int_0^{a_1} k_2 \times q_1 \times Y_{1ad,n}(y) \times dy + \int_{-a_2}^0 \left( \frac{k_1}{D_2} \times q_2 \times Y_{2ad,n}(y) \right) \times dy \right) \quad (13)$$

$$\theta_i(y, t) = \theta_{iH}(y, t) + \frac{q_i}{k_i} = D_i \sum_{n=1}^{\infty} C_n \times \exp(-\lambda_{i,n}^2 \times \alpha_i \times t) \times Y_{iad,n}(y) + \frac{D_i \sum_{n=1}^{\infty} \phi'_n(t) \times Y_{iad,n}(y)}{k_i} \quad (14)$$

$$\text{pour simplifier on peut l'écrire sous la forme: } \theta_i(y, t) = D_i \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t) \times Y_{iad,n}(y) \quad (15)$$

où  $\phi_n(t)$  est déterminée à partir de la résolution de l'équation suivante:

$$\frac{d\phi_n(t)}{dt} + \frac{(\lambda_{1,n}^2 \alpha_1 + \lambda_{2,n}^2 \alpha_2)}{2} \phi_n(t) = \left( \frac{\alpha_1}{k_1} + \frac{\alpha_2}{k_2} \right) \phi'_n(t) \quad (16)$$

$$\phi_n(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{(\lambda_{1,n}^2 \alpha_1 + \lambda_{2,n}^2 \alpha_2)}{2}(t-\tau)\right) \cdot \left(\frac{\alpha_1}{k_1} + \frac{\alpha_2}{k_2}\right) \phi'_n(\tau) d\tau \quad (17)$$

$$\text{D'où les expressions finales de température dans le bicouches : } T_i(y, t) = T_{amb} - \theta_i(y, t) \quad (18)$$

## 4. APPLICATIONS

La comparaison de cette solution analytique 1D en dimensions finies avec celle obtenue numériquement dans les mêmes conditions (figure.3) permet de tester la validité de notre solution. Les deux résultats concordent, qualitativement et quantitativement. Les résultats de la figure 3, sont obtenus sous les conditions suivantes: Les matériaux choisis sont cuivre /alumine le faisceau laser est de type TEM<sub>00</sub> A=20%,  $h_l=20 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ,  $RTC=1.15 \times 10^6 \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$ ,  $P=30 \text{ W}$ ,  $r_0=1 \text{ mm}$ ,  $V=1 \text{ mm/s}$ .

$h_1$	$h_2$	$a_1$	$a_2$
$W.m^{-2}.^{\circ}C^{-1}$		M	
20	20	$100.10^{-6}$	$4.10^{-3}$

Table 1: conditions aux limites et épaisseurs du bicouche.

	$k$	$\rho$	$c_p$
	$W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$kg.m^{-3}$	$J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$
Cuivre (Cu)	386	8954	383
Alumine ( $Al_2O_3$ )	20	3900	850

Table 2: propriétés thermophysiques moyennes des matériaux utilisés

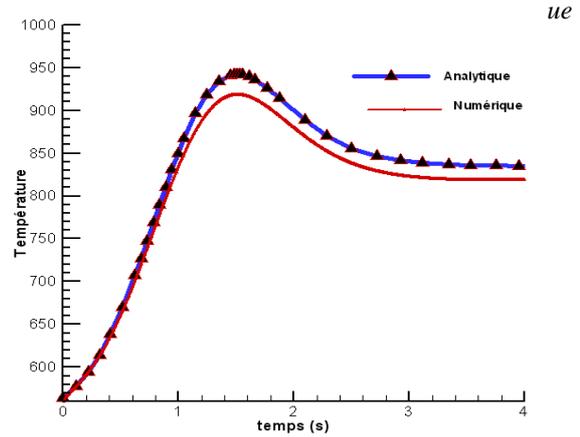


Figure 3: Comparaison des résultats analytiques et numériques (en un point) au centre de la Gaussienne, pour le couple cuivre/alumine:  $A_1=20\%$ ,  $h_1=20 W.m^{-2}.K^{-1}$ ,  $RTC=1,15 \times 10^{-6} m^2.K.W^{-1}$ ,  $P=30 W$ ,  $r_0=1 mm$ ,  $V=1m m.s^{-1}$ ,  $T_{init}=550^{\circ}C$ .

La figure 4 illustre l'évolution de la température d'un point de la surface supérieure du bicouche, pour différentes valeurs de la vitesse de balayage laser ( $v=1, 2.5$  et  $5 mm/s$ ). On remarque que plus la vitesse est importante plus le passage du faisceau laser est rapide donc le temps d'interaction laser-matière est court d'où la température maximale atteinte est moins importante. On peut remarquer aussi que les courbes sont décalées par rapport à l'axe des temps, les courbes de température sont amplifiées pour des vitesses faibles. Sur la figure 5 on peut remarquer que l'augmentation de la puissance laser a pour effet une translation de la courbe de température vers le haut (vers des températures élevées).

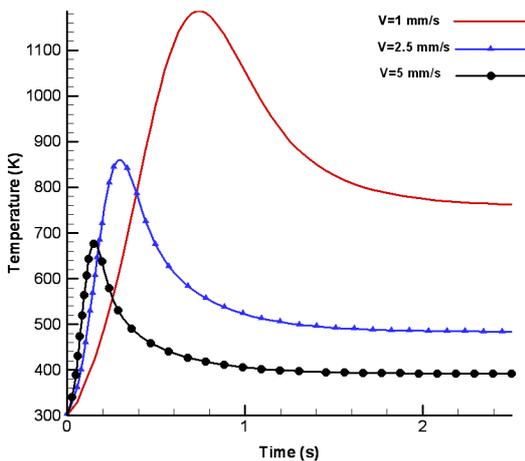


Figure 4: Évolution de la température du couple cuivre/alumine, au point  $T(y=a_1,t)$  pour différentes valeurs de la vitesse et sous les conditions suivantes:  $RTC=10^{-6} m^2.K.W^{-1}$ ,  $T_{init}=300^{\circ}C$ ,  $P_0=50w$ ,  $r_0=2.5mm$ ,  $A_1=0.2$ ,  $A_2=0$ .

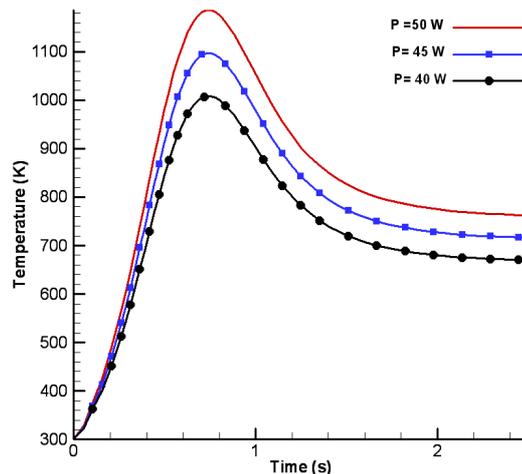


Figure 5: Évolution de la température du couple cuivre/alumine, au point  $T(y=a_1,t)$  pour différentes valeurs de la puissance du laser et sous es conditions suivantes:  $V= 1mm/s$ ,  $RTC=10^{-6} m^2.K.W^{-1}$ ,  $T_{init}=300^{\circ}C$ ,  $r_0=2.5mm$ ,  $A_1=0.2$ ,  $A_2=0$ .

## 5. CONCLUSION

Une solution analytique de conduction instationnaire de la chaleur dans un matériau bicouche en contact imparfait, a été élaborée en dimensions finis tout en prenant en considération une source de chaleur en mouvement, cette étude peut être aisément étendue à trois couches ou plus. Les résultats de cette étude, sont en bon accord avec ceux obtenus numériquement. Parmi les domaines d'applications, où ce modèle analytique peut servir, on cite, le traçage de piste électronique (en cuivre) sur un substrat (en alumine). En outre ce modèle analytique paramétré par la RTC, est très utile à l'estimation de la résistance thermique de contact (entre un splat de céramique sur un substrat métallique par exemple).

## NOMENCLATURE

$a_i$	épaisseur de la couche $i$ , m	$A_i$	coefficient d'absorption de la couche $i$
$h_i$	coefficient de transfert de la couche $i$ , $W.m^{-2}.K^{-1}$	RTC	Résistance Thermique de Contact, $m^2.K.W^{-1}$
$k_i$	conductivité thermique de la couche $i$ , $W.m^{-1}.K^{-1}$	$Y_{iad,n}$	fonctions propres adimensionnelles
$Cp_i$	capacité calorifique de la couche $i$ , $J.kg^{-1}.K^{-1}$	<i>symbols Grecques</i>	
$\theta_i$	$\theta_i = T_{amb} - T_i$ , K	$\rho_i$	masse volumique de la couche $i$ , $kg.m^{-3}$
$t$	temps, s	$\lambda_{i,n}$	$n^{ieme}$ valeur propre suivant $y$ , $m^{-1}$
$T_{amb}$	température ambiante, K	$\epsilon_i$	coefficient de transmission de la couche $i$
$T_{init}$	température ambiante, K	<i>indices</i>	
$p$	puissance du laser du flux laser, W	$i$	indice de la couche $i$
$r_0$	rayon de la Gaussienne à $1/e^2$ , m	$n$	nombre entier
$v$	vitesse de balayage laser, $m.s^{-1}$		

Remerciements : *Ecole Doctorale STS de l'Université de Limoges.*

## Références

- [1] M. K. El-Adawi and al, Laser heating of two –layer system with constant surface absorption : an exact solution, Int. J. Heat Mass Transfer Vol.38, pp 947-952, 1995.
- [2] A.Haji-Sheikh, J. V. Beck, Temperature solution in multi-dimensional multi-layer bodies, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.45, pp 1865-1877, 2002.
- [3] F. de Monte, Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A natural analytic approach, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 43, pp3607-3619, 2000.
- [4] F. de Monte, Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 46, pp1455-1469, 2003.
- [5] F. de Monte, Transverse eigenproblem of steady-state heat conduction for multi-dimensional two-layered slabs with automatic computation of eigenvalues, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 47 pp 191–201, 1983.
- [6] H. Salt, Transient conduction in a two-dimensional composite slab-1. , Int. J. Heat Mass Transfer Vol. 26, pp1611-1616, 1983.
- [7] M. Necati Ozisik Boundary Value Problem, Dover publications, INC., New york. 1989
- [8] M. N. Özisik, M. D. Mikhailov, unified analysis and solutions of heat and mass diffusion, second edition, A Wiley-Interscience.

- [9] H. S. Carslaw and J. C. Jeager, *Conduction of heat in solids*, second edition, Clarendon press Oxford, pp. 87 – 89, 1993.