



HAL
open science

Entiers aléatoires, ensembles de Sidon, densité dans le groupe de Bohr et ensembles d'analyticité

Jean-Pierre Kahane, Yitzhak Katznelson

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Kahane, Yitzhak Katznelson. Entiers aléatoires, ensembles de Sidon, densité dans le groupe de Bohr et ensembles d'analyticité. 2007. hal-00150216

HAL Id: hal-00150216

<https://hal.science/hal-00150216>

Preprint submitted on 29 May 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Entiers aléatoires, ensembles de Sidon, densité dans le groupe de Bohr et ensembles d'analyticité

Jean-Pierre Kahane et Yitzhak Katznelson

(Note présentée aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences)

Résumé. On sélectionne des entiers n au hasard indépendamment les uns des autres, avec la probabilité ϖ_n , et on étudie les propriétés de la suite Λ obtenue en distinguant deux cas : si $\limsup_{n \rightarrow \infty} n\varpi_n < \infty$, Λ est p.s. un ensemble de Sidon non-dense dans le groupe de Bohr ; si $\lim_{n \rightarrow \infty} n\varpi_n = \infty$, Λ est p.s. dense dans le groupe de Bohr et n'est pas un ensemble de Sidon, et, de plus, c'est un ensemble d'analyticité.

Random sequences of integers, Sidon sets, density in the Bohr group, and sets of analyticity

Abstract. We study properties of a sequence Λ obtained by a random selection of integers n , where $n \in \Lambda$ with probability ϖ_n , independently of the other choices. We distinguish two cases : if $\limsup_{n \rightarrow \infty} n\varpi_n < \infty$, Λ is a.s. a Sidon set, non-dense in the Bohr group ; if $\lim_{n \rightarrow \infty} n\varpi_n = \infty$, then Λ is a.s. a set of analyticity and is dense in the Bohr group.

Abridged English version

The work described in this Note deals with harmonic-analytic properties of random sequences of positive integers : that of being a Sidon set, a set of analyticity, dense, or non-dense in the Bohr group \mathbb{B} , (the Bohr compactification of the integers, the dual group of \mathbb{T}_d , the circle endowed with the discrete topology.)

A sequence $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ is a Sidon set if $c_0(\Lambda) = A(\Lambda)$, that is : every sequence $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ which tends to 0 as $|\lambda| \rightarrow \infty$ is the restriction to Λ of \hat{f} for some $f \in L^1(\mathbb{T})$. Λ is a set of analyticity if only analytic functions operate in $A(\Lambda)$, that is, every function F

defined on \mathbb{R} such that $F \circ \varphi \in A(\Lambda)$ for every real-valued $\varphi \in A(\Lambda)$ is analytic in some neighborhood of 0.

Random sequences provide classes of sequences for which there is a *statistical* answer to some long standing open problems :

a. The *dichotomy* problem : is every sequence $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ is either a Sidon set or a set of analyticity?

b. Can a Sidon set be dense in \mathbb{B} ?

The class of random sequences studied in this work is different from those appearing in earlier work, [1], [2], [3]. We consider sets obtained from a sequence $\mathbf{w} = \{w_n\}$, $0 \leq w_n < 1$ by introducing independent Poisson variables ξ_n with parameters w_n , or Bernoulli zero-one variables β_n with probability $\mathbf{P}(\beta_n = 1) = \varpi_n = (1 - e^{-w_n})$ and set $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{w}}(\omega) = \{n : \beta_n = 1\}$ (or $\Lambda = \{n : \xi_n \geq 1\}$). Notice that the sequences defined by $\{\xi_n\}$ are the same and have the same statistics as those given by β_n , but the Poisson variables give different weights to some of the selected points, which simplifies some computations.

For “reasonably regular” sequences of parameters we obtain a statistical dichotomy:

Theorem 1. *If $nw_n = O(1)$ then Λ is a.s. a Sidon set and is non-dense in \mathbb{B} .*

Theorem 2. *If $\lim_{n \rightarrow \infty} nw_n = \infty$ then Λ is a.s. a set of analyticity dense in \mathbb{B} .*

Observe that “reasonable regularity” is needed. The condition $\lim_{n \rightarrow \infty} nw_n = \infty$ in Theorem 2 cannot be replaced by $\limsup_{n \rightarrow \infty} nw_n = \infty$: if $w_n = 1/2$ for $n \in \{3^k\}_{k=1}^{\infty}$ and $w_n = 1/n$ for all other n , the sequence Λ obtained is a union of two Sidon sets, and hence Sidon.

Cette note fait suite à des travaux anciens, [1], [2], [3], relatifs aux ensembles de Helson et de Sidon d’une part, aux ensembles d’analyticité et à la densité dans le groupe de Bohr d’autre part, qui ont introduit le procédé appelé aujourd’hui sélection aléatoire. Nous allons rappeler le sens de ces termes.

Nous partirons d’une suite positive $\mathbf{w} = \{w_n\}$ et nous lui associerons une suite aléatoire $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{w}}(\omega)$ ($\omega \in \Omega$, espace de probabilité) de l’une des manières équivalentes que voici :

1) $\Lambda = \{n \in \mathbb{N} : \xi_n > 0\}$, où ξ_n sont des variables aléatoires (v.a.) indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètres w_n ($= \mathbf{E}(\xi_n)$).

2) $\Lambda = \{n \in \mathbb{N} : \beta_n > 0\}$, où β_n sont des variables de Bernoulli indépendantes, d’espérance $\varpi_n = 1 - e^{-w_n} = \mathbf{P}(\beta_n = 1)$.

Dans les énoncés qui suivent, on peut écrire ϖ_n aussi bien que w_n . La définition 1 est utile dans certaines démonstrations.

Théorème 1. *Si $w_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ($n \rightarrow \infty$), il est presque sûr que Λ est un ensemble de Sidon, non-dense dans le groupe de Bohr \mathbb{B} .*

Théorème 2. *Si $\lim_{n \rightarrow \infty} nw_n = \infty$, il est presque sûr que Λ est un ensemble d'analyticité (donc n'est pas un ensemble de Sidon), dense dans \mathbb{B} .*

Ces résultats sont à comparer aux deux problèmes toujours ouverts :

1) (problème de “dichotomie”) une partie de \mathbb{Z} est-elle nécessairement soit un ensemble de Sidon, soit un ensemble d'analyticité ?

2) (problème de l'adhérence dans \mathbb{B} d'un ensemble de Sidon) un ensemble de Sidon dans \mathbb{Z} est-il toujours non-dense dans \mathbb{B} ? On sait, [4], que s'il existe un ensemble de Sidon dont l'adhérence dans \mathbb{B} contient un ouvert non vide, alors il existe un ensemble de Sidon dense dans \mathbb{B} .

G étant un groupe abélien localement compact, on désigne par $A(G)$ l'algèbre des fonctions continues sur G qui sont transformées de Fourier de fonctions intégrables sur le groupe dual, Γ . Si A est un fermé dans G , $A(E)$ désigne l'algèbre des restrictions à E des $f \in A(G)$. Si E est un compact et que $A(E) = C(E)$, espace des fonctions continues sur E , on dit que E est un ensemble de Helson. Quand G est discret et que $A(E) = c_0(E)$, espace des fonctions définies sur E et tendant vers 0 à l'infini, on dit que E est un ensemble de Sidon. Dans la suite, on s'intéresse aux cas $G = \mathbb{T}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$, ou \mathbb{B} .

Les fonctions analytiques $F(z)$ opèrent dans $A(G)$, c'est-à-dire que $F \circ f \in A(G)$ lorsque $f \in A(G)$ et que f prend ses valeurs dans le domaine de F . Inversement, les seules fonctions définies sur un voisinage réel de 0 qui opèrent dans $A(G)$ sont les fonctions analytiques (nulles en 0 si G n'est pas compact). On dit que E est un ensemble d'analyticité si cela a lieu en remplaçant $A(G)$ par $A(E)$. Ni les ensembles de Helson ni les ensembles de Sidon ne sont ensembles d'analyticité.

\mathbb{B} , le compactifié de Bohr de \mathbb{Z} , est le groupe dual de \mathbb{T}_d (\mathbb{T} discret). Sa topologie est la moins fine qui rende continus les caractères $\beta \rightarrow \langle \beta, t \rangle$; une sous-base en est la famille des ensembles $U(\tau, \eta, \zeta) = \{\beta : |\langle \beta, \tau \rangle - \zeta| < \eta\}$, $\tau \in \mathbb{T}$, $\eta > 0$, et $|\zeta| = 1$.

Schéma des démonstrations.

Si $\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}''$ ($w_n = w'_n + w''_n$), la réunion de $\Lambda_{\mathbf{w}'}$ et $\Lambda_{\mathbf{w}''}$ indépendants a la même loi que $\Lambda_{\mathbf{w}}$. On renforce le théorème 1 en augmentant les w_n , et le théorème 2 en les diminuant.

Preuve du théorème 1. On prend $w_n = \frac{\alpha}{n}$. Si α est assez petit ($\alpha \log 3 < 1$ suffit), Λ est un ensemble quasi-indépendant, c'est-à-dire sans relation linéaire à coefficients $-1, 0, 1$ non tous nuls entre ses éléments. En général, Λ est p.s. une réunion finie d'ensembles quasi-indépendants, qu'on sait être un ensemble de Sidon.

La non-densité résulte de la proposition suivante : si α est assez petit ($\alpha < \alpha(\varepsilon)$), il existe p.s. un ensemble dense de t dans \mathbb{T} tel que $[-\varepsilon, \varepsilon]$ contienne tous les points de Λt sauf un ensemble fini.

Pour démontrer la proposition, on part de la fonction triangle d'intégrale 1 et de support $[-\varepsilon, \varepsilon]$, soit f , et d'un intervalle $I \subset \mathbb{T}$, et on étudie la martingale positive

$$Y_N = \int_I \prod_{n=1}^N (f(nt))^{\xi_n} \exp\left(-\frac{\alpha}{n}(f(nt) - 1)\right) dt.$$

Sous la condition $\alpha < \varepsilon^2$, elle converge dans $L^2(\Omega)$, et cela donne le résultat voulu. Voici les étapes de calcul : on pose $L_N(t) = \sum_{n=1}^N \frac{\cos 2\pi nt}{n}$ et on vérifie que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_N^2) &= \iint_{I \times I} \exp \sum_{jk \neq 0} \alpha \hat{f}_j \hat{f}_k L_N(js + kt) ds dt \\ &\leq \prod_{jk \neq 0} \left(\iint_{I \times I} \exp \alpha \hat{f}_j \hat{f}_k L_N(js + kt) ds dt \right)^{1/p_{jk}} \end{aligned}$$

avec $p_{jk}^{-1} = \hat{f}_j \hat{f}_k (\sum_{jk \neq 0} \hat{f}_j \hat{f}_k)^{-1}$. En majorant $\iint_{I \times I}$ par $\iint_{\mathbb{T} \times \mathbb{T}}$, et $L_N(t)$ par $\log \frac{1}{|\sin \pi t|} + C$ on obtient

$$(1) \quad \mathbf{E}(Y_N^2) \leq \int_{\mathbb{T}} \exp \alpha \sum_{jk \neq 0} \hat{f}_j \hat{f}_k \left(\log \frac{1}{|\sin \pi t|} + C \right) dt,$$

et cette intégrale est bornée quand $\alpha \sum_{jk \neq 0} \hat{f}_j \hat{f}_k < 1$.

Preuve du théorème 2. On suppose $\lim_{n \rightarrow \infty} n w_n = \infty$. Posons $\Lambda_N = \Lambda \cap [1, \dots, N]$. Si Λ était un ensemble de Sidon, on aurait $|\Lambda_N| = O(\log N)$ ($N \rightarrow \infty$), ce qui, p.s., n'est pas le cas.

Preuve que Λ est un ensemble d'analyticité. Elle s'inspire de [1]. Quitte à diminuer les w_n , on suppose qu'à partir d'un certain rang ils sont constants sur chaque intervalle joignant deux multiples successifs d'une puissance de 2 donnée. On sait que, pour tout $0 < c < 1$ et tout $r > 0$ assez grand, il existe $\varphi \in A(\mathbb{T})$ réelle telle que $\|\varphi\|_{A(\mathbb{T})} < r$ et $\|\mu e^{-i\varphi}\|_{PM(\mathbb{T})} < e^{-cr}$, où μ est la mesure de Haar et $PM(\mathbb{T})$ l'espace des pseudomesures, dual de $A(\mathbb{T})$. Il s'agit, pour des r arbitrairement grands, de montrer qu'il existe, avec une probabilité arbitrairement voisine de 1, une partie finie Λ_r , une mesure τ_r portée par Λ_r et une fonction réelle $\psi_r \in A(\mathbb{R})$, telles que $\|\psi_r\|_{A(\mathbb{R})} < Cr$ et $\|\tau_r e^{i\psi_r}\|_{PM(\mathbb{R})} < C \|\tau_r\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{R})} e^{-cr}$, $C > 0$ et $c \in (0, 1)$ étant des constantes absolues.

L'idée est de choisir $\tau_r = \sum_F \xi_n \delta_n$, la somme étant prise sur un ensemble F de valeurs de n dépendant convenablement de r et comportant des plages de constance pour w_n . L'étude déterministe consiste à obtenir ces inégalités quand on remplace τ_r

par $\sigma_r = \mathbf{E}(\tau_r) = \sum_F w_n \delta_n$, et l'étude probabiliste vise à montrer que $\|(\tau_r - \sigma_r)e^{i\psi_r}\|_{PM(\mathbb{R})}$ est négligeable au regard de $\|\tau_r\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{R})}e^{-cr}$.

Preuve de la densité dans \mathbb{T} . Elle est inspirée de [2], [3]. Voici la proposition clé : si $w_n = \frac{\alpha}{n}$ et $\alpha|I| > 1$ (I un intervalle sur \mathbb{T}), il est presque sûr que, pour tout irrationnel $t \in \mathbb{T}$, $\Lambda t \cap I \neq \emptyset$. Cette proposition admet une version multidimensionnelle, dans laquelle l'irrationnel $t \in \mathbb{T}$ est remplacé par un générateur $\mathbf{t} \in \mathbb{T}^s$, et qui entraîne la densité dans \mathbb{B} .

Pour établir $\Lambda t \cap I \neq \emptyset$ pour tout t , l'idée est de se ramener à un ensemble fini de valeurs de t , quitte à réduire I . Les étapes de la preuve sont les suivantes :

- 1) on approche I par un intervalle intérieur J , à distance d des extrémités de I
- 2) on approche $\mathbb{1}_J$ dans $L^1(\mathbb{T})$ par une fonction continue f , $0 \leq f \leq \mathbb{1}_J$
- 3) on approche uniformément f par un polynôme trigonométrique, de degré k
- 4) on approche \mathbb{T} par un ouvert $G = \{t : \forall j \in \{1, 2, \dots, k\} |\sin \pi jt| > \delta\}$ et on vérifie que pour un β arbitrairement proche de $\alpha|I|$ et pour un $C = C(\beta, \delta)$ fini on a

$$\int_G \mathbf{P}(\Lambda_N t \cap J = \emptyset) dt < CN^{-\beta}$$

- 5) on choisit $M = \frac{N}{d}$ et on vérifie qu'il existe un $\vartheta \in \mathbb{T}$ tel que

$$\sum_{\vartheta + mM^{-1} \in G} \mathbf{P}(\Lambda_N(\vartheta + mM^{-1}) \cap J = \emptyset) < CMN^{-\beta} = o(1)(N \rightarrow \infty)$$

- 6) on approche tout $t \in G$ donné par un $\vartheta + mM^{-1} \in G$ qui en est à distance $< d$, d'où $\mathbf{P}(\Lambda t \cap I = \emptyset) = 0$.

Remarques sur les suites d'entiers dans le groupe de Bohr \mathbb{B} .

Différents critères de densité et des exemples sont donnés dans [3].

Les ensembles I_0 de Hartman et Ryll-Nardzewski forment une classe particulière d'ensembles de Sidon, et leur adhérence dans \mathbb{B} est un ensemble de Helson. Il a été conjecturé que tout ensemble de Sidon soit une réunion finie d'ensembles I_0 . Il s'ensuivrait que l'adhérence d'un ensemble de Sidon soit un ensemble de Helson dans \mathbb{B} , [5].

En complément du problème 2, on peut donc se demander si l'adhérence dans \mathbb{B} d'un ensemble de Sidon est nécessairement un ensemble de Helson. Est-ce nécessairement un ensemble de mesure de Haar nulle ?

En ce qui concerne les entiers aléatoires, le théorème 1 répond à la question de non-densité, mais laisse ouverte la question de la mesure de Haar de l'adhérence de la suite Λ .

Références

- [1] Y. Katznelson and P. Malliavin. Vérification statistique de la conjecture de la dichotomie sur une classe d'algèbres de restriction. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 262 : 490–492, 1966.
- [2] Y. Katznelson. Suites aléatoires d'entiers. *L'analyse harmonique dans le domaine complexe, Montpellier, 1972, Springer Lecture Notes in Math*, 336 : 148–152, 1973.
- [3] Y. Katznelson. Sequences of integers dense in the Bohr group. *Proc. Royal Inst. Tech. Stockholm*, 79–86, 1973.
- [4] L. Thomas Ramsey. Bohr cluster points of Sidon sets *Colloq. Math.* 68, 285–290, 1995.
- [5] L. Thomas Ramsey. Comparisons of Sidon and I_0 sets, *Colloq. Math.* 70, 103–132, 1996.

Jean-Pierre Kahane, <jean-pierre.kahane@math.u-psud.fr>,
Yitzhak Katznelson, <katznel@math.stanford.edu>.