



HAL
open science

Rapport de recherche sur le problème du plus court chemin contraint

Olivier Laval, Sophie Toulouse, Anass Nagih

► **To cite this version:**

Olivier Laval, Sophie Toulouse, Anass Nagih. Rapport de recherche sur le problème du plus court chemin contraint. 2006. hal-00153962

HAL Id: hal-00153962

<https://hal.science/hal-00153962>

Submitted on 18 Mar 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RAPPORT DE RECHERCHE LIPN

Le problème du plus court chemin contraint

Olivier Laval¹, Sophie Toulouse¹ et Anass Nagih²

¹ LIPN, Université de Paris-Nord
99 avenue Jean-Baptiste Clément 93430 Villetaneuse, France
{olivier.laval,sophie.toulouse}@lipn.univ-paris13.fr

² LITA, Université Paul Verlaine
Ile du Saulcy 57045 Metz Cedex 01, France
anass.nagih@univ-metz.fr

26 décembre 2006

Résumé. Cet article propose un tour d’horizon des méthodes approchées et exactes, de leur performance et de leur complexité théorique, pour différentes versions du problème de plus court chemin. L’étude proposée est faite dans l’optique d’améliorer la résolution d’un problème plus général de couverture dans le cadre d’un schéma de génération de colonnes, dont le plus court chemin apparaît comme le sous-problème.

Abstract This article provides an overview of the performance and the theoretical complexity of approximate and exact methods for various versions of the shortest path problem. The proposed study aims to improve the resolution of a more general covering problem within a column generation scheme in which the shortest path problem is the sub-problem.

1 Introduction

Un problème des plus courants en optimisation combinatoire est celui de la recherche de plus courts chemins dans un graphe. Ce problème se présente comme suit : étant donné un graphe et une fonction coût sur les arcs, le problème consiste à trouver le chemin le moins coûteux d’un sommet choisi à un autre. Il se résoud aisément grâce à de nombreux algorithmes polynomiaux (Bellman [Bel58], Dijkstra [Dij59], ...). Néanmoins, l’ajout de contraintes sur le chemin (essentiellement, des contraintes de type “sac-à-dos”) le rend plus difficile à résoudre. Ce rapport de recherche présente donc différents algorithmes exacts ou approchés pour résoudre le problème du Plus Court Chemin Contraint (noté PCCC par la suite). Ce travail se place dans le cadre plus général de résolution d’un problème de couverture de tâches par des véhicules qui doivent respecter certaines contraintes dont le PCCC est, dans une décomposition classique de type Dantzig Wolfe, le sous-problème. Aussi, les résultats proposés seront le plus souvent comparés dans le cadre du déroulement de tels schémas. Ce document est organisé comme suit : la deuxième section présentera le problème PCCC de manière très générale, avec ses différentes variantes. Plusieurs méthodes de réduction des instances, qui constituent une étape préliminaire à la résolution du problème, sont exposées dans la troisième section. La résolution exacte sera abordée dans la quatrième section. Enfin, puisque le problème est **NP**-difficile, la cinquième section portera sur sa résolution approchée.

2 Description du problème

2.1 Formalisation

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté où V est l'ensemble des sommets ($|V| = n$) et $A \subseteq V \times V$ l'ensemble des arcs ($|A| = m$) et soit \mathcal{R} un ensemble de ressources ($|\mathcal{R}| = R$). À chaque arc $(i, j) \in A$ sont associés un coût c_{ij} et un vecteur de consommation de ressource $(t_{ij}^r)_{r=1, \dots, R}$ positif ($\forall r = 1, \dots, R, t_{ij}^r \geq 0$). Le graphe ne doit pas comporter de cycle absorbant³.

Un chemin $P_{x \rightarrow y}$ entre deux sommets x et y est une séquence d'arcs :

$$P_{x \rightarrow y} = \bigcup_{i=1}^p \{(u_i, v_i)\} \text{ tel que } (u_i, v_i) \in A, u_{i+1} = v_i, u_1 = x \text{ et } v_p = y$$

La longueur de ce chemin est alors p . Un chemin $P_{x \rightarrow y}$ allant du sommet x au sommet y a un coût dont la formule est $C(P_{x \rightarrow y}) = \sum_{(u,v) \in P_{x \rightarrow y}} c_{uv}$.

Soient s et t deux sommets distincts privilégiés du graphe, appelés respectivement source et puits. Le problème du Plus Court Chemin Contraint (PCCC) consiste alors à trouver un chemin de coût minimal entre la source et le puits satisfaisant certaines contraintes de ressource (ces contraintes seront détaillées par la suite). Si l'ensemble \mathcal{R} des ressources est vide ($R = 0$), on est ramené au problème usuel de plus court chemin qui est polynomial ([Bel58], [Dij59]). En revanche, la considération d'une seule ressource rend déjà le problème d'optimisation **NP**-dur, et ce même lorsque les coûts et les consommations de ressource sont supposés être entiers positifs [GJ79] [Dro94]. Enfin, le problème consistant à décider seulement s'il existe ou non un chemin réalisable est **NP**-complet dès lors que l'on considère deux ressources ou plus.

2.2 Contraintes de ressource

Les contraintes de ressource s'expriment à l'aide d'un vecteur consommation de ressource T dépendant du chemin considéré dont chaque coordonnée représente une ressource du problème.

Deux types de contraintes de ressource sont usuellement considérés. Tout d'abord, les contraintes de ressource dites *finales*, où la somme sur tous les arcs du chemin de la source au puits des quantités de ressource consommées doit entrer dans une fenêtre définie au puits ; ensuite, les contraintes de ressource dites à *fenêtres de temps* où, à chaque sommet i , sont associées R fenêtres de ressource $[a_i^r, b_i^r]$, $r = 1, \dots, R$, réduisant l'intervalle des valeurs possibles pour la quantité de ressource r pouvant être utilisée avant d'atteindre le sommet i . Pour ce type de contrainte, il existe deux méthodes de calcul du vecteur consommation de ressource sur un chemin de la source à un sommet :

- sans attente permise :

$$\forall (P_{s \rightarrow j} = P_{s \rightarrow i} \cup (i, j)), T^r(P_{s \rightarrow j}) = T^r(P_{s \rightarrow i}) + t_{ij}^r$$

- avec attente :

$$\forall (P_{s \rightarrow j} = P_{s \rightarrow i} \cup (i, j)), T^r(P_{s \rightarrow j}) = \max\{a_j^r, T^r(P_{s \rightarrow i}) + t_{ij}^r\}$$

³ Un cycle absorbant est un cycle dont la somme des valuations des arcs est négative.

Un chemin de la source au puits est dit réalisable si, en chacun de ses sommets, le vecteur consommation de ressource sur le sous-chemin de s à ce sommet est dans la fenêtre de ressource de ce sommet ; formellement :

$$\begin{aligned} &\text{le chemin } P_{s \rightarrow t} \text{ est réalisable} \\ &ssi \forall j \in P_{s \rightarrow t}, \forall r = 1, \dots, R, a_j^r \leq T^r(P_{s \rightarrow j}) \leq b_j^r \end{aligned}$$

De cette inégalité découle deux propriétés générales :

– dans les deux méthodes (avec ou sans attente) :

$$\forall (i, j) \in A, \forall r = 1, \dots, R, a_i^r + t_{ij}^r \leq b_j^r$$

– dans la méthode sans attente permise :

$$\forall (i, j) \in A, \forall r = 1, \dots, R, b_i^r + t_{ij}^r \leq a_j^r$$

Les arcs ne vérifiant pas ces inégalités peuvent être directement supprimés car ils n'appartiennent à aucune solution réalisable du problème.

Le premier type de contrainte se ramène aisément au second en attribuant à tous les sommets du graphe et pour chaque ressource la fenêtre $[0, b_t^r]$, où b_t^r est le majorant de consommation définie au puits pour cette ressource. Toutes les instances considérées dans ce document seront donc, sans mention expresse du contraire, du second type.

2.3 Relation avec la génération de colonnes

Dans certaines modélisations de problèmes linéaires en nombres entiers dites à formulation « chemins », les variables du problème représentent des chemins du graphe. Le nombre de chemins dans un graphe étant potentiellement exponentiel, il en est de même du nombre de variables. L'utilisation d'un algorithme de résolution (simplexe par exemple) ne peut être envisagée pour ce modèle puisque ce dernier ne peut être explicité. En revanche, un problème avec un sous-ensemble de variables de taille raisonnable, appelé problème maître restreint (PMR), peut être résolu ; la résolution de ce dernier permet de calculer les coûts réduits associés à chaque arc du graphe, que l'on peut interpréter comme le coût d'opportunité à emprunter un arc donné (par le biais d'un chemin utilisant cet arc). La variable pouvant être ajoutée au PMR est alors trouvée par résolution du sous-problème qui consiste en la détermination d'un plus court chemin contraint pour le critère de coût réduit. Par exemple, dans le cas d'une minimisation, si le coût réduit total d'un chemin est négatif, il est potentiellement améliorant pour le problème maître et constitue ainsi un bon candidat à être intégré au PMR. Dans cette approche appelée *génération de colonnes*, l'optimalité est atteinte lorsqu'il n'existe plus de chemin améliorant (chemin de coût réduit négatif si l'on considère la résolution continue du problème maître). Notons que, pour la convergence, il n'est pas nécessaire de trouver un chemin optimal : un chemin améliorant suffit. De plus, à chaque itération, plusieurs chemins améliorants peuvent venir enrichir le PMR.

Le problème de plus court chemin contraint étant **NP**-difficile, le temps de résolution des sous-problèmes n'est pas maîtrisé ; d'où l'intérêt d'utiliser des algorithmes d'approximation, du moins en début de schéma, nous permettant de trouver rapidement des chemins améliorants (la résolution exacte demeurant inévitable en fin de schéma pour prouver l'optimalité).

3 Réduction du problème avant sa résolution

Quelques travaux précédant la résolution peuvent être effectués dans le but de réduire le graphe (suppression de sommets ou d'arcs, réduction de l'amplitude des fenêtres de temps). En

outre, ces traitements permettent parfois de détecter les instances non réalisables (*i.e.*, instances sur lesquelles tout chemin viole les contraintes de ressource) et d'exhiber un majorant et un minorant.

3.1 Réduction des fenêtres de temps

Les deux types de contraintes de ressource forment en fait une seule classe de problèmes où chaque sommet possède des fenêtres de temps. En chaque sommet, les bornes des fenêtres de temps pour chaque ressource doivent vérifier quelques relations dépendant de ses prédécesseurs et de ses successeurs. L'ensemble des prédécesseurs de i se notera $pred(i)$, l'ensemble des ses successeurs $succ(i)$. Ainsi, pour une ressource donnée r , le minorant d'une fenêtre du sommet j ne doit pas être plus petit que le minorant d'un prédécesseur i du sommet auquel le temps de trajet entre les sommets i et j est ajouté. Cela donne l'équation suivante :

$$a_j^r = \max\{a_j^r, \min_{i \in pred(j)} \{a_i^r + t_{ij}^r\}\}$$

Une équation similaire est valable pour les majorants :

$$b_j^r = \min\{b_j^r, \max_{i \in pred(j)} \{b_i^r + t_{ij}^r\}\}$$

Maintenant, en considérant les successeurs, le minorant d'un sommet j ne doit pas être plus petit que le minorant d'un successeur i du sommet auquel le temps de trajet de j à i est soustrait. Cela donne l'équation suivante :

$$a_j^r = \max\{a_j^r, \min_{i \in succ(j)} \{a_i^r - t_{ji}^r\}\}$$

Une nouvelle équation similaire est valable pour les majorants :

$$b_j^r = \min\{b_j^r, \max_{i \in succ(j)} \{b_i^r - t_{ji}^r\}\}$$

Si, pour un sommet i et une ressource r , la condition $a_i^r > b_i^r$ est remplie, alors le sommet i doit être supprimé du graphe (car il est inaccessible), ainsi que tous ses arcs incidents. De même, dans le cas où l'attente n'est pas permise, s'il existe un arc (i, j) tel que $b_i^r + t_{ij}^r < a_j^r$, alors l'arc (i, j) peut être supprimé.

L'algorithme 1 vérifie donc les équations précédentes pour chaque sommet. Dans le cas d'un graphe acyclique, il suffit de traiter les sommets dans l'ordre topologique pour les équations utilisant les prédécesseurs, puis dans l'ordre inverse pour les équations concernant les successeurs. La procédure recommence si et seulement si un sommet ou un arc peut être supprimé. La complexité de cette procédure est donc en $\mathcal{O}(n^3 R)$. Dans le cas cyclique, rien ne garantit qu'aucune fenêtre ne pourra encore changer après l'application de la procédure, et ce même si celle-ci n'induit pas de suppression de sommets ou d'arcs. La procédure précédente est donc répétée tant qu'une borne change ou qu'un sommet ou un arc est éliminé. Pour cet algorithme, la complexité en temps de la boucle *répéter* est en $\mathcal{O}(n^2 R)$. Une première approximation naïve du nombre de fois où cette boucle est effectuée dans le cas de fenêtres entières est $\mathcal{O}(n \max_{i \in V} \{b_i - a_i\})$ (réduction d'au moins une unité de la fenêtre pour un sommet à chaque itération). La complexité totale est donc $\mathcal{O}(n^3 R \max_{i \in V} \{b_i - a_i\})$.

Algorithme 1 : REDUCTION : Réduction des fenêtres de temps (graphe acyclique)

Entrées :

$G = (V, A)$ et $\forall i \in V, \forall r = 1, \dots, R, [a_i^r; b_i^r]$ la fenêtre de la ressource r pour le sommet i ; les sommets sont numérotés dans l'ordre topologique

Sorties :

$G' = (V', A')$ un sous-graphe partiel de G avec les fenêtres de ressource réduites

$V' \leftarrow V; A' \leftarrow A;$

répéter

recommencer \leftarrow *false*;

pour i allant de 1 à n **faire**

pour r allant de 1 à R **faire**

minp \leftarrow ∞ ; *maxp* \leftarrow 0;

pour tous les $j \in \text{pred}(i)$ **faire**

minp \leftarrow $\min\{\text{minp}, a_j^r + t_{ji}^r\}$;

maxp \leftarrow $\max\{\text{maxp}, b_j^r + t_{ji}^r\}$;

si $a_i^r < \text{minp}$ **alors** $a_i^r \leftarrow \text{minp}$;

si $b_i^r > \text{maxp}$ **alors** $b_i^r \leftarrow \text{maxp}$;

pour i allant de n à 1 **faire**

pour r allant de 1 à R **faire**

mins \leftarrow ∞ ; *maxs* \leftarrow 0;

pour tous les $j \in \text{succ}(i)$ **faire**

mins \leftarrow $\min\{\text{mins}, a_j^r - t_{ji}^r\}$;

maxs \leftarrow $\max\{\text{maxs}, b_j^r - t_{ji}^r\}$;

si $a_i^r < \text{mins}$ **alors** $a_i^r \leftarrow \text{mins}$;

si $b_i^r > \text{maxs}$ **alors** $b_i^r \leftarrow \text{maxs}$;

si attente non permise et $\exists (i, j) \in A', \exists r = 1, \dots, R, b_i^r + t_{ij}^r < a_j^r$ **alors**

$A' \leftarrow A' \setminus \{(i, j)\}$;

recommencer \leftarrow *true*;

si $\exists i \in V', \exists r = 1, \dots, R, b_i^r < a_i^r$ **alors**

$V' \leftarrow V' \setminus \{i\}$;

$A' \leftarrow A' \setminus \{(u, v) \in A', u = i \text{ ou } v = i\}$;

recommencer \leftarrow *true*;

jusqu'à *recommencer* = *false*;

3.2 Prétraitement pour contraintes de ressource finales

Le but de cette procédure de prétraitement, présentée dans [AAN83] et améliorée dans [DB03] est, comme précédemment, de réduire le graphe mais en plus de fournir un minorant et un majorant pour la valeur du problème. Elle exploite le fait suivant : trouver le plus court chemin non contraint entre deux sommets a la même complexité (et prend aussi le même temps de calcul) que trouver le plus court chemin entre un sommet et *tous* les autres (ou *tous les autres* et un sommet). Les plus courts chemins suivant chaque métrique (coût ou ressource) sont donc calculés entre la source et tous les sommets, ainsi qu'entre tous les sommets et le puits. Ensuite, en recombinaison ces plus courts chemins, certains peu coûteux mais non réalisables peuvent être détectés, ce qui permet d'améliorer le minorant ; inversement, des solutions réalisables peuvent être exhibées, ce qui fournit un majorant au problème. Enfin, ce traitement permet d'élaguer le graphe en déterminant des arcs et des sommets qui n'appartiennent à aucun chemin réalisable ou qui n'appartiennent à aucun chemin optimal.

Le déroulement de l'algorithme est le suivant :

- Tout d'abord, les chemins les moins coûteux de la source à tous les sommets sont calculés. Cela permet éventuellement de détecter des instances non réalisables (absence de chemin de la source au puits) ou d'exhiber un chemin optimal (un plus court chemin de la source au puits vérifie les contraintes de ressource) ou encore, d'exhiber un chemin non réalisable de coût minimum permettant de mettre à jour le minorant pour le problème.
- Ensuite, pour chaque ressource, les chemins les moins consommateurs de cette ressource allant de la source à chaque sommet sont calculés. Ils permettent une nouvelle fois de détecter la non faisabilité de l'instance (la valeur du plus court chemin sur une ressource dépasse le majorant du puits) ou de mettre à jour le majorant du problème par la considération d'un chemin réalisable pour toutes les ressources.
- Enfin, les chemins les moins coûteux et les moins consommateurs en chaque ressource allant de tout sommet au puits sont calculés.

D'une part, l'ensemble des chemins ainsi générés permet d'améliorer le majorant en recombinaison les plus courts chemins pour trouver des chemins réalisables de bon coût : le principe consiste tout simplement à considérer, pour chaque arc (i, j) du graphe, les chemins résultant d'une concaténation d'un plus court chemin de s à i , de l'arc (i, j) et d'un plus court chemin de j à t .

D'autre part, cela permet de tester l'accessibilité ou la pertinence (en incluant l'information apportée par le majorant) de chaque sommet et de chaque arc pour les supprimer si possible : pour un sommet i (*resp.*, pour un arc (i, j)), il suffit que, pour une métrique donnée, la valeur du plus court chemin de s à i additionné à la valeur du plus court chemin de i à t (*resp.*, à la valeur de l'arc (i, j) plus la valeur du plus court chemin de j à t) soit plus grande que le majorant en coût ou que le majorant présent sur le puits pour cette métrique pour que ce sommet (*resp.*, cet arc) soit supprimé. Cette procédure peut donc renvoyer un constat de non réalisabilité, un chemin optimal ou un minorant et un majorant, ce dernier pouvant être associé à un chemin. Une description de ce traitement est proposée par l'algorithme 2, où l'on suppose disposer de deux procédures $pcc(s \rightarrow, f)$ et $pcc(\rightarrow t, f)$ qui permettent de déterminer respectivement les plus courts chemins de s à tous les sommets et les plus courts chemins de tous les sommets à t , relativement à la métrique f .

Dans le cadre d'un schéma de génération de colonnes, ce traitement permet de détecter une instance non réalisable mais aussi d'éliminer des sommets et des arcs n'appartenant pas à une solution optimale. De plus, dès que la valeur du majorant devient négative, l'élimination de sommets et d'arcs non optimaux n'est plus nécessairement opportune si l'objectif est de conserver

plusieurs solutions intéressantes (de coût négatif). Il suffit alors de rendre stricts les tests sur le majorant dans les blocs d'élimination des sommets et des arcs.

4 Résolution exacte du PCCC

Nous rappelons que le problème PCCC est **NP**-dur, et ce même pour une seule ressource. Le problème de décision associé à l'existence d'un chemin de coût inférieur à une borne est lui-même **NP**-complet pour le cas de deux ressources ou plus. La résolution exacte de ce problème peut être menée par la programmation dynamique.

4.1 Cas général

La programmation dynamique pour ce problème permet d'élaborer un algorithme pseudo-polynomial⁴ de résolution exacte. La programmation dynamique se fonde sur le principe d'optimalité de Bellman : toute sous-séquence d'une séquence optimale est optimale. Cela est directement applicable au plus court chemin : si $P = \{(s, v_1), \dots, (v_q, t)\}$ est un plus court chemin de s à t , alors $P' = \{(s, v_1), \dots, (v_{i-1}, v_i)\}$ est nécessairement un plus court chemin de s à v_i pour $i \leq q$. Avec l'introduction des contraintes de ressource, on ne peut plus adapter directement ce principe pour propager les meilleurs chemins, puisqu'il faut nuancer la notion d'optimalité des sous-séquences par la considération d'un niveau de consommation de ressource : si $P = \{(s, v_1), \dots, (v_q, t)\}$ est un plus court chemin de s à t consommant (B^1, \dots, B^R) unités des R ressources, alors $P' = \{(s, v_1), \dots, (v_{i-1}, v_i)\}$ est un plus court chemin de s à v_i , parmi les chemins ne consommant pas plus de $(B^1 - T^1(P_{i \rightarrow t}), \dots, B^R - T^R(P_{i \rightarrow t}))$ unités des ressources. Pour gérer les niveaux de consommation de coût et de ressource des sous-séquences, la programmation dynamique utilise la notion d'étiquettes.

Définition 1 Étiquette

Une étiquette est un vecteur représentant un chemin et dont les coordonnées sont le coût et les consommations des différentes ressources.

$E = (E^0, E^1, \dots, E^R)$ où E^0 est le coût du chemin et E^r pour $r \in \{1, \dots, R\}$ est la consommation de la ressource r .

Remarque 1

A tout chemin réalisable entre s et tout sommet correspond une étiquette.

Les différents algorithmes de programmation dynamique utilisent ces étiquettes, mais il n'est pas forcément nécessaire de toutes les garder : conserver toutes les étiquettes reviendrait à énumérer tous les chemins du graphe. Pour éliminer les étiquettes inutiles, une relation de dominance est définie.

Définition 2 Relation de dominance :

Une étiquette E domine une étiquette E' ssi $\forall r \in \{0, \dots, R\}, E^r \leq E'^r$
 et $\exists r \in \{0, \dots, R\}, E^r < E'^r$
 $(E \succ E')$

Cette relation de dominance induit un ordre partiel appelé ordre de Pareto. Toutes les étiquettes n'étant pas forcément deux à deux comparables, cela permet de définir un ensemble de majorants pour cet ordre.

⁴ La complexité dépend polynomialement de la taille des instances ainsi que des données numériques.

Algorithme 2 : PRETRAITEMENT : Procédure de prétraitement

Entrées :

- $G = (V, A)$ graphe, $c : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonction de coût sur les arcs, $b \in \mathbb{N}^R$ vecteur des ressources disponibles au puits

Sorties : G' sous-graphe partiel de G ; U et L majorant et minorant du chemin le moins coûteux et vérifiant les contraintes

$V' \leftarrow V$; $A' \leftarrow A$; $L \leftarrow 0$;

$U \leftarrow U_0 = C_{max} \times (|V| - 1) + 1$ avec $C_{max} = \max_{(i,j) \in A} \{c_{ij}\}$;

répéter

$chg \leftarrow false$;

 // Calcul des plus courts chemins

$\{P_{s \rightarrow i}, i \in V'\} \leftarrow pcc(s \rightarrow, c)$;

$\{P'_{i \rightarrow t}, i \in V'\} \leftarrow pcc(\rightarrow t, c)$;

$\forall r = 1, \dots, R, \{P_{s \rightarrow i}^r, i \in V'\} \leftarrow pcc(s \rightarrow, t^r)$;

$\forall r = 1, \dots, R, \{P'_{i \rightarrow t}^r, i \in V'\} \leftarrow pcc(\rightarrow t, t^r)$;

 // Considération de $P_{s \rightarrow t}$

si $\nexists P_{s \rightarrow t}$ **alors** L'instance n'est pas réalisable; EXIT;

sinon si $\forall r = 1, \dots, R, T^r(P_{s \rightarrow t}) \leq b_t^r$ **alors**

$P_{s \rightarrow t}$ est une solution optimale; EXIT;

sinon $L \leftarrow C(P_{s \rightarrow t})$;

 // Considération de $P_{s \rightarrow t}^r$

si $\exists r, T^r(P_{s \rightarrow t}^r) > b_t^r$ **alors** L'instance n'est pas réalisable; EXIT;

si $\exists r, \forall q = 1, \dots, R, T^q(P_{s \rightarrow t}^r) \leq b_t^q$ et $C(P_{s \rightarrow t}^r) < U$ **alors** $U \leftarrow C(P_{s \rightarrow t}^r)$;

 // Recombinaison des chemins

pour tous les $(i, j) \in A'$ **faire**

si

$\exists P \in \{P_{s \rightarrow i}\} \cup \bigcup_{r=1}^R \{P_{s \rightarrow i}^r\}, \exists P' \in \{P'_{j \rightarrow t}\} \cup \bigcup_{r=1}^R \{P'_{j \rightarrow t}^r\}, \forall r = 1, \dots, R, T^r(P) + t_{ij}^r + T^r(P') \leq b_t^r$
 et $C(P) + c_{ij} + C(P') < U$ **alors** $U \leftarrow C(P) + c_{ij} + C(P')$;

 // Élimination de sommets

pour tous les $i \in V' \setminus \{s, t\}$ **faire**

si $\exists r = 1, \dots, R, T^r(P_{s \rightarrow i}^r) + T^r(P'_{i \rightarrow t}^r) > b_t^r$ **alors**

\perp Supprimer le sommet i et tous ses arcs incidents; $chg \leftarrow true$;

si $C(P_{s \rightarrow i}) + C(P'_{i \rightarrow t}) \geq U$ **alors**

\perp Supprimer le sommet i et tous ses arcs incidents; $chg \leftarrow true$;

 // Élimination d'arcs

pour tous les $(i, j) \in A'$ **faire**

si $\exists r = 1, \dots, R, T^r(P_{s \rightarrow i}^r) + t_{ij}^r + T^r(P'_{j \rightarrow t}^r) > b_t^r$ **alors**

\perp Supprimer l'arc (i, j) ; $chg \leftarrow true$;

sinon si $C(P_{s \rightarrow i}) + c_{ij} + C(P'_{j \rightarrow t}) \geq U$ **alors**

\perp Supprimer l'arc (i, j) ; $chg \leftarrow true$;

jusqu'à $chg = false$;

Retourner les bornes L et U ainsi que le chemin correspondant à la borne U ;

Définition 3 *Élément Pareto-optimal ou non dominé :*
 E est Pareto-optimal ssi $\nexists E', E' \succ E$

Définition 4 *Ensemble Pareto-optimal :*
Un ensemble Pareto-optimal est un ensemble d'éléments non dominés.

$$Pareto = \{E \mid \nexists E', E' \succ E\}$$

Cette relation de dominance permet de ne générer que les chemins Pareto-optimaux. Pour $k \in \mathbb{N}$, la conservation de toutes les étiquettes non dominées par k autres permet de s'assurer de trouver les k meilleures solutions et permet ainsi, dans notre schéma de génération de colonnes, d'insérer plusieurs colonnes lors d'une même itération.

Deux types d'algorithmes de programmation dynamique existent : algorithmes à correction d'étiquettes ([DPS83]) et algorithmes à fixation d'étiquettes ([DS88]).

Algorithme à correction d'étiquettes [DPS83]

Cet algorithme se nomme ainsi car, à chaque itération, il va essayer d'améliorer les étiquettes déjà existantes. En effet, une liste de sommets sur lesquels il existe des étiquettes non encore traitées est maintenue. À chaque étape, un sommet de cette liste est choisi et les étiquettes de ce sommet sont propagées aux successeurs de ce sommet. Pour chacune des étiquettes ainsi créées, un test de dominance est effectué pour éliminer les étiquettes dominées ou déjà obtenues. Si une nouvelle étiquette apparaît, le sommet sur lequel cette étiquette est présente est ajouté à la liste des sommets à traiter.

Algorithme 3 : CORRECTION : Algorithme à correction d'étiquettes

Entrées :

- $G = (V, A)$: graphe avec R contraintes de ressource
- $Pareto(\mathcal{E})$ renvoie l'ensemble des étiquettes non dominés de \mathcal{E}

Sorties : Chemin contraint de coût optimal

// $ETIQ(i)$ est l'ensemble des étiquettes du sommet i , les étiquettes étant des vecteurs de taille $(1 + R)$

pour tous les $i \in V$ faire

| $ETIQ(i) \leftarrow \emptyset$;

$LIST \leftarrow \{s\}$;

$ETIQ(s) \leftarrow \{0\}$

tant que $LIST \neq \emptyset$ faire

| Choisir $i \in LIST$; $LIST \leftarrow LIST \setminus \{i\}$;

| **pour tous les $j \in succ(i)$ faire**

| **pour tous les $E \in ETIQ(i)$ faire**

| **si $\forall r \in \{1, \dots, R\}, E^r + t_{ij}^r \leq b_j^r$ alors**

| $E' \leftarrow (E^0 + c_{ij}, E^r + t_{ij}^r, \forall r \in \{1, \dots, R\})$;

| $ETIQ(j) \leftarrow Pareto(ETIQ(j) \cup \{E'\})$;

| **si $E' \in ETIQ(j)$ alors $LIST \leftarrow LIST \cup \{j\}$;**

| Retourner le chemin ayant le plus petit coût en t ;

Algorithme à fixation d'étiquettes [DPS83]

Cet algorithme se nomme ainsi car à chaque itération, il va fixer une étiquette qui ne pourra plus être modifiée. En effet, une liste d'étiquettes non encore traitées est maintenue. À chaque étape, une étiquette (une des non dominées de la liste) est choisie pour être propagée. Les nouvelles étiquettes créées, si elles ne sont pas dominées sur leur sommet, sont rajoutées à la liste.

Algorithme 4 : FIXATION : Algorithme à fixation d'étiquettes

Entrées :

- $G = (V, A)$: graphe avec R contraintes de ressource
- $Pareto(\mathcal{E})$ renvoie l'ensemble des étiquettes non dominées de \mathcal{E}
- $Sommet(E)$ renvoie le sommet d'étiquette E
- $min_ordre_lex(\mathcal{E})$ renvoie un élément de l'ensemble \mathcal{E} minimum pour l'ordre lexicographique

Sorties : Chemin contraint de coût optimal

```
// Les étiquettes sont des vecteurs de taille  $(1 + R)$ .
//  $ETIQ(i)$  est l'ensemble des étiquettes du sommet  $i$ .
//  $DEF\_ETIQ(i)$  est l'ensemble des étiquettes définitives du sommet  $i$ .
pour tous les  $i \in V$  faire  $ETIQ(i) \leftarrow \emptyset$ ;  $DEF\_ETIQ(i) \leftarrow \emptyset$ ;
 $ETIQ(s) \leftarrow \{(0, \dots, 0)\}$ 
tant que  $\bigcup_{i \in V} (ETIQ(i) \setminus DEF\_ETIQ(i)) \neq \emptyset$  faire
     $E \leftarrow min\_ordre\_lex(\bigcup_{i \in V} (ETIQ(i) \setminus DEF\_ETIQ(i)))$ ;
     $i \leftarrow sommet(E)$ ;
    pour tous les  $j \in succ(i)$  faire
        si  $\forall \ell \in \{1, \dots, R\}, E^\ell + t_{ij}^\ell \leq b_j^\ell$  alors
             $E' \leftarrow (E^0 + c_{ij}, E^1 + t_{ij}^1, \dots, E^R + t_{ij}^R)$ ;
             $ETIQ(j) \leftarrow Pareto(ETIQ(j) \cup \{E'\})$ ;
         $DEF\_ETIQ(i) \leftarrow DEF\_ETIQ(i) \cup \{E\}$ ;
Retourner le chemin ayant le plus petit coût en  $t$ ;
```

4.2 Cas d'un graphe acyclique

Dans le cas d'un graphe acyclique, un ordre topologique sur les sommets peut être calculé. L'ensemble des sommets peut alors être numéroté de 1 à n de sorte que le sommet 1 soit la source, le sommet n le puits et que les sommets de tout arc (i, j) vérifie la relation $i < j$. Cet algorithme de programmation dynamique pour les graphes acycliques va appliquer l'algorithme à correction d'étiquettes vu précédemment en parcourant les sommets dans l'ordre topologique. Ainsi, lors du traitement d'un sommet, tous les sommets qui le précèdent dans l'ordre topologique ont leurs étiquettes définitives. Le calcul des étiquettes de ce sommet ne se fait donc qu'une seule fois.

Etude de complexité

Pour calculer la complexité en espace, il suffit de calculer le nombre maximum d'étiquettes que peut générer cet algorithme. En supposant que chaque sommet est relié à tous les sommets le

Algorithme 5 : ACYCLIQUE : Algorithme pour les graphes acycliques

Entrées :

- $G = (V, A)$: graphe acyclique avec R contraintes de ressource, $V = \{1 \dots n\}$
- $Pareto(\mathcal{E})$ renvoie l'ensemble des étiquettes non dominés de \mathcal{E}

Sorties : Chemin contraint de coût optimal

// $ETIQ(i)$ est l'ensemble des étiquettes du sommet i , les étiquettes sont des vecteurs de taille $1 + R$

$ETIQ(1) \leftarrow \{(0, \dots, 0)\};$

pour tous les i allant de 2 à n faire

$ETIQ(i) \leftarrow \emptyset;$

pour tous les $j \in pred(i)$ faire

pour tous les $E \in ETIQ(j)$ faire

si $\forall \ell \in \{1, \dots, R\}, E^\ell + t_{ji}^\ell \leq b_j^\ell$ alors

$E' \leftarrow (E^0 + c_{ij}, E^1 + t_{ij}^1, \dots, E^R + t_{ij}^R);$

$ETIQ(i) \leftarrow ETIQ(i) \cup \{E'\};$

$ETIQ(i) \leftarrow Pareto(ETIQ(i));$

Retourner le chemin ayant le plus petit coût au sommet n ;

précédant dans l'ordre topologique, le nombre maximum d'étiquettes pour le sommet i (N_i) est égal au nombre de toutes les étiquettes des sommets de plus petit indice ; la source n'ayant qu'une seule étiquette (nulle) :

$$N_1 = 1 \text{ et } N_i = \sum_{j=1}^{i-1} N_j, \quad i > 1$$

soit, $N_1 = 1 \text{ et } N_i = 2^{i-2}, \quad i > 1$

Pour trouver le nombre d'étiquettes total, il suffit de faire la somme sur tous les sommets :

$$\sum_{i=1}^n N_i = 1 + \sum_{i=2}^n 2^{i-2} = 2^{n-1} = N_{n+1}$$

Sachant que chaque étiquette est un vecteur de taille $1 + R$, la complexité en espace est donc en $\mathcal{O}(R e^n)$.

La complexité en temps de l'algorithme précédent se calcule en prenant le cas du sommet 2 à part car il n'y a qu'une seule étiquette créée et donc pas de dominance (i itère les sommets, j les prédécesseurs, k les étiquettes, ℓ et m sont deux itérateurs pour faire les comparaisons deux

à deux lors de la dominance) :

$$\begin{aligned}
R + \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} N_j R + C_{N_i}^2 R \right) &= R + N_2 R + C_{N_2}^2 R + R \sum_{i=3}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} N_j + C_{N_i}^2 \right) \\
\text{en sachant que } N_1 = 1, N_2 = 1 \text{ et } N_j = 2^{j-2}, j \leq 2, \text{ on obtient :} & \\
&= 2R + R \sum_{i=3}^n \left(N_i + \frac{N_i (N_i - 1)}{2} \right) \\
&= 2R + R \sum_{i=3}^n \left(\frac{N_i^2}{2} + \frac{N_i}{2} \right) \\
&= 2R + R \sum_{i=3}^n (2^{2i-5} + 2^{i-3}) \\
&= R \left(2 + \frac{2 \cdot 4^{n-2}}{3} - \frac{2}{3} + 2^{n-2} - 1 \right) \\
&= R \left(\frac{4^n}{24} + \frac{2^n}{4} + \frac{1}{3} \right) \\
R + \sum_{i=3}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{N_j} R + \sum_{\ell=1}^{N_i-1} \sum_{m=\ell+1}^{N_i} R \right) &= \mathcal{O}(R e^n)
\end{aligned}$$

L'algorithme de programmation dynamique proposé pour les graphes acycliques n'est pas polynomial. Les algorithmes pour les graphes généraux ne le sont a fortiori pas non plus. Au vu de ces résultats de complexité, l'élagage du graphe a priori en supprimant des sommets ou des arcs est primordial pour réduire le nombre de chemins possibles ; de même, diminuer l'amplitude des fenêtres de temps et trouver un bon majorant permet aussi de diminuer le nombre d'étiquettes calculées.

4.3 k Plus Courts Chemins

Des algorithmes polynomiaux exacts ont également été développés pour déterminer, non plus un plus court chemin, mais les k plus courts chemins de s à t (ou de s à tout autre sommet). Le meilleur algorithme connu à ce jour est celui de Eppstein, [Epp98], de complexité $\mathcal{O}(m + n \log(n) + k)$. Il consiste à fabriquer un tas des chemins du graphe stockés sous forme implicite et trié selon un certain critère. L'explicitation d'un chemin du tas se fait ensuite en $\mathcal{O}(p)$ où p est la longueur du chemin à énumérer.

Dans le cas du PCCC, cet algorithme peut calculer les consommations de ressource s'additionnant le long de tous les chemins lors de la construction du tas avec une complexité d'ordre $\mathcal{O}(m + Rn \log(n))$. La récupération de la valeur d'une consommations se fait en temps constant. Ainsi, il est possible de tester la réalisabilité d'un chemin en temps $\mathcal{O}(R)$.

Pour résoudre le problème par cet algorithme, il faudrait générer le tas de tous les chemins du graphe selon le critère de coût initial, puis dépiler les chemins (dont le nombre total est exponentiel) jusqu'à trouver un chemin réalisable, le premier chemin trouvé étant le chemin optimal. Une telle procédure, de complexité au pire des cas d'ordre exponentiel en temps, pourrait néanmoins constituer une alternative à la résolution exacte par programmation dynamique.

5 Résolution approchée du PCCC

Le problème du PCCC étant NP-difficile, la recherche s'est dirigée vers la résolution approchée du problème. Quelques heuristiques existent : agrégation de contraintes de ressource

[NS05], recherche de solutions ε -réalisable [ABS02]. Cette section présentera un schéma d'approximation pour le cas d'une ressource finale puis une généralisation de ce schéma dans le cas de plusieurs ressources.

5.1 Schéma d'approximation totalement polynomial

Un FPTAS (*Fully Polynomial Time Approximation Scheme* ou schéma d'approximation totalement polynomial en temps) a tout d'abord été présenté par Hassin [Has92] et ensuite amélioré par différents auteurs [Phi93,LR01,ESZ02]. Ce FPTAS se base sur la programmation dynamique avec la technique *d'échelonnage et d'arrondis* pour trouver une approximation de la solution. Ce FPTAS est utilisable dans le cas de graphes acycliques, avec une seule contrainte de ressource finale. Un ordre topologique sur les sommets est calculé ; l'ensemble des sommets est donc dorénavant numéroté de 1 à n sachant que le sommet 1 est la source, le sommet n le puits et tout arc (i, j) vérifie la relation $i < j$.

Schéma initial La procédure de programmation dynamique sous-jacente est basée sur le coût et non sur la ressource, comme c'est le cas habituellement : on cherche à déterminer pour $c = 1, 2, \dots, g_j(c)$ la plus petite consommation de ressource des chemins allant de 1 à j en au plus c unités de coût ; la recherche porte alors sur $g_n(c)$, c étant optimal dès lors que $g_n(c) \leq b_n$ (i.e., la valeur optimale est le plus petit c pour lequel la consommation de ressource est inférieure à la borne du puits). L'utilisation de cette procédure induit donc que les coûts sur les arcs sont des entiers strictement positifs.

Algorithme 6 : EXACT : Programmation dynamique basée sur le coût

Entrées : Un graphe G acyclique

Sorties : Un chemin contraint de coût optimal (OPT)

```

 $c \leftarrow 0$ ;
 $g_1(c) \leftarrow 0$ ;
pour tous les  $j \in \{2, \dots, n\}$  faire  $g_j(c) \leftarrow \infty$ ;
tant que  $g_n(c) > b_n$  faire
   $c \leftarrow c + 1$ ;
  pour tous les  $j \in \{2, \dots, n\}$  faire
     $g_j(c) \leftarrow g_j(c - 1)$ ;
    pour tous les  $i \mid (i, j) \in A$  faire
      si  $c_{ij} \leq c$  alors  $g_j(c) \leftarrow \min \{g_j(c), g_i(c - c_{ij}) + t_{ij}\}$ ;

```

Retourner le chemin de coût c correspondant à la consommation de ressource $g_n(c)$

La complexité de l'algorithme EXACT est $\mathcal{O}(m \cdot OPT)$ avec $n \ll m$. Il s'agit donc d'un algorithme pseudopolynomial, i.e., dont la complexité est polynomiale en la taille de l'instance prise au sens du nombre d'éléments de la structure à coder, mais exponentielle en le logarithme de ses données numériques.

Une manière usuelle de se ramener à un ordre polynomial de complexité consiste à diminuer considérablement l'ordre de grandeur des données numériques ; c'est la technique *d'échelonnage et d'arrondis*. Bien sûr, la polynomialité de l'algorithme appliqué à l'instance transformée se gagne au prix de l'optimalité : les solutions obtenues ne sont plus optimales, mais seulement approchées, pour l'instance initiale.

Pour le problème qui nous concerne, on utilise l'algorithme SCALING qui, étant donné une borne $B \in \mathbb{N}$ et un rationnel $\delta \in]0, n]$, remplace chaque coût c_{ij} par le coût $\left\lfloor \frac{c_{ij}(n-1)}{\delta B} \right\rfloor$.

Algorithme 7 : SCALING : Procédure d'échelonnage et d'arrondis

Entrées : $I = (G = (V, A), c : A \rightarrow \mathbb{N})$ graphe arc-valué, $B \in \mathbb{N}$, $\delta \in]0, n]$

Sorties : $\tilde{I}(B, \delta)$ graphe arc-valué

$\tilde{V} \leftarrow V$;

$\tilde{A} \leftarrow \emptyset$;

pour tous les $(i, j) \in A$ **faire**

si $c_{ij} \leq B$ **alors**

 $\tilde{c}_{ij} \leftarrow \left\lfloor \frac{c_{ij}(n-1)}{\delta B} \right\rfloor$;
 $\tilde{A} \leftarrow \tilde{A} \cup (i, j)$;

La complexité de la procédure SCALING est en $\mathcal{O}\left(m \log\left(\frac{n}{\delta}\right)\right)$ (pour chaque arc, une recherche dichotomique dans l'espace $[0, \frac{n}{\delta}]$). De plus, la procédure EXACT appliquée à l'instance $\tilde{I}(B, \delta)$ nécessiterait un temps $\mathcal{O}(m \widetilde{OPT})$, où \widetilde{OPT} désigne la valeur optimale sur $\tilde{I}(B, \delta)$. Or, les valeurs de toute solution $P_{s \rightarrow t}$ sur les instances I et $\tilde{I}(B, \delta)$ sont liées par les relations suivantes :

$$C(P_{s \rightarrow t}) \leq \frac{B\delta}{n-1} \tilde{C}(P_{s \rightarrow t}) + B\delta \quad \tilde{C}(P_{s \rightarrow t}) \leq \frac{n-1}{B\delta} C(P_{s \rightarrow t})$$

En particulier, si les chemins $\tilde{P}_{s \rightarrow t}$ et $P_{s \rightarrow t}^*$ sont respectivement optimaux pour les instances $\tilde{I}(B, \delta)$ et I , alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{OPT} &\leq \tilde{C}(P_{s \rightarrow t}^*) \leq \frac{n-1}{B\delta} OPT \\ C(\tilde{P}_{s \rightarrow t}) &\leq \frac{B\delta}{n-1} \widetilde{OPT} + B\delta \leq OPT + B\delta \end{aligned}$$

On déduit de ces relations : d'une part, si OPT est à rapport polynomial ρ de B (i.e., $OPT \leq \rho B$ où ρ est borné par un polynôme en n), alors le déroulement de l'algorithme EXACT sur $\tilde{I}(B, \delta)$ devient polynomial; d'autre part, si B est un minorant de OPT (i.e., $B \leq OPT$), la solution renvoyée est $(1 + \delta)$ -approchée pour le problème initial. Il revient donc à déterminer en temps polynomial une borne B vérifiant $B \leq OPT \leq \rho B$.

La détermination de B s'effectue par recherche dichotomique dans l'intervalle $[LB, UB]$, où LB et UB désignent respectivement un minorant et un majorant de OPT (par exemple, considérer $LB = 1$ et $UB = (n-1) \times \max_{(i,j) \in A} \{c_{ij}\}$). Cette recherche est elle-même fondée sur la procédure TEST qui, pour une instance I et une borne B données, renvoie :

$$TEST(B, \delta) = \begin{cases} OUI & \text{si } OPT \geq B \\ NON & \text{si } OPT < (1 + \delta)B \end{cases}$$

Une mise en œuvre de cette procédure consiste à appliquer la programmation dynamique EXACT sur l'instance $\tilde{I}(B, \delta)$, en limitant le coût maximum à tester à $\frac{n-1}{\delta}$.

Algorithme 8 : TEST : Procédure de test approchée

Entrées : I instance, B borne sur le coût objectif, $\delta \in]0, n]$ erreur

Sorties : OUI si $OPT \geq B$ ou chemin $P_{s \rightarrow t}$ de valeur $C(P_{s \rightarrow t}) < (1 + \delta)B$

$\tilde{I}(B, \delta) \leftarrow \text{SCALING}(I, B, \delta)$;

$\tilde{B} \leftarrow \left\lfloor \frac{n-1}{\delta} \right\rfloor$;

pour tous les c de 1 à \tilde{B} **faire** $g_s(c) \leftarrow 0$;

pour tous les $j \in \{2, \dots, n\}$ **faire** $g_j(0) \leftarrow \infty$;

pour c de 1 à \tilde{B} **faire**

pour tous les $j \in \{2, \dots, n\}$ **faire**

$g_j(c) \leftarrow g_j(c-1)$;

pour tous les $i/(i, j) \in A$ **faire**

si $\tilde{c}_{ij} \leq c$ **alors** $g_j(c) \leftarrow \min \{g_j(c), g_i(c - \tilde{c}_{ij}) + t_{ij}\}$;

si $g_n(c) \leq b_n$ **alors** Retourner NON et le chemin trouvé;

Retourner OUI

La complexité de la procédure TEST est dominée par l'étape de programmation dynamique, qui s'effectue en temps $\mathcal{O}\left(\frac{m n}{\delta}\right)$. Lorsque la procédure TEST répond NON, le chemin renvoyé de valeur au plus $\left(\frac{n-1}{\delta}\right)$ dans l'instance $\tilde{I}(B, \delta)$, est de valeur au plus $B(1 + \delta)$ dans le graphe initial. Si, en revanche, elle répond OUI, c'est que tout chemin réalisable est de valeur au moins $\frac{n-1}{\delta} + 1$ sur $\tilde{I}(B, \delta)$, et donc, de valeur au moins B sur I . Autrement dit, la décision exacte sur \tilde{I} se transforme en décision δ -approchée sur I .

$$\tilde{I} \begin{cases} \text{OUI} \Leftrightarrow \widetilde{OPT} > \tilde{B} \\ \text{NON} \Leftrightarrow \widetilde{OPT} \leq \tilde{B} \end{cases} \Rightarrow I \begin{cases} OPT > B \\ OPT \leq (1 + \delta)B \end{cases}$$

La recherche dichotomique DICH0 consiste alors, partant d'un intervalle initial $[LB, UB]$, à appeler itérativement la procédure TEST, jusqu'à obtenir un encadrement suffisamment fin de la valeur de OPT ($UB < \rho LB$). Si l'on pose $f(LB, UB) = \delta \in]0, n]$ et $g(LB, UB, \delta) = \sqrt{LB \times UB}$, la complexité de la procédure DICH0 est en

$$\mathcal{O}\left(\log\left(\frac{\log(UB/LB)}{\log(\rho)}\right)\left(\frac{m n}{\delta} + \log(\log(UB/LB))\right)\right)$$

où $\mathcal{O}\left(\log\left(\frac{\log(UB/LB)}{\log(\rho)}\right)\right)$ estime le nombre de tests nécessaires (recherche dichotomique entre LB et UB dans l'espace logarithmique) et $\mathcal{O}(\log \log(UB/LB))$ le temps de calcul d'une valeur approchée (mais suffisante) de $g(LB, UB, \delta)$. Cette valeur approchée est trouvée en cherchant le premier indice i tel que $2^{2^i} > \frac{UB}{LB}$; on prend alors $g(LB, UB, \delta) = LB 2^{2^{i-2}}$.

Le schéma d'approximation totalement polynomial peut maintenant être énoncé. Pour une instance I et une erreur $\varepsilon \in]0, 1[$ données, le schéma se décompose en trois étapes :

- Tout d'abord, il calcule un minorant LB et un majorant UB de la valeur du problème.
- Ensuite, il raffine à l'aide de DICH0 l'encadrement de l'optimum jusqu'à obtenir $LB \leq OPT \leq UB \leq \rho LB$, $\rho \in \mathbb{R}$
- Enfin, il détermine le chemin optimal dans l'instance $\tilde{I}(LB, \varepsilon)$ grâce à EXACT.

Algorithme 9 : DICH0 : Recherche de la borne B

Entrées : LB et UB bornes inférieure et supérieure de OPT , ρ paramètre

Sorties : Une borne LB telle que $LB \leq OPT \leq \rho LB$

tant que $UB > \rho LB$ **faire**

$\delta \leftarrow f(LB, UB)$;
 $B \leftarrow g(LB, UB, \delta)$;
 si $TEST(B, \delta)$ **répond OUI** **alors** $LB \leftarrow B$;
 sinon $UB \leftarrow B(1 + \delta)$;

Algorithme 10 : SCHEMA : Schéma d'approximation totalement polynomial

Entrées : ε l'erreur d'approximation, ρ paramètre

Sorties : Un plus court chemin contraint $(1 + \varepsilon)$ -approché

(1) Déterminer LB et UB bornes inférieure et supérieure de OPT ;

(2) $LB \leftarrow DICH0(LB, UB, \rho)$;

(3) $P_{s \rightarrow t} \leftarrow EXACT(\tilde{I}(LB, \varepsilon))$;

La complexité des étapes (2) et (3) de cet algorithme est donc de

$$\mathcal{O}\left(\log\left(\frac{\log(UB/LB)}{\log(\rho)}\right)\left(\frac{m n}{\delta} + \log\log\left(\frac{UB}{LB}\right)\right)\right) + \mathcal{O}\left(m\left(\rho\frac{n}{\varepsilon}\right)\right)$$

Hassin [Has92] utilise les paramètres constants $\delta = \varepsilon$ et $\rho = 2$ pour la procédure de réduction de l'intervalle $[LB, UB]$; il initialise par ailleurs les bornes LB et UB respectivement à 1 et $(n - 1)C_{max}$. La complexité finale du schéma qu'il propose est ainsi d'ordre :

$$\mathcal{O}\left(\log\log\left(\frac{UB}{LB}\right)\left(\frac{m n}{\varepsilon} + \log\log\left(\frac{UB}{LB}\right)\right)\right)$$

qui est bien polynomiale en $(n, m, \log(C_{max}), 1/\varepsilon)$.

Améliorations Lorenz et Raz [LR01] ont proposé un algorithme polynomial pour trouver des bornes inférieure et supérieure dont le rapport est n . En considérant le graphe réduit $G_i = (V, A_i)$ où A_i est l'ensemble des arcs dont le coût est parmi les i plus faibles, il suffit de trouver le i tel que G_i admet un chemin réalisable en consommation de ressource et G_{i-1} n'en admet pas. La borne inférieure est donc le plus grand coût, noté c_{LR^+} , sur G_i (tout chemin réalisable emprunte au moins un arc de coût c_{LR^+} , sinon il existe un chemin réalisable sur G_{i-1}) et la borne supérieure est $n c_{LR^+}$ (le plus court chemin en consommation de ressource sur G_i est réalisable, de valeur au plus $n c_{LR^+}$).

Cette procédure est en $\mathcal{O}(n \log^2(n) + m \log(n))$ (en simplifiant avec $\mathcal{O}(\log m) = \mathcal{O}(\log n)$). De plus, les auteurs mettent en œuvre le schéma avec la valeur $f(LB, UB) = \delta = 1$ et $\rho = 2$. La complexité totale obtenue est de :

$$\mathcal{O}\left(m n \log\log(n) + \frac{m n}{\varepsilon}\right)$$

Ergun et al., [ESZ02] exploitent plus finement la qualité de ces bornes initiales pour améliorer encore la procédure de recherche dichotomique, en rendant dynamique la mise à jour des paramètres

Algorithme 11 : BORNE : Procédure Bornes

Entrées : Un graphe G

Sorties : Deux bornes LB et UB telles que $LB \leq OPT \leq UB \leq n LB$

$LR_- \leftarrow 0$;

$LR^+ \leftarrow m$;

tant que $LR_- < LR^+ - 1$ **faire**

$$\ell \leftarrow \left\lfloor \frac{LR^+ + LR_-}{2} \right\rfloor;$$

Calculer $P_{s \rightarrow t}^\ell$ plus court chemin de 1 à n en consommation de ressource dans $G_\ell = (V_\ell, A_\ell)$ où

$A_\ell = \{(i, j) \in A \mid c_{ij} \leq c_\ell\}$;

si $C(P_{1 \rightarrow n}^\ell) \leq b_n$ **alors**

$LR^+ \leftarrow \ell$;

sinon

$LR_- \leftarrow \ell$;

$LB \leftarrow c_{LR^+}$;

$UB \leftarrow C(P_{s \rightarrow t}^{LR^+})$;

δ et B de cette procédure. Ainsi, ils démontrent que si l'on dispose en entrée de DICH0 de bornes LB et UB vérifiant $\frac{UB}{LB} \leq n$, alors, en posant :

$$\begin{aligned}\delta = f(LB, UB) &= \sqrt{\frac{UB}{LB}} - 1 \\ B = g(LB, UB, \delta) &= \sqrt{\frac{UB LB}{1 + \delta}}\end{aligned}$$

La complexité de DICH0 devient $\mathcal{O}(m n)$; par conséquent, le schéma dans sa globalité se déroule en temps :

$$\mathcal{O}\left(\frac{m n}{\varepsilon}\right)$$

Étude de la complexité Ergun et al. [ESZ02] effectuent le calcul de complexité de leur schéma en utilisant les valeurs exactes pour δ et B . Hassin [Has92] utilise une méthode dont la complexité est connue pour trouver une valeur approchée des racines carrées. Ici, l'étude commence par choisir de bonnes valeurs approchées des paramètres du schéma suivant cette méthode avant de faire l'étude de la complexité. La recherche des valeurs approchées des racines carrées se fait comme suit :

- trouver le premier i tel que $a_i = 2^{2^i} > \frac{UB}{LB}$.

- $1 + \delta = a_{i-2}$ d'où $\left(\frac{UB}{LB}\right)^{\frac{1}{4}} < 1 + \delta \leq \left(\frac{UB}{LB}\right)^{\frac{1}{2}}$

- $B = LB a_{i-3}$ d'où $UB^{\frac{1}{8}} LB^{\frac{7}{8}} < B \leq UB^{\frac{1}{4}} LB^{\frac{3}{4}}$

D'après le résultat de la procédure TEST, les bornes sont mises à jour :

- TEST répond OUI :

$LB^+ = B$ et $UB^+ = UB$

Cela donne donc $\left(\frac{UB}{LB}\right)^{\frac{3}{4}} \leq \frac{UB^+}{LB^+} < \left(\frac{UB}{LB}\right)^{\frac{7}{8}}$

– TEST répond NON :

$$LB^+ = LB \text{ et } UB^+ = (1 + \delta) B$$

$$\text{Cela donne donc } \left(\frac{UB}{LB}\right)^{\frac{3}{8}} \leq \frac{UB^+}{LB^+} < \left(\frac{UB}{LB}\right)^{\frac{3}{4}}$$

Donc au pire, la plus petite diminution du rapport donne $\frac{UB^+}{LB^+} < \left(\frac{UB}{LB}\right)^{\frac{7}{8}}$. On note k le nombre de passages dans la boucle *tant que* de la procédure DICH0. Avant l'exécution de la procédure DICH0, le rapport du majorant sur le minorant est borné par n et après cette procédure, il est de 2 donc la valeur de k est bornée comme suit :

$$\begin{aligned} n^{\left(\left(\frac{7}{8}\right)^k\right)} &\leq 2 \\ \left(\frac{7}{8}\right)^k \log(n) &\leq \log(2) \\ k \log\left(\frac{7}{8}\right) + \log \log(n) &\leq \log \log(2) \\ k &\geq \frac{\log \log(n) - \log \log(2)}{\log\left(\frac{8}{7}\right)} \\ \text{Donc } k &\leq \left\lceil \frac{\log \log(n) - \log \log(2)}{\log\left(\frac{8}{7}\right)} \right\rceil \end{aligned}$$

En posant respectivement δ_i , UB_i et LB_i les valeurs de δ , du majorant et du minorant de l'étape i , la complexité de la procédure DICH0 s'écrit donc :

$$\sum_{i=1}^r \mathcal{O}\left(\frac{m n}{\delta_i}\right) = \mathcal{O}(m n) \sum_{i=1}^r \mathcal{O}\left(\frac{1}{\delta_i}\right)$$

On a aussi :

$$\left(\frac{LB_i}{UB_i}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{UB_i^{\frac{1}{2}} LB_i^{-\frac{1}{2}} - 1} \leq \frac{1}{\delta_i} < \frac{1}{UB_i^{\frac{1}{4}} LB_i^{-\frac{1}{4}} - 1}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_i} &< \frac{LB_i^{\frac{1}{4}}}{UB_i^{\frac{1}{4}} - LB_i^{\frac{1}{4}}} \\ &< \left(\frac{LB_i}{UB_i}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1 - \frac{LB_i^{\frac{1}{4}}}{UB_i^{\frac{1}{4}}}} \\ &< \left(\frac{LB_i}{UB_i}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}} \text{ car pour } i \leq k, \text{ on a } \frac{UB_i}{LB_i} > 2 \text{ donc } \frac{LB_i}{UB_i} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\delta_i} < \left(\frac{LB_i}{UB_i}\right)^{\frac{1}{4}} \left(2 + 2^{\frac{1}{4}} + 2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$\sum_{i=1}^r \mathcal{O}\left(\frac{1}{\delta_i}\right) < \sum_{i=1}^r \mathcal{O}\left(\left(\frac{LB_i}{UB_i}\right)^{\frac{1}{4}}\right) \text{ et on rappelle que } \frac{UB_i}{LB_i} < \left(\frac{UB_{i-1}}{LB_{i-1}}\right)^{\frac{7}{8}}$$

Finalement, cela donne :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \left(\frac{LB_i}{UB_i} \right)^{\frac{1}{4}} &< \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{LB_k}{UB_k} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{8}{7} \right)^j \\ &< \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{8}{7} \right)^j \text{ car } UB_k \leq 2LB_k \\ \text{en faisant tendre } k \text{ vers } \infty, \text{ on obtient} \\ \sum_{i=1}^r \left(\frac{LB_i}{UB_i} \right)^{\frac{1}{4}} &< 2^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{1 - 2^{-\frac{1}{28}}} < 35 \end{aligned}$$

La complexité de la procédure DICH0 est bien en $\mathcal{O}(m n)$, ce qui permet d'arriver à une complexité totale pour le schéma de $\mathcal{O}\left(\frac{m n}{\epsilon}\right)$.

5.2 Approche multicritère

Si le cas d'une ressource se résout efficacement par la programmation dynamique, en revanche, que peut-on dire du cas de deux ressources ou plus ? Bien sûr, puisque décider même s'il existe un chemin réalisable est **NP-complet**, on ne peut garantir de trouver des solutions approchées en temps polynomial. Néanmoins, une manière de généraliser l'approche précédente consiste à se placer dans le cadre multicritère. il s'agit d'une relaxation du problème (on relâche les contraintes de consommation de ressource), mais le fait de conserver la nature multicritère (les consommations de ressource sont vues comme des critères à optimiser) permet peut-être de mieux parcourir l'ensemble des solutions ou, à défaut, d'en dessiner les contours. Dès le début des années 80, Hansen s'est intéressé au problème de plus court chemin bicritère en en donnant un FPTAS [Han80]. Pour des problèmes plus généraux, Papadimitriou et Yannakakis, [PY00], ont proposé une démonstration géométrique de l'existence d'une frontière de Pareto approchée de taille polynomiale. Les auteurs ont également donné des théorèmes d'existence de procédures polynomiales permettant de construire de telles frontières, qui s'appliquent notamment à notre problème (ces théorèmes sont d'ailleurs une forme de généralisation des résultats obtenus par Hassin pour le cas d'une ressource, que l'on peut considérer comme problème bicritère). Nous définissons dans un premier temps le problème de plus court chemin dans un cadre multicritère afin d'introduire la notion de frontière de Pareto approchée. Nous proposons ensuite un algorithme permettant de déterminer une telle frontière, puis concluons en remplaçant ces résultats dans le cadre spécifique de la résolution de PCCC. Dans cette section, on se restreint de nouveau aux contraintes de ressource au puits ; de plus, les graphes sont supposés sans circuit et les données numériques rationnelles strictement positives.

Plus court chemin multicritère Dans l'approche multicritère, les problèmes considérés sont la généralisation à plusieurs objectifs des problèmes d'optimisation classique. Pour le problème de plus court chemin, il s'agit donc de déterminer, dans un graphe orienté $G = (V, A)$, un chemin de s à t qui optimise, non pas une fonction de coût C , mais un ensemble de fonctions C^1, \dots, C^R . Cette version du problème est notée PCC-M. Les fonctions à optimiser sont toutes supposées à valeur dans \mathbb{Q}_+^* . De plus, les critères peuvent être à minimiser ou à maximiser (par exemple, un critère souvent pris en considération pour la construction de chemins est celui de la longueur des chemins, que l'on cherche à maximiser). Ainsi, par la suite, on considèrera R fonctions C^1, \dots, C^R à optimiser, sans présupposer de leur sens d'optimisation (maximiser ou minimiser), ni dans un premier temps de leur interprétation (critère original du problème ou

relaxation d'une contrainte de ressource). Les ensembles des indices des critères à maximiser et à minimiser seront respectivement notés \mathcal{R}^{\max} et \mathcal{R}^{\min} . Pour tout vecteur w de \mathbb{R}^R , $w|_{\mathcal{R}^{\max}}$ (resp., $w|_{\mathcal{R}^{\min}}$) désigne sa restriction aux indices de \mathcal{R}^{\max} (resp., de \mathcal{R}^{\min}).

La multiplicité des fonctions à optimiser fait qu'elles n'induisent plus a priori un ordre complet sur l'ensemble des solutions réalisables : (1, 2) et (2, 1) sont par exemple incomparables dans \mathbf{R}^2 . Évidemment, il est toujours possible de définir malgré tout un ordre complet, par exemple, en considérant l'ordre lexicographique, ou encore, en considérant, lorsque cela est possible, une combinaison linéaire des critères à optimiser ; auquel cas on se ramène à un problème monocritère. Néanmoins, si l'on souhaite conserver la nature multicritère du problème (et c'est notre cas : la ressource 1 ne doit pas plus excéder sa borne que ne le doit la ressource 2), alors il faut travailler sur l'ordre partiel induit par la relation de dominance, déjà présentée en section 4.1. On ne cherche plus dès lors à déterminer une solution optimale, mais un ensemble de solutions *efficaces*, ou non dominées, appelé frontière de Pareto.

Définition 5 *Frontière de Pareto pour PCC-M :*

Soit $I = (G = (V, A); s, t \in V; C^1, \dots, C^R : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Q})$ une instance de PCC-M, où \mathcal{P} désigne l'ensemble des chemins sur G . La frontière de Pareto de I , notée $\mathcal{P}(I)$, est l'ensemble des solutions non dominées de I . Formellement, $\mathcal{P}(I)$ est l'ensemble des chemins $P_{s \rightarrow t}$ qui vérifient pour tout chemin $P'_{s \rightarrow t} \in \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} \text{Si } & \exists r \in 1, \dots, R, \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} (r \in \mathcal{R}^{\max}) \wedge (C^r(P'_{s \rightarrow t}) > C^r(P_{s \rightarrow t})) \\ \text{ou } (r \in \mathcal{R}^{\min}) \wedge (C^r(P'_{s \rightarrow t}) < C^r(P_{s \rightarrow t})) \end{array} \right. \\ \text{Alors } & \exists \ell \in 1, \dots, R, \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} (\ell \in \mathcal{R}^{\max}) \wedge (C^\ell(P_{s \rightarrow t}) > C^\ell(P'_{s \rightarrow t})) \\ \text{ou } (\ell \in \mathcal{R}^{\min}) \wedge (C^\ell(P_{s \rightarrow t}) < C^\ell(P'_{s \rightarrow t})) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Frontière de Pareto ε -approchée Potentiellement (mais pas nécessairement), que l'on se situe dans l'espace des solutions ou dans celui des valeurs, la frontière de Pareto est de taille exponentielle : déterminer cette frontière n'est donc pas envisageable. En outre, pour certains problèmes (et c'est notamment le cas du plus court chemin), décider même si un point donné est ou non Pareto optimal est déjà **NP**-complet. Aussi, à défaut de manipuler l'ensemble des points Pareto-optimaux, il pourrait être intéressant d'exhiber un sous-ensemble de taille raisonnable de points qui permettent de représenter, de façon approchée mais maîtrisée, tous les points de l'ensemble. C'est là la vocation de la frontière de Pareto ε -approchée.

Définition 6 *Frontière de Pareto ε -approchée pour PCC-M :*

Soit $I = (G = (V, A); s, t \in V; C^1, \dots, C^R : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{Q})$ une instance de PCC-M, où \mathcal{P} désigne l'ensemble des chemins sur G . Un sous-ensemble $\mathcal{P}_\varepsilon(I)$ de solutions réalisables de I est une frontière de Pareto ε -approchée si :

$$\begin{aligned} & \forall P'_{s \rightarrow t} \in \mathcal{P}, \exists P_{s \rightarrow t} \in \mathcal{P}_\varepsilon(I) \text{ t.q. } : \\ & \forall r = 1, \dots, R, \left\{ \begin{array}{l} C^r(P'_{s \rightarrow t}) < (1 + \varepsilon)C^r(P_{s \rightarrow t}) \text{ si } r \in \mathcal{R}^{\max} \\ C^r(P'_{s \rightarrow t}) > (1 - \varepsilon)C^r(P_{s \rightarrow t}) \text{ si } r \in \mathcal{R}^{\min} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Cette définition signifie que tout chemin $P'_{s \rightarrow t}$ a un témoin $P_{s \rightarrow t}$ dans $\mathcal{P}_\varepsilon(I)$ dont le vecteur de performance réalise *au moins* $1/(1 + \varepsilon)C^r(P'_{s \rightarrow t})$ si $r \in \mathcal{R}^{\max}$, *au plus* $1/(1 - \varepsilon)C^r(P'_{s \rightarrow t})$ si $r \in \mathcal{R}^{\min}$.

Les auteurs dans [PY00] démontrent que tout problème multicritère admet une frontière de Pareto ε -approchée de taille polynomiale en $|I|$ et en $1/\varepsilon$ (mais exponentielle en R). Ce

résultat pourrait sembler surprenant, la taille d'une frontière de Pareto étant potentiellement exponentielle; pourtant, la preuve est relativement simple; nous la présentons ici dans le cadre de PCC-M. Si C_{min}^r et C_{maj}^r désignent respectivement un minorant et un majorant de $C^r(P_{s \rightarrow t})$ (on rappelle que la valeur $C^r(P_{s \rightarrow t})$ est supposée être rationnelle strictement positive) pour tout r , on découpe tout d'abord l'intervalle $[C_{min}^r, C_{maj}^r]$ en une suite $([c_i^r, c_{i+1}^r])_i$ de H^r intervalles, où $c_{i+1}^r = (1 + \varepsilon)c_i^r$ si $r \in \mathcal{R}^{\max}$, $c_{i+1}^r = (1 - \varepsilon)c_i^r$ si $r \in \mathcal{R}^{\min}$, pour un paramètre d'erreur ε . Cette procédure de quadrillage de l'espace des valeurs est précisément décrite dans l'algorithme QUADRILLAGE. Si l'on définit la quantité MAJ comme $MAJ = \max_{r=1}^R \{C_{maj}^r / C_{min}^r\}$, la complexité de cet algorithme est d'ordre $\mathcal{O}\left(\left(\frac{R}{\min\{\varepsilon_M, \varepsilon_m\}} \log(MAJ)\right)\right)$. Si la description proposée différencie les paramètres d'erreur ε_M et ε_m pour les critères à maximiser et à minimiser, on suppose pour l'instant : $\varepsilon_M = \varepsilon_m = \varepsilon$.

Algorithme 12 : QUADRILLAGE : quadrillage de l'espace des valeurs

Entrées : I instance, $\varepsilon_M, \varepsilon_m \in]0, 1[$ erreurs pour les critères à maximiser / minimiser

Sorties : $\cup_{r=1}^R \{c_0^r, \dots, c_{H^r}^r\}$ discrétisation de l'espace $\otimes_{r=1}^R [C_{min}^r, C_{maj}^r]$

pour tous les $r \in \mathcal{R}^{\max}$ **faire**
 $\quad H^r = \lceil \log_{(1+\varepsilon_M)} (C_{maj}^r / C_{min}^r) \rceil$;
pour tous les $i \in \{0, \dots, H^r\}$ **faire**
 $\quad \lfloor c_i^r = (1 + \varepsilon_M)^i C_{min}^r$;

pour tous les $r \in \mathcal{R}^{\min}$ **faire**
 $\quad H^r = \lceil \log_{(1-\varepsilon_m)} (C_{min}^r / C_{maj}^r) \rceil$;
pour tous les $i \in \{0, \dots, H^r\}$ **faire**
 $\quad \lfloor c_i^r = (1 - \varepsilon_m)^i C_{maj}^r$;

Une fois le quadrillage effectué, on considère chacun des hypercubes $[c_{i^1}^1, c_{i^1+1}^1] \times \dots \times [c_{i^R}^R, c_{i^R+1}^R]$ pour $(i^1, \dots, i^R) \in \{0, \dots, H^1 - 1\} \times \dots \times \{0, \dots, H^R - 1\}$. Il suffit alors de choisir, lorsqu'un tel point existe, un point de $\mathcal{P}_\varepsilon(I)$ par hypercube. L'ensemble $\mathcal{P}_\varepsilon(I)$ ainsi construit est bien une frontière de Pareto ε -approchée, de taille bornée par :

$$\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{\varepsilon} \log(MAJ)\right)^R\right)$$

En effet, soit $P'_{s \rightarrow t}$ un chemin de s à t ; son étiquette $(C^1(P'_{s \rightarrow t}), \dots, C^R(P'_{s \rightarrow t}))$ appartient à un hypercube H représenté par le point $(c_{i^1}^1, \dots, c_{i^R}^R)$ dont les coordonnées sont définies par :

$$\begin{cases} c_{i^r}^r \leq C^r(P'_{s \rightarrow t}) < c_{i^r+1}^r & \text{si } r \in \mathcal{R}^{\max} \\ c_{i^r}^r \geq C^r(P'_{s \rightarrow t}) > c_{i^r+1}^r & \text{si } r \in \mathcal{R}^{\min} \end{cases}$$

L'hypercube H considéré consiste alors en le produit cartésien des intervalles $[c_{i^r}^r, c_{i^r+1}^r[$ pour les indices correspondant à un critère à maximiser et $]c_{i^r+1}^r, c_{i^r}^r]$ pour les indices correspondant à un critère à minimiser. Il existe nécessairement une étiquette E correspondant à un chemin de $\mathcal{P}_\varepsilon(I)$ dans H (cette étiquette pouvant être celle de $P'_{s \rightarrow t}$); alors, par construction :

$$\begin{aligned} c_{i^r}^r \leq E^r \text{ et } C^r(P'_{s \rightarrow t}) < (1 + \varepsilon)c_{i^r}^r &\Rightarrow C^r(P'_{s \rightarrow t}) < (1 + \varepsilon)E^r \text{ si } r \in \mathcal{R}^{\max} \\ c_{i^r}^r \geq E^r \text{ et } C^r(P'_{s \rightarrow t}) > (1 - \varepsilon)c_{i^r}^r &\Rightarrow C^r(P'_{s \rightarrow t}) > (1 - \varepsilon)E^r \text{ si } r \in \mathcal{R}^{\min} \end{aligned}$$

La procédure de recherche d'une frontière de Pareto ε -approchée que nous venons de discuter est formellement décrite dans l'algorithme PARETO-EPSILON. Cet algorithme n'est cependant pas polynomial, puisqu'on ne sait a priori pas décider de l'existence d'un chemin dans un hypercube donné. Notons pour finir que cette construction reste valide si l'on choisit pour chaque point $(c_{i^1}^1, \dots, c_{i^R}^R)$ un chemin $P'_{s \rightarrow t}$ dont l'étiquette se situe dans l'hypercube plus large :

$$\otimes_{r \in \mathcal{R}^{\max}} [c_{i^r}^r, c_{H^r}^r] \otimes_{r \in \mathcal{R}^{\min}} [c_{H^r}^r, c_{i^r}^r]$$

Algorithme 13 : PARETO-EPSILON : Frontière de Pareto ε -approchée

Entrées : I instance, $\varepsilon \in]0, 1[$ erreur

Sorties : $\mathcal{P}_\varepsilon(I)$ Frontière de Pareto ε -approchée

$\mathcal{P}_\varepsilon(I) \leftarrow \emptyset;$

$\cup_{r=1}^R \{(c_0^r, \dots, c_{H^r}^r)\} \leftarrow \text{QUADRILLAGE}(\varepsilon, \varepsilon);$

pour tous les $(i^1, \dots, i^R) \in \{0, \dots, H^1 - 1\} \times \dots \times \{0, \dots, H^R - 1\}$ **faire**

si \exists un chemin $P_{s \rightarrow t}$ à valeur dans $\otimes_{r \in \mathcal{R}^{\max}} [c_{i^r}^r, c_{i^r+1}^r] \otimes_{r \in \mathcal{R}^{\min}} [c_{i^r+1}^r, c_{i^r}^r]$ **alors**
 $\mathcal{P}_\varepsilon(I) \leftarrow \mathcal{P}_\varepsilon(I) \cup \{P_{s \rightarrow t}\};$

Schéma complet d'approximation de la frontière de Pareto Dans [PY00] sont énoncés des théorèmes de caractérisation de la constructibilité en temps polynomial de frontières de Pareto ε -approchées (où, par polynomial, on entend polynomial en $|I|$ et $1/\varepsilon$, exponentiel en R); ces constructions sont qualifiées de *schémas complets d'approximation* pour le problème multicritère. La version multicritère d'un problème d'optimisation admet un schéma complet d'approximation de sa frontière de Pareto *ssi* l'on peut décider en temps polynomial la version décision approchée (de type GAP) du problème multicritère. En particulier, si les fonctions à optimiser sont linéaires, discrètes et que la version monocritère exacte est décidable en temps pseudopolynomial, alors le problème multicritère admet un schéma complet d'approximation. S'agissant du problème de plus court chemin, on sait par la programmation dynamique décider en temps pseudopolynomial, pour une instance I et une valeur B , s'il existe sur I un chemin de valeur B ; on en déduit donc que PCC-M admet un schéma complet d'approximation de sa frontière de Pareto. Nous proposons ici un tel schéma, qui est une forme de généralisation au cadre multicritère des algorithmes proposés dans la section précédente.

Principe. Dans le cadre monocritère à une ressource, pour une instance I et une borne B données, on ne sait pas décider en temps polynomial s'il existe un chemin de coût au plus B tout en consommant au plus b_n quantité de ressource. En revanche, on peut pour une erreur ε donnée décider en temps polynomial (en I et en $1/\varepsilon$) s'il existe un chemin de coût au plus $(1 + \varepsilon)B$ et de consommation au plus b_n , ou si tout chemin, soit coûte au moins B , soit consomme strictement plus que b_n . Cette notion de test approché se généralise naturellement à plusieurs fonctions : on ne sait pas, pour un point $(c_{i^1}^1, \dots, c_{i^R}^R)$ donné, décider s'il existe un chemin $P_{s \rightarrow t}$ dont l'étiquette $(C^1(P_{s \rightarrow t}), \dots, C^R(P_{s \rightarrow t}))$ vérifie pour tout critère $C^r(P_{s \rightarrow t}) \geq c_{i^r}^r$ si $r \in \mathcal{R}^{\max}$, $C^r(P_{s \rightarrow t}) \leq c_{i^r}^r$ si $r \in \mathcal{R}^{\min}$, ou si tout chemin n'atteint pas ou excède strictement l'une au moins des bornes $c_{i^r}^r$. En revanche, on peut décider en temps polynomial pour des erreurs ε_M et ε_m données s'il existe un chemin respectant ces bornes, ou si tout chemin est en-deça de $(1 + \varepsilon_M)c_{i^r}^r$ pour un certain critère à maximiser ou au-delà de $(1 - \varepsilon_m)c_{i^r}^r$ pour un certain critère à minimiser. De nouveau, ce test

approché est obtenu en travaillant sur une instance \tilde{I} modifiée : on ramène les données numériques de l'instance I initiale à un ordre polynomial par une procédure d'échelonnage et d'arrondis dépendant du point $(c_{i1}^1, \dots, c_{ir}^r)$ et des degrés de précision $\varepsilon_M, \varepsilon_m$; au prix de l'erreur introduite, on gagne le déroulement polynomial sur \tilde{I} des algorithmes exacts qui sont de complexité théorique pseudopolynomiale.

Algorithme de décision exacte. Nous présentons ici l'algorithme ACYCLIQUE-M qui est une adaptation au cadre multicritère de l'algorithme à fixation d'étiquette 5. Cet algorithme renvoie, pour une instance I de PPC-M et un vecteur B de \mathbb{Q}^R , l'ensemble \mathcal{E} des étiquettes $E \in \mathbb{Q}^R$ non dominées vérifiant :

$$E|_{\mathcal{R}^{\max}} \geq B|_{\mathcal{R}^{\max}} \text{ et } E|_{\mathcal{R}^{\min}} \leq B|_{\mathcal{R}^{\min}}$$

ACYCLIQUE-M renvoie également les chemins associés aux étiquettes de \mathcal{E} , en ne conservant toutefois qu'un chemin par étiquette. Selon l'analyse faite en section 4.2, la complexité de cet algorithme est d'ordre :

$$R + \sum_{i=2}^n \left(\sum_{j=1}^{i-1} N_j R + C_{N_i}^2 R \right) + N_n R$$

Or, si les données sont entières, si M désigne un majorant du nombre de valeurs possibles (considérer par exemple, si l'on note $C_{maj} = \max_{r=1}^R \{C_{maj}^r\}$ et $C_{min} = \min_{r=1}^R \{C_{min}^r\}$, $M = (n-1)(C_{maj} - C_{min} + 1) \leq \mathcal{O}(nC_{maj})$), le nombre N_j d'étiquettes en tout sommet j est borné par M^R . Si l'on ne conserve qu'un chemin par étiquette en chaque sommet, la complexité de ACYCLIQUE-M est alors d'ordre au plus :

$$\mathcal{O}(R M^R (n^2 + nM^R)) = \mathcal{O}(R n^{2R+1} C_{maj}^{2R})$$

L'algorithme ACYCLIQUE-M permet ainsi de décider en temps pseudopolynomial, pour une instance I de PPC-M aux données numériques entières et un vecteur B , s'il existe un chemin dans l'hyperespace $\otimes_{r \in \mathcal{R}^{\max}} [B^r, +\infty[\otimes_{r \in \mathcal{R}^{\min}} [0, B^r]$, ou si tout chemin excède B^r pour un certain critère $r \in \mathcal{R}^{\min}$, ou n'atteint pas B^r pour un certain critère $r \in \mathcal{R}^{\max}$.

Procédures d'échelonnage et d'arrondis et de test approchée. Pour se ramener d'un ordre pseudopolynomial à un ordre polynomial, on échelonne les données numériques de l'instance I par l'algorithme SCALING-M dont la complexité est d'ordre :

$$\mathcal{O}\left(mR \log\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)\right) = \mathcal{O}\left(n^2 R \log\left(\frac{n}{\varepsilon}\right)\right)$$

L'arrondi effectué pour obtenir des données entières sur \tilde{I} a pour conséquence que la décision n'est plus exacte, mais seulement approchée, sur l'instance initiale (algorithme TEST-M). Considérons l'instance \tilde{I} obtenue à partir de I après l'appel à la procédure SCALING-M pour les paramètres $B = (c_{i1}^1, \dots, c_{iR}^R)$, ε_M et ε_m . On voit facilement que l'on a les relations suivantes entre les étiquettes sur les instances \tilde{I} et I d'un chemin $P_{s \rightarrow t}$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \tilde{C}^r(P_{s \rightarrow t}) \geq \tilde{B}_M \quad \forall r \in \mathcal{R}^{\max} \\ \tilde{C}^r(P_{s \rightarrow t}) \leq \tilde{B}_m \quad \forall r \in \mathcal{R}^{\min} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C(P_{s \rightarrow t})|_{\mathcal{R}^{\max}} \geq B|_{\mathcal{R}^{\max}} \\ C(P_{s \rightarrow t})|_{\mathcal{R}^{\min}} \leq B|_{\mathcal{R}^{\min}} \end{cases} \\ \begin{cases} \exists r \in \mathcal{R}^{\max}, \tilde{C}^r(P_{s \rightarrow t}) < \tilde{B}_M \\ \exists r \in \mathcal{R}^{\min}, \tilde{C}^r(P_{s \rightarrow t}) > \tilde{B}_m \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \exists r \in \mathcal{R}^{\max}, C^r(P_{s \rightarrow t}) < (1 + \varepsilon_M)B^r \\ \exists r \in \mathcal{R}^{\min}, C^r(P_{s \rightarrow t}) > (1 - \varepsilon_m)B^r \end{cases} \end{aligned}$$

Algorithme 14 : ACYCLIQUE-M : Algorithme pour les graphes acycliques

Entrées : $I = (G = (V, A); c^1, \dots, c^R : A \rightarrow \mathbb{Q})$ instance de PPC-M, $B = (B^1, \dots, B^R)$ vecteur borne

Sorties : Ensemble des étiquettes (E^1, \dots, E^R) non dominées vérifiant $\begin{cases} E^r \geq B^r \forall r \in \mathcal{R}^{\max} \\ E^r \leq B^r \forall r \in \mathcal{R}^{\min} \end{cases}$

// $ETIQ(i)$ est l'ensemble des étiquettes du sommet i

$ETIQ(1) \leftarrow \{0\}$

pour tous les i allant de 2 à $n-1$ faire

$ETIQ(i) \leftarrow \emptyset;$
pour tous les $j \in \text{predecesseur}(i)$ faire
 pour tous les $E \in ETIQ(j)$ faire
 si $\forall r \in \mathcal{R}^{\min}, E^r + c_{ji}^r \leq B^r$ alors
 $E' \leftarrow (E^r + c_{ji}^r, \forall r \in \{1, \dots, R\});$
 $ETIQ(i) \leftarrow ETIQ(i) \cup \{E'\};$
 $ETIQ(i) \leftarrow \text{Pareto}(ETIQ(i));$

$ETIQ(n) \leftarrow \emptyset;$

pour tous les $j \in \text{predecesseur}(n)$ faire

pour tous les $E \in ETIQ(j)$ faire
 si $\forall r \in \mathcal{R}^{\min}, E^r + c_{jn}^r \leq B^r$ et $\forall r \in \mathcal{R}^{\max}, E^r + c_{jn}^r \geq B^r$ alors
 $E' \leftarrow (E^r + c_{jn}^r, \forall r \in \{1, \dots, R\});$
 $ETIQ(n) \leftarrow ETIQ(n) \cup \{E'\};$

$ETIQ(n) \leftarrow \text{Pareto}(ETIQ(n));$

Retourner $ETIQ(n)$;

Algorithme 15 : SCALING-M : Procédure d'échelonnage et d'arrondis multicritère

Entrées : $I = (G = (V, A); c^1, \dots, c^R : A \rightarrow \mathbb{Q})$ instance de PPC-M, $B \in (\mathbb{Q}_+^*)^R, \varepsilon_M, \varepsilon_m \in]0, 1[$ erreurs

Sorties : $\tilde{I}(B, \varepsilon_M, \varepsilon_m)$ instance de PPC-M

pour tous les $les (i, j) \in A$ faire

$\tilde{B}_M \leftarrow \lceil \frac{n}{\varepsilon_M} \rceil;$
pour tous les $r \in \mathcal{R}^{\max}$ faire
 $\tilde{c}_{ij}^r \leftarrow \min \left\{ \left\lceil \frac{c_{ij}^r n}{\varepsilon_M B^r} \right\rceil, \tilde{B}_M \right\};$
 $\tilde{B}_m \leftarrow \lfloor \frac{n}{\varepsilon_m} \rfloor;$
pour tous les $r \in \mathcal{R}^{\min}$ faire
 $\tilde{c}_{ij}^r \leftarrow \min \left\{ \left\lceil \frac{c_{ij}^r n}{\varepsilon_m B^r} \right\rceil, \tilde{B}_m \right\};$

Par ailleurs, puisque les valeurs numériques sur \tilde{I} sont bornées par $\max\{\tilde{B}_M, \tilde{B}_m\} = \mathcal{O}(n/\min\{\varepsilon_M, \varepsilon_m\})$, le déroulement de la procédure ACYCLIQUE-M sur \tilde{I} pour le paramètre B défini par $B_{|\mathcal{R}^{\max}} \equiv \tilde{B}_M$ et $B_{|\mathcal{R}^{\min}} \equiv \tilde{B}_m$ devient polynomial en n et $1/\varepsilon_M, 1/\varepsilon_m$, d'ordre :

$$\mathcal{O}\left(\frac{R n^{4R+1}}{\min\{\varepsilon_M, \varepsilon_m\}^{2R}}\right)$$

En conséquence de ces deux dernières observations, on peut décider, pour une instance I d'ordre n , un point $(c_{i_1}^1, \dots, c_{i_R}^R)$ et deux paramètres d'erreur $\varepsilon_M, \varepsilon_m$, en temps polynomial en n et en $\max\{1/\varepsilon_M, 1/\varepsilon_m\}$:

$$\begin{cases} \text{Si } \exists P_{s \rightarrow t} \text{ d'étiquette dans l'hyperespace } \otimes_{r \in \mathcal{R}^{\max}} [c_{i_r}^r, +\infty[\otimes_{r \in \mathcal{R}^{\min}} [0, c_{i_r}^r] \\ \text{Ou si l'hyperespace } \otimes_{r \in \mathcal{R}^{\max}} [(1 + \varepsilon_M)c_{i_r}^r, +\infty[\otimes_{r \in \mathcal{R}^{\min}} [0, (1 - \varepsilon_m)c_{i_r}^r] \text{ est vide.} \end{cases}$$

Algorithme 16 : TEST-M : Procédure de test approchée sur PCC-M

Entrées : I instance, $B = (B^1, \dots, B^R)$ vecteur, $\varepsilon_M, \varepsilon_m \in]0, 1[$ erreurs

Sorties :

- OUI et un chemin $P_{s \rightarrow t}$ vérifiant $\begin{cases} C^r(P_{s \rightarrow t}) \geq B^r \ \forall r \in \mathcal{R}^{\max} \\ C^r(P_{s \rightarrow t}) \leq B^r \ \forall r \in \mathcal{R}^{\min} \end{cases}$
- NON si tout chemin $P_{s \rightarrow t}$ vérifie $C^r(P_{s \rightarrow t}) < (1 + \varepsilon_M)B^r$ pour un certain critère r à maximiser ou $C^r(P_{s \rightarrow t}) > (1 - \varepsilon_m)B^r$ pour un certain critère r à minimiser.

$\tilde{I}(B, \varepsilon_M, \varepsilon_m) \leftarrow \text{SCALING-M}(I, B, \varepsilon_M, \varepsilon_m)$;

$\tilde{B}_M \leftarrow \left\lfloor \frac{n}{\varepsilon_M} \right\rfloor$; $\tilde{B}_m \leftarrow \left\lfloor \frac{n}{\varepsilon_m} \right\rfloor$;

$B' \leftarrow (B^r = \tilde{B}_M, \ \forall r \in \mathcal{R}^{\max}; B^r = \tilde{B}_m, \ \forall r \in \mathcal{R}^{\min})$;

$ETIQ \leftarrow \text{ACYCLIQUE-M}(\tilde{I}, B')$;

si $ETIQ \neq \emptyset$ **alors**

 └ Retourner OUI et un chemin d'étiquette dans $ETIQ$

sinon

 └ Retourner NON

Schéma complet d'approximation Le schéma conçu consiste à opérer un quadrillage de l'espace des valeurs, puis à appeler la procédure de test approché en le coin de chaque hypercube issu de ce quadrillage. Précisément, l'algorithme PARETO-PCC-M sollicite la procédure QUADRILLAGE pour les erreurs $\varepsilon_M = \sqrt{1 + \varepsilon} - 1$ et $\varepsilon_m = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon}$ (on ne fait plus le quadrillage sur ε , puisque le test en chaque hypercube n'est pas exact, mais approché). Il appelle ensuite la procédure TEST-M sur chaque coin $(c_{i_1}^1, \dots, c_{i_R}^R)$, en invoquant les mêmes paramètres d'erreur ε_M et ε_m . Les chemins trouvés par les appels successifs à TEST-M constituent la frontière de Pareto ε -approchée.

Soit $P'_{s \rightarrow t}$ un chemin de s à t et soit $(C^1(P'_{s \rightarrow t}), \dots, C^R(P'_{s \rightarrow t}))$ son étiquette, on considère le point $B = (c_{i_1}^1, \dots, c_{i_R}^R)$ caractérisé par :

$$\begin{cases} c_{i_r}^r \leq C^r(P'_{s \rightarrow t}) < (1 + \varepsilon_M)c_{i_r}^r \text{ si } r \in \mathcal{R}^{\max} \\ c_{i_r}^r \geq C^r(P'_{s \rightarrow t}) > (1 - \varepsilon_m)c_{i_r}^r \text{ si } r \in \mathcal{R}^{\min} \end{cases}$$

Algorithme 17 : PARETO-PCC-M : Frontière de Pareto ε -approchée en temps polynomial

Entrées : I instance, $\varepsilon \in]0, 1[$ erreur

Sorties : $\mathcal{P}_\varepsilon(I)$ Frontière de Pareto ε -approchée

```
 $\mathcal{P}_\varepsilon(I) \leftarrow \emptyset;$   
 $\varepsilon_M \leftarrow \sqrt{1 + \varepsilon} - 1;$   
 $\varepsilon_m \leftarrow 1 - \sqrt{1 - \varepsilon};$   
 $\cup_{r=1}^R \{c_0^r, \dots, c_{H^r}^r\} \leftarrow \text{QUADRILLAGE}(I, \varepsilon_M, \varepsilon_m);$   
pour tous les  $(i^1, \dots, i^R) \in \{0, \dots, H^1 - 1\} \times \dots \times \{0, \dots, H^R - 1\}$  faire  
     $B \leftarrow (c_{i^1}^1, \dots, c_{i^R}^R);$   
    si  $\text{TEST-M}(I, B, \varepsilon_M, \varepsilon_m)$  renvoie un chemin  $P_{s \rightarrow t}$  alors  
         $\mathcal{P}_\varepsilon(I) \leftarrow \mathcal{P}_\varepsilon(I) \cup \{P_{s \rightarrow t}\};$ 
```

Si $\text{TEST-M}(I, B, \varepsilon_M, \varepsilon_m)$ a renvoyé un chemin $P_{s \rightarrow t}$, alors ce chemin vérifie :

$$\begin{cases} C^r(P_{s \rightarrow t}) \geq c_{i^r}^r \Rightarrow C^r(P'_{s \rightarrow t}) < (1 + \varepsilon_M)c_{i^r}^r \leq (1 + \varepsilon)C^r(P_{s \rightarrow t}) \text{ si } r \in \mathcal{R}^{\max} \\ C^r(P_{s \rightarrow t}) \leq c_{i^r}^r \Rightarrow C^r(P'_{s \rightarrow t}) > (1 - \varepsilon_m)c_{i^r}^r \geq (1 - \varepsilon)C^r(P_{s \rightarrow t}) \text{ si } r \in \mathcal{R}^{\min} \end{cases}$$

Sinon, l'existence de $P'_{s \rightarrow t}$ assure que TEST-M a nécessairement renvoyé un chemin $P_{s \rightarrow t}$ pour le point B_- défini par :

$$B_-^r = c_{i_{r-1}^r}^r \quad \forall r = 1, \dots, R$$

Ce chemin vérifie bien de nouveau :

$$\begin{cases} C^r(P_{s \rightarrow t}) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon_M} c_{i^r}^r \Rightarrow C^r(P'_{s \rightarrow t}) < (1 + \varepsilon_M)^2 C^r(P_{s \rightarrow t}) = (1 + \varepsilon)C^r(P_{s \rightarrow t}) \text{ si } r \in \mathcal{R}^{\max} \\ C^r(P_{s \rightarrow t}) \leq \frac{1}{1 - \varepsilon_m} c_{i^r}^r \Rightarrow C^r(P'_{s \rightarrow t}) > (1 - \varepsilon_m)^2 C^r(P_{s \rightarrow t}) = (1 - \varepsilon)C^r(P_{s \rightarrow t}) \text{ si } r \in \mathcal{R}^{\min} \end{cases}$$

La complexité de l'algorithme PARETO-PCC-M est dominée par celle des appels successifs à TEST-M . Le nombre de ces appels est de l'ordre de $\mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{\varepsilon} \log(MAJ)\right)^R\right)$ (considérer que $\sqrt{1 + \varepsilon} - 1 \sim 1/2\varepsilon$, $1 - \sqrt{1 - \varepsilon} \sim 1/2\varepsilon$). Or, la complexité de TEST-M somme la complexité temporelle de SCALING-M appliquée à I et celle de ACYCLIQUE-M appliquée à \tilde{I} . On obtient au total une complexité d'ordre :

$$\mathcal{O}\left(\left(\frac{\log(MAJ)}{\varepsilon}\right)^R \left(Rm \log\left(\frac{n}{\varepsilon}\right) + \frac{Rn^{4R+1}}{\varepsilon^{2R}}\right)\right) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{\log(MAJ)}{\varepsilon}\right)^R \frac{Rn^{4R+1}}{\varepsilon^{2R}}\right)$$

Frontière de Pareto et PCCC La vision multicritère du problème de plus court chemin contraint à R ressources peut s'énoncer comme le problème consistant à trouver un chemin $P_{s \rightarrow t}$ qui minimise chaque composante du vecteur $(C(P_{s \rightarrow t}), T^1(P_{s \rightarrow t}), \dots, T^R(P_{s \rightarrow t}))$. Si l'on dispose d'une frontière de Pareto ε -approchée \mathcal{P}_ε , cela signifie que tout chemin $P'_{s \rightarrow t}$ de s à t est représenté par un chemin $P_{s \rightarrow t}$ de la frontière \mathcal{P}_ε qui consomme au plus $1/(1 - \varepsilon)$ la consommation de $P'_{s \rightarrow t}$ sur chaque critère. En particulier, si $P'_{s \rightarrow t}$ est réalisable, on déduit que $P_{s \rightarrow t}$ est $1/(1 - \varepsilon)$ -réalisable.

6 Synthèse

Le tableau 1 résume les complexités théoriques des algorithmes de plus court chemin les plus connus ainsi que des algorithmes exacts ou approchés pour le PCCC vus dans ce rapport.

Tableau 1 – Différents algorithmes et leur complexité

Nombre de ressources	Hypothèse sur le graphe	Auteur ou Nom de l'algorithme	Complexité en temps
0	$c_{ij} \in \mathbb{Q}$	Bellman[Bel58]	$\mathcal{O}(mn)$
0	$c_{ij} \in \mathbb{Q}$ G acyclique	Bellman	$\mathcal{O}(m + n)$
0	$c_{ij} \in \mathbb{Q}^+$	Dijkstra[Dij59]	$\mathcal{O}((m + n) \log(n))$
0	$c_{ij} \in \mathbb{Q}^+$	Dijkstra (tas de Fibonacci)	$\mathcal{O}(m + n \log(n))$
1	$c_{ij} \in \mathbb{Q}_*^+$	Programmation dynamique[DB03]	$\mathcal{O}(m b_1)$
$R \in \mathbb{N}_*^+$	$c_{ij} \in \mathbb{Q}$	Programmation dynamique	$\mathcal{O}(e^n)$
$R \in \mathbb{N}_*^+$	$c_{ij} \in \mathbb{Q}$	k plus courts chemins[Epp98]	$\mathcal{O}(m + Rn \log n + k), k = \mathcal{O}(e^n)$
1	$c_{ij} \in \mathbb{Q}^+$	FPTAS[Phi93]	$\mathcal{O}\left(mn\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) + n^2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)(\log(n) + \log\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right))\right)$
1	$c_{ij} \in \mathbb{Q}^+$	FPTAS multicritère[Han80]	$\mathcal{O}\left(m^2 \frac{n^2}{\varepsilon} \log\left(\frac{n^2}{\varepsilon}\right)\right)$
1	$c_{ij} \in \mathbb{Q}^+$	FPTAS[Has92] [LR01] [ESZ02]	$\mathcal{O}\left(\frac{mn}{\varepsilon}\right)$
$R \in \mathbb{N}_*^+$	$c_{ij} \in \mathbb{Q}^+$	Frontière Pareto ε -approchée[PY00]	$\mathcal{O}\left(\left(\frac{\log(MAJ)}{\varepsilon}\right)^R \frac{Rn^{4R+1}}{\varepsilon^{2R}}\right)$

Le but de cette étude est d'étudier la possibilité de générer des chemins contraints en temps maîtrisé, dans l'optique d'accélérer certains schémas de génération de colonnes impliquant le PCCC comme sous-problème. Deux avantages pourraient être tirés d'une telle démarche : d'une part, être en mesure de générer une population diversifiée de chemins lors de la phase d'initialisation ; d'autre part, accélérer les premières itérations du schéma. Les méthodes les plus répandues à ce jour pour résoudre le PCCC, notamment dans ce cadre spécifique, sont celles de type programmation dynamique, qui offrent des solutions exactes, en temps et en espace exponentiel (ce sont encore ces mêmes méthodes qui ont inspiré les algorithmes approchés). Si nous avons évoqué quelques méthodes de simplification des instances (section 3), celles-ci ne garantissent pas pour autant la diminution de la complexité théorique. Quelle alternative avons-nous donc, quitte à s'affranchir de l'optimalité, voire, de la réalisabilité ?

La recherche de plus courts chemins dans le cadre spécifique du déroulement d'un schéma de génération de colonnes pose deux problèmes de nature différente. D'une part, celle de la difficulté intrinsèque du problème contraint, à partir de 2 ressources : si l'on souhaite rester dans un ordre polynomial de complexité, il faut s'affranchir de l'exactitude en termes d'optimalité et en termes de réalisabilité. D'autre part, les coûts manipulés sur les arcs ne sont plus les coûts initiaux de l'instance, mais des coûts réduits issus de la résolution du (PMR), qui peuvent être négatifs : les hypothèses faites sur la structure de coût de l'instance initiale ne tiennent donc plus au cours des itérations. Or, ces hypothèses interviennent conjointement dans les calculs de complexité et des facteurs d'approximation. De sorte à exploiter les résultats d'approximation, il faudrait donc être en mesure de les étendre à un cadre plus général (notamment, coûts rationnels négatifs et positifs) ; en outre, il faudrait utiliser, voire, définir, un cadre pertinent pour l'approximation, l'approximation classique supposant des valeurs positives.

La diversification des chemins (notamment, dans la phase d'initialisation) sous-entend un certain balayage de l'espace des solutions. Parmi les approches que nous avons présentées, la recherche des k plus courts chemins d'une part (section 4.3), d'une frontière de Pareto ε -approchée d'autre part (section 5.2), vont dans le sens d'une telle exploration. Dans le premier cas, on cherche intensivement les meilleurs chemins contraints en terme de coût, tandis que dans le second cas, on balaye sporadiquement tout l'espace.

Pour un nombre de ressources R donné, l'algorithme d'Eppstein permet de trier en temps $\mathcal{O}(m + Rn \log(n))$ tous les chemins du graphe suivant le coût (initial, ou réduits dans le cadre de la génération de colonnes). Une fois le tas constitué, il suffit pour trouver le chemin contraint optimal de dépiler les chemins jusqu'à trouver un chemin réalisable (ou, dans le cadre d'un schéma de génération de colonnes, quand le critère de coût choisi pour la construction du tas est le coût réduit, l'optimalité est prouvée s'il n'existe pas de chemin réalisable de coût négatif). Rien n'assure néanmoins que les k plus courts chemins, pour $k = \mathcal{O}(p(n))$ où p polynôme, contiennent ne serait-ce qu'un chemin réalisable pour les ressources (ni un chemin de coût positif pour démontrer l'optimalité du schéma). Par ailleurs, en triant sur le seul critère de coût, on risque de générer des chemins peu diversifiés. Ainsi, en se limitant à chercher un nombre polynomial de chemins, on ne garantit pas l'obtention de chemins pertinents ; en prenant au contraire $k = \mathcal{O}(e^n)$, la construction du tas reste polynomiale en temps et en espace, et l'énumération des chemins devient exponentielle en temps mais pas espace : on n'obtient alors une alternative à la résolution exacte par programmation dynamique qui est exponentielle en temps et en espace.

À partir de 2 ressources, l'obtention de solutions réalisables n'étant plus garantie, l'approche multicritère semble prometteuse. Bien plus que la recherche de la frontière de Pareto ε -approchée elle-même, c'est le quadrillage de l'espace des valeurs et l'utilisation de la programmation dynamique sur les instances modifiées qu'il faudra chercher à exploiter : balayer l'espace des valeurs possibles et chercher une solution dans chaque hypercube semble être une bonne stratégie en vue de la diversification des chemins dès l'initialisation.

Références

- AAN83. Yach P. Aneja, Vijay Aggarwal, and Kunhiraman P.K. Nair. Shortest chain subject to side constraints. *Networks*, 13 :295–302, 1983.
- ABS02. Pasquale Avella, Maurizio Boccia, and Antonio Sforza. A penalty function heuristic for the resource constrained shortest path problem. *European Journal of Operational Research*, 142(2) :221–230, 2002.
- Bel58. Richard Bellman. On a Routing Problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16(1) :87–90, 1958.
- DB03. Irina Dumitrescu and Natashia Boland. Improved Preprocessing, Labeling and Scaling Algorithms for the Weight Constrained Shortest Path Problem. *Networks*, 42(3) :135–153, 2003.
- Dij59. Edsger W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1 :269–271, 1959.
- DPS83. Jacques Desrosiers, Paul Pelletier, and François Soumis. Plus court chemin avec contraintes d’horaire. *RAIRO*, 17(4) :357–377, november 1983.
- Dro94. Moshe Dror. Note on the Complexity of the Shortest Path Models for Column Generation in VRPTW. *Operations Research*, 42(5) :977–978, Sep. - Oct. 1994.
- DS88. Martin Desrochers and François Soumis. A generalized permanent labelling algorithm for the shortest path problem with time windows. *Information Systems and Operations Research*, 26(3) :191–212, 1988.
- Epp98. David Eppstein. Finding the k shortest paths. *SIAM J. Computing*, 28(2) :652–673, 1998.
- ESZ02. Funda Ergün, Rakesh Sinha, and Lisa Zang. An Improved FPTAS for Restricted Shortest Path. *Information Processing Letters*, sep 2002.
- GJ79. Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability*. Freeman, 1979.
- Han80. Pierre Hansen. Bicriterion path problems. In G. Fandel and T. Gal, editors, *Multiple Criteria Decision Making : Theory and Applications, LNEMS 177*, pages 109–127. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- Has92. Refael Hassin. Approximation schemes for the restricted shortest path problem. *Mathematics of Operations Research*, 17(1) :36–42, feb 1992.
- LR01. Dean H. Lorenz and Danny Raz. A Simple Efficient Approximation Scheme for the Restricted Shortest Path Problem. *Operations Research Letters*, 28(5) :213–219, 2001.
- NS05. Anass Nagih and François Soumis. Nodal Aggregation of Resource Constraints in a Shortest Path Problem. *European Journal of Operational Research*, 2005.
- Phi93. Cynthia A. Phillips. The network inhibition problem. In *STOC ’93 : Proceedings of the twenty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 776–785, New York, NY, USA, 1993. ACM Press.
- PY00. Christos H. Papadimitriou and Mihalis Yannakakis. On the approximability of trade-offs and optimal access of Web sources. In *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 86–92. IEEE Computer Society, 2000.