



HAL
open science

Préservation de l'observabilité en présence de défauts de capteurs

Do Hieu Trinh

► **To cite this version:**

Do Hieu Trinh. Préservation de l'observabilité en présence de défauts de capteurs. JD-JN-MACS 2007 - 2èmes Journées Doctorales/Journées Nationales MACS, Jul 2007, Reims, France. hal-00149054

HAL Id: hal-00149054

<https://hal.science/hal-00149054>

Submitted on 24 May 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Préservation de l’observabilité en présence de défauts de capteurs

Do Hieu TRINH¹

¹Laboratoire d’Automatique de Grenoble
LAG-CNRS, ENSIEG-INPG,
BP 46, 38402 Saint Martin d’Hères, France

Do-Hieu.Trinh@inpg.fr
<http://www.lag.ensieg.inpg.fr/>

Résumé— Dans cet article, on s’intéresse à l’analyse de l’observabilité dans le cadre des systèmes structurés. Il s’avère que le système est structurellement observable si et seulement si le système est connecté à la sortie et ne contient aucune contraction. Nous nous concentrons sur la préservation de l’observabilité en présence de défauts de capteurs. Nous considérons les systèmes linéaires observables et nous nous demandons si un système donné restera observable en présence de défaut de capteur. Plus précisément, nous caractériserons parmi les capteurs ceux qui sont critiques c’est à dire ceux dont les défauts mènent à la perte d’observabilité, ceux qui sont inutiles pour l’observabilité et l’ensemble de ceux qui sont utiles sans être critiques. En utilisant une approche basée sur la théorie des graphes, nous classons les capteurs en fonction de leur importance successivement pour la préservation de la connexion à la sortie, l’absence de contraction et puis la préservation de l’observabilité.

Mots-clés— Systèmes linéaires structurés, observabilité, défauts de capteurs.

I. INTRODUCTION

Les systèmes physiques sont souvent représentés par des modèles d’état dont les paramètres des matrices sont en général mal connus. Dans ce travail, on considérera les systèmes structurés qui dépendent des paramètres non nuls dont les positions sont connues. Ce type de système représente une classe importante de systèmes linéaires dépendants de paramètres qui peuvent modéliser efficacement un système non linéaire autour de différents points de fonctionnement, voir l’exemple d’une colonne de distillation dans [1]. Pour de tels systèmes on peut étudier des propriétés dites génériques, c’est à dire des propriétés qui sont vraies pour presque toutes valeurs des paramètres libres. A ces systèmes structurés, on associe des graphes qui sont un outil très efficace pour l’étude des propriétés génériques [2]. Il a été montré en particulier que l’étude d’ensembles de chemins entrée-sortie sur le graphe permettait de résoudre de façon élégante des problèmes tels que le découplage et le rejet de perturbations [3]. La commandabilité des systèmes linéaires structurés a été étudiée par un certain nombre d’auteurs dans les années 70 [2], [4], [5]. Ces résultats peuvent être dualisés pour avoir les conditions d’observabilité générique.

L’étude de l’observabilité sous l’aspect de localisation des capteurs ou en présence de défauts de capteurs a été abordée en particulier en génie chimique mais la plupart des

modèles sont des modèles statiques. L’observabilité a été également étudiée dans le cadre des modèles qualitatifs (contraintes/variables) de manière structurelle, voir [6]. Dans cet article, nous considérons les modèles dynamiques et nous étudions la préservation de l’observabilité en présence de défauts de capteurs dans le cadre structurel.

Il s’avère que le système est structurellement observable si et seulement si le graphe du système est connecté à la sortie et ne contient aucune contraction. La contraction est une condition graphique qui exprime que la matrice $[C^T; A^T]^T$ du système $\dot{x} = Ax, y = Cx$ n’est pas de rang plein donc que $[C^T, C^T A^T, \dots, C^T A^{Tn-1}]^T$ n’est pas non plus de rang plein. Si le graphe associé n’est pas connecté à la sortie, un état au moins n’aura d’influence sur aucune sortie et ne sera donc pas observable. En cas de défauts de capteurs, nous étudierons la préservation de la connexion à la sortie aussi bien que l’absence de contraction. À partir de ces analyses, nous étudierons la préservation de l’observabilité en cas de défauts de capteurs. Nous déterminerons les capteurs critiques, qui s’appelleront essentiels, aussi bien que les capteurs inutiles. Nous illustrerons les résultats sur des exemples académiques simples et nous donnerons les algorithmes de combinatoire classiques pour obtenir les solutions.

Les résultats présentés ont été démontrés dans [7]. Dans cet article, nous essayons de présenter de manière pédagogique les phénomènes qui conduisent à la perte de l’observabilité et à sa préservation en présence de défauts de capteurs.

Le sommaire de cet article est le suivant. Les systèmes linéaires structurés sont présentés dans le paragraphe II. Nous revisitons des conditions structurelles d’observabilité dans le paragraphe III. Nous formulons le problème de la préservation de l’observabilité en présence de défauts de capteurs dans le paragraphe IV. Dans le paragraphe V nous étudions la préservation de la connexion à la sortie et dans le paragraphe VI l’absence de contraction. Le problème de la préservation de l’observabilité en présence de défauts de capteurs est finalement considéré dans le paragraphe VII. Quelques remarques en guise de conclusion finissent l’article.

II. SYSTÈMES LINÉAIRES STRUCTURÉS

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les systèmes linéaires structurés. Plus de détails peuvent être trouvés dans [3].

Considérons un système linéaire décrit par Σ_Λ . Dans ce travail, nous serons seulement concernés par l'observabilité et nous ne tiendrons pas compte des variables d'entrée. Nous avons donc :

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}, \quad (1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur de sortie. A et C sont des matrices de dimensions appropriées.

Ce système est appelé système linéaire structuré si les éléments de la matrice composite $J = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ sont soit fixés à zéro soit des paramètres libres. On note $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ l'ensemble des paramètres libres de la matrice J . La structure du système est donnée par les positions des paramètres fixés à zéro et des paramètres libres. Un système linéaire structuré représente une classe importante de systèmes linéaires dépendants de paramètres. Pour de tels systèmes, on étudie les propriétés génériques c'est à dire les propriétés qui sont vraies pour presque toutes les valeurs des paramètres λ_i [8].

Un graphe orienté $G(\Sigma_\Lambda) = (Z, W)$ peut être facilement associé au système structuré Σ_Λ du type (1) où la matrice $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ est structurée :

- L'ensemble de sommets $Z = X \cup Y$ où X est l'ensemble de sommets d'état $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et Y est l'ensemble de sommets de sortie $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$.
- L'ensemble d'arcs $W = \{(x_i, x_j) | A_{ji} \neq 0\} \cup \{(x_i, y_j) | C_{ji} \neq 0\}$, où A_{ji} (resp. C_{ji}) est l'élément (j, i) de la matrice A (resp. C).

Dans un graphe $G(\Sigma_\Lambda)$, on définit un chemin de $i_{\mu 0}$ à $i_{\mu q}$ comme une série d'arcs consécutifs $(i_{\mu 0}, i_{\mu 1}), (i_{\mu 1}, i_{\mu 2}), \dots, (i_{\mu q-1}, i_{\mu q})$ tels que $i_{\mu t} \in Z$ pour $t = 0, 1, \dots, q$ et $(i_{\mu t-1}, i_{\mu t}) \in W$ pour $t = 1, 2, \dots, q$. Si $i_{\mu 0} \in X$ et $i_{\mu q} \in Y$, le chemin est dit chemin état-sortie. Le système Σ_Λ est dit connecté à la sortie si pour n'importe quel sommet d'état x_i , il existe un chemin état-sortie avec sommet initial x_i .

Nous utilisons également les graphes non orientés composés de sommets et d'arcs non orientés. Dans de tels graphes, les chemins non orientés sont appelés les chaînes.

Nous donnons maintenant un exemple très simple afin d'illustrer les notions précédentes et ensuite, l'observabilité structurelle.

Exemple 1: Considérons Σ_Λ le système linéaire structuré défini par ses matrices structurées :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [\lambda_4 \quad \lambda_5 \quad \lambda_6], \quad (2)$$

Son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 1.

III. OBSERVABILITÉ STRUCTURELLE

La commandabilité structurelle ou la notion duale d'observabilité structurelle ont été étudiées dans le passé [2],

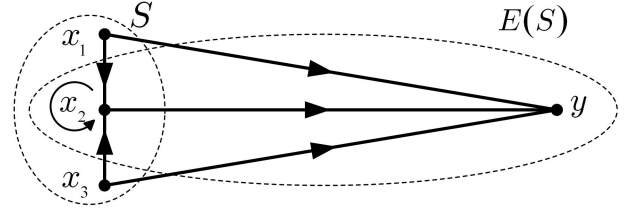


Fig. 1. $G(\Sigma_\Lambda)$ et la contraction de l'Exemple 1

[8]. Rappelons qu'un système est structurellement observable s'il est observable pour presque toutes les valeurs des paramètres. On définit le concept de contraction qui est la notion duale de la dilatation définie par Lin dans l'étude de la commandabilité.

Définition 1: On considère Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) et son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ où l'ensemble des sommets est Z et l'ensemble des arcs est W . On considère un ensemble S de k_S sommets d'état. Notons $E(S)$ l'ensemble des sommets w_i pour $i = 1, \dots, l_S$ de Z tels qu'il existe un arc (x_j, w_i) de W où $x_j \in S$. S est une contraction si

$$k_S - l_S = d_S > 0 \quad (3)$$

Reconsidérons le système structuré Σ_Λ de l'Exemple 1. Dans cet Exemple 1, on a une contraction $S = \{x_1, x_2, x_3\}$ parce que $E(S) = \{x_2, y\}$ et $k_S - l_S = 1$ comme le montre la Figure 1.

Rappelons la caractérisation graphique de l'observabilité structurelle, qui sera utilisée dans la suite [2], [8] :

Théorème 1: On considère Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Ce système est structurellement observable si et seulement si :

1. Σ_Λ est connecté à la sortie,
2. $G(\Sigma_\Lambda)$ ne contient pas de contraction.

Revenons sur le système Σ_Λ de l'Exemple 1. Ce système a une contraction, il n'est donc pas observable bien que tous ses sommets d'état soient connectés à la sortie. Nous pouvons vérifier la matrice d'observabilité :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \lambda_1 \lambda_5 & \lambda_2 \lambda_5 & \lambda_3 \lambda_5 \\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_5 & \lambda_2^2 \lambda_5 & \lambda_2 \lambda_3 \lambda_5 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

qui a un rang générique de 2. Ce système est génériquement non observable, ce qui implique qu'il n'est pas observable quelle que soit la valeur des paramètres. La cause de la non observabilité dans ce cas est liée à la structure du système. Présentons un deuxième exemple pour illustrer l'observabilité générique.

Exemple 2: Considérons le système structuré Σ_Λ suivant :

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [\lambda_2 \quad \lambda_3], \quad (5)$$

Son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 2.

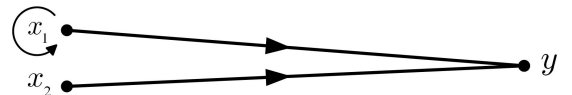


Fig. 2. $G(\Sigma_\Lambda)$ pour l'Exemple 2

Ce système n'a pas de contraction et il est connecté à la sortie donc il est génériquement observable. Vérifions la matrice d'observabilité :

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

Cette matrice a un rang générique 2. Ce rang est inférieur à 2 quand $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$ ou $\lambda_3 = 0$.

Dans la littérature, nous pouvons trouver d'autres conditions d'observabilité équivalentes à celles du Théorème 1. Par exemple dans [2], [8], [3], l'observabilité peut être caractérisée par le fait que l'ensemble des sommets d'état peut être recouvert par une forme graphique particulière appelée *cactus* qui rassemble les deux conditions du Théorème 1.

IV. FORMULATION DU PROBLÈME

Dans cet article, nous abordons le problème de la préservation de l'observabilité en présence de défauts de capteurs. Nous nous concentrerons ici sur l'analyse de l'observabilité, qui est fortement sensible aux défauts de capteurs. Nous étudierons la préservation de la connexion à la sortie et l'absence de contraction en présence de défauts de capteurs.

Nous classerons les capteurs en trois catégories : les capteurs essentiels, qui sont nécessaires pour préserver la propriété ; les capteurs inutiles, qui ne jouent aucun rôle pour le problème et les capteurs utiles.

Définition 2: On considère Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) et une propriété \mathcal{P} vraie pour ce système. Nous appelons solution du problème de défauts de capteurs un ensemble de capteurs sans défauts $V \subset \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ tels que \mathcal{P} reste vraie avec l'ensemble V . Pour cette propriété \mathcal{P} , un capteur y^* peut être classé dans une de trois catégories suivantes :

1. y^* est dit *capteur inutile* si pour toute solution V qui contient y^* , $\{V \setminus y^*\}$ est encore une solution pour \mathcal{P} .
2. y^* est dit *capteur utile* si y^* n'est pas inutile.
3. y^* est dit *capteur essentiel* si y^* appartient à toute solution V .

Dans cet article, nous considérerons successivement trois propriétés différentes : la connexion à la sortie, l'absence de contraction, l'observabilité et leur préservation en présence de défauts de capteurs.

V. PRÉSERVATION DE LA CONNEXION À LA SORTIE

A. Composantes fortement connexes et graphe de connexion

Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Deux sommets v_i et v_j dans $G(\Sigma_\Lambda)$ sont dits équivalents s'il existe un chemin de v_i à v_j et un chemin de v_j à v_i . Dans ce contexte on suppose que v_i est équivalent à lui-même. Les classes d'équivalences correspondant à cette relation d'équivalence s'appellent les composantes fortement connexes de $G(\Sigma_\Lambda)$. Il existe des algorithmes standards de type optimisation combinatoire pour trouver la décomposition canonique du graphe en composantes fortement connexes. Les sommets de sortie y_i sont des composantes fortement connexes composées d'un sommet unique. Les composantes fortement

connexes peuvent être dotées d'un ordre partiel naturel. Les composantes fortement connexes \mathcal{C}_i et \mathcal{C}_j sont telles que $\mathcal{C}_i \preceq \mathcal{C}_j$ s'il existe un arc (v_j, v_i) où $v_i \in \mathcal{C}_i$ et $v_j \in \mathcal{C}_j$. Les éléments infimaux avec cet ordre sont les composantes fortement connexes sans arcs sortants. Notons que les sommets de sortie sont de tels éléments infimaux. Les composantes fortement connexes qui n'ont que des arcs sortants vers les sorties sont appelées les composantes pré-infimales. Le résultat suivant est simple à prouver.

Proposition 1: Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$. Σ_Λ est connecté à la sortie si et seulement si toutes les composantes infimales de $G(\Sigma_\Lambda)$ sont des sommets de sortie.

Pour étudier la connexion à la sortie, nous présentons maintenant un nouveau graphe non orienté.

Définition 3: Le graphe $C(\Sigma_\Lambda) = (Z_c, W_c)$ dit *graphe de connexion* est construit à partir de $G(\Sigma_\Lambda)$ comme suit :

- l'ensemble des sommets est $Z_c = V \cup V' \cup Y \cup z$ avec $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ où chaque v_i correspond à une composante pré-infimale de $G(\Sigma_\Lambda)$, $V' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_l\}$ où chaque v'_i correspond à une composante infimale de $G(\Sigma_\Lambda)$ qui n'est pas une sortie, Y est l'ensemble des sommets de sortie $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ et z est un sommet additionnel,
- l'ensemble d'arêtes est $W_c = \{(v_i, y_j) \mid \text{s'il existe un chemin de la composante pré-infimale correspondante à } v_i, \text{ à } y_j\} \cup \{(y_j, z) \mid \forall j\}$.

Notons que par la définition de $C(\Sigma_\Lambda)$, on relie tous les sommets de sortie y_j au sommet additionnel z .

Exemple 3: Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ présenté Figure 3.

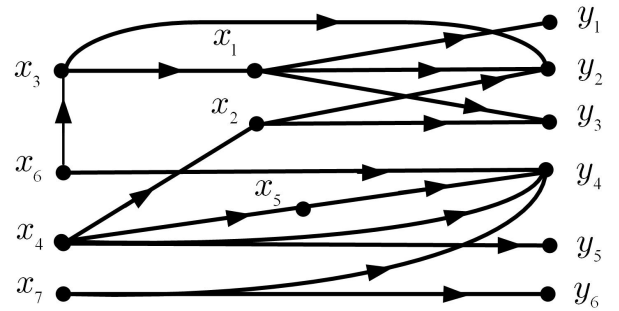


Fig. 3. $G(\Sigma_\Lambda)$ pour l'Exemple 3

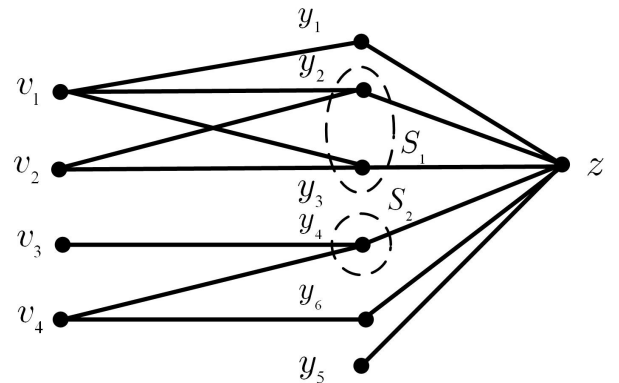


Fig. 4. $C(\Sigma_\Lambda)$ pour l'Exemple 3

Dans cet exemple, toutes les composantes infimales $\{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_6\}$ sont des sorties donc $V' = \emptyset$. On a quatre composantes pre-infimales dans $G(\Sigma_\Lambda)$ donc les sommets correspondants de V sont $v_1 \approx \{x_1\}, v_2 \approx \{x_2\}, v_3 \approx \{x_5\}$ et $v_4 \approx \{x_7\}$. On relie chaque v_i aux sommets de sortie correspondants : v_1 à y_1, y_2 et y_3 ; v_2 à y_2 et y_3 ... Ensuite, on relie chaque sortie y_j à z par une arête. Le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 4.

Un graphe non orienté est dit connexe s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques. Un graphe non orienté peut être décomposé en composantes connexes disjointes. $C(\Sigma_\Lambda)$ nous permet d'analyser de manière simple la connexion à la sortie du système Σ_Λ .

Proposition 2: Le graphe $G(\Sigma_\Lambda)$ est connecté à la sortie si et seulement si le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ est connexe.

Revenons sur l'Exemple 3, comme le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ est connexe, ainsi $G(\Sigma_\Lambda)$ est connecté à la sortie.

B. Séparateurs irréductibles

Définition 4: Considérons $H(Z, W)$ un graphe non orienté connexe. Pour $S \subseteq Z$:

- S est dit un *séparateur* si en enlevant à $H(Z, W)$, S et les arêtes qui partent de S , le reste n'est plus connexe.
- S est dit un *séparateur irréductible* s'il n'existe pas un sous-ensemble propre de S qui est un séparateur de H .

Remarque 1: Si S , de cardinalité plus grande que 1, est un séparateur irréductible d'un graphe de connexion H , pour n'importe quel sommet $s \in S$, $\{S \setminus s\}$ n'est pas un séparateur, donc la suppression de $\{S \setminus s\}$ ne déconnecte pas H .

Le graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$ capture toute l'information concernant la connexion à la sortie du système. Nous utiliserons les séparateurs irréductibles composés seulement des sommets de sortie sur ce graphe pour analyser la préservation de la connexion à la sortie en cas de défauts de capteurs.

C. Préservation de la connexion à la sortie en présence de défauts de capteurs

Dans cette sous-section nous nous concentrerons sur les séparateurs composés seulement de sommets de sortie.

Proposition 3: Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et son graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$. La connexion à la sortie de Σ_Λ est préservée si et seulement s'il existe au moins un capteur sans défaut dans chaque séparateur irréductible de $C(\Sigma_\Lambda)$ inclus dans Y .

Pour construire l'ensemble des séparateurs irréductibles dans Y d'un graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$, nous pouvons utiliser l'algorithme suivant :

Algorithme 1: Énumération de tous les séparateurs irréductibles

1. Pour tout v_i :
 - $S(v_i) := \{y_j | (v_i, y_j) \in W_c\}$
2. Pour tout $S(v_i)$:
 - S'il n'existe pas k tel que $S(v_k) \subset S(v_i)$, alors $S(v_i)$ est un séparateur irréductible.

La construction de l'algorithme vient du fait que $S(v_i)$ est l'ensemble des sommets voisins de v_i , ainsi c'est un sépa-

rateur pour v_i . De plus, si $S(v_i)$ ne contient aucun autre séparateur, il est irréductible.

Théorème 2: Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et son graphe de connexion $C(\Sigma_\Lambda)$. Supposons que la propriété de la connexion à la sortie soit vraie pour $G(\Sigma_\Lambda)$.

1. Les capteurs inutiles \bar{L} pour la propriété de connexion à la sortie sont ceux qui n'appartiennent à aucun séparateur irréductible de $C(\Sigma_\Lambda)$ inclus dans Y .

2. Les capteurs essentiels \bar{E} pour la propriété de connexion à la sortie sont les séparateurs irréductibles de $C(\Sigma_\Lambda)$ inclus dans Y de cardinalité 1.

Reconsidérons l'Exemple 3. En appliquant l'Algorithme 1, on trouve deux séparateurs irréductibles inclus dans l'ensemble Y : $S_1 = \{y_2, y_3\}$ et $S_2 = \{y_4\}$. On a donc $\bar{L} = \{y_1, y_5, y_6\}$ l'ensemble des capteurs inutiles parce que ces capteurs n'appartiennent à aucun séparateur irréductible. L'ensemble des capteurs utiles est $\bar{F} = \{y_2, y_3, y_4\}$ et l'ensemble des capteurs essentiels $\bar{E} = \{y_4\}$. Pour préserver la connexion à la sortie de ce système, on doit assurer au moins $\{y_2, y_4\}$ ou $\{y_3, y_4\}$ sans défauts. On peut vérifier aisément ces résultats sur les graphes $C(\Sigma_\Lambda)$ et $G(\Sigma_\Lambda)$ des figures 4 et 3.

VI. ABSENCE DE CONTRACTION

A. Graphe biparti

Dans cette sous-section, nous caractériserons les contractions. Ceci sera réalisé en utilisant un graphe biparti associé au système Σ_Λ . Le graphe biparti est un outil qui est bien adapté aux calculs de rang générique des matrices. Il est connu [2] que l'absence de contraction est équivalente au fait que la matrice $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ est génériquement de rang plein.

Nous considérons un système linéaire structuré Σ_Λ du type (1) comme précédemment. Nous présentons maintenant le graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda)$ comme suit.

Le graphe biparti de ce système est $B(\Sigma_\Lambda) = (B^+, B^-; W')$ où les ensembles B^+ et B^- sont deux ensembles disjoints de sommets et W' est l'ensemble d'arcs. L'ensemble de sommets B^+ est donné par X^+ , l'ensemble de sommets B^- est donné par $X^- \cup Y$, où $X^+ = \{x_1^+, \dots, x_n^+\}$ est le premier ensemble de sommets d'état, $X^- = \{x_1^-, \dots, x_n^-\}$ est le deuxième ensemble de sommets d'état et $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ est l'ensemble de sommets de sortie. Notons que nous avons dédoublé chaque sommet d'état x_i de $G(\Sigma_\Lambda)$ en deux sommets x_i^+ et x_i^- . L'ensemble d'arcs W' est défini par $W_A \cup W_C$ où $W_A = \{(x_j^+, x_i^-) | A_{ij} \neq 0\}$ et $W_C = \{(x_j^+, y_i) | C_{ij} \neq 0\}$. Un élément de la matrice $A_{ij} \neq 0$ (resp. $C_{ij} \neq 0$) signifie que l'élément (i, j) de la matrice A (resp. C) est un paramètre libre (structurellement différent de zéro).

Un *couplage* dans un graphe biparti $B = (B^+, B^-; W')$ est un ensemble d'arcs $M \subseteq W'$ tels que les arcs dans M n'ont aucun sommet en commun. Le cardinalité d'un couplage, (le nombre des arcs) s'appelle également sa taille. Un couplage M est dit maximum s'il a une cardinalité maximum. Le problème du couplage maximum est de trouver un couplage de cardinalité maximale. Ce problème peut être résolu en utilisant des algorithmes très efficaces basés sur les chaînes alternées augmentantes ou les idées de la théorie

du flot maximal [9]. Avec un couplage M , un sommet sur B est dit saturé par M s'il appartient à ce couplage. La notion de couplage permet une caractérisation simple de l'absence de contraction en terme de graphe biparti du système [10], ce qui dans notre cas peut être énoncé comme suit.

Proposition 4: Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et avec son graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda)$. Il n'existe pas de contraction dans $G(\Sigma_\Lambda)$ si et seulement s'il existe un couplage de taille n dans $B(\Sigma_\Lambda)$.

B. Décomposition de Dulmage-Mendelsohn (DM) [8]

La DM-Décomposition permet de décomposer de façon unique un graphe biparti B en sous-graphes bipartis irréductibles partiellement ordonnés $B_i = (B_i^+, B_i^-; W'_i)$ ($i = 0, 1, \dots, r, \infty$) dits les composantes de la DM. Ces composantes ont les propriétés suivantes :

Proposition 5: Considérons $B = (B^+, B^-; W')$ un graphe biparti et $B_i = (B_i^+, B_i^-; W'_i)$ ($i = 0, 1, \dots, r, \infty$) ses DM-Composantes.

1. Un couplage maximum sur B est une union de couplages maximaux sur les DM-Composantes B_i ($i = 0, 1, \dots, r, \infty$).
2. Un sommet $v \in B_0^-$ (ou B_i^+, B_i^- ($i = 1, \dots, r$) ou B_∞^+) est saturé par n'importe quel couplage maximum sur B .
3. Un sommet $v \in B^+$ appartient à B_0 si et seulement s'il existe un couplage maximum sur B qui ne sature pas v .
4. Un sommet $v \in B^-$ appartient à B_∞ si et seulement s'il existe un couplage maximum sur B qui ne sature pas v .

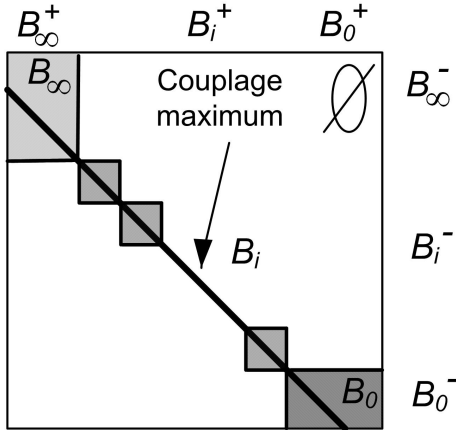


Fig. 5. DM-Décomposition

En effet, la DM-Décomposition est équivalente à une permutation des lignes et des colonnes de la matrice $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ pour obtenir la forme bloc diagonale présentée Figure 5. Nous avons $r_\Sigma = \text{rang} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \leq n$.

Le fait que $r_\Sigma < n$ c'est à dire que la matrice $\begin{bmatrix} A^T & C^T \end{bmatrix}^T$ n'a pas le rang plein implique qu'il y a des colonnes de $\begin{bmatrix} A^T & C^T \end{bmatrix}^T$ qui sont la combinaison linéaire des autres colonnes. Par cette permutation, nous pouvons faire apparaître une bloc qui correspond avec la partie B_0 de la DM-Décomposition. On a $r - r_\Sigma = |B_0^+| - |B_0^-|$ où $|\cdot|$ est la cardinalité d'un ensemble.

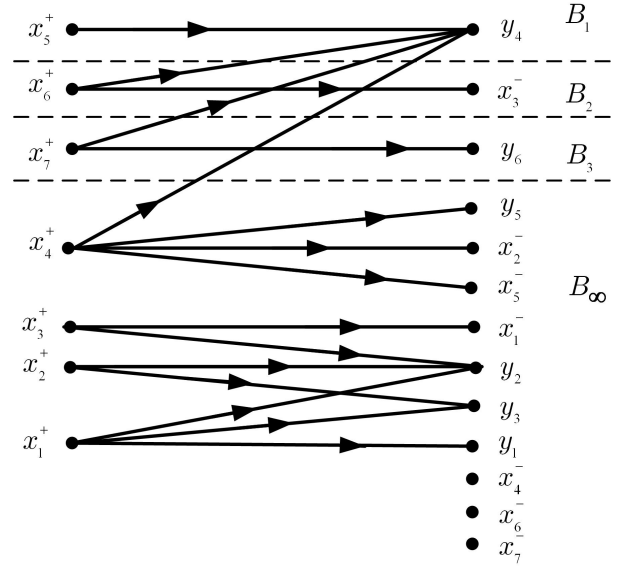


Fig. 6. $B(\Sigma_\Lambda)$ pour l'Exemple 3

Exemple 4: Considérons le système Σ_Λ dont le graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ est donné Figure 3 et considérons le graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda)$. Nous construisons la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$ comme dans [8]. Alors $B_0 = \emptyset$ et $B_\infty = \{x_4^-, x_6^-, x_7^-, y_5, x_4^+, x_2^-, x_5^-, y_1, x_1^+, y_2, x_3^+, x_1^-, x_2^+, y_3\}$. Finalement, $B_1 = \{x_5^+; y_4\}$, $B_2 = \{x_6^+; x_3^-\}$ et $B_3 = \{x_7^+; y_6\}$ comme montré Figure 6.

C. Absence de contraction

Proposition 6: Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et son graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda)$. $G(\Sigma_\Lambda)$ ne contient pas de contraction si et seulement si la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$ est telle que $B_0 = \emptyset$.

Nous cherchons maintenant les sorties qui peuvent être supprimées sans créer des contractions.

Théorème 3: Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et son graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda)$.

L'ensemble de capteurs essentiels \hat{E} pour l'absence de contraction est l'ensemble de sommets de sortie qui appartiennent aux composantes B_i , ($i = 1, \dots, r$) dans la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$.

Par les propriétés de la DM-Décomposition, le nombre de sommets de B_i^+ est égal au nombre de sommets de B_i^- , ($i = 1, \dots, r$). Si nous supprimons un sommet de sortie qui appartient à B_i^- , ceci créera une contraction. Donc, tous les capteurs dans les composantes B_i , ($i = 1, \dots, r$) appartiennent à n'importe quelle solution du problème d'absence de contraction et sont donc essentiels.

En outre, la suppression d'un seul sommet de sortie dans B_∞ ne change pas la taille du couplage maximum sur B . Donc, aucun sommet de sortie dans B_∞ n'est essentiel. Pour déterminer le nombre minimal de sommets de sortie dans toute solution pour l'absence de contraction, nous pouvons ramener l'analyse à B_∞ comme suit :

Algorithme 2: 1. Pour tout arc (v^+, v^-) de B_∞ , lui assigner un poids 0 si v^- est un sommet d'état, un poids 1 si v^- est un sommet de sortie.

2. Trouver un couplage maximum de poids minimal dans B_∞ . Noter W_m le poids de ce couplage c'est à dire la somme des poids d'arcs qui le composent.

3. Le nombre minimal de sommets de sortie dans une solution est $W_m + \text{card}(\hat{E})$.

Théorème 4: Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) avec son graphe associé $G(\Sigma_\Lambda)$ et son graphe biparti associé $B(\Sigma_\Lambda)$. Considérons la partie B_∞ de la DM-Décomposition de $B(\Sigma_\Lambda)$.

L'ensemble des capteurs inutiles \hat{L} pour l'absence de contraction est l'ensemble des sommets de sortie qui n'appartiennent à aucun couplage maximum de poids minimal sur B_∞ .

Remarque 2: Nous pouvons montrer que l'utilisation de l'Algorithme 2 sur $B(\Sigma_\lambda)$ nous fournira un ensemble minimal de capteurs non défaillants qui assurent l'absence de contraction c'est à dire les capteurs qui appartiennent à un couplage maximum de poids minimal.

Reconsidérons le système structuré Σ_Λ de l'Exemple 3 avec son graphe associé dans la Figure 3. La DM-Décomposition de ce système est illustrée dans la Figure 6.

Dans ce cas sur B_∞ , il existe au moins un couplage maximum de poids minimal qui ne sature pas y_5 , par l'exemple le couplage composé par $\{(x_4^+, x_2^-); (x_3^+, x_1^-); (x_2^+, y); (x_1^+, y_1)\}$. Par contre, n'importe quel couplage maximum de poids minimal sature deux sommets de l'ensemble $\{y_1, y_2, y_3\}$. Nous avons donc $\hat{L} = \{y_5\}$ l'ensemble des capteurs inutiles et $\hat{F} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_6\}$ est l'ensemble des capteurs utiles. Nous avons deux capteurs essentiels $\hat{E} = \{y_4, y_6\}$ (parce que $y_4 \in B_1$ et $y_6 \in B_3$) pour l'absence de contraction.

VII. PRÉSERVATION DE L'OBSERVABILITÉ

Par les analyses des paragraphes V et VI, nous avons le Théorème suivant :

Théorème 5: Considérons Σ_Λ un système linéaire structuré défini par (1) et pour le problème de préservation de l'observabilité, en utilisant les notations des Théorème 2, Théorème 3 et Théorème 4 :

- L'ensemble des capteurs essentiels est $E = \bar{E} \cup \hat{E}$.
- L'ensemble des capteurs inutiles est $L = \bar{L} \cap \hat{L}$.
- L'ensemble des capteurs utiles est $F = Y \setminus L$.

En effet, pour assurer que le système reste observable tout en supprimant des capteurs, le système avec les capteurs restants doit satisfaire la propriété de la connexion à la sortie et l'absence de contraction. Le Théorème 2 donne l'ensemble des capteurs qui peuvent être supprimés en conservant la propriété de connexion à la sortie. Les Théorème 3 et 4 donnent l'ensemble des capteurs qui peuvent être supprimés sans créer de contraction.

Il est clair qu'un capteur qui est essentiel pour la connexion à la sortie ou essentiel pour l'absence de contraction est essentiel pour la préservation de l'observabilité du système. Un capteur qui est inutile pour la connexion à la sortie et inutile pour l'absence de contraction est inutile pour la préservation de l'observabilité du système.

Reconsidérons le système décrit dans l'Exemple 3. Par l'analyse de la connexion à la sortie de ce système, on a $\bar{L} = \{y_1, y_5, y_6\}$, $\bar{E} = \{y_4\}$ et $\bar{F} = \{y_2, y_3, y_4\}$. Pour l'absence de contraction, on a $\hat{L} = \{y_5\}$, $\hat{E} = \{y_4, y_6\}$ et $\hat{F} = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_6\}$. En utilisant le Théorème 5 avec ces

ensembles de capteurs, on obtient :

- L'ensemble des capteurs essentiels $E = \bar{E} \cup \hat{E} = \{y_4, y_6\}$
- L'ensemble des capteurs inutiles $L = \bar{L} \cap \hat{L} = \{y_5\}$
- L'ensemble des capteurs utiles $F = Y \setminus L = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_6\}$

Dans cet exemple, en gardant l'ensemble des capteurs essentiels $E = \{y_4, y_6\}$ et deux des trois capteurs de l'ensemble des capteurs utiles et non essentiels $\{y_1, y_2, y_3\}$ sans défaut, l'observabilité est préservée. Les ensembles minimaux des capteurs non défaillants permettant de préserver l'observabilité du système sont $\{y_4, y_6, y_1, y_2\}$ ou $\{y_4, y_6, y_1, y_3\}$ ou $\{y_4, y_6, y_2, y_3\}$.

VIII. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Dans cet article, nous avons revisité l'observabilité des systèmes structurés. En utilisant l'approche des graphes, nous avons focalisé notre attention sur le problème de préservation de l'observabilité en présence de défauts de capteurs. Nous avons classé les capteurs par rapport à leur nature critique concernant l'observabilité du système. L'utilisation des algorithmes standards ou des décompositions pour réduire la complexité de problème permet d'obtenir des algorithmes qui sont polynômiaux en temps de calcul et donc facilement mis en oeuvre. L'approche proposée est bien adaptée pour l'analyse structurelle. Elle permet de déterminer les capteurs qui sont essentiels c'est à dire dont un défaut mène à la perte de l'observabilité, les capteurs qui sont inutiles pour la préservation de l'observabilité et ceux qui sont utiles. Cette approche peut également être utilisée pour résoudre des problèmes de détection et de diagnostic de défauts en présence de défauts de capteurs.

RÉFÉRENCES

- [1] J. M. Dion and C. Commault. Approche structurelle du diagnostic, application à un modèle de colonne à distiller. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA*, Bordeaux, France, 2006.
- [2] C.T. Lin. Structural controllability. *IEEE Trans. Automat. Control*, 19(3) :201–208, June 1974.
- [3] J. M. Dion, C. Commault, and J. van der Woude. Generic properties and control of linear structured systems : a survey. *Automatica*, 39(7) :1125–1144, 2003.
- [4] R.W. Shields and J.B. Pearson. Structural controllability of multiinput linear systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 21 :203–212, 1976.
- [5] K. Glover and L.M. Silverman. Characterization of structural controllability. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 21 :534–537, 1976.
- [6] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze, and M. Staroswiecki. *Diagnosis and fault-tolerant control*. Springer-Verlag, 2003.
- [7] C. Commault, J. M. Dion, and D. H. Trinh. Observability preservation under sensor failure. In *IEEE CDC Conf.*, San Diego, USA, 2006.
- [8] K. Murota. *Systems Analysis by Graphs and Matroids*, volume 3 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer-Verlag New-York, Inc., 1987.
- [9] J.E. Hopcroft and R.M. Karp. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM J. on Comp.*, 2 :225–231, 1973.
- [10] C. Commault, J. M. Dion, and J. van der Woude. Characterization of generic properties of linear structured systems for efficient computations. *Kybernetika*, 38(5) :503–520, 2002.