



**HAL**  
open science

# Solutions anti-périodiques multiples de $x'' + cx' + g(x) = \epsilon f(t)$

Sana Gasmi

► **To cite this version:**

| Sana Gasmi. Solutions anti-périodiques multiples de  $x'' + cx' + g(x) = \epsilon f(t)$ . 2007. hal-00153505

**HAL Id: hal-00153505**

**<https://hal.science/hal-00153505>**

Preprint submitted on 11 Jun 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Solutions anti-périodiques multiples de

$$x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t)$$

S. Gasmi\*

**Résumé :** A la suite d'un travail de P. Souplet présentant un exemple qui montre la non-unicité des solutions anti-périodiques d'une équation scalaire du second ordre, on prouve l'existence de 4 solutions anti-périodiques de l'équation  $x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon f(t)$  pour une fonction  $f$  bien déterminée ( $c$  et  $\varepsilon > 0$ ;  $\alpha \geq 0$  et  $\beta > 0$ ) et en utilisant la méthode d'un article de W.S. Loud. Puis on donne des conditions concrètes d'existence de 3 ou 4 solutions périodiques de la même équation. Dans les 2 cas  $f$  peut être prise analytique.

**Abstract :** Following a work of P. Souplet which presents an example showing the nonuniqueness of antiperiodic solutions of a second order ordinary equation, we show, using a method of W.S. Loud the existence of 4 antiperiodic solutions of the equation  $x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon f(t)$  for a function  $f$ . Then we give concrete conditions for the existence of 3 or 4 periodic solutions of the same equation. In both cases  $f$  can be chosen analytic.

## 1 Introduction

Le problème de l'existence et du nombre des solutions périodiques d'équations différentielles du second ordre a été le sujet de nombreux travaux dans la littérature (cf.[7], [4], [11], [15], [3]). Loud [9] a cherché des solutions périodiques de l'équation différentielle

$$x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t) \tag{1.1}$$

près de solutions périodiques non constantes de

$$x'' + g(x) = 0 \tag{1.2}$$

---

\*Laboratoire J.-L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 05, FRANCE.

en utilisant une méthode assez technique. Il en a déduit l'existence d'un nombre assez grand de solutions périodiques de (1.1).

Bahri et Berestycki [2] ont étudié les solutions périodiques des systèmes hamiltoniens et ont montré en particulier que l'équation

$$x'' + g(x) = f(t) \tag{1.3}$$

admet une infinité de solutions périodiques si  $f$  est périodique et sous certaines conditions sur  $g$  notamment la sur-linéarité à l'infini.

Pour la même équation et sous des conditions du même type, Ding [5] a montré que si  $f$  est périodique paire ou impaire toutes les solutions de cette équation sont bornées.

Ces travaux posent la question de savoir si une équation

$$x'' + cx' + g(x) = f(t)$$

peut avoir un nombre infini de solutions périodiques, et on peut se poser la même question pour les solutions anti-périodiques de cette équation quand  $f$  est anti-périodique.

On rappelle qu'une fonction continue  $f$  est dite  $\lambda$ -anti-périodique si elle vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t + \lambda) = -f(t) \tag{1.4}$$

On dit alors que  $\lambda$  est une anti-période de  $f$  et on a les propriétés suivantes :

- Tout multiple impair de  $\lambda$  est alors une anti-période de  $f$ .
- Tout multiple pair de  $\lambda$  est une période de  $f$ .
- Si  $f \not\equiv 0$ , il existe alors un plus petit  $\lambda_0$  vérifiant (1.4) ; ce nombre est par définition l'anti-période minimale de  $f$ .
- L'ensemble des anti-périodes de  $f$  est l'ensemble des multiples impairs de  $\lambda_0$ .

Concernant les solutions anti-périodiques, à la suite d'un travail d'Okochi [13] sur les problèmes d'évolution monotones non linéaires, Haraux [8] a prouvé l'existence de solutions anti-périodiques pour des équations d'évolution non linéaires et notamment pour l'équation différentielle ordinaire de second ordre

$$x'' + cx' + g(x) = f(t)$$

où  $g$  est une fonction  $C^1(\mathbb{R})$  impaire et  $f$  une fonction anti-périodique.

Ensuite Beaulieu [1] a étudié le problème de l'unicité où elle a montré, dans le cas d'un système gradient, que les solutions anti-périodiques de normes suffisamment petites sont uniques. Souplet [14] a étudié l'unicité sous des hypothèses plus faibles et il a aussi donné un exemple de non-unicité des

solutions anti-périodiques pour l'équation scalaire du second ordre en exhibant d'une fonction  $f$  anti-périodique de classe  $C^\infty$  pour laquelle l'équation

$$x'' + x' + x^3 = f$$

admet 2 solutions anti-périodiques distinctes.

Il est naturel de se demander si la méthode de [9] ne permettrait pas d'améliorer les résultats de [14].

Dans ce travail on adapte le travail de Loud et on obtient un résultat similaire pour les solutions anti-périodiques de l'équation (1.1) avec  $f$  anti-périodique d'anti-période minimale  $\lambda$  et  $g$  impaire de classe  $C^2(\mathbb{R})$ .

Ce papier se décompose en 7 parties. Dans le deuxième paragraphe on rappelle quelques propriétés de l'équation différentielle (1.2). Le théorème principal est énoncé dans le troisième paragraphe, il présente un résultat d'existence d'une solution anti-périodique de (1.1) près d'une solution anti-périodique  $x_0$  de (1.2). La démonstration de ce théorème donnée dans le paragraphe 5 nécessite un résultat d'existence de solution anti-périodique de  $x'' + g(x) = \varepsilon f(t)$  près de  $x_0$  présenté et démontré dans le paragraphe 4. Le paragraphe 6 est consacré à l'étude d'une application du théorème principal où on se donne une fonction  $f$  bien déterminée pour laquelle l'équation (1.1) admet au moins 3 solutions anti-périodiques pour  $g(x) = \alpha x + \beta x^3$  et de même pour le paragraphe 7 où la fonction  $f$  sera un peu plus générale. Enfin dans le paragraphe 8 on utilise l'idée du paragraphe 6 pour donner des conditions concrètes d'existence de 3 ou 4 solutions périodiques en utilisant les résultats abstraits de Loud [9].

## 2 L'équation $x'' + g(x) = 0$

Dans ce paragraphe on rappelle quelques propriétés de l'équation différentielle :

$$x'' + g(x) = 0 \tag{2.1}$$

On suppose ici que  $g$  est une fonction  $C^2(\mathbb{R})$ , non linéaire, impaire telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, xg(x) \geq 0$$

et  $g^{-1}(0) = [-a, +a]$  avec  $a \geq 0$ .

Dans ce cas, toute solution de (2.1) est anti-périodique en  $t$  et le support géométrique de la trajectoire dans le plan des phases de coordonnées  $x$  et

$y = x'$  est la courbe fermée d'équation

$$\frac{y^2}{2} + G(x) = \text{const} := E$$

où

$$G(x) = \int_0^x g(u) du$$

Si  $E = G(0)$ , la solution  $x(t)$  est une constante de  $I (= g^{-1}(0))$ .

Si  $E > G(0)$  alors  $x(t)$  est anti-périodique non constante et l'anti-période minimale de cette solution est donnée par

$$\tau(A) = \sqrt{2} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{E - G(x)}}, \quad E = G(A) \quad (2.2)$$

où  $A = \max(x(t))$  est l'amplitude de la solution.

**Proposition 2.1.** *Si  $\tau(A)$  est l'anti-période de la solution de (2.1) d'amplitude positive  $A$ , alors  $\tau$  est dérivable par rapport à  $A$  et*

$$\tau'(A) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{E}} \left( 1 - \frac{\sqrt{E}}{2} \int_0^A \frac{g(A) - g(x)}{(E - G(x))^{\frac{3}{2}}} dx \right)$$

*Dans le cas où  $g^{-1}(0) = 0$ , et si  $g(x)$  est monotone dans un voisinage de  $x = 0$ , on a aussi*

$$\tau'(A) = -\frac{\sqrt{2}g(A)}{E} \int_0^A \left( \frac{G(x)g'(x)}{g^2(x)} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{\sqrt{E - G(x)}}$$

**Preuve :** le calcul est celui de Loud [9, Remark, p.4].

**Corollaire 2.2.** *On peut voir facilement que si  $g$  est impaire et strictement convexe sur  $[0, B)$ ,  $B > 0$  avec  $g'(0) > 0$  alors  $\tau'(A) < 0$  pour tout  $A \in (0, B)$ .*

### 3 L'équation $x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t)$ : Théorème principal

Soient  $f(t)$  une fonction continue et anti-périodique d'anti-période minimale  $\lambda$ ,  $x_0(t)$  une solution anti-périodique de  $x'' + g(x) = 0$  d'anti-période minimale  $\tau_0$  de la forme  $\tau_0 = \frac{2p+1}{2q+1}\lambda$ ,  $p, q$  dans  $\mathbb{N}$ . On suppose de plus que  $x'_0(0) = 0$  et que  $x_0(0) = A > 0$ .

Soit  $\tau$  le plus petit multiple commun impair de  $\lambda$  et de  $\tau_0$ .

Le résultat suivant montre que sous certaines conditions il existe une solution anti-périodique de l'équation

$$x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t)$$

d'anti-période minimale  $\tau$  pour des petites valeurs de  $\varepsilon$  et de  $c$  qui se réduit à  $x_0(t)$  pour  $\varepsilon = 0$  et  $c = 0$ .

**Théorème 3.1.** *Soient  $f$  une fonction continue et anti-périodique d'anti-période minimale  $\lambda$  et  $g \in C^2(\mathbb{R})$  impaire vérifiant :  $\forall x \in \mathbb{R} \ xg(x) \geq 0$  et  $g^{-1}(0) = [-a, +a]$  avec  $a \geq 0$ .*

*Pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , on considère l'équation*

$$x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t) \tag{3.1}$$

*On fixe une solution  $x_0$  de (2.1) avec  $x'_0(0) = 0$  et  $x_0(0) = A > 0$  et on suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\tau'(A) \neq 0, \tag{3.2}$$

$$\int_0^\tau x'_0(t)f(t)dt = 0 \tag{3.3}$$

et

$$\int_0^\tau x''_0(t)f(t)dt \neq 0 \tag{3.4}$$

*Alors il existe  $\varepsilon_0, \gamma > 0$  et une fonction  $\delta(\varepsilon) : [0, \varepsilon_0] \mapsto \mathbb{R}^+$  telle que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$  et pour  $|c| < \delta(\varepsilon)$  ( $\varepsilon < \varepsilon_0$  fixé) l'équation (4.1) admet une solution anti-périodique  $x_{\varepsilon,c}$  d'anti-période minimale  $\tau$  avec*

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0, \forall c \in ]-\delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon)[, \quad |x_{\varepsilon,c} - x_0| \leq \gamma\varepsilon.$$

Le théorème 3.1 constitue une variante anti-périodique d'un résultat prouvé par Loud [9] dans le cas  $f$   $T$ -périodique. Il a cherché l'existence de solutions périodiques de l'équation

$$x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t)$$

près d'une solution périodique  $x_0$  (de période commensurable à  $T$ ) de l'équation

$$x'' + g(x) = 0.$$

Pour aboutir à ce résultat, Loud a procédé par étapes. En effet, il a commencé par traiter le cas où  $c = 0$  et il a prouvé l'existence d'une solution périodique  $x_\varepsilon$  près de  $x_0$ . Ensuite il est passé au cas de l'équation avec amortissement pour prouver cette fois-ci l'existence d'une solution périodique près de  $x_\varepsilon$ . Pour prouver le théorème 3.1, on utilisera la même démarche.

## 4 Le cas sans dissipation

Dans ce paragraphe, on considère l'équation sans amortissement

$$x'' + g(x) = \varepsilon f(t) \tag{4.1}$$

**Proposition 4.1.** *Supposons que toutes les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites.*

*Il existe  $\varepsilon_0$  et  $\gamma > 0$  tels que, pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$  avec  $\varepsilon$  fixé, l'équation (4.1) admette une solution anti-périodique  $x_\varepsilon$  d'anti-période minimale  $\tau$  et vérifiant  $\|x_\varepsilon - x_0\|_{C^1(\mathbb{R})} \leq \gamma\varepsilon$ .*

*Plus précisément, l'équation  $y'' + g'(x_0(t))y = f(t)$  possède une unique solution  $h_1$   $\tau$ -anti-périodique telle que  $h_1'(0) = 0$  et on a*

$$x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon(h_1(t) - \frac{\int_0^\tau f(s)h_1'(s)ds}{\int_0^\tau f(s)x_0''(s)ds}x_0'(t)) + o(\varepsilon) \tag{4.2}$$

**Preuve** On va commencer par établir l'existence et l'unicité de  $h_1$ .  $p(t) := x_0'(t)$  est une solution  $\tau_0$ -anti-périodique de l'équation

$$y'' + g'(x_0(t))y = 0 \tag{4.3}$$

Soit  $q(t)$  la deuxième solution de cette équation vérifiant  $pq' - p'q = 1$  et  $q'(0) = 0$  ( $pq' - p'q$  est le wronskien de  $p$  et  $q$ ).

On vérifie aisément que  $q(t) = Ktp(t) + r(t)$  avec  $K = -\frac{\tau'(A)}{\tau_0 g(A)}$  et  $r(t)$   $\tau_0$ -anti-périodique.

Puisque  $K \neq 0$ ,  $p(t)$  et ses multiples sont les seules solutions anti-périodiques de (4.3). Ainsi l'équation

$$y'' + g'(x_0(t))y = f(t) \quad (4.4)$$

admet une solution  $\tau$ -anti-périodique  $y$  puisque  $\int_0^\tau p(t)f(t)dt = 0$ . D'autre part, par la formule de variation de la constante, toute solution  $y$  de (4.4) est de la forme

$$y(t) = Cp(t) + C'q(t) + \int_0^t (p(s)q(t) - p(t)q(s))f(s)ds.$$

Puisque  $p(0) = 0$ ,  $p(\tau) = 0$ ,  $q(0) = \frac{1}{g(A)}$  et  $q(\tau) = \frac{1}{g(A)}$ , on a

$$\forall C \text{ et } C', \quad y(0) = -y(\tau).$$

Cherchons  $C$  et  $C'$  tels que  $h_1$  solution de (4.4) vérifie  $h_1'(0) = -h_1'(\tau) = 0$  sachant que  $p'(0) = -g(A)$ ,  $p'(\tau) = g(A)$ ,  $q'(0) = 0$  et que  $q'(\tau) = K\tau g(A)$ . On a alors le système

$$\begin{cases} -Cp'(0) = 0 \\ Cp'(\tau) + C'q'(\tau) = p'(\tau) \int_0^\tau q(s)f(s)ds \end{cases}$$

il est clair alors que  $C = 0$  et que  $C' = \frac{1}{K\tau} \int_0^\tau q(s)f(s)ds$  ce qui assure l'existence et l'unicité de  $h_1$ . On a plus précisément

$$h_1(t) = \frac{q(t)}{K\tau} \int_0^\tau q(s)f(s)ds + \int_0^t (p(s)q(t) - p(t)q(s))f(s)ds.$$

Soit  $x(t, \xi, \eta, \varepsilon)$  la solution de (4.1) vérifiant

$$x(0) = A + \xi \text{ et } x'(0) = \eta$$

On veut trouver  $\xi$  et  $\eta$  comme fonctions de  $\varepsilon$  telles que  $x(t, \xi, \eta, \varepsilon)$  soit  $\tau$  anti-périodique. et pour celà, on va utiliser le théorème des fonctions implicites. Soient  $F(\xi, \eta, \varepsilon)$  et  $G(\xi, \eta, \varepsilon)$  définies par :

$$F(\xi, \eta, \varepsilon) = x(\tau, \xi, \eta, \varepsilon) + x(0, \xi, \eta, \varepsilon) = x(\tau, \xi, \eta, \varepsilon) + A + \xi$$



$$G(\xi, \eta, \varepsilon) = x'(\tau, \xi, \eta, \varepsilon) + x'(0, \xi, \eta, \varepsilon) = x(\tau, \xi, \eta, \varepsilon) + \eta$$

La condition d'anti-périodicité est équivalente à :

$$F(\xi, \eta, \varepsilon) = G(\xi, \eta, \varepsilon) = 0$$

On note que  $F(0, 0, 0) = G(0, 0, 0) = 0$  puisque  $x_0(t)$  est  $\tau$ -antipériodique et  $x'(0) = 0$ .

Pour le reste de la preuve, il est nécessaire d'évaluer les dérivées partielles premières de  $F$  et  $G$  en  $(0, 0, 0)$  et les dérivées partielles secondes de  $F$  en  $(0, 0, 0)$ . Pour cela, on énonce le résultat préliminaire suivant qu'on établit facilement en reprenant le calcul de Loud [9, preuve du lemme 1, p.18].

**Lemme 4.2.** *Soient  $B_1, B_2, B_3$  et  $B_4$  définies par*

$$B_1 = \int_0^\tau q(s)f(s)ds \quad B_2 = \int_0^\tau q'(s)f(s)ds$$

$$B_3 = \int_0^\tau p'(s)f(s)ds \quad B_4 = \int_0^\tau h_1'(s)f(s)ds$$

Alors en  $(0, 0, 0)$  les dérivées partielles premières de  $F(\xi, \eta, \varepsilon)$  et de  $G(\xi, \eta, \varepsilon)$  et les dérivées partielles secondes de  $F(\xi, \eta, \varepsilon)$  ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} F_\xi &= 0; & F_\eta &= 0; & F_\varepsilon &= 0; \\ G_\xi &= K\tau g(A)^2; & G_\eta &= 0; & G_\varepsilon &= -B_1 g(A)^2; \\ F_{\xi\xi} &= K^2\tau^2 g(A)^3; & F_{\xi\eta} &= -K\tau g(A); & F_{\eta\eta} &= 0; \\ F_{\xi\varepsilon} &= -B_2 - K\tau B_1 g(A)^2; & F_{\xi\varepsilon} &= B_1 + \frac{B_3}{g(A)^2}; & F_{\varepsilon\varepsilon} &= -B_1^2 g(A) \\ & & & & & + \frac{2B_1 B_2}{K\tau g(A)} - \frac{2B_4}{g(A)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Puisque  $G_\xi(0, 0, 0) \neq 0$ , comme dans [9], l'idée est de résoudre l'équation  $G(\xi, \eta, \varepsilon) = 0$  pour  $\xi$  comme fonction de  $\eta$  et  $\varepsilon$  :  $\xi = H(\eta, \varepsilon)$ . D'après (4.5) on a en  $(0, 0)$  :

$$H = 0; \quad H_\eta = 0; \quad H_\varepsilon = \frac{B_1}{K\tau g(A)} \quad (4.6)$$

Si on définit  $J(\eta, \varepsilon)$  par

$$J(\eta, \varepsilon) = F(H(\eta, \varepsilon), \eta, \varepsilon),$$

le problème est réduit à résoudre l'équation  $J(\eta, \varepsilon) = 0$  pour  $\eta$  comme fonction de  $\varepsilon$ .  $\xi$  est alors trouvée en fonction de  $\varepsilon$  par la relation  $\xi = H(\eta(\varepsilon), \varepsilon)$ .

Par des manipulations élémentaires des dérivées partielles données dans (4.5) et (4.6) on trouve en  $(0, 0)$

$$J = 0; \quad J_\eta = 0; \quad J_\varepsilon = 0$$

$$J_{\eta\eta} = 0; \quad J_{\eta\varepsilon} = \frac{B_3}{g(A)^2}; \quad J_{\varepsilon\varepsilon} = -\frac{2B_4}{g(A)}$$

En appliquant un théorème des fonctions implicites singulier adapté à cette situation ([6] page 101), on conclut qu'il existe une unique fonction  $\eta(\varepsilon)$  satisfaisant  $J(\eta(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ , et telle que pour  $\varepsilon = 0$

$$\eta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\eta}{d\varepsilon} = \frac{B_4 g(A)}{B_3}$$

$B_3 \neq 0$  correspond à l'hypothèse  $\int_0^\tau x_0''(t)f(t)dt \neq 0$ .

En utilisant  $H(\eta, \varepsilon)$  on peut trouver  $\xi$  en fonction de  $\varepsilon$  pour  $\varepsilon$  près de 0. On trouve pour  $\varepsilon = 0$

$$\xi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\xi}{d\varepsilon} = \frac{B_1}{K\tau g(A)}$$

La discussion précédente achève la solution des équations  $F(\xi, \eta, \varepsilon) = G(\xi, \eta, \varepsilon) = 0$  pour  $\xi$  et  $\eta$  en fonction de  $\varepsilon$  pour  $\varepsilon$  près de 0 et ceci prouve l'existence d'une solution anti-périodique pour  $\varepsilon$  petit.

Pour obtenir (4.2) on écrit

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + o(\varepsilon),$$

et par la méthode de [9, preuve du théorème 5, p.17] on obtient :

$$x_1(t) = h_1(t) + Cx_0'(t), \quad C = -\frac{B_4}{B_3}$$

## 5 Le cas général : preuve du théorème 3.1

Avant de faire la preuve du théorème 3.1 on a besoin du lemme suivant (cf. [3] et [6]).

### 5.1 Lemme

**Lemme 5.1.** *On considère le système*

$$x' = f(t, x, c), \quad (*)$$

*on suppose que  $f$  est anti-périodique d'anti-période  $\tau$ ,  $f_x$  est continue,  $f$  est continue en  $(t, x, c)$  quand  $(t, x)$  est dans un domaine  $V$  du plan  $(t, x)$  contenant la courbe  $(t, x^*(t))$  et quand  $|c|$  est petit où  $x^*$  est une solution  $\tau$  anti-périodique de l'équation  $(*)$  pour  $\mu = 0$ ,  $f$  admet des dérivées partielles par rapport à  $x_i$ , les composantes de  $x$ , qui sont continues en  $(t, x, c)$  et vérifiant  $\frac{\partial f}{\partial x_i}((t, x^*(t), c))$  est  $\tau$  périodique.*

*Si l'équation linéarisée de  $(*)$*

$$y' = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}((t, x^*(t), c))y = f_x(t, x^*(t), c)y$$

*n'a pas de solution d'anti-période  $\tau$ , alors pour  $|c|$  petite l'équation  $(*)$  admet une solution  $x = x(t, c)$  anti-périodique en  $t$  d'anti-période  $\tau$ , continu en  $(t, c)$  et avec  $x(t, 0) = x^*(t)$ .*

**Remarque :** La condition de non existence de solution anti-périodique du système

$$y' = f_x(t, x^*(t), c)y$$

est équivalente au fait qu'aucun exposant caractéristique de ce système n'est multiple de  $\frac{(2k+1)\pi}{\tau}$ .

**Preuve du Lemme 5.1 :**

La solution de  $(*)$  qui prend pour  $t = 0$  la valeur  $x^*(0) + \alpha$  où  $|\alpha|$  est petit sera notée

$$\varphi = \varphi(t, \alpha, c).$$

D'après l'unicité de  $\varphi$ , pour que cette solution soit anti-périodique d'anti-période  $\tau$  il faut et il suffit que

$$\varphi(\tau, \alpha, c) = -\varphi(0, \alpha, c)$$

ce qui veut dire

$$\varphi(\tau, \alpha, c) + x^*(0) + \alpha = 0.$$

Pour  $c = 0$  le système a la solution  $\alpha = 0$ .

Si le jacobien de ce système par rapport aux composantes de  $\alpha$  est non nul à  $c = 0$ ,  $\alpha = 0$ , alors le système admet une unique solution  $\alpha = \alpha(c)$  dans le voisinage de  $c = 0$ , où  $\alpha$  est continue en  $c$  et  $\alpha(0) = 0$ .

Le jacobien est le déterminant de la matrice

$$\varphi_\alpha(\tau, 0, 0) + I \quad (**)$$

Si le jacobien ne s'annule pas alors l'existence d'une solution anti-périodique  $x$  de (\*) est établi pour  $|c|$  petit en posant

$$\varphi(t, \alpha(c), c) = x(t, c)$$

De plus dans le voisinage de  $x^*(t)$ , cette solution est uniquement déterminée puisque  $\alpha(c)$  est unique.

Le jacobien est relié à l'équation linéarisée de (\*) par rapport à la solution  $x^*$ ; en effet si l'équation

$$\varphi'(t, \alpha, c) = f(t, \varphi(t, \alpha, c), c)$$

est différentiable par rapport aux composantes  $\alpha_i$  de  $\alpha$ , il en résulte que pour  $c = 0$ ,  $\alpha = 0$  et puisque  $\varphi(t, 0, 0) = x^*(t)$  que

$$\varphi'_\alpha(t, 0, 0) = f_x(t, x^*(t), 0)\varphi_\alpha(t, 0, 0)$$

Donc la matrice  $\Psi(t) = \varphi_\alpha(t, 0, 0)$  est une matrice solution de l'équation linéarisée et puisque  $\varphi_\alpha(0, 0, 0) = I$  alors c'est une matrice fondamentale, donc les nombres caractéristiques associés à l'équation linéarisée  $y' = f_x(t, x^*(t), 0)y$  sont les racines de :

$$\det(\Psi(\tau) - \lambda I) = 0$$

or  $\Psi(\tau) + I$  est précisément la matrice (\*\*) dont le déterminant est le jacobien.

Donc le jacobien s'annule si et seulement si  $\lambda = -1$  est une racine de  $\det(\Psi(\tau) - \lambda I) = 0$  et delà pour que l'équation (\*) admet une solution anti-périodique d'anti-période  $\tau$  il suffit que  $\lambda = -1$  ne soit pas une racine de  $\det(\Psi(\tau) - \lambda I) = 0$ .

## 5.2 Preuve du théorème 3.1

Soit  $x_\varepsilon(t)$  la solution anti-périodique trouvée dans le lemme 4.1. L'équation linéarisée de l'équation

$$x'' + g(x) = \varepsilon f(t), \quad (5.1)$$

au voisinage de  $x_\varepsilon(t)$ , est :

$$y'' + g'(x_\varepsilon(t))y = 0, \quad (5.2)$$

Si (5.2) a une solution  $\tau$ -anti-périodique non nulle alors cette solution est une solution  $2\tau$ -périodique non nulle de l'équation  $2\tau$ -périodique (5.2). D'après [9] ceci est impossible.

Donc d'après le lemme précédent, il existe une solution anti-périodique de l'équation (4.1) pour  $c$  suffisamment petit et qui se réduit à  $x_\varepsilon(t)$  pour  $c = 0$ .

## 6 Existence de 4 solutions anti-périodiques distinctes

**Lemme 6.1.** *Soit  $u, v$  et  $w$  3 solutions de*

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad \alpha \geq 0, \beta > 0$$

$$\text{Si } u + v + w \equiv 0 \text{ alors } uvw \equiv 0.$$

**Démonstration :** On a

$$u'' + \alpha u + \beta u^3 = 0$$

et

$$v'' + \alpha v + \beta v^3 = 0$$

donc

$$w'' + \alpha w = \beta(u^3 + v^3) = \beta[(u + v)^3 - 3uv(u + v)]$$

d'où

$$w'' + \alpha w + \beta w^3 = -3\beta uv(u + v) = 3\beta uvw$$

or

$$w'' + \alpha w + \beta w^3 = 0$$

donc

$$uvw = 0.$$

**Théorème 6.2.** *Soit  $x_0$  une solution anti-périodique non nulle de l'équation*

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad \alpha \geq 0, \beta > 0 \quad (6.1)$$

*d'anti-période minimale  $3\lambda$  et soit*

$$\psi(t) = x'_0(t) - x'_0(t + \lambda) + x'_0(t + 2\lambda).$$

Il existe  $\varepsilon$  et  $c$  positifs tels que l'équation

$$x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon \psi'(t) \quad (6.2)$$

admette au moins 3 solutions anti-périodiques distinctes d'anti-période minimale  $3\lambda$ .

**Remarque 6.3 :** L'équation (6.2) admet en fait au moins 4 solutions anti-périodiques distinctes puisqu'on sait déjà qu'elle admet une solution  $\lambda$ -anti-périodique [8].

**Démonstration :** on va commencer par montrer que  $f \equiv \psi'$  vérifie les hypothèses du théorème principal de ce papier.

On a  $\psi'$  est anti-périodique d'anti-période minimale  $\lambda$ ; de plus  $\psi' \not\equiv 0$  en effet :

Soient  $u = x'_0(t)$ ,  $v = -x'_0(t + \lambda)$  et  $w = x'_0(t + 2\lambda)$ .  
 $u$ ,  $v$  et  $w$  sont 3 solution  $3\lambda$  anti-périodiques de (7.1).

Si  $\psi' \equiv 0 \Rightarrow \psi = x'_0(t) - x'_0(t + \lambda) + x'_0(t + 2\lambda) \equiv 0 \Rightarrow x_0(t) - x_0(t + \lambda) + x_0(t + 2\lambda) = u + v + w \equiv 0$ .

D'où, d'après le lemme précédent,  $uvw \equiv 0$ .

Si  $u \not\equiv 0$  alors  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont 3 solutions non triviales de (7.1) et ont donc chacune un nombre fini de zéros sur  $(0, \lambda)$ . Il est donc impossible que  $uvw \equiv 0$ .  
 Donc  $u = x'_0(t) \equiv 0$ , ce qui est absurde.  
 Ainsi  $\psi' \not\equiv 0$ .

Vérifions que

$$\int_0^{3\lambda} x'_0(t) \psi'(t) dt = 0$$

et

$$\int_0^{3\lambda} x''_0(t) \psi'(t) dt \neq 0$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^{3\lambda} \psi'(t) x'_0(t) dt &= \int_0^\lambda \psi'(t) x'_0(t) dt + \int_\lambda^{2\lambda} \psi'(t) x'_0(t) dt + \int_{2\lambda}^{3\lambda} \psi'(t) x'_0(t) dt \\ &= \int_0^\lambda \psi'(t) \psi(t) dt = [\psi^2(t)]_0^\lambda = 0 \end{aligned}$$

et

$$\int_0^{3\lambda} \psi'(t)x_0''(t)dt = \int_0^\lambda \psi'^2(t)dt \neq 0.$$

Par conséquent  $f = \psi'$  vérifient les hypothèses du théorème principal, de plus  $g = \alpha x + \beta x^3 \in C^2$  impaire croissante et  $g^{-1}(0) = \{0\}$ . Enfin  $g$  est strictement convexe sur  $\mathbb{R}^+$ .

Ainsi, on peut appliquer le théorème principal et on a alors l'existence de  $\varepsilon$  et  $c$  positifs tels que l'équation (6.2) admette une solution anti-périodique d'anti-période minimale  $3\lambda$ .

Soit maintenant  $x$  une solution anti-périodique de (6.2) d'anti-période minimale  $3\lambda$ .

Posons

$$y = -x(t + \lambda)$$

et

$$z = x(t + 2\lambda)$$

on a

$$-y''(t) - cy'(t) - g(y(t)) = \varepsilon f(t + \lambda)$$

or

$$f(t + \lambda) = -f(t)$$

donc  $y$  est une autre solution de (6.2).

Pour  $z$  on a

$$z''(t) + cz'(t) + g(z(t)) = \varepsilon f(t + 2\lambda)$$

or

$$f(t + 2\lambda) = f(t)$$

donc  $z$  est aussi une autre solution de (6.2).

Par conséquent l'équation (6.2) admet 3 solutions anti-périodiques distinctes ; en effet  $x$  n'est pas  $\lambda$ -anti-périodique  $\Rightarrow x \neq y$ , de plus la période minimale de  $x$  est  $6\lambda \Rightarrow x \neq z$ .

**Remarque :** Puisque toute solution de (6.1) est analytique il en est de même pour  $f$ . Le théorème 6.2 améliore (pour  $\alpha = 0$ ) le résultat de Souplet [14] dans 2 directions :

- on obtient 4 solutions anti-périodiques au lieu de 2.
- $f$  est analytique.

## 7 Généralisation et cas particulier d'un terme forçant sinusoïdal

Soit  $x_0$  une solution  $3\lambda$ -anti-périodique de

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad \alpha, \beta > 0$$

On écrit

$$x_0(t) = \sum_{n \text{ impair}} x_n \cos\left(\frac{n\pi}{3\lambda}t\right)$$

puisque  $x_0$  est pair, de plus  $x_0 \in C^1(\mathbb{R})$  donc  $\sum_{n \text{ impair}} |x_n| < \infty$ .

$$\begin{aligned} x_0(t) - x_0(t + \lambda) + x_0(t + 2\lambda) &= \operatorname{Re}\left\{ \sum_{n \text{ impair}} x_n (1 + j^n + j^{2n}) e^{i\left(\frac{n\pi}{3\lambda}t\right)} \right\} \\ &= \sum_{k \text{ impair}} 3 x_{3k} \cos\left(\frac{k\pi}{\lambda}t\right) \end{aligned}$$

Puisque  $x_0(t) - x_0(t + \lambda) + x_0(t + 2\lambda)$  est non nul (lemme 6.1) alors il existe un  $k_0$  impair tel que  $x_{3k_0} \neq 0$ .

Soient  $J$  un ensemble d'entiers impairs contenant  $k_0$  et  $(\gamma_j)_{j \in J}$  telle que  $\sum_{j \in J} |\gamma_j| < \infty$ .

Posons

$$f(t) = \sum_{j \in J} \gamma_j \cos\left(\frac{j\pi}{\lambda}t\right)$$

Cherchons sous quelle condition sur les  $\gamma_j$ ,  $f$  vérifie les hypothèses du théorème principal.

Il est clair que  $f$  est anti-périodique d'anti-période minimale  $\lambda$ .

$$\begin{aligned} \int_0^{3\lambda} f(t)x_0'(t)dt &= \int_0^\lambda f(t)x_0'(t)dt + \int_\lambda^{2\lambda} f(t)x_0'(t)dt + \int_{2\lambda}^{3\lambda} f(t)x_0'(t)dt \\ &= \int_0^\lambda f(t)(x_0'(t) - x_0'(t + \lambda) + x_0'(t + 2\lambda))dt \\ &= - \int_0^\lambda \left( \sum_{j \in J} \gamma_j \cos\left(\frac{j\pi}{\lambda}t\right) \right) \left( \sum_{k \text{ impair}} x_{3k} \left(\frac{3k\pi}{\lambda}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\lambda}t\right) \right) dt \end{aligned}$$

or

$$\forall j \in J, k \text{ impair}, \int_0^\lambda \cos\left(\frac{j\pi}{\lambda}t\right) \sin\left(\frac{k\pi}{\lambda}t\right) dt = 0$$



donc

$$\int_0^{3\lambda} f(t)x_0'(t)dt = 0.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_0^{3\lambda} f(t)x_0''(t)dt &= \int_0^\lambda f(t)(x_0''(t) - x_0''(t+\lambda) + x_0''(t+2\lambda))dt \\ &= - \int_0^\lambda \left( \sum_{j \in J} \gamma_j \cos\left(\frac{j\pi}{\lambda}t\right) \right) \left( \sum_{k \text{ impair}} x_{3k} \left(\frac{3k^2\pi^2}{\lambda^2}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{\lambda}t\right) \right) dt \end{aligned}$$

or

$$\int_0^\lambda \cos\left(\frac{j\pi}{\lambda}t\right) \cos\left(\frac{k\pi}{\lambda}t\right) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j \\ \frac{\lambda}{2} & \text{si } k = j \end{cases}$$

donc

$$\int_0^{3\lambda} f(t)x_0''(t)dt = -\frac{3\pi^2}{2\lambda} \sum_{k \in J} k^2 \gamma_k x_{3k}$$

Ainsi si  $\sum_{k \in J} k^2 \gamma_k x_{3k} \neq 0$  alors  $\int_0^{3\lambda} f(t)x_0''(t)dt \neq 0$ .

Par conséquent, on a le résultat suivant.

**Théorème 7.1.** *Soit  $x_0$  une solution anti-périodique non nulle de l'équation*

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad \alpha, \beta > 0 \quad (7.1)$$

*d'anti-période minimale  $3\lambda$  et soit*

$$f(t) = \sum_{j \in J} \gamma_j \cos\left(\frac{j\pi}{\lambda}t\right)$$

*avec  $\sum_{k \in J} k^2 \gamma_k x_{3k} \neq 0$ .*

*Il existe  $\varepsilon$  et  $c$  positifs tels que l'équation*

$$x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon \sum_{j \in J} \gamma_j \cos\left(\frac{j\pi}{\lambda}t\right)$$

*admette au moins 3 solutions anti-périodiques distinctes d'anti-période minimale  $3\lambda$ .*

**Corollaire 7.2.** *Soit  $k_0$  tel que  $x_{k_0} \neq 0$  alors le théorème 7.1 est vrai pour  $f(t) = \cos\left(\frac{k_0\pi}{\lambda}t\right)$ .*

**Corollaire 7.3.**  $\forall \omega_0 \in ]\sqrt{\alpha}, +\infty[$ , il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $c > 0$  tels que l'équation

$$x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon \cos(3k_0\omega_0 t + \phi)$$

admette au moins 3 solutions anti-périodiques distinctes d'anti-période minimale  $\lambda_0 = \frac{\pi}{\omega_0}$ , pour tout  $\phi \in \mathbb{R}$ .

**Preuve :** D'après l'expression (2.2), il est clair que lorsque  $g(x) = \alpha x + \beta x^3$  on a

$$\lim_{E \rightarrow 0} \tau(A) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$$

et

$$\lim_{E \rightarrow +\infty} \tau(A) = 0$$

Ainsi par continuité lorsque  $A$  décrit l'intervalle  $]0, \infty[$ ,  $\tau(A)$  décrit l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}[$ .

Soit  $\omega_0 \in ]\sqrt{\alpha}, +\infty[$ , d'après les calculs faits au début de ce paragraphe et en désignant par  $x_0$  une solution  $\frac{\pi}{\omega_0}$ -anti-périodique, on a

$$x_0(t) - x_0\left(t + \frac{\pi}{3\omega_0}\right) + x_0\left(t + \frac{2\pi}{3\omega_0}\right) = \sum_{k \text{ impair}} 3x_{3k} \cos(3k\omega_0 t)$$

et puisque  $x_0(t) - x_0\left(t + \frac{\pi}{3\omega_0}\right) + x_0\left(t + \frac{2\pi}{3\omega_0}\right)$  est non nul (lemme 6.1) alors il existe un  $k_0$  impair tel que  $x_{3k_0} \neq 0$ .

Donc si  $f(t) = \cos(3k_0\omega_0 t)$  les conditions (3.3) et (3.4) du théorème principal sont vérifiées. On peut ensuite par translation étendre le résultat à  $f(t) = \cos(3k_0\omega_0 t + \phi)$ ,  $\forall \phi \in \mathbb{R}$ .

## 8 Existence de 3 solutions périodiques distinctes

En appliquant la méthode suivie dans le paragraphe 6 au cas périodique on obtient le résultat suivant qui constitue une application du travail de Loud [9].

**Théorème 8.1.** Soit  $x_0$  une solution périodique non nulle de l'équation

$$x'' + \alpha x + \beta x^3 = 0 \quad \alpha, \beta > 0 \tag{8.1}$$

de période minimale  $3T$  et soit

$$\psi(t) = x'_0(t) + x'_0(t+T) + x'_0(t+2T).$$

Il existe  $\varepsilon$  et  $c$  positifs tels que l'équation

$$x'' + cx' + \alpha x + \beta x^3 = \varepsilon \psi'(t) \quad (8.2)$$

admette au moins 3 solutions périodiques distinctes d'anti-période minimale  $3T$ .

**Démonstration :** La démonstration est analogue a celle du théorème 6.2. En effet, on commence par montrer que  $f = \psi'$  vérifie les hypothèses des théorème 5 et 7 de [9].

On a  $\psi'$  est périodique de période minimale  $T$ ; de plus  $\psi' \not\equiv 0$  : il suffit juste d'appliquer le lemme 6.1 (comme dans la démonstration du théorème 6.2) en prenant  $u = x'_0(t)$ ,  $v = x'_0(t + T)$  et  $w = x'_0(t + 2T)$ .

Vérifions que

$$\int_0^{3T} x'_0(t) f(t) dt = 0$$

et

$$\int_0^{3T} x''_0(t) f(t) dt \neq 0$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^{3T} \psi'(t) x'_0(t) dt &= \int_0^T \psi'(t) x'_0(t) dt + \int_T^{2T} \psi'(t) x'_0(t) dt + \int_{2T}^{3T} \psi'(t) x'_0(t) dt \\ &= \int_0^T \psi'(t) \psi(t) dt = [\psi^2(t)]_0^T = 0 \end{aligned}$$

et

$$\int_0^{3T} \psi'(t) x''_0(t) dt = \int_0^T \psi'^2(t) dt \neq 0.$$

Par conséquent  $f$  et  $g = \alpha x + \beta x^3$  vérifient les hypothèses des théorèmes 5 et 7 de [9] et on alors l'existence de  $\varepsilon$  et  $c$  positifs tels que l'équation (8.2) admette une solution périodique de période minimale  $3T$ .

Soit maintenant  $x$  est une solution périodique de (8.2) de période minimale  $3T$ .

Posons

$$\begin{aligned} y &= x(t + T) \\ z &= x(t + 2T) \end{aligned}$$

on a

$$y''(t) + cy'(t) + g(y(t)) = \varepsilon f(t + T)$$

or

$$f(t + T) = f(t)$$

donc  $y$  est une autre solution de (8.2).

De même pour  $z$ .

Par conséquent l'équation (8.2) admet 3 solutions périodiques distinctes.

**Remarque :** D'après le théorème 12 de [9], si  $\alpha \neq \frac{4n^2\pi^2}{T^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  alors il existe  $\varepsilon$  et  $c$  positifs tels que l'équation (8.2) admette une unique solution périodique de période minimale  $T$  proche de 0.

Par conséquent l'équation (8.2) admet alors 4 solutions périodiques : une de période minimale  $T$  et 3 de période minimale  $3T$ .

◇

## Références

- [1] A. BEAULIEU, Etude de l'unicité des solutions anti-périodiques pour des équations d'évolution non linéaires, *Portug. Math.* 49, 4 (1992).
- [2] A. BAHRI, H. BERESTYCKI, Forced vibrations of superquadratic Hamiltonian systems, *Acta Math.* (1984)
- [3] E.A. CODDINGTON, N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, New York, 1955.
- [4] M.L. CARTWRIGHT, J.E. LITTLEWOOD, On nonlinear differential equations of the second order, *Ann. of Math.* 48, 472-404 (1947)
- [5] T. DING, Boundedness of solutions of Duffing's equation, *J. Differential Equations* 61 (1986), no. 2, 178–207.
- [6] K.O. FRIEDRICHS, *Advanced ordinary differential equations*, New York, 1954.
- [7] K.O. FRIEDRICHS, J.J. STOKER, Forced vibrations of systems with nonlinear restoring force, *Quarterly of Applied Math.* vol. 1, 97-115 (1943).
- [8] A. HARAUX, Antiperiodic solutions of some nonlinear evolution equations. *Manuscripta Math.* 63, 479-505 (1989).
- [9] W.S. LOUD, *Periodic Solutions of  $x'' + cx' + g(x) = \varepsilon f(t)$* , *Mem. Amer. Math. Soc.* 31, Providence (1958).
- [10] W.S. LOUD, Boundedness and convergence of solutions of  $x'' + cx' + g(x) = e(t)$ , *Duke Math. J.* vol. 24, 63-72 (1957).
- [11] M.E. LEVENSON, Harmonic and subharmonic response for the Duffing equation  $x'' + \alpha x + \beta x^3 = F \cos(\omega t)$  ( $\alpha > 0$ ), *J. Appl. Phys.* vol. 20, 1045-1051 (1949).
- [12] N. LEVINSON, Transformation Theory of Nonlinear Differential Equations of the second order, *Annals of Mathematics*, vol 45 (1944) p723-737.
- [13] H. OKOCHI, On the existence of periodic solutions to nonlinear abstract parabolic equations, *J. Math. Soc. Japan* 40 (3), 541-553 (1988).
- [14] F. SOUPLET, Uniqueness and nonuniqueness results for the Antiperiodic solutions of some second order Nonlinear Evolution Equations, *Nonlinear Analysis Theory*, vol 26 (1996) pp.1511-1525.
- [15] J.J STOKER, *Nonlinear vibrations in mechanical and electrical systems*, New York, 1950.