



HAL
open science

Fonction Zêta de Hurwitz p-adique et irrationalité

Pierre Bel

► **To cite this version:**

| Pierre Bel. Fonction Zêta de Hurwitz p-adique et irrationalité. 2007. hal-00145418

HAL Id: hal-00145418

<https://hal.science/hal-00145418>

Preprint submitted on 10 May 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Fonction Zêta de Hurwitz p -adique et irrationalité

Pierre Bel

10 mai 2007

The knowledge on irrationality of p -adic zeta values has recently progressed. The irrationality of $\zeta_2(2)$, $\zeta_2(3)$ and of a few other p -adic series of Dirichlet was obtained by F. Calegari (cf. [Ca]). F. Beukers gave a more elementary proof of this result (cf. [Be]). In parallel, T. Rivoal has just obtained, in the complex case, some Padé approximants of Lerch functions (cf. [Ri2]). It is this work which, transposed to \mathbb{C}_p , enables us to obtain results of irrationality and linear independence.

1 Introduction

1.1 Préliminaires

Soit p un nombre premier. On note v_p la valuation p -adique sur \mathbb{Q} et $|\cdot|_p = p^{-v_p}$ la valeur absolue p -adique. On pose $q_p = p$ si $p \neq 2$ et $q_2 = 4$. Pour $x \in \mathbb{Z}_p^*$, on désigne par $\omega(x)$ l'unique racine de l'unité, d'ordre $p-1$ si $p \neq 2$, et d'ordre 2 si $p = 2$, telle que $|x - \omega(x)|_p \leq q_p^{-1}$. On étend la définition de ω à \mathbb{Q}_p^* en posant $\omega(x) = p^{v_p(x)}\omega(p^{-v_p(x)}x)$, et on pose $\langle x \rangle = \frac{x}{\omega(x)}$ (donc $\langle px \rangle = \langle x \rangle$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_p^*$).

On note \log_p la fonction définie par

$$\log_p(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

pour $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x|_p < 1$.

On note $\zeta(s, x)$ la fonction zêta de Hurwitz définie par

$$\zeta(s, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^s}$$

pour $(s, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, avec $\Re(s) > 1$ et $x > 0$. Pour x fixé, cette fonction admet un prolongement en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, dont 1 est un pôle d'ordre 1 et de résidu 1.

La formule d'Euler-MacLaurin conduit aisément au développement asymptotique suivant, pour $x \rightarrow +\infty$:

$$\zeta(s, x) = \frac{x^{1-s}}{s-1} - \sum_{j=1}^k \binom{-s}{j-1} \frac{B_j}{j} x^{1-s-j} + O(x^{-s-k}) \quad (1)$$

où les B_j sont les nombres de Bernoulli, et pour tout $k \geq 1$ le symbole O est uniforme en s pour s borné. Par passage à la limite sur s , on en déduit que la valeur en 1 de la fonction holomorphe $s \mapsto \zeta(s, x) - \frac{1}{s-1}$ vérifie :

$$\left(\zeta(s, x) - \frac{1}{s-1} \right)_{s=1} = -\ln x + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j B_j}{j} x^{-j} + O(x^{-k-1}). \quad (2)$$

La fonction zêta p -adique de Hurwitz peut être exprimée par son développement en série de Laurent :

$$\zeta_p(s, x) = \frac{\langle x \rangle^{1-s}}{s-1} - \langle x \rangle^{1-s} \sum_{j=1}^{+\infty} \binom{-s}{j-1} \frac{B_j}{j} x^{-j}. \quad (3)$$

Ce développement est p -adiquement convergent pour $|x|_p > 1$ car le nombre

$$\binom{-s}{j-1} = (-1)^{j-1} \binom{s+j-2}{j-1}$$

est entier. On a aussi :

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta_p(s, x) - \frac{1}{s-1} \right) = -\log_p \langle x \rangle + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j B_j}{j} x^{-j}. \quad (4)$$

On pourra se référer au livre de H. Cohen ([Coh]) pour une vision exhaustive de ces différents résultats.

La connaissance sur l'irrationalité de valeurs des fonctions z éta p -adiques a progressé récemment. L'irrationalité de $\zeta_2(2)$, $\zeta_2(3)$ et de quelques autres séries de Dirichlet p -adiques a été obtenue par F. Calegari (cf. [Ca]). F. Beukers en a donné une interprétation plus élémentaire (cf. [Be]). Parallèlement, T. Rivoal vient d'obtenir, dans le cas complexe, certains approximants de Padé de fonctions de Lerch (cf. [Ri2]) et d'étudier leur propriétés diophantiennes. C'est ce travail qui, transposé à \mathbb{C}_p , nous permet d'obtenir des résultats d'irrationalité et d'indépendance linéaire, grâce à un critère comparable à celui de Nesterenko, mais dans lequel nous utilisons des formes linéaires supposées a priori indépendantes. Un point crucial de notre travail sera d'ailleurs de vérifier que cette condition est bien satisfaite dans l'application que nous en ferons (N.D.L.R. lemme du déterminant).

1.2 Résultats

Soient un entier $e \geq 2$, $v = \text{ppcm}(e, p-1)$, ξ une racine primitive e -ème de l'unité et χ une racine primitive v -ème de l'unité.

Pour un nombre p -adique x , tel que $|x|_p \geq p$ et s un entier strictement positif, on pose

$$\tilde{T}_p(s, x) = \sum_{j=0}^{e-1} \xi^{-j} \zeta_p \left(s, \frac{x+j}{e} \right) \quad \text{si } s > 1 \text{ et } |x| \geq q_p \quad (5)$$

$$= \sum_{j=0}^{e-1} ((-1)^{s-1} \xi)^{-j} \zeta_2 \left(s, \frac{x+j}{e} \right) \quad \text{si } s > 1, p = 2 \text{ et } |x|_2 = 2 \quad (6)$$

et

$$\tilde{T}_p(1, x) = \lim_{s \rightarrow 1} \tilde{T}_p(s, x) = \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{j=0}^{e-1} \xi^{-j} \zeta_p \left(s, \frac{x+j}{e} \right). \quad (7)$$

Théorème 1 Soit $x = \frac{a}{b}$ un rationnel, tel que $|x|_p \geq p$, et soit A un entier supérieur ou égal à 2.

Alors la dimension τ de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}(\chi)$ par la famille $\left\{ 1, \left(\tilde{T}_p(s, x) \right)_{s \in [1, A]} \right\}$ vérifie

$$\tau \geq \frac{[\mathbb{Q}_p(\xi) : \mathbb{Q}_p]}{\varphi(v)} \frac{A \ln |x|_p}{\ln b + \sum_{q|b} \frac{\ln q}{q-1} + A + (A-1) \ln 2}.$$

Théorème 2 Pour tout entier A supérieur ou égal à 2, il existe une borne M_A explicite tel que si le nombre premier p est plus grand que M_A alors

l'ensemble $\left\{ \zeta_p \left(s, \frac{1}{p} \right) - \zeta_p \left(s, \frac{p+2}{2p} \right) \right\}_{s \in [1, A]}$ contient au moins $A-1$ nombres irrationnels.

Le point crucial de la démonstration des résultats est le calcul du déterminant de la partie 5 qui permet d'appliquer le critère d'indépendance linéaire suivant.

2 Critère d'indépendance linéaire

On rappelle la formule du produit pour un corps de nombres \mathbb{K} . Pour v une place de \mathbb{K} , on note K_v et Q_v les complétés de \mathbb{K} et \mathbb{Q} pour cette place et $\eta_v = [\mathbb{K}_v : \mathbb{Q}_v]$.

Si $\alpha \in \mathbb{K}^*$, alors on a

$$0 = \sum_{v \text{ place de } \mathbb{K}} \eta_v \ln |\alpha|_v.$$

De plus

$$\sum_{v \text{ place de } \mathbb{K} \text{ infinie}} \eta_v = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$$

Si α est un élément non nul de $\mathcal{O}(\mathbb{K})$, comme $|\alpha|_v \leq 1$ pour toute place finie v de \mathbb{K} , si \mathfrak{p} est une place finie, on a :

$$\eta_{\mathfrak{p}} \ln |\alpha|_{\mathfrak{p}} + \sum_{v \text{ infinie}} \eta_v \ln |\alpha|_v \geq 0.$$

Soit m un nombre entier positif. Pour $L = (\ell_1, \dots, \ell_m) \in \mathbb{K}^m$, et $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m) \in \mathbb{C}_p^m$, on note $(L, \theta) = \ell_1 \theta_1 + \dots + \ell_m \theta_m$. Si v est une place de \mathbb{K} , on note $\|L\|_v = \max_{1 \leq j \leq m} |\ell_j|_v$.

Lemme 1 *Soit p un nombre premier. Soit \mathbb{K} un corps de nombres sur \mathbb{Q} . On considère \mathbb{K} comme plongé dans \mathbb{C}_p , dans lequel on note $\mathbb{K}_p = \mathbb{Q}_p(\mathbb{K})$ son adhérence. Soit $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ un élément non nul de \mathbb{K}_p . On suppose qu'il existe m suites $(L_n^{(i)})$, où $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq i \leq m$, d'éléments de $(\mathcal{O}(\mathbb{K}))^m$ telles que pour chaque n les $L_n^{(i)}$, pour $1 \leq i \leq m$, soient linéairement indépendants sur \mathbb{K} , et des nombres réels strictement positifs c et ρ satisfaisant pour chaque i les conditions :*

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln \|L_n^{(i)}\|_v \leq c$$

pour les places infinies v , et

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln |(L_n^{(i)}, \theta)|_p \leq -\rho.$$

Alors la dimension τ du \mathbb{K} -sous-espace vectoriel de \mathbb{K}_p engendré par les θ_j pour $1 \leq j \leq m$ vérifie

$$\tau \geq \frac{\rho [\mathbb{K}_p : \mathbb{Q}_p]}{c [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]}.$$

Démonstration

Effectuons tout d'abord quelques réductions. En renumérotant les variables $(\theta_i)_{i \in [1, m]}$, on peut supposer $\theta_1 \neq 0$. De plus, en remplaçant les variables $(\theta_j)_{j \in [1, m]}$, par $\left(\frac{\theta_j}{\theta_1}\right)_{j \in [1, m]}$, les hypothèses étant encore vérifiées, on peut supposer $\theta_1 = 1$.

Si τ est la dimension du \mathbb{K} -espace vectoriel engendré par les θ_j , alors il existe $m - \tau$ éléments $(A^{(i)})_{i \in [\tau+1, m]}$ de $(\mathcal{O}(\mathbb{K}))^m$, linéairement indépendants sur \mathbb{K} , tels que $(A^{(i)}, \theta) = 0$ pour tout $i \in [\tau+1, m]$.

On peut en faisant des permutations entre les $L_n^{(i)}$ à chaque rang n se ramener au cas, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(L_n^{(1)}, \dots, L_n^{(\tau)}, A^{(\tau+1)}, \dots, A^{(m)})$ est libre.

Soit M_n la matrice dont les lignes sont formées des vecteurs $(L_n^{(1)}, \dots, L_n^{(\tau)}, A^{(\tau+1)}, \dots, A^{(m)})$, i.e., en posant $L_n^{(i)} = (\ell_{n,1}^{(i)}, \dots, \ell_{n,m}^{(i)})$ et $A^{(i)} = (a_1^{(i)}, \dots, a_m^{(i)})$,

$$M_n = \begin{pmatrix} \ell_{n,1}^{(1)} & \ell_{n,2}^{(1)} & \cdots & \ell_{n,m}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ell_{n,1}^{(\tau)} & \ell_{n,2}^{(\tau)} & \cdots & \ell_{n,m}^{(\tau)} \\ a_1^{(\tau+1)} & a_2^{(\tau+1)} & \cdots & a_m^{(\tau+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & \cdots & a_m^{(m)} \end{pmatrix}$$

Comme la matrice est non singulière, on a

$$\Lambda_n = \det(M_n) \neq 0$$

Comme Λ_n appartient à $\mathcal{O}(\mathbb{K})$, on en déduit que

$$0 \leq \eta_p \ln |\Lambda_n|_p + \sum_{v \text{ infinie}} \eta_v \ln |\Lambda_n|_v. \quad (8)$$

Le développement du déterminant, nous permet d'obtenir pour les places infinies :

$$\limsup_n \frac{\ln |\Lambda_n|_v}{n} \leq \tau c. \quad (9)$$

Pour le calcul du déterminant, on peut aussi ajouter à une colonne, une combinaison linéaire des autres colonnes. En ajoutant à la première, les colonnes suivantes respectivement multipliées par θ_j , on obtient :

$$\Lambda_n = \begin{vmatrix} (L_n^{(1)}, \theta) & \ell_{n,2}^{(1)} & \cdots & \ell_{n,m}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (L_n^{(\tau)}, \theta) & \ell_{n,2}^{(\tau)} & \cdots & \ell_{n,m}^{(\tau)} \\ 0 & a_2^{(\tau+1)} & \cdots & a_m^{(\tau+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{(m)} & \cdots & a_m^{(m)} \end{vmatrix}$$

Le développement du déterminant sous cette forme nous permet d'obtenir :

$$\limsup_n \frac{\ln |\Lambda_n|_p}{n} \leq -\rho \quad (10)$$

En divisant l'inéquation (8) par n et utilisant (9) et (10), on en déduit :

$$0 \leq -\rho \eta_p + \tau c \sum_{v \text{ infinie}} \eta_v$$

Comme $\sum_{v \text{ infinie}} \eta_v = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$, le résultat est donc démontré.

3 Approximants de Padé simultanés de fonctions Zêta de Hurwitz

Dans cette partie, comme dans la suite, ξ est une racine primitive e -ème de l'unité avec e entier, $e \geq 2$. On définit, pour x un nombre complexe différent d'un entier négatif, s un entier strictement positif et z un nombre complexe tel que $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, ϕ la fonction de Lerch :

$$\phi_s(x, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+x)^s}$$

On remarque pour $\Re(x) > 0$ et pour $m > 0$ entier, l'expression

$$\phi_m(x, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+x)^m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} z^k \int_0^1 t^{x-1+k} (\ln t)^{m-1} dt = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \int_0^1 \frac{t^{x-1} (\ln t)^{m-1}}{1-zt} dt$$

qui montre la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(k+x)^m}$ pour $|z| \leq 1$ et $z \neq 1$, et permet de prolonger la fonction $\phi_m(x, z)$ en une fonction holomorphe en z sur $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$. Par translation entière, il en est finalement ainsi pour tout nombre complexe x tel que $-x \notin \mathbb{N}$.

On suppose que A est un entier supérieur ou égal à 2, considéré comme fixé. Le nombre n est un entier positif vérifiant $An \geq n+3$.

On rappelle que le symbole de Pochamer est noté

$$(t)_m = \prod_{0 \leq j < m} (t + j)$$

pour $t \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

Posons pour $q \in [0, A]$ et un nombre x tel que $x \notin \mathbb{Z}^-$

$$R_n^{(q)}(k) = n!^{A-1} \frac{(k)_{n+1}}{(k+x)_n^A (x+k+n)^q}$$

et

$$S_n^{(q)}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} R_n^{(q)}(k) z^{-k}.$$

La fraction rationnelle $R_n^{(q)}(k)$ est de degré $n+1 - An - q$ par rapport à k donc de degré inférieur ou égal à -2 , vu les hypothèses. La fonction $S_n^{(q)}(x, z)$ est donc définie pour tout complexe z de module supérieur ou égal à 1. La série $S_n^{(q)}(x, z)$ converge normalement sur l'ensemble des complexes x de partie réelle plus grande que 1 et des complexes z de module plus grand que 1.

Proposition 1 *Il existe $A+1$ polynômes $(P_s^{(q)}(x, z))_{s \in [0, A]}$ à coefficients rationnels de degré en x au plus $n+1$, de degré en z au plus n , et le degré en z de $P_s^{(q)}(x, z)$ est même au plus $n-1$ si $s > q$, tels que pour tout z avec $|z| \geq 1$ et $z \neq 1$ et tout $x \notin -\mathbb{N}$, on ait :*

$$S_n^{(q)}(x, z) = P_0^{(q)}(x, z) + \sum_{s=1}^A P_s^{(q)}(x, z) \phi_s \left(x, \frac{1}{z} \right). \quad (11)$$

De plus, on a, quand $\Re(x) \rightarrow +\infty$

$$S_n^{(q)}(x, z) = o(x^{-An+n+3-q}).$$

Démonstration

La décomposition en éléments simples de $R_n^{(q)}(k)$ nous donne

$$R_n^{(q)}(k) = \sum_{s=1}^A \sum_{j=0}^n \frac{r_{j,s}^{(q)}(x)}{(k+x+j)^s}$$

où

$$r_{j,s}^{(q)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(A-s)!} \left(\frac{d}{dk} \right)^{A-s} \left[R_n^{(q)}(k)(x+k+j)^A \right]_{|k=-j-x} & \text{si } j \in [0, n-1] \text{ et } s \in [1, A] \\ \frac{1}{(q-s)!} \left(\frac{d}{dk} \right)^{q-s} \left[R_n^{(q)}(k)(x+k+n)^q \right]_{|k=-n-x} & \text{si } j = n \text{ et } s \in [1, q] \\ 0 & \text{si } j = n \text{ et } s \in [q+1, A] \end{cases}.$$

Remarquons tout de suite que, pour $q > 0$,

$$r_{n,q}^{(q)}(x) = \left[R_n^{(q)}(k)(x+k+n)^q \right]_{k=-n-x} = n!^{A-1} \frac{(-n-x)_{n+1}}{(-n)_n^A} \neq 0. \quad (12)$$

Par le changement de variable $l = -k - x$, on obtient

$$r_{j,s}^{(q)}(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{A-s}}{(A-s)!} \left(\frac{d}{dl} \right)^{A-s} \left[R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A \right]_{|l=j} & \text{si } j \in [0, n-1] \text{ et } s \in [1, A] \\ \frac{(-1)^{q-s}}{(q-s)!} \left(\frac{d}{dl} \right)^{q-s} \left[R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^q \right]_{|l=n} & \text{si } j = n \text{ et } s \in [1, q] \\ 0 & \text{si } j = n \text{ et } s \in [q+1, A] \end{cases}.$$

On en déduit

$$r_{j,s}^{(q)}(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{A-s}}{(A-s)!} \left(\frac{d}{dl}\right)^{A-s} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (n-l)^q} (j-l)^A \right]_{|l=j} & \text{si } j \in [0, n-1] \text{ et } s \in [1, A] \\ \frac{(-1)^{q-s}}{(q-s)!} \left(\frac{d}{dl}\right)^{q-s} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A} \right]_{|l=n} & \text{si } j = n \text{ et } s \in [1, q] \\ 0 & \text{si } j = n \text{ et } s \in [q+1, A] \end{cases} \quad (13)$$

Les fonctions $r_{j,s}^{(q)}(x)$ sont donc des polynômes en x de degré au plus $n+1$.

$$S_n^{(q)}(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^A \sum_{j=0}^n \frac{r_{j,s}^{(q)}(x)}{(k+x+j)^s} z^{-k}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} S_n^{(q)}(x, z) &= \sum_{s=1}^A \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r_{j,s}^{(q)}(x)}{(k+x+j)^s} z^{-k} \\ &= \sum_{s=1}^A \sum_{j=0}^n r_{j,s}^{(q)}(x) z^j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{-k-j}}{(k+x+j)^s} \\ &= \sum_{s=1}^A \sum_{j=0}^n r_{j,s}^{(q)}(x) z^j \left[\phi_s \left(x, \frac{1}{z} \right) - \sum_{k=0}^{j-1} \frac{z^{-k}}{(k+x)^s} \right] \\ &= \sum_{s=1}^A \phi_s \left(x, \frac{1}{z} \right) \sum_{j=0}^n r_{j,s}^{(q)}(x) z^j - \sum_{s=1}^A \sum_{j=0}^n r_{j,s}^{(q)}(x) z^j \sum_{k=0}^{j-1} \frac{z^{-k}}{(k+x)^s}. \end{aligned}$$

On a donc

$$S_n^{(q)}(x, z) = P_0^{(q)}(x, z) + \sum_{s=1}^A P_s^{(q)}(x, z) \phi_s \left(x, \frac{1}{z} \right),$$

où l'on a posé

$$P_0^{(q)}(x, z) = - \sum_{s=1}^A \sum_{j=0}^n r_{j,s}^{(q)}(x) z^j \sum_{k=0}^{j-1} \frac{z^{-k}}{(k+x)^s},$$

et, pour tout $s \in [1, A]$

$$P_s^{(q)}(x, z) = \sum_{j=0}^n r_{j,s}^{(q)}(x) z^j. \quad (14)$$

Les égalités (13) montrent immédiatement que pour $s \geq 1$, $P_s^{(q)}(x, z)$ est un polynôme à coefficients rationnels de degré en x au plus $n+1$ et de degré en z au plus n . On voit directement que le degré en z de $P_s^{(q)}$ est au plus $n-1$, si $s > q$.

Pour $P_0^{(q)}(x, z)$, on voit directement que c'est un polynôme en z de degré au plus n . De plus, on remarque que

$$\sum_{k=0}^{j-1} \frac{z^{j-k}}{(k+x)^s} = \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \left(\frac{d}{dl}\right)^{s-1} \left[\sum_{k=1}^j \frac{z^k}{(l-k+x)} \right]_{|l=j}$$

Il en résulte que pour $j \in [1, n-1]$

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^A r_{j,s}^{(q)}(x) \sum_{k=0}^{j-1} \frac{z^{j-k}}{(k+x)^s} &= \sum_{s=1}^A \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} \left(\frac{d}{dl} \right)^{s-1} \left[\sum_{k=1}^j \frac{z^k}{l-k+x} \right]_{|l=j} \frac{(-1)^{A-s}}{(A-s)!} \left(\frac{d}{dl} \right)^{A-s} \left[R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A \right]_{|l=j} \\
&= \frac{(-1)^{A-1}}{(A-1)!} \sum_{s=1}^A \binom{A-1}{s-1} \left(\frac{d}{dl} \right)^{s-1} \left[\sum_{k=1}^j \frac{z^k}{l-k+x} \right]_{|l=j} \left(\frac{d}{dl} \right)^{A-s} \left[R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A \right]_{|l=j} \\
&= \frac{(-1)^{A-1}}{(A-1)!} \left(\frac{d}{dl} \right)^{A-1} \left[R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A \sum_{k=1}^j \frac{z^k}{l-k+x} \right]_{|l=j} \tag{15}
\end{aligned}$$

On a

$$R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A \sum_{k=1}^j \frac{z^k}{l-k+x} = n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (-l+n)^q} (j-l)^A \sum_{k=1}^j \frac{z^k}{l-k+x} \tag{16}$$

Comme les pôles simples en x de $\sum_{k=1}^j \frac{z^k}{l-k+x}$ sont des zéros de $(-l-x)_{n+1}$, $R_n^{(q)}(-l-x)(j-l)^A \sum_{k=1}^j \frac{z^k}{l-k+x}$ est un polynôme en x de degré au plus n . On justifie de manière similaire le cas $j = n$ et il en résulte que $P_0^{(q)}(x, z)$ est un polynôme de degré au plus n par rapport à x . La première partie de la proposition est donc démontrée.

Pour le dernier point, on a la majoration pour $\Re(x) > 0$:

$$\begin{aligned}
\left| x^{An-n-3+q} S_n^{(q)}(x, z) \right| &\leq n!^{A-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k)_{n+1} |x|^{An-n-3+q}}{|k+x|^{An+q}} \\
&\leq n!^{A-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k)_{n+1} |x|^{An-n-3+q}}{|x+k|^{An-n-3+q} |k+x|^{n+3}} \leq n!^{A-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k)_{n+1}}{|k+x|^{n+3}}
\end{aligned}$$

La convergence normale de la dernière série sur l'ensemble des complexes x tels que $\Re(x) > 1$ permet de passer à la limite sous le signe somme et on conclut que

$$\lim_{\Re(x) \rightarrow +\infty} \left| x^{An-n-3+q} S_n^{(q)}(x, z) \right| = 0.$$

La proposition est donc démontrée.

Corollaire 1 On a

$$S_n^{(q)}(x, \xi) = P_0^{(q)}(x, \xi) + \sum_{s=1}^A P_s^{(q)}(x, \xi) \phi_s(x, \xi^{-1})$$

et, lorsque $\Re(x) \rightarrow +\infty$,

$$S_n^{(q)}(x, \xi) = o(x^{-An+n+3})$$

Lemme 2 On a :

$$\phi_s(x, 1) = \zeta(s, x)$$

$$\phi_s(x, \xi^{-1}) = \frac{1}{e^s} \sum_{j=0}^{e-1} \xi^{-j} \zeta\left(s, \frac{x+j}{e}\right)$$

La preuve est évidente.

4 Propriétés arithmétiques des polynômes $P_s^{(q)}(x, z)$

On pose $d_n = \text{ppcm}(1, \dots, n)$. On sait par le théorème des nombres premiers que

$$\ln d_n \sim n.$$

On pose pour tout entier b non nul et pour entier positif n

$$\mu_n(b) = b^n \prod_{q|b} q^{\lfloor \frac{n}{q-1} \rfloor}.$$

(où q désigne un nombre premier).

Lemme 3 *Si x est un nombre rationnel $\frac{a}{b}$ ($b > 0$) et k un entier appartenant à l'intervalle $[0, n]$, alors les nombres $\frac{(x)_n}{n!} \mu_n(b)$ et $\frac{(x)_{n+1}}{n!(x+k)} \mu_n(b) d_n$ sont des entiers et on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\mu_n(b)) = \ln b + \sum_{q|b} \frac{\ln q}{q-1}. \quad (17)$$

Démonstration

On a

$$\frac{(x)_n}{n!} \mu_n(b) = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} (bi + a)}{n!} \prod_{q|b} q^{\lfloor \frac{n}{q-1} \rfloor}.$$

Montrons que la valuation q -adique de ce nombre rationnel est positive ou nulle pour tout nombre premier q .

- Si q divise b , alors la valuation q -adique de $n!$ étant au plus $\lfloor \frac{n}{q-1} \rfloor$, on en déduit que la valuation q -adique est positive ou nulle.
- Si q ne divise pas b , alors la valuation q -adique de $\prod_{i=0}^{n-1} (bi + a)$ est égale à celle de $\prod_{i=0}^{n-1} (i + \frac{a}{b})$. Dans l'intervalle $[0, n-1]$, pour un entier positif j , il y a au moins $\lfloor \frac{n}{q^j} \rfloor$ entiers congrus à $-\frac{a}{b}$ modulo $q^j \mathbb{Z}_q$. La valuation q -adique de $\prod_{i=0}^{n-1} (i + \frac{a}{b})$ est donc au moins $\sum_{j=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{q^j} \rfloor$ qui est exactement la valuation q -adique de $n!$. La valuation q -adique est donc positive ou nulle.

Le nombre $\frac{(x)_n}{n!} \mu_n(b)$ est donc bien un entier.

On a

$$\frac{(x)_{n+1}}{n!(x+k)} \mu_n(b) d_n = \frac{\prod_{0 \leq i \leq n, i \neq k} (bi + a)}{n!} \left(\prod_{q|b} q^{\lfloor \frac{n}{q-1} \rfloor} \right) d_n.$$

Pour cela, montrons que pour tout nombre premier q , la valuation q -adique de ce nombre rationnel est positive ou nulle.

Si q divise b , ceci est évident puisque $v_q(n!) < \frac{n}{q-1}$.

On suppose donc que q ne divise pas b . Pour tout entier j compris entre 1 et $J = \lfloor \frac{\ln n}{\ln q} \rfloor$, on désigne par ν_j le nombre d'entiers i vérifiant $0 \leq i \leq n$, $i \neq k$ et $i \equiv -\frac{a}{b} \pmod{q^j}$. Le nombre

$$Y = \prod_{0 \leq i \leq n, i \neq k}^n (bi + a)$$

est de valuation q -adique

$$v_q(Y) \geq \sum_{j=1}^{J-1} j(\nu_j - \nu_{j+1}) + J\nu_J = \sum_{j=1}^J \nu_j.$$

Pour chaque j compris entre 1 et J , et pour chaque entier tel que $0 \leq K \leq \frac{n}{q^j} - 1$, il y a un entier i appartenant à l'intervalle $[Kq^j, (K+1)q^j[$ tel que $i \equiv -\frac{a}{b} \pmod{q^j}$. Le nombre de ces intervalles disjoints est $\left\lfloor \frac{n}{q^j} \right\rfloor$, par suite $\nu_j \geq \left\lfloor \frac{n}{q^j} \right\rfloor - 1$. On a donc

$$v_q(Y) \geq \sum_{j=1}^J \left\lfloor \frac{n}{q^j} \right\rfloor - J.$$

Or $v_q(n!) = \sum_{j=1}^J \left\lfloor \frac{n}{q^j} \right\rfloor$ et $v_q(d_n) = J$, on en déduit

$$v_q(Y) - v_q(n!) + v_q(d_n) \geq 0.$$

On conclut que le nombre $\frac{(x)_{n+1}}{n!(x+k)} \mu_n(b) d_n$ est de valuation q -adique positive ou nulle. Le nombre $\frac{(x)_{n+1}}{n!(x+k)} \mu_n(b) d_n$ est donc bien un entier.

Pour la limite (17), le calcul est direct.

Proposition 2 *Pour tout nombre premier p , et tout $s \in [1, A]$, on a*

$$p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^{A-s} P_s^{(q)}(x, \xi) \in \mathbb{Z}_p[\xi][x]$$

et

$$p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^{A-1} P_0^{(q)}(x, \xi) \in \mathbb{Z}_p[\xi][x].$$

De plus, pour un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, avec $(a, b) = 1$, pour tout $s \in [1, A]$, on a

$$b d_n^{A-s} \mu_n(b) P_s^{(q)}\left(\frac{a}{b}, \xi\right) \in \mathbb{Z}[\xi]$$

et

$$d_n^A \mu_n(b) P_0^{(q)}\left(\frac{a}{b}, \xi\right) \in \mathbb{Z}[\xi].$$

Démonstration

Démontrons d'abord le premier et le troisième point. Supposons $j \in [0, n-1]$ (le cas $j = n$ se traite de manière similaire, en se limitant à $s \leq q$)

D'après (13)

$$r_{j,s}^{(q)}(x) = \frac{(-1)^{A-s}}{(A-s)!} \left(\frac{d}{dl}\right)^{A-s} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (n-l)^q} (j-l)^A \right]_{l=j}.$$

Écrivons

$$n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (n-l)^q} (j-l)^A = F(l) G(l)^{A-1} H(l),$$

$$\text{où } F(l) = \frac{(-l-x)_n}{(-l)_{n+1}} (j-l), \quad G(l) = \frac{n!}{(-l)_{n+1}} (j-l) \quad \text{et} \quad H(l) = (-l+n)^{A-q} (n-l-x).$$

Décomposons maintenant $F(l)$ et $G(l)$ en éléments simples

$$F(l) = 1 + \sum_{\substack{m \neq j \\ 0 \leq m \leq n}} \frac{(j-m)f_m}{m-l}, \quad G(l) = \sum_{\substack{m \neq j \\ 0 \leq m \leq n}} \frac{(j-m)g_m}{m-l},$$

où

$$f_m = \frac{(-m-x)_n}{\prod_{\substack{h \neq m \\ 0 \leq h \leq n}} (h-m)} = (-1)^m \frac{(-m-x)_n}{n!} \binom{n}{m}$$

et

$$g_m = \frac{n!}{\prod_{\substack{h \neq m \\ 0 \leq h \leq n}} (h-m)} = (-1)^m \binom{n}{m}.$$

Il est immédiat que g_m est un entier. D'autre part $n! f_m \in \mathbb{Z}[x]$, donc $p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} f_m \in \mathbb{Z}_p[x]$. De plus le lemme 3 implique que pour $x = \frac{a}{b}$, $\mu_n(b) f_m$ est un entier. On note $D_\lambda = \frac{1}{\lambda!} \left(\frac{d}{dt} \right)^\lambda$, on a alors pour tout entier $\lambda \geq 0$:

$$(D_\lambda F(l))|_{l=j} = \delta_{0,\lambda} - \sum_{m \neq j} \sum_{0 \leq m \leq n} \frac{f_m}{(m-j)^\lambda}$$

et

$$(D_\lambda G(l))|_{l=j} = - \sum_{m \neq j} \sum_{0 \leq m \leq n} \frac{g_m}{(m-j)^\lambda}.$$

On a donc montré que, pour tout λ entier positif,

$$d_n^\lambda (D_\lambda G(l))|_{l=j} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^\lambda (D_\lambda F(l))|_{l=j} \in \mathbb{Z}_p[x]. \quad (18)$$

De plus, pour $x = \frac{a}{b}$, $d_n^\lambda \mu_n(b) (D_\lambda F(l))|_{l=j}$ est entier. Enfin les dérivées $D_\lambda (H(l))|_{l=j}$ sont des polynômes de $\mathbb{Z}[x]$ de degré au plus 1, et pour $x = \frac{a}{b}$, $b D_\lambda (H(l))|_{l=j}$ est entier.

Grâce à la formule de Leibniz, on a

$$D_{A-s} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (n-l)^q} (j-l)^A \right]_{|l=j} = \sum_{\nu} (D_{\nu_0} (F))|_{l=j} (D_{\nu_1} (G))|_{l=j} \cdots (D_{\nu_{A-1}} (G))|_{l=j} (D_{\nu_A} (H))|_{l=j}$$

(où la somme est sur les multi-indices $\nu \in \mathbb{N}^{A+1}$ tels que $\nu_0 + \cdots + \nu_A = A-s$), on déduit alors que $p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^{A-s} r_{j,s}^{(q)}(x)$ appartient à $\mathbb{Z}_p[x]$ et que $b d_n^{A-s} \mu_n(b) r_{j,s}^{(q)}(x)$ est un élément de \mathbb{Z} . Le premier et le troisième point sont alors démontrés.

Pour le deuxième et le quatrième point, en utilisant les équations (15) et (16), il suffit de montrer que

$$\frac{p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^{A-1}}{(A-1)!} \left(\frac{d}{dl} \right)^{A-1} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (-l+n)^q} (j-l)^A \frac{1}{l-k+x} \right]_{|l=j} \in \mathbb{Z}_p[x]$$

et, pour $x = \frac{a}{b}$,

$$\frac{d_n^A \mu_n(b)}{(A-1)!} \left(\frac{d}{dl} \right)^{A-1} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (-l+n)^q} (j-l)^A \frac{1}{l-k+x} \right]_{|l=j} \in \mathbb{Z}.$$

Écrivons

$$n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (n-l)^q} (j-l)^A \frac{1}{l-k+x} = \tilde{F}(l) G(l)^{A-1} \tilde{H}(l) \quad (19)$$

avec

$$\tilde{F}(l) = \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_{n+1}} (j-l) \frac{1}{l-k+x}, \quad G(l) = \frac{n!}{(-l)_{n+1}} (j-l), \quad \text{et} \quad \tilde{H}(l) = (-l+n)^{A-q}$$

Grâce au résultat (18) sur G et comme $D_\lambda(\tilde{H}(l))|_{l=j}$ est un entier, il suffit de montrer que $p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} d_n^\lambda D_\lambda(\tilde{F}(l))|_{l=j}$ appartient à $\mathbb{Z}_p[x]$ et que pour $x = \frac{a}{b}$, $d_n^{\lambda+1} \mu_n(b) D_\lambda(\tilde{F}(l))|_{l=j}$ est entier ; or

$$\tilde{F}(l) = -1 + \sum_{\substack{m \neq j \\ 0 \leq m \leq n}} \frac{(j-m)\tilde{f}_m}{m-l}$$

avec

$$\tilde{f}_m = \frac{(-m-x)_{n+1}}{(m-k+x) \prod_{\substack{h \neq m \\ 0 \leq h \leq n}} (h-m)} = (-1)^m \frac{(-m-x)_{n+1}}{n!(m-k+x)} \binom{n}{m}.$$

On voit donc que $p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor} \tilde{f}_m$ est dans $\mathbb{Z}_p[x]$, et que, d'après le lemme 3, pour $x = \frac{a}{b}$, $d_n \mu_n(b) \tilde{f}_m$ est entier. La formule

$$(D_\lambda \tilde{F}(l))|_{l=j} = -\delta_{0,\lambda} - \sum_{m \neq j} \sum_{0 \leq m \leq n} \frac{\tilde{f}_m}{(m-j)^\lambda}$$

permet alors de conclure comme ci-dessus, et les deuxième et quatrième points sont établis.

Corollaire 2 *Si x est un nombre rationnel $\frac{a}{b}$, alors $b d_n^A \mu_n(b) S_n^{(q)}(x, \xi)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}[\xi]$ de $(\phi_s(x, \xi^{-1}))_{s \in [1, A]}$ et de 1.*

Démonstration On utilise le corollaire 1 et la proposition 2.

5 Propriétés asymptotiques des polynômes $P_s^{(q)}(x, z)$

Proposition 3 *Si x est un nombre complexe fixé, alors*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} |P_s^{(q)}(x, \xi)|^{\frac{1}{n}} \leq 2^{A-1}.$$

Démonstration Puisque

$$|P_s^{(q)}(x, \xi)| \leq \sum_{j=0}^n |r_{j,s}^{(q)}(x)|$$

il nous suffit de majorer $r_{j,s}^{(q)}(x)$. Or on a

$$r_{j,s}^{(q)}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+j+x|=\frac{1}{2}} R_n^{(q)}(z)(z+j+x)^{s-1} dz \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+j+x|=\frac{1}{2}} n!^{A-1} \frac{(z)_{n+1}}{(z+x)_n^A (x+z+n)^q} (z+j+x)^{s-1} dz \quad (21)$$

On en déduit que

$$|r_{j,s}^{(q)}(x)| \leq 2^{-s} \sup_{|z+j+x|=\frac{1}{2}} \left(n!^{A-1} \frac{|(z)_{n+1}|}{|(z+x)_n^A (x+z+n)^q|} \right). \quad (22)$$

Soit m un entier positif tel que $|x| + \frac{1}{2} \leq m$, on a, pour z tel que $|z+j+x| = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
|(z)_{n+1}| &= \prod_{k=0}^n |z+k| \\
&= \prod_{k=0}^n |z+j+x-j-x+k| \\
&\leq \prod_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} + |x| + |k-j| \right) \\
&\leq \prod_{k=0}^n (m+|k-j|) \\
|(z)_{n+1}| &\leq m(m+1)\dots(m+j)(m+1)\dots(m+n-j) \leq (m+j)!(m+n-j)!.
\end{aligned} \tag{23}$$

Maintenant minorons

$$\begin{aligned}
|(z+x)_n| &= \prod_{k=0}^{n-1} |z+k+x| \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} |z+j+x-j+k| \\
&\geq \prod_{k=0}^{n-1} \left| -\frac{1}{2} + |k-j| \right|
\end{aligned}$$

En minorant par $\left| |k-j| - \frac{1}{2} \right| \geq |k-j| - 1$ si $|k-j| > 1$, et par $\left| |k-j| - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{1}{2}$ sinon, on obtient, dans tous les cas

$$|(z+x)_n| \geq \frac{1}{8n^3} j!(n-j)!. \tag{24}$$

En utilisant (23) et (24), on en déduit que

$$\frac{|(z)_{n+1}|}{|(z+x)_n|} \leq 8n^3 \prod_{k=1}^m (j+k)(n-j+k) \leq 8n^3 (n+m)^{2m}.$$

Enfin

$$|(z+n+x)^q| = |(z+x+j-j+n)^q| \geq \frac{1}{2^q}. \tag{25}$$

On déduit en utilisant (23), (24) et (25) dans (22) que

$$\left| r_{j,s}^{(q)}(x) \right| \leq 2^{-s+q+3A} (n+m)^{2m} n^{3A} \binom{n}{j}^{A-1}$$

Comme $\binom{n}{j} \leq 2^n$, il en résulte que

$$|P_s^{(q)}(x, \xi)| \leq 2^{-s+q+3A} (n+m)^{2m+3A+1} 2^{n(A-1)}.$$

On conclut donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| P_s^{(q)}(x, \xi) \right|^{\frac{1}{n}} \leq 2^{A-1}.$$

Corollaire 3 *Pour tout $s \in [0, A]$, on a*

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln \left| b\mu_n(b) d_n^A P_s^{(q)}(x, \xi) \right| \leq \ln b + \sum_{q|b} \frac{\ln q}{q-1} + A + (A-1) \ln 2. \tag{26}$$

6 Indépendance linéaire des formes linéaires

On considère la matrice

$$M_n(x, z) = \begin{pmatrix} P_s^{(q)}(x, z) \\ q \in [0, A] \\ s \in [0, A] \end{pmatrix} \quad (27)$$

et on note

$$\Omega_n(x, z) = \det M_n.$$

Proposition 4 *On a*

$$\Omega_n(x, z) = \gamma z^{n+1} (z-1)^{(A-1)n-2} x^A \quad (28)$$

où $\gamma \in \mathbb{Q}^*$.

La preuve de cette proposition résultera des lemmes suivants.

Lemme 4 *Le polynôme $\Omega_n(x, z)$ est divisible par x^A .*

Démonstration En dérivant (13), on a

$$\frac{d}{dx} r_{j,1}^{(q)}(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{A-1}}{(A-1)!} \left(\frac{d}{dl}\right)^{A-1} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (n-l)^q} (j-l)^A \sum_{k=0}^n \frac{-1}{k-l-x} \right]_{|l=j} & \text{si } j \in [0, n-1] \\ \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} \left(\frac{d}{dl}\right)^{q-1} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A} \sum_{k=0}^n \frac{-1}{k-l-x} \right]_{|l=n} & \text{si } j = n \text{ et } q > 0 \\ 0 & \text{si } j = n \text{ et } q = 0 \end{cases}$$

En utilisant la formule de Leibniz, on obtient, pour $j \in [0, n-1]$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} r_{j,1}^{(q)}(x) \\ &= \\ & \frac{(-1)^A}{(A-1)!} \sum_{u=0}^{A-1} \binom{A-1}{u} \left(\frac{d}{dl}\right)^{A-1-u} \left[n!^{A-1} \frac{(-l-x)_{n+1}}{(-l)_n^A (n-l)^q} (j-l)^A \right]_{|l=j} \left(\frac{d}{dl}\right)^u \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{k-l-x} \right]_{|l=j} \\ &= \\ & \sum_{u=0}^{A-1} (-1)^{u+1} r_{j,u+1}^{(q)}(x) \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k-j-x)^{u+1}}. \end{aligned}$$

De même, pour $j = n$, on a

$$\frac{d}{dx} r_{n,1}^{(q)}(x) = \begin{cases} \sum_{u=0}^{A-1} (-1)^{u+1} r_{n,u+1}^{(q)}(x) \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k-n-x)^{u+1}} & \text{si } q > 0 \\ 0 & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} r_{j,1}^{(q)}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k-j-x)^A} \sum_{u=0}^{A-1} (-1)^{u+1} r_{j,u+1}^{(q)}(x) (k-j-x)^{A-u-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k-j-x)^A} \sum_{u=0}^{A-1} (-1)^{A-u} r_{j,A-u}^{(q)}(x) (k-j-x)^u. \end{aligned}$$

Les quantités que l'on dérive étant des polynômes, les dérivées sont aussi des polynômes. On en déduit que, pour tout $j \in [0, n]$, pour tout $k \in [0, n]$, le polynôme $\sum_{u=0}^{A-1} (-1)^{A-u} r_{j, A-u}^{(q)}(x) (k-j-x)^u$ est divisible par $(k-j-x)^A$. Cela implique que pour tout $v \in [0, A-1]$, $\sum_{u=0}^v (-1)^{A-u} r_{j, A-u}^{(q)}(x) (k-j-x)^u$ est divisible par $(k-j-x)^{v+1}$ et donc que

$$\frac{1}{(k-j-x)^v} \sum_{u=0}^v (-1)^{A-u} r_{j, A-u}^{(q)}(x) (k-j-x)^u$$

est un polynôme qui s'annule en $x = k - j$.

Il en résulte en prenant $k = j$ que pour tout $j \in [0, n]$ et $v \in [0, A-1]$

$$\sum_{u=0}^v \frac{1}{x^{v-u}} r_{j, A-u}^{(q)}(x)$$

est un polynôme qui s'annule en $x = 0$.

Par linéarité, on obtient que, pour tout $v \in [0, A-1]$

$$\sum_{u=0}^v \frac{1}{x^{v-u}} P_{A-u}^{(q)}(x, z) = \sum_{u=0}^v \frac{1}{x^u} P_{A-v+u}^{(q)}(x, z)$$

est un polynôme en x s'annulant en $x = 0$.

Or, par multilinéarité sur les colonnes du déterminant (27), on obtient :

$$\Omega_n(x, z) = \begin{vmatrix} P_0^{(0)}(x, z) & \sum_{u=0}^{A-1} \frac{1}{x^u} P_{u+1}^{(0)}(x, z) & \sum_{u=0}^{A-2} \frac{1}{x^u} P_{u+2}^{(0)}(x, z) & \cdots & P_A^{(0)}(x, z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_0^{(A)}(x, z) & \sum_{u=0}^{A-1} \frac{1}{x^u} P_{u+1}^{(A)}(x, z) & \sum_{u=0}^{A-2} \frac{1}{x^u} P_{u+2}^{(A)}(x, z) & \cdots & P_A^{(A)}(x, z) \end{vmatrix} \quad (29)$$

Chaque colonne (excepté la première) est un polynôme en x admettant $x = 0$ comme zéro, on obtient donc que $x = 0$ est zéro d'ordre au moins A de $\Omega_n(x, z)$. On conclut que x^A divise $\Omega_n(x, z)$.

Lemme 5 *Le polynôme $\Omega_n(x, z)$ est de degré $An - 1$ en z .*

Démonstration En ajoutant à la première colonne du déterminant (27) les colonnes suivantes multipliées par $\phi_s(x, \frac{1}{z})$, on obtient :

$$\Omega_n(x, z) = \begin{vmatrix} S_n^{(0)}(x, z) & P_1^{(0)}(x, z) & \cdots & P_A^{(0)}(x, z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_n^{(A)}(x, z) & P_1^{(A)}(x, z) & \cdots & P_A^{(A)}(x, z) \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Les éléments de la première colonne sont exactement de degré -1 en z , car le premier terme de la série $S_n^{(q)}(x, z)$ étant nul, on peut faire la somme à partir de $k = 1$, et on obtient ainsi une série formelle en $\frac{1}{z}$, de degré -1 . Les autres colonnes sont de degré au plus n en z , grâce à la proposition 1. On en déduit que le déterminant est de degré au plus $An - 1$ en z . La proposition 1 nous montre que les éléments surdiagonaux sont de degré inférieur ou égal à $n - 1$ en z . On en déduit que dans le développement du déterminant, tous les termes, autres que le produit des éléments diagonaux, sont de degré en z strictement inférieur à $An - 1$. Mais les équations (12) et (14) impliquent que $P_q^{(q)}(x, z)$ est exactement de degré n en z . Le produit des éléments diagonaux donne donc un élément de degré exactement $An - 1$. Le degré en z de $\Omega_n(x, z)$ est donc exactement $An - 1$.

Lemme 6 *Le polynôme $\Omega_n(x, z)$ est de degré au plus A en x .*

Démonstration Développons l'expression (30) du déterminant $\Omega_n(x, z)$ par rapport à la première colonne, on obtient

$$\Omega_n(x, z) = \sum_{q=0}^A (-1)^q S_n^{(q)}(x, z) \Delta_{q,0}(x, z)$$

où les $\Delta_{q,0}(x, z)$ sont les déterminants extraits.

On a

$$x^{-A} S_n^{(q)}(x, z) \Delta_{q,0}(x, z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{-A} \Delta_{q,0}(x, z) R_n^{(q)}(k) z^{-k}. \quad (31)$$

Cela implique, pour $\Re(x) > 0$

$$\left| x^{-A} \Delta_{q,0}(x, z) R_n^{(q)}(k) \right| = \left| x^{-A} \Delta_{q,0}(x, z) n!^{A-1} \frac{(k)_{n+1}}{(x+k)_n^A (x+k+n)^q} \right| \leq n!^{A-1} \left| \frac{(k)_{n+1}}{(x+n)^q} \frac{\Delta_{q,0}(x, z)}{x^{A(n+1)}} \right|. \quad (32)$$

La proposition 1 permet de majorer le degré en x de $\Delta_{q,0}(x, z)$ par $A(n+1)$. Cela implique que pour z fixé quelconque, avec $|z| > 1$, $\frac{\Delta_{q,0}(x, z)}{x^{A(n+1)}}$ est bornée pour $\Re(x) > 1$. On a donc pour $\Re(x) > 1$

$$\left| x^{-A} \Delta_{q,0}(x, z) R_n^{(q)}(k) z^{-k} \right| \leq \frac{K}{|x|^q} (k)_{n+1} |z^{-k}| \quad (33)$$

où $K = K(z)$ est une constante indépendante x .

Le terme de droite de l'inégalité précédente étant le terme général d'une série convergente pour $|z| > 1$, on en déduit que les termes de l'équation (31) tendent vers 0 quand $\Re(x)$ tend vers $+\infty$ si $q > 0$ et restent bornés pour $q = 0$. On en conclut que le degré en x de $\Omega_n(x, z)$ est au plus A .

Corollaire 4 *Le polynôme $\Omega_n(x, z)$ est de la forme*

$$x^A Q(z),$$

où $Q(z)$ un polynôme de degré $An - 1$.

Démonstration Cela résulte des lemmes 4, 5 et 6.

Lemme 7 *Le polynôme $\Omega_n(x, z)$ est divisible par z^{n+1} .*

Démonstration

Du corollaire 4, on déduit

$$Q(z) = x^{-A} \Omega_n(x, z) = \lim_{\Re(x) \rightarrow +\infty} x^{-A} \Omega_n(x, z),$$

d'où

$$Q(z) = \sum_{q=0}^A (-1)^q \lim_{\Re(x) \rightarrow +\infty} x^{-A} S_n^{(q)}(x, z) \Delta_{q,0}(x, z).$$

Le résultat (33) nous permet de conclure que pour $|z| > 1$, on a

$$Q(z) = \lim_{\Re(x) \rightarrow +\infty} x^{-A} S_n^{(0)}(x, z) \Delta_{0,0}(x, z).$$

On a de plus

$$\lim_{\Re(x) \rightarrow +\infty} x^{An} S_n^{(0)}(x, z) = \lim_{\Re(x) \rightarrow +\infty} n!^{A-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k)_{n+1} x^{An}}{(k+x)_n^A} z^{-k} = n!^{A-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (k)_{n+1} z^{-k}. \quad (34)$$

Or pour $|Z| < 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k)_{n+1} Z^k = Z \frac{d^{n+1}}{dZ^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} Z^{k+n} = Z \frac{d^{n+1}}{dZ^{n+1}} \frac{Z^n}{1-Z} = Z \frac{d^{n+1}}{dZ^{n+1}} \frac{1}{1-Z} = (n+1)! \frac{Z}{(1-Z)^{n+2}}.$$

Donc pour $|z| > 1$,

$$\lim_{\Re(x) \rightarrow +\infty} x^{An} S_n^{(0)}(x, z) = \frac{n!^A (n+1) z^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}.$$

Le fait que $\Delta_{0,0}$ soit un polynôme en x et z de degré au plus $A(n+1)$ en x permet d'obtenir que

$$\lim_{\Re(x) \rightarrow +\infty} x^{-A(n+1)} \Delta_{0,0}(x, z) \quad (35)$$

est un polynôme $M(z)$.

On a donc $Q(z) = M(z) \frac{n!^A (n+1) z^{n+1}}{(z-1)^{n+2}}$ et il en résulte que z^{n+1} divise $Q(z)$.

Lemme 8 *Le polynôme $\Omega_n(x, z)$ est divisible par $(z-1)^{(A-1)n-2}$*

Démonstration Pour $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, on pose $z^{-t} = e^{-t \log z}$ où $\log z$ est la détermination du logarithme de z de partie imaginaire comprise entre $-\pi$ et π . Considérons l'intégrale

$$J_n^{(q)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t+x|=n+1} R_n^{(q)}(t) z^{-t} dt$$

qui définit une fonction holomorphe pour $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$.

La nullité en 1

Par dérivation sous le signe somme, on obtient

$$\frac{d^k J_n^{(q)}}{dz^k}(z) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{|t+x|=n+1} R_n^{(q)}(t) (t)_k z^{-t-k} dt.$$

On remarque que

$$\deg_t R_n^{(q)}(t) (t)_k = n+1+k - An - q.$$

Or l'intégrale d'une fonction rationnelle de degré inférieur ou égal à -2 est nulle sur un contour fermé contenant l'ensemble de ses pôles. Cela implique que, si

$$k \leq (A-1)n + q - 3,$$

on a

$$\frac{d^k J_n^{(q)}}{dz^k}(1) = 0. \quad (36)$$

Lien avec $\Omega_n(x, z)$

La formule des résidus nous donne

$$J_n^{(q)}(z) = \sum_{j=0}^n \text{Res}_{[t=-j-x]} \left(R_n^{(q)}(t) z^{-t} \right).$$

On a

$$e^{-t \log z} = e^{(x+j) \log z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (t+x+j)^k (\log z)^k}{k!}.$$

En utilisant les mêmes notations que pour la proposition 1, on obtient

$$\operatorname{Res}_{[t=-j-x]} \left(R_n^{(q)}(t) z^{-t} \right) = \sum_{s=1}^A r_{j,s}^{(q)}(x) \frac{(-1)^{s-1} e^{(x+j) \log z} (\log z)^{s-1}}{(s-1)!}.$$

On en déduit

$$J_n^{(q)}(z) = \sum_{j=0}^n \sum_{s=1}^A r_{j,s}^{(q)}(x) \frac{(-1)^{s-1} e^{(x+j) \log z} (\log z)^{s-1}}{(s-1)!} \quad (37)$$

$$J_n^{(q)}(z) = e^{x \log z} \sum_{s=1}^A P_s^{(q)}(x, z) \frac{(-1)^{s-1} (\log z)^{s-1}}{(s-1)!}. \quad (38)$$

Dans (30), en ajoutant à la deuxième colonne les suivantes multipliées respectivement par $\frac{(-1)^{s-1} (\log z)^{s-1}}{(s-1)!}$, on obtient

$$\Omega_n(x, z) = \begin{vmatrix} S_n^{(0)}(x, z) & e^{-x \log z} J_n^{(0)}(z) & P_2^{(0)}(x, z) & \cdots & P_A^{(0)}(x, z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_n^{(q)}(x, z) & e^{-x \log z} J_n^{(A)}(z) & P_2^{(A)}(x, z) & \cdots & P_A^{(A)}(x, z) \end{vmatrix}$$

Grâce à (36), les fonctions $J_n^{(q)}(z)$ ont un zéro en $z = 1$ d'ordre au moins $(A-1)n - 2$, cela nous permet de conclure que $(z-1)^{(A-1)n-2}$ divise $\Omega_n(x, z)$.

Démonstration de la proposition 4

Les lemmes 7 et 8 et le corollaire 4 permettent de conclure.

7 Passage du cas complexe au cas p -adique et démonstration du théorème

Pour s complexe tel que $\Re(s) > 1$, et x réel positif, on pose

$$T(s, x) = \frac{1}{e^s} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \zeta\left(s, \frac{x+l}{e}\right).$$

Comme la fonction $s \mapsto \zeta\left(s, \frac{x+l}{e}\right)$ peut être prolongée en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ admettant le point 1 pôle simple d'ordre 1 et de résidu 1, la fonction $s \mapsto T(s, x)$ peut être considérée comme une fonction holomorphe sur \mathbb{C} .

Pour un nombre p -adique x , tel que $|x|_p \geq p$ et s un entier strictement positif, on pose

$$T_p(s, x) = \sum_{j=0}^{e-1} \frac{\left(\frac{x+j}{e}\right)^{1-s}}{e^s \langle \frac{x+j}{e} \rangle^{1-s}} \xi^{-j} \zeta_p\left(s, \frac{x+j}{e}\right) \quad \text{si } s > 1 \quad (39)$$

et

$$T_p(1, x) = \frac{1}{e} \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{j=0}^{e-1} \xi^{-j} \zeta_p\left(t, \frac{x+j}{e}\right). \quad (40)$$

On remarque que

$$T_p(s, x) = \frac{1}{e^s} \omega\left(\frac{x}{e}\right)^{1-s} \tilde{T}_p(s, x). \quad (41)$$

Proposition 5 Soit $x = \frac{a}{b}$ un rationnel, tel que $|x|_p \geq p$, et soit A un entier supérieur ou égal à 2.

Alors la dimension τ de l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{Q}(\xi)$ par la famille $\left\{1, (T_p(s, x))_{s \in [1, A]}\right\}$ vérifie

$$\tau \geq \frac{[\mathbb{Q}_p(\xi) : \mathbb{Q}_p]}{\varphi(e)} \frac{A \ln |x|_p}{\ln b + \sum_{q|b} \frac{\ln q}{q-1} + A + (A-1) \ln 2}.$$

Lemme 9 Soient s réel, $s > 1$, et x réel, $x > 0$. On a pour tout entier $k > 0$

$$T(s, x) = \frac{1}{e^{(s-1)}} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} (x+l)^{1-s} - \sum_{j=1}^{k-1} \binom{-s}{j-1} e^{j-1} \frac{B_j}{j} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} (x+l)^{1-s-j} + O_{x \rightarrow +\infty}(x^{-s-k+1})$$

et

$$T(1, x) = -\frac{1}{e} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \ln\left(1 + \frac{l}{x}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} e^{j-1} \frac{(-1)^j B_j}{j} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} (x+l)^{-j} + O_{x \rightarrow +\infty}(x^{-k}).$$

Démonstration Le cas $s > 1$ est une application directe de l'équation (1). Le cas $s = 1$ résulte de l'équation (2) car on peut écrire

$$T(s, x) = \frac{1}{e^s} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \left(\zeta\left(s, \frac{x+l}{e}\right) - \frac{1}{s-1} \right).$$

Lemme 10 Soient p un nombre premier, s un entier plus grand que 1 et x un élément de \mathbb{Q}_p , tel que $|x|_p \geq p$. On a

$$T_p(s, x) = \frac{1}{e^{(s-1)}} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} (x+l)^{1-s} - \sum_{j=1}^{\infty} \binom{-s}{j-1} e^{j-1} \frac{B_j}{j} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} (x+l)^{1-s-j} \quad (42)$$

et

$$T_p(1, x) = -\frac{1}{e} \sum_{l=1}^{e-1} \xi^{-l} \log_p\left(1 + \frac{l}{x}\right) + \sum_{j=1}^{+\infty} e^{j-1} \frac{(-1)^j B_j}{j} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} (x+l)^{-j}. \quad (43)$$

Démonstration Le cas $s > 1$ est une conséquence directe de l'équation (3). Pour le cas $s = 1$, en utilisant l'équation (4), on obtient :

$$\lim_{s \rightarrow 1} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \zeta_p\left(s, \frac{x+l}{e}\right) = \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \left(-\ln \left\langle \frac{x+l}{e} \right\rangle + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j B_j}{j} \left(\frac{x+l}{e} \right)^{-j} \right) \quad (44)$$

On doit distinguer deux cas

– Si $|x|_p \geq q_p$, alors pour l compris entre 1 et $e-1$, on a

$$\omega\left(\frac{x}{e}\right) = \omega\left(\frac{x+l}{e}\right).$$

On conclut que

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \log_p \left\langle \frac{x+l}{e} \right\rangle &= \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \log_p \left(\frac{\frac{x+l}{e}}{\omega\left(\frac{x}{e}\right)} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \log_p \left(1 + \frac{l}{x} \right) + \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \log_p \left(\frac{x}{e \omega\left(\frac{x}{e}\right)} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{e-1} \xi^{-l} \log_p \left(1 + \frac{l}{x} \right). \end{aligned}$$

– Si $p = 2$ et $|x|_2 = 2$, on a alors

$$\omega\left(\frac{x+l}{e}\right) = (-1)^l \omega\left(\frac{x}{e}\right).$$

On conclut de même que

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \log_2 \left\langle \frac{x+l}{e} \right\rangle &= \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \log_2 \left(\frac{\frac{x+l}{e}}{(-1)^l \omega \left(\frac{x}{e} \right)} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \log_2 \left(1 + \frac{l}{x} \right) + \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \log_2 \left(\frac{x}{e \omega \left(\frac{x}{e} \right)} \right) - \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \log_2 ((-1)^l) \\
&= \sum_{l=1}^{e-1} \xi^{-l} \log_2 \left(1 + \frac{l}{x} \right).
\end{aligned}$$

Proposition 6 Soit $x = \frac{a}{b}$ (a et b premier entre eux) un rationnel, tel que $|x|_p \geq p$, si on note

$$U_n^{(q)}(x) = b \mu_n(b) d_n^A \left(P_0^{(q)}(x, \xi) + \sum_{s=1}^A P_s^{(q)}(x, \xi) T_p(s, x) \right),$$

on a

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln |U_n^{(q)}(x)|_p \leq -A \ln |x|_p.$$

On va démontrer cette proposition en plusieurs étapes.

On pose

$$\tilde{U}_n^{(q)}(x) = d_n^A \left(P_0^{(q)}(x, \xi) + \sum_{s=1}^A P_s^{(q)}(x, \xi) T_p(s, x) \right).$$

Lemme 11 On a, pour x un nombre p -adique, tel que $|x|_p \geq p$

$$\tilde{U}_n^{(q)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^n x^{-k}$$

où (u_k^n) est une suite de nombres rationnels indépendant de x , vérifiant

$$u_k^n = 0$$

pour tout $k < A(n-1) - 3$.

Démonstration On a dans le corps des séries de Laurent $\mathbb{Q}((1/x))$

$$(x+1)^{-j} = x^{-j} \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{-j}{m} x^{-m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{-j}{m} x^{-m-j}$$

et

$$\log_p \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} x^{-m},$$

On peut donc considérer les séries formelles de Laurent dans $\mathbb{K}((1/x))$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\xi)$)

$$\Theta(s, x) = \frac{1}{e^{(s-1)}} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} (x+l)^{1-s} - \sum_{j=1}^{\infty} \binom{-s}{j-1} e^{j-1} \frac{B_j}{j} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} (x+l)^{1-s-j}$$

pour s entier, $s > 1$, et

$$\Theta(1, x) = -\frac{1}{e} \sum_{l=1}^{e-1} \xi^{-l} \log_p \left(1 + \frac{l}{x} \right) + \sum_{j=1}^{+\infty} e^{j-1} \frac{(-1)^j B_j}{j} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} (x+l)^{-j}.$$

On peut calculer le terme général de ces séries en écrivant, pour $s > 1$,

$$\Theta(s, x) = \frac{1}{e} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m} \binom{-s}{m-1} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} l^m x^{1-s-m} - \sum_{j=1}^{\infty} \binom{-s}{j-1} e^{j-1} \frac{B_j}{j} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{1-s-j}{m} l^m x^{1-s-j-m}$$

donc

$$\Theta(s, x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,s} x^{-k},$$

avec $a_{k,s} = 0$ pour $0 \leq k < s$ et, pour $k \geq s$:

$$a_{k,s} = \frac{1}{e(k-s+1)} \binom{-s}{k-s} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} l^{k-s+1} - \sum_{j=1}^{k-s+1} e^{j-1} \frac{B_j}{j} \binom{-s}{j-1} \binom{1-s-j}{k-j-s+1} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} l^{k-j-s+1}. \quad (45)$$

De même

$$\Theta(1, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,1} x^k$$

avec

$$a_{k,1} = \frac{(-1)^{k-1}}{ek} \sum_{l=1}^{e-1} \xi^{-l} l^k + \sum_{j=1}^k (-1)^j e^{j-1} \frac{B_j}{j} \binom{-j}{k-j} \sum_{l=0}^{e-1} \xi^{-l} l^{k-j}. \quad (46)$$

En utilisant les lemmes 9 et 10, on voit que pour $x \in \mathbb{Q}_p$ avec $|x| \geq p$, la série $\Theta(s, x)$ converge, et a pour somme $T_p(s, x)$, alors que pour x réel positif, on a pour tout entier $K \geq 1$ le développement limité

$$T(s, x) = \sum_{k=1}^{K-1} a_{k,s} x^{-k} + O(x^{-K}).$$

Comme les polynômes $P_s(x, z)$ sont de degré au plus $n+1$ en x , cela implique que si on considère la série formelle dans $\mathbb{K}((1/x))$

$$V_n^{(q)}(x) = d_n^A(P_0^{(q)}(x, \xi) + \sum_{s=1}^A P_s^{(q)}(x, \xi) \Theta(s, x)) = \sum_{k=-n}^{+\infty} u_k^n x^{-k}$$

on a pour x réel positif

$$d_n^A S_n^{(q)}(x, \xi) = \sum_{k=-n}^{K-1} u_k^n x^{-k} + O(x^{-K})$$

alors qu'au sens p -adique, pour x rationnel tel que $|x| \geq q_p$,

$$\tilde{U}_n^{(q)}(x) = \sum_{k=-n}^{+\infty} u_k^n x^{-k}.$$

le corollaire 1 nous donne que

$$\tilde{U}_n^{(q)}(x) = o_{\mathfrak{R}(x) \rightarrow +\infty}(x^{-An+n+3-q}). \quad (47)$$

L'unicité du développement limité montre donc que $u_k^n = 0$ si $k < A(n-1) - 3$.

Lemme 12 Les termes u_k^n vérifient

$$|u_k^n|_p \leq \frac{k+n+1}{|e|_p} p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor + 1}.$$

Démonstration On rappelle que la valuation p -adique d'un nombre de Bernoulli est supérieure ou égale à -1 , par le théorème de Clausen-von Staudt (cf. [Coh] pour une démonstration) et que pour tout entier n strictement positif et tout entier positif i , $\binom{-n}{i} = (-1)^i \binom{n+i-1}{i}$ est un entier. Les expressions (45) et (46) nous donnent donc directement, pour s entier, $s \geq 1$,

$$|a_{k,s}|_p \leq \frac{k}{|e|_p} p.$$

La proposition 1 et la proposition 2 assurent que les polynômes $d_n^A P_s^{(q)}(x, z)$ sont de degré en x au plus $n+1$ et ont des coefficients majorés par $p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}$ en valeur absolue p -adique.

On en déduit, en utilisant la série formelle

$$V_n^{(q)}(x) = d_n^A (P_0^{(q)}(x, \xi) + \sum_{s=1}^A P_s^{(q)}(x, \xi) \Theta(s, x)) = \sum_{k=-n}^{+\infty} u_k^n x^{-k}$$

que

$$|u_k^n|_p \leq \frac{k+n+1}{|e|_p} p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor + 1}.$$

Lemme 13 *On a*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left| \tilde{U}_n^{(q)}(x) \right|_p \leq \frac{\ln p}{p-1} - (A-1) \ln |x|_p$$

Démonstration En utilisant le lemme 11, on a

$$\left| \tilde{U}_n^{(q)}(x) \right|_p \leq \sup_{k \geq (A-1)n-3} |u_k^n|_p |x|_p^{-k}.$$

En utilisant le lemme 12, on en déduit que

$$\left| \tilde{U}_n^{(q)}(x) \right|_p \leq \sup_{k \geq (A-1)n-3} \frac{k+n+1}{|e|_p} p^{\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor + 1} |x|_p^{-k}$$

On en déduit que

$$\left| \tilde{U}_n^{(q)}(x) \right|_p \leq M \sup_{k \geq (A-1)n-3} (k+n+1) p^{\frac{n}{p-1} + 1} |x|_p^{-k}$$

avec M une constante indépendante de n . La décroissance du terme de droite nous permet alors de conclure pour n suffisamment grand

$$\left| \tilde{U}_n^{(q)}(x) \right|_p \leq M (An-2) p^{\frac{n}{p-1} + 1} |x|_p^{-((A-1)n-3)}.$$

Démonstration de la proposition 6

Comme $x = \frac{a}{b}$ et $|x|_p \geq q_p$, on a $|b|_p = |x|_p^{-1}$. Il en résulte

$$|\mu_n(b)|_p = |x|_p^{-n} p^{-\lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor}$$

On en déduit

$$\lim_n \frac{1}{n} \ln |\mu_n(b)|_p = -\ln |x|_p - \frac{\ln p}{p-1} \quad (48)$$

En utilisant le lemme 13 et l'égalité (48), on conclut

$$\limsup_n \frac{1}{n} \ln \left| U_n^{(q)}(x) \right|_p \leq \left(\frac{\ln p}{p-1} - (A-1) \ln |x|_p \right) + \left(-\ln |x|_p - \frac{\ln p}{p-1} \right) = -A \ln |x|_p$$

Démonstration du proposition 5

La proposition 2 prouve que les coefficients des combinaisons linéaires $U_n^{(q)}(x)$ sont des éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{K})$. La proposition 4 donne l'indépendance des formes linéaires. Le corollaire 3 donne une majoration de la valeur absolue aux places infinies des coefficients, ce qui permet de prendre

$$c = \ln b + \sum_{q|b} \frac{\ln q}{q-1} + A + (A-1) \ln 2$$

La proposition 6 nous donne une majoration de la valeur absolue p -adique des formes linéaires. On prend

$$\rho = A \ln |x|_p$$

On peut donc appliquer le critère d'indépendance linéaire et la proposition est démontrée.

Démonstration du théorème 1

Le théorème 1 repose sur la proposition 5 et le fait que $[\mathbb{Q}(\chi) : \mathbb{Q}(\xi)] = \frac{\varphi(v)}{\varphi(e)}$.

Démonstration du théorème 2

Appliquons la proposition 5 à $x = \frac{2}{p}$ et $e = 2$. On remarque alors que pour $p > 2$, on a

$$\frac{\left(\frac{\frac{2}{p}+j}{2}\right)^{1-s}}{2^s \left\langle \frac{\frac{2}{p}+j}{2} \right\rangle^{1-s}} = \frac{1}{2^s}.$$

Cela implique

$$T_p \left(s, \frac{2}{p} \right) = \frac{1}{2^s} \left(\zeta_p \left(s, \frac{1}{p} \right) - \zeta_p \left(s, \frac{p+2}{2p} \right) \right).$$

On a de plus

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{A \ln \left| \frac{2}{p} \right|_p}{\ln p + \frac{\ln p}{p-1} + A + (A-1) \ln 2} = A. \quad (49)$$

On en déduit que pour p suffisamment grand, l'espace vectoriel engendré par

$$\left(1, \left(T_p \left(s, \frac{2}{p} \right) \right)_{s \in [1, A]} \right)$$

est de dimension au moins A . L'équation (49) permet de calculer explicitement la borne. Le théorème 2 est donc démontré.

Je te tiens à remercier particulièrement Tanguy Rivoal pour m'avoir fourni son article sur les approximations de Padé de la fonction de Lerch [Ri2] et Henri Cohen pour l'aide que m'a apporté son enseignement sur les fonctions p -adiques.

Références

- [Be] F. Beukers, *Irrationality of some p -adic L -values*, (preprint)
- [Ca] F. Calegari, *Irrationality of certain p -adic periods for small p* , Intern. Math. Research Notices 2005 :20 (2005), 1235–1249
- [Coh] H. Cohen, *Number Theory : Analytic and Modern Tools*, Springer, 2007
- [Ma] R. Marcovecchio, *Linear independence of forms in polylogarithms*
- [Ri1] K. Ball and T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Invent. Math. 146 :1 (2001), 193–207
- [Ri2] T. Rivoal, *Simultaneous polynomial approximations of the Lerch function*, (preprint)