



**HAL**  
open science

## Schémas en groupes et poids de Diamond-Serre

Xavier Caruso

► **To cite this version:**

| Xavier Caruso. Schémas en groupes et poids de Diamond-Serre. 2007. hal-00145173

**HAL Id: hal-00145173**

**<https://hal.science/hal-00145173>**

Preprint submitted on 9 May 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Schémas en groupes et poids de Diamond-Serre

Xavier Caruso

Avril 2007

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappel du contexte</b>	<b>2</b>
1.1	La conjecture de Buzzard, Diamond et Jarvis . . . . .	2
1.2	Énoncé (vague) de la proposition 3.3.1 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>La théorie de Breuil</b>	<b>4</b>
2.1	Définitions . . . . .	4
2.2	Description en rang 1 . . . . .	5
<b>3</b>	<b>La condition B' : schémas en groupes</b>	<b>7</b>
3.1	L'équivalence de Breuil . . . . .	7
3.2	Schémas en groupes de classe $J$ . . . . .	7
3.3	Explication de la condition B' . . . . .	8
<b>4</b>	<b>La condition B : relevés cristallins</b>	<b>8</b>
4.1	Représentations cristallines . . . . .	8
4.2	Description en rang 1 . . . . .	9
4.3	Théorie de Fontaine-Laffaille . . . . .	9
4.4	Réduction modulo $p$ . . . . .	10
4.5	Explication de la condition B . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Preuve de la proposition 3.3.1 de [6]</b>	<b>10</b>
5.1	Modules associés aux relevés cristallins . . . . .	11
5.2	Modules associés aux $E$ -groupes $\mathcal{G}$ . . . . .	11
5.3	Interlude : défaut de pleine fidélité . . . . .	13
5.4	Fin de la démonstration . . . . .	15

---

Cette note fait suite à un exposé que j'ai donné pour la deuxième partie du groupe de travail sur *les généralisations de la conjecture de modularité de Serre* organisé par Christophe Breuil, Guy Henniart, Ariane Mézard et Rachel Ollivier au printemps 2007. Le thème de l'exposé est la proposition 3.3.1 de [6] : il s'agit d'abord de présenter le matériel de théorie de Hodge  $p$ -adique nécessaire pour comprendre l'énoncé de cette proposition, puis d'en donner une démonstration.

Nous avons jugé utile d'écrire ce texte car la rédaction de [6] est souvent lacunaire ou imprécise et, surtout, contient une erreur : telle qu'énoncée dans [6], la proposition 3.3.1 est fautive, comme l'auteur de cette note s'en est rendu compte lors de la préparation de l'exposé. Il est en fait assez délicat de comprendre ce qu'il faut modifier pour rendre l'énoncé juste, et c'est Gee lui-même qui a proposé la bonne correction qui consiste à changer la définition de classe  $J$  (définition 3.2) en introduisant un décalage d'indice. Cela fait, il n'est pas non plus immédiat de saisir comment les arguments de [6] s'adaptent à ce nouvel énoncé. Cette partie du travail a été accomplie par l'auteur de cette note.

Nous présentons dans ce papier la version modifiée de la proposition 3.3.1 accompagnée de sa démonstration (correcte, nous l'espérons). Notons pour finir que Gee affirme que c'est bien cette version modifiée qu'il utilise par la suite dans son article ; ainsi, la discussion précédente ne remet

*a priori* pas en cause les résultats de [6]. Nous espérons que ce texte pourra être utile à tous ceux qui veulent apprendre la théorie.

## 1 Rappel du contexte

La proposition 3.3.1 de [6] est un résultat de théorie de Hodge  $p$ -adique pure, et peut tout à fait être énoncée (et prouvée) sans aucune référence à la conjecture de modularité pour les corps totalement réels énoncée par Buzzard, Diamond et Jarvis dans [4]. Toutefois, en procédant ainsi, il deviendrait difficile de comprendre l'intérêt de cet énoncé, et c'est pourquoi nous préférons consacrer ce premier chapitre à un bref rappel du contexte<sup>1</sup>, ce qui permettra par là-même de fixer les notations<sup>2</sup>.

### 1.1 La conjecture de Buzzard, Diamond et Jarvis

Fixons  $p$  un nombre premier et  $F$  un corps de nombres totalement réel dans lequel  $p$  est non ramifié. Notons  $\mathcal{O}_F$  l'anneau des entiers de  $F$  et  $G_F$  son groupe de Galois absolu. Fixons également  $\overline{\mathbb{F}}_p$  une clôture algébrique du corps fini à  $p$  éléments  $\mathbb{F}_p$ . Soit  $\rho : G_F \rightarrow \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$  une représentation que l'on supposera toujours continue, irréductible et totalement impaire. La généralisation naturelle de la conjecture de modularité de Serre est la suivante :

**Conjecture 1.1.** Avec les notations précédentes,  $\rho$  est modulaire, c'est-à-dire qu'elle est isomorphe à la réduction modulo  $p$  d'une représentation associée à une forme modulaire de Hilbert.

Le travail de Buzzard, Diamond et Jarvis a consisté à produire une version raffinée de la conjecture précédente, dans laquelle on prédit en outre le poids de la forme modulaire. Pour énoncer cette forme plus précise, on commence par définir la notion de poids utilisée dans ce contexte :

**Définition 1.2.** Un *poids de Diamond-Serre* est une (classe d'isomorphisme de) représentation(s) irréductible(s) de  $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F/p)$  à coefficients dans  $\overline{\mathbb{F}}_p$ .

Buzzard, Diamond et Jarvis définissent<sup>3</sup> d'une part la notion d'être modulaire de poids  $\sigma$  (pour une représentation vérifiant les mêmes hypothèses que  $\rho$ ) et d'autre part un certain ensemble de poids (de Diamond-Serre) dépendant de  $\rho$  et noté  $W(\rho)$ . Ils émettent alors la conjecture :

**Conjecture 1.3.** La représentation  $\rho$  est modulaire de poids  $\sigma$  si, et seulement si  $\sigma \in W(\rho)$ .

Ils démontrent de plus que la modularité de poids  $\sigma$  (pour un  $\sigma$ ) implique la modularité (tout court) et que l'ensemble  $W(\rho)$  n'est jamais vide. Ainsi la conjecture 1.3 implique-t-elle la conjecture 1.1. Le résultat principal de [6] en est une réciproque partielle : sous certaines hypothèses supplémentaires sur  $\rho$ , la conjecture 1.1 implique l'équivalence de la conjecture 1.3 pour certains poids  $\sigma$ , dits réguliers (voir définition 1.4).

### 1.2 Énoncé (vague) de la proposition 3.3.1

Nous commençons par donner quelques indications (celles qui seront nécessaires pour l'exposé) sur la définition de  $W(\rho)$ . Par le lemme chinois, le groupe  $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F/p)$  se décompose comme le produit des  $\mathrm{GL}_2(k_v)$  où  $v$  parcourt l'ensemble des idéaux premiers au-dessus de  $p$  et où  $k_v$  désigne le corps résiduel associé. Tout poids  $\sigma$  se décompose comme un produit tensoriel de représentations irréductibles de  $\mathrm{GL}_2(k_v)$ . La définition de  $W(\rho)$  est locale en ce sens que l'on définit d'abord des ensembles  $W_v(\rho)$  de représentations irréductibles de  $\mathrm{GL}_2(k_v)$  et que l'on convient ensuite que  $\sigma \in W(\rho)$  si, et seulement si ses facteurs locaux appartiennent tous aux ensembles  $W_v(\rho)$  respectifs. De plus,  $W_v(\rho)$  ne dépend que de la restriction de  $\rho$  au groupe de décomposition en  $v$ .

<sup>1</sup>Qui, lors du groupe de travail, a fait l'objet d'un exposé complet d'Ariane Mézard.

<sup>2</sup>Certaines notations de [6] diffèrent de celles de [4]. Nous employons naturellement dans cette note celles de [6].

<sup>3</sup>On donnera dans la suite de l'exposé quelques morceaux de ces définitions. Pour une définition complète, on renvoie le lecteur aux sections 2 et 3 de [4].

**Notations** À partir de maintenant, et jusqu'à la fin de cette note, nous fixons une place  $v$  au-dessus de  $p$ . Ainsi nous pourrions nous affranchir des indices  $v$ . Par exemple, nous notons plus simplement  $k$  à la place de  $k_v$  : c'est une extension finie de  $\mathbb{F}_p$  dont nous désignons par la lettre  $r$  le degré. Introduisons encore quelques notations. Soit  $K_0$  le complété de  $F$  en la place  $v$ , c'est une extension finie non ramifiée de  $\mathbb{Q}_p$  de corps résiduel  $k$ . Soit  $K = K_0(\pi)$  où  $\pi$  est une racine  $(p^r - 1)$ -ième de  $(-p)$ , c'est une extension galoisienne<sup>4</sup> totalement ramifiée de  $K_0$ . On note  $G$  le groupe de Galois de cette extension, et  $e$  son degré, i.e.  $e = p^r - 1$ . Soit  $\mathcal{O}_{K_0}$  (resp  $\mathcal{O}_K$ ) l'anneau des entiers de  $K_0$  (resp. de  $K$ ). Soient  $G_{K_0}$  (resp.  $G_K$ ) le groupe de Galois absolu de  $K_0$  (resp. de  $K$ ) et  $I_{K_0}$  (resp.  $I_K$ ) son sous-groupe d'inertie. On remarque que  $\rho$  induit par restriction une représentation de  $G_{K_0}$  (qui peut être, elle, non irréductible). Dans la suite, on notera simplement  $\rho$  pour  $\rho|_{G_{K_0}}$  et on ne considèrera plus la représentation globale.

Définissons le caractère galoisien<sup>5</sup>  $\omega : G_{K_0} \rightarrow k^\times$ ,  $g \mapsto \frac{g(\pi)}{\pi}$  où le calcul est effectué dans  $K$  puis réduit modulo  $\pi$ . Nous considérerons souvent  $\omega$  comme un caractère de  $I_{K_0}$  (par restriction) ou de  $G$  (par passage au quotient). Soit  $S = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ . Fixons un plongement  $\tau_0 : k \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_p$  et pour tout  $i \in S$ , notons  $\tau_i = \tau_0 \circ \text{Frob}^{-i}$  où  $\text{Frob} : x \mapsto x^p$  est le Frobenius arithmétique. Pour finir, posons  $\omega_i = \tau_i \circ \omega$  pour tout  $i \in S$ . On a les relations  $\tau_{i+1}^p = \tau_i$  et  $\omega_{i+1}^p = \omega_i$ .

**Définition de l'ensemble  $W_v(\rho)$**  On rappelle que les représentations irréductibles de  $\text{GL}_2(k)$  s'écrivent comme suit :

$$\bigotimes_{i \in S} \det^{a_i} \text{Sym}^{b_i-1} k^2 \otimes_{\tau_i} \overline{\mathbb{F}}_p$$

où les  $a_i$  et les  $b_i$  sont des entiers avec  $1 \leq b_i \leq p$ . On peut également choisir les  $a_i$  dans l'intervalle  $[0, p-1]$  de telle sorte que tous ne soient pas égaux à  $p-1$ . Avec cette condition supplémentaire, les représentations écrites précédemment sont deux à deux non isomorphes.

**Définition 1.4.** Un poids de Diamond-Serre est dit *régulier en  $v$*  si, sur la description précédente, on a  $2 \leq b_i \leq p-2$  pour tout  $i \in S$ .

Il est dit *régulier* s'il est régulier en toutes les places  $v$ .

On suppose à partir de maintenant de  $\rho$  est réductible de la forme  $\rho \simeq \begin{pmatrix} \psi' & \star \\ 0 & \psi'' \end{pmatrix}$  pour des caractères  $\psi'$  et  $\psi''$  de  $G_{K_0}$ .

**Définition 1.5.** L'ensemble  $W(\rho)$  est constitué des représentations irréductibles  $\sigma$  de  $\text{GL}_2(k)$  (dont on note  $a_i$  et  $b_i$  les entiers associés), telles qu'il existe  $J$  un sous-ensemble de  $S$  pour lequel les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\text{Condition A} : \psi'|_{I_{K_0}} \simeq \prod_{i \in S} \omega_i^{a_i} \prod_{i \in J} \omega_i^{b_i} \text{ et } \psi''|_{I_{K_0}} \simeq \prod_{i \in S} \omega_i^{a_i} \prod_{i \notin J} \omega_i^{b_i}$$

**Condition B** : «  $\rho$  admet un relevé cristallin d'un certain type. »

Pour des raisons de commodité qui apparaîtront plus clairement vers la fin de cette note, on introduit  $\mathbb{1}_J$  et  $\overline{\mathbb{1}}_J$  les fonctions indicatrices respectives des ensembles  $J$  et  $S \setminus J$ . Ainsi, par exemple, la condition **A** se réécrit sous la forme suivante :

$$\psi'|_{I_{K_0}} \simeq \prod_{i \in S} \omega_i^{a_i + b_i \mathbb{1}_J(i)} \text{ et } \psi''|_{I_{K_0}} \simeq \prod_{i \in S} \omega_i^{a_i + b_i \overline{\mathbb{1}}_J(i)}.$$

**But de l'exposé** L'objet de la proposition 3.3.1 de [6] est de donner, dans le cas des poids réguliers, une expression de la condition **B** en termes de schémas en groupes. Schématiquement, cette proposition prend la forme qui suit :

**Proposition 1.6.** *On considère un poids  $\sigma$  pour lequel  $a_i = 0$  et  $2 \leq b_i \leq p-2$  pour tout  $i$ . On fixe un sous-ensemble  $J \subset S$  et on suppose que la condition **A** est satisfaite. Alors la condition **B** est équivalente à la :*

<sup>4</sup>En effet,  $k \simeq \mathbb{F}_{p^r}$  contient les racines  $(p^r - 1)$ -ième de l'unité et donc  $K_0$  aussi.

<sup>5</sup>Il n'est pas paru clair à l'auteur de cette note, si dans [6], le caractère  $\omega$  et les  $\omega_i$  qui en découlent sont ceux définis ici ou leurs inverses : Gee semble dire qu'il s'agit des inverses, mais certaines utilisations qu'il en fait laisse croire le contraire. Nous choisissons cette définition ici, car elle est plus adaptée pour notre propos, et en plus en accord avec l'exposé précédent et les notations de [4].

*Condition B'* : «  $\rho|_{G_K}$  est la fibre générique d'un schéma en groupes sur  $\mathcal{O}_K$  muni d'une donnée de descente de  $K$  à  $K_0$ , d'un certain type. »

Évidemment, il reste à préciser le sens des deux occurrences de l'expression « un certain type ». Pour cela, on a besoin d'introduire certaines notions de théorie de Hodge  $p$ -adique, et notamment la théorie de Breuil. C'est l'objet de la section suivante. Les sections 3 et 4 sont consacrées respectivement à l'explication des conditions **B'** et **B**, et la proposition 1.6 est finalement prouvée dans la section 5.

## 2 La théorie de Breuil

### 2.1 Définitions

**Objets d'algèbre linéaire** On fixe  $\kappa$  un entier compris<sup>6</sup> entre 2 et  $p - 1$ , ainsi que  $E$  une extension finie de  $\mathbb{F}_p$  contenue dans  $\overline{\mathbb{F}_p}$ . Posons  $\tilde{S} = (k \otimes_{\mathbb{F}_p} E)[u]/u^{ep}$  (où, rappelons-le,  $e = p - 1$ ). Pour tout  $g \in G$ , on note  $\hat{g} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$  l'unique endomorphisme de  $(k \otimes_{\mathbb{F}_p} E)$ -algèbres qui envoie  $u$  sur  $(\omega(g) \otimes 1)u$ . Finalement, soit  $\phi : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$  défini par l'élévation à la puissance  $p$  sur  $k[u]/u^{ep}$  et l'identité sur  $E$ .

**Définition 2.1.** On note  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$  la catégorie dont les objets sont la donnée :

- i) d'un  $\tilde{S}$ -module libre  $\mathcal{M}$ ;
- ii) d'un sous-module  $\text{Fil}^{\kappa-1}\mathcal{M}$  de  $\mathcal{M}$  contenant  $u^{e(\kappa-1)}\mathcal{M}$ ;
- iii) d'un opérateur  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi_{\kappa-1} : \text{Fil}^{\kappa-1}\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  dont l'image engendre  $\mathcal{M}$ ;
- iv) d'un opérateur  $(k \otimes_{\mathbb{F}_p} E)$ -linéaire  $N : \mathcal{M} \rightarrow u\mathcal{M}$  vérifiant  $N(ux) = uN(x) - ux$  pour tout  $x \in \mathcal{M}$  (condition de Leibniz),  $u^e N(\text{Fil}^{\kappa-1}\mathcal{M}) \subset \text{Fil}^{\kappa-1}\mathcal{M}$  et  $\phi_{\kappa-1}(u^e N(x)) = N(\phi_{\kappa-1}(x))$  pour tout  $x \in \text{Fil}^{\kappa-1}\mathcal{M}$ ;
- v) de morphismes  $\hat{g}$ -semi-linéaires  $[g] : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  ( $g$  parcourant  $G$ ) vérifiant  $[\text{id}] = \text{id}$  et  $[gh] = [g] \circ [h]$  pour tous  $g$  et  $h$ .

Les morphismes de cette catégorie sont les applications  $\tilde{S}$ -linéaires commutant à toutes les structures supplémentaires.

Faisons tout de suite deux remarques importantes. *Primo*, lorsque  $\kappa = 2$ , la donnée du  $N$  est automatique : on entend par là que si  $\mathcal{M}$  est un  $\tilde{S}$ -module libre muni d'un  $\text{Fil}^1\mathcal{M}$ , d'un  $\phi_1$  et de  $[g]$  vérifiant les conditions de la définition, alors il existe un et un unique  $N$  défini sur ce module qui en fait un objet de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^1$ .

*Secundo*, si  $\kappa \leq \kappa'$ , on peut voir  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$  comme une sous-catégorie pleine de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa'-1}$  grâce au foncteur pleinement fidèle  $\iota : \text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1} \rightarrow \text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa'-1}$  défini comme suit. À  $\mathcal{M} \in \text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$ , on associe  $\iota(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$  (en tant que  $\tilde{S}$ -module) muni de  $\text{Fil}^{\kappa'-1}\iota(\mathcal{M}) = u^{e(\kappa'-\kappa)}\text{Fil}^{\kappa-1}\mathcal{M}$ , de  $\phi_{\kappa'-1}$  défini par  $\phi_{\kappa'-1}(u^{e(\kappa'-\kappa)}x) = \phi_{\kappa-1}(x)$  et des morphismes  $N$  et  $[g]$  qui restent inchangés. On remarque en particulier, que seules les structures qui ont changé de nom ont aussi changé de définition; ceci légitime le léger abus qui consiste à noter simplement  $\mathcal{M}$  pour  $\iota(\mathcal{M})$ , ce que nous ferons par la suite. Signalons finalement que  $\iota$  commute au foncteur  $T_{\text{st}}^*$ , que nous définissons ci-après.

**Foncteur vers Galois** La catégorie  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$  est munie d'un foncteur contravariant  $T_{\text{st}}^*$  vers la catégorie des  $E$ -représentations galoisiennes de  $G_{K_0}$  notée  $\text{Rep}_E(G_{K_0})$ . Il est construit à partir d'un certain anneau de périodes. Contrairement à l'usage, la définition de ce dernier n'est ici pas vraiment technique, puisqu'il s'agit simplement de  $\hat{A} = \mathcal{O}_{\hat{K}}/p\langle X \rangle$  où la notation  $\langle \cdot \rangle$  fait référence à l'algèbre polynômiale à puissances divisées. Cet anneau est une  $k[u]/u^{ep}$ -algèbre grâce au morphisme  $k[u]/u^{ep} \rightarrow \hat{A}$ ,  $u \mapsto \frac{\pi_1}{1+X}$  où  $\pi_1$  est une racine  $p$ -ième de  $\pi$  fixée. Il est muni d'un idéal  $\text{Fil}^1\hat{A}$  défini comme celui engendré par une racine  $p$ -ième de  $p$ , notée  $p_1$ , et les puissances divisées  $\gamma_i(X)$  pour  $i \geq 1$ . On définit un opérateur  $\phi_1 : \text{Fil}^1\hat{A} \rightarrow \hat{A}$  semi-linéaire par rapport au Frobenius sur  $\hat{A}$  par :

$$\phi_1(p_1) = -1 \quad ; \quad \phi_1(X) = \frac{(1+X)^p - 1}{p} \quad ; \quad \phi_1(\gamma_i(X)) = 0, i \geq 2$$

<sup>6</sup>Dans la suite de l'exposé, on n'utilisera que les valeurs particulières  $\kappa = 2$  et  $\kappa = p - 1$ .

où, bien entendu, la fraction est calculée dans  $\mathbb{Z}_p[X]$  avant d'être réduite dans  $\hat{A}$ . Pour  $1 \leq t \leq p-2$ , on note  $\text{Fil}^t \hat{A}$  la  $t$ -ième puissance de  $\text{Fil}^1 \hat{A}$  et on définit un morphisme additif  $\phi_t : \text{Fil}^t \hat{A} \rightarrow \hat{A}$  en posant  $\phi_t(x_1 \cdots x_t) = \phi_1(x_1) \cdots \phi_1(x_t)$  pour  $x_i$  des éléments de  $\text{Fil}^1 \hat{A}$ . En outre,  $\hat{A}$  est muni d'un opérateur de monodromie  $N$  qui est l'unique morphisme  $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ -linéaire qui envoie  $\gamma_i(X)$  sur  $(1+X)\gamma_{i-1}(X)$  pour tout  $i \geq 1$ . Finalement,  $\hat{A}$  est muni d'une action de  $G_K$  via la formule  $g(X) = \omega(g)(1+X) - 1$  valable pour tout  $g \in G_{K_0}$ . Le foncteur  $T_{\text{st}}^*$  s'obtient alors comme suit :

$$T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{k[u]/u^{ep}, \text{Fil}^{\kappa-1}, \phi_{\kappa-1}, N}(\mathcal{M}, \hat{A})$$

où la notation signifie que l'on considère les morphismes  $k[u]/u^{ep}$ -linéaires compatibles à  $\text{Fil}^{\kappa-1}$ , à  $\phi_{\kappa-1}$  et à  $N$ . Le groupe  $G_{K_0}$  agit sur ce module par la formule :

$$g \cdot f : x \mapsto g \cdot f([\bar{g}^{-1}](x)) \quad (1)$$

où  $g \in G_{K_0}$  et  $\bar{g}$  désigne son image dans  $G$ . L'action de  $E$  sur  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$  se fait, quant à elle, par l'intermédiaire de son action sur  $\mathcal{M}$ .

Le foncteur ainsi défini  $T_{\text{st}}^*$  est fidèle. Il est aussi exact dans le sens où il transforme les suites exactes courtes dans la catégorie  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$  (c'est-à-dire les suites exactes courtes sur les  $\tilde{S}$ -modules sous-jacents qui induisent des suites encore exactes sur les  $\text{Fil}^{\kappa-1}$ ) en suites exactes courtes de représentations galoisiennes. De plus, on a l'égalité de dimension suivante :

$$\dim_E T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) = \dim_{\tilde{S}} \mathcal{M}$$

valable pour tout objet  $\mathcal{M} \in \text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$ .

## 2.2 Description en rang 1

On suppose désormais que  $E$  contient un sous-corps isomorphe (non canoniquement) à  $k$ . Il en résulte un isomorphisme d'anneaux  $k \otimes_{\mathbb{F}_p} E \simeq E^S$  donné par  $x \otimes y \mapsto (\tau_i(x)y)_{i \in S}$ . En considérant les idempotents associés à cette décomposition, on déduit que tout module sur  $k \otimes_{\mathbb{F}_p} E$  se décompose de façon canonique comme une somme directe de  $r$  espaces vectoriels sur  $E$ ,  $k$  agissant sur cette écriture diagonalement via ses divers plongements dans  $E$ .

En particulier, si  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$ , on peut écrire :

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_r$$

où les  $\mathcal{M}_i$  sont des  $E[u]/u^{ep}$ -modules libres. De même :

$$\text{Fil}^{\kappa-1} \mathcal{M} = \text{Fil}^{\kappa-1} \mathcal{M}_1 \oplus \text{Fil}^{\kappa-1} \mathcal{M}_2 \oplus \cdots \oplus \text{Fil}^{\kappa-1} \mathcal{M}_r$$

avec  $u^{e(\kappa-1)} \mathcal{M}_i \subset \text{Fil}^{\kappa-1} \mathcal{M}_i \subset \mathcal{M}_i$ . L'action de Frobenius sur  $k \otimes_{\mathbb{F}_p} E$  correspond au décalage vers la droite sur  $E^S$ ; on en déduit que l'opérateur  $\phi_{\kappa-1}$  induit pour tout  $i \in S$  des applications  $\phi_{\kappa-1} : \text{Fil}^{\kappa-1} \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{M}_{i+1}$  dont l'image engendre tout  $\mathcal{M}_{i+1}$ . Du fait que les opérateurs  $N$  et  $[g]$  commutent à l'action de  $E$ , il suit qu'ils stabilisent chacun des  $\mathcal{M}_i$ .

Soit maintenant  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$  qui est de rang 1 comme  $\tilde{S}$ -module. Dans la décomposition  $\mathcal{M} = \bigoplus_{i \in S} \mathcal{M}_i$ , chacun des  $\mathcal{M}_i$  est libre de rang 1 sur  $E[u]/u^{ep}$ . Ainsi, pour tout  $i$ , il existe un unique entier  $m_i \in [0, e(\kappa-1)]$  tel que  $\text{Fil}^{\kappa-1} \mathcal{M}_i = u^{m_i} \mathcal{M}_i$ .

Notons  $e_1$  une base de  $\mathcal{M}_1$ . Posons  $e_2 = \phi_{\kappa-1}(u^{m_1} e_1)$ . Comme  $\phi_{\kappa-1} : \text{Fil}^{\kappa-1} \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$  engendre son image,  $e_2$  forme nécessairement une base de  $\mathcal{M}_2$ . Définissons plus généralement par récurrence  $e_{i+1} = \phi_{\kappa-1}(u^{m_i} e_i)$ . Chacun des  $e_i$  est une base de  $\mathcal{M}_i$  et par conséquent, on a une égalité de la forme  $e_{r+1} = a e_1$  pour un certain  $a$  inversible dans  $E[u]/u^{ep}$ .

Par ailleurs, si  $\lambda$  est un élément inversible de  $E[u]/u^{ep}$ , on constate que modifier  $e_1$  en  $\lambda e_1$  modifie  $e_{r+1}$  en  $\phi^r(\lambda) e_{r+1}$  et donc  $a$  en  $a \frac{\phi^r(\lambda)}{\lambda}$  (où, rappelons-le,  $\phi$  agit sur  $E[u]/u^{ep}$  en laissant fixe  $E$  et en envoyant  $u$  sur  $u^p$ ). En ajustant correctement  $\lambda$ , on peut donc s'arranger pour avoir  $a \in E^*$ .

Examinons maintenant l'action de la donnée de descente. Fixons  $i \in S$ . Pour tout  $g \in G$ ,  $[g]$  induit un automorphisme de  $\mathcal{M}_i$ . Ainsi, on peut écrire  $[g]e_i = \alpha(g)e_i$  pour une certaine fonction  $\alpha : \text{Gal}(K/K_0) \rightarrow (E[u]/u^{ep})^\times$ . La compatibilité au produit assure que  $\alpha$  est un caractère. Il prend ainsi ses valeurs parmi les racines  $(p^r - 1)$ -ièmes de l'unité dans  $(E[u]/u^{ep})^\times$ , dont on vérifie facilement qu'elle sont toutes dans  $E^*$ . Ainsi  $\alpha$  est un caractère de  $G$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{F}}_p^*$  et, en tant que tel, il s'écrit comme une puissance de  $\omega_i$ , disons  $\omega_i^{\mu_i}$  où  $\mu_i$  est défini modulo  $(p^r - 1)$ .

En écrivant à présent la commutation de  $[g]$  à  $\phi_1$ , on obtient la relation  $\mu_{i+1} \equiv p(\mu_i + m_i) \pmod{p^r - 1}$ . Une combinaison linéaire judicieuse de ces relations permet d'éliminer les  $\mu_i$  et conduit à la congruence :

$$p^r m_i + p^{r-1} m_{i+1} + \cdots + p^2 m_{i+r-2} + p m_{i+r-1} \equiv 0 \pmod{p^r - 1}. \quad (2)$$

Déterminons finalement l'opérateur de monodromie. La relation de Leibniz montre que  $u^{m_i}$  divise  $N(u^{m_i} e_i)$ . Comme ce dernier est élément de  $\mathcal{M}_i$ , il appartient nécessairement à  $\text{Fil}^{\kappa-1} \mathcal{M}_i$ . Ainsi  $\phi_{\kappa-1}(u^e N(u^{m_i} e_i)) = u^{ep} \phi_{\kappa-1}(N(u^{m_i} e_i)) = 0$ , et donc  $N(e_{i+1}) = 0$ . En résumé, on vient de prouver la proposition suivante :

**Proposition 2.2.** *Soit  $\mathcal{M}$  un objet de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}$  de rang 1. Alors il existe des éléments  $e_i \in \mathcal{M}_i$ , des entiers  $m_i$  compris entre 0 et  $e(\kappa - 1)$ , des entiers  $\mu_i$  définis modulo  $(p^r - 1)$  et un élément  $a \in E^*$  tels que :*

- i) l'élément  $e_i$  forme une base de  $\mathcal{M}_i$  ;
- ii) l'élément  $u^{m_i} e_i$  engendre  $\text{Fil}^{\kappa-1} \mathcal{M}_i$  ;
- iii)  $\phi_{\kappa-1}(u^{m_i} e_i) = e_{i+1}$  pour  $1 \leq i \leq r - 1$  et  $\phi_{\kappa-1}(u^{m_r} e_r) = a e_1$  ;
- iv)  $\mu_{i+1} \equiv p(\mu_i + m_i) \pmod{p^r - 1}$  ;
- v) pour tout  $g \in G$ ,  $[g](e_i) = \omega_i^{\mu_i}(g)e_i$  ;
- vi)  $N(e_i) = 0$ .

Dans ces conditions, les entiers  $m_i$  vérifient automatiquement la congruence (2) et nous notons :

$$\mu_{\text{fil},i} = \frac{p^r m_i + p^{r-1} m_{i+1} + \cdots + p^2 m_{i+r-2} + p m_{i+r-1}}{p^r - 1}.$$

Réciproquement, l'objet défini précédemment est dans la catégorie  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}$ .

*Remarque.* Dans la proposition précédente, les entiers  $m_i$ , les classes de congruence des  $\mu_i$  et l'élément  $a$  sont uniquement déterminés. Ce n'est par contre pas le cas des  $e_i$  qui peuvent être changés en  $e'_i = \lambda e_i$  pour n'importe quel  $\lambda \in E^*$  (le même pour chaque  $e_i$ ). On peut vérifier de surcroît qu'il s'agit là du seul degré de liberté autorisé.

**Proposition 2.3.** *Avec les notations de la proposition 2.2, l'action de  $G_{K_0}$  sur  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$  se fait par l'intermédiaire du caractère :*

$$\lambda_a \cdot \omega_i^{(\kappa-1)(1+p+p^2+\cdots+p^{r-1}) - (\mu_i + \mu_{\text{fil},i})}$$

pour tout  $i \in S$ . Ici,  $\lambda_a$  est le caractère non ramifié qui envoie un Frobenius géométrique sur  $a$ .

*Remarque.* En particulier,  $\omega_i^{\mu_i + \mu_{\text{fil},i}}$  ne dépend pas du choix de  $i$ , ce qui signifie que l'on a la congruence  $p(\mu_i + \mu_{\text{fil},i}) \equiv \mu_{i+1} + \mu_{\text{fil},i+1} \pmod{p^r - 1}$  pour tout  $i$ . Ceci peut se vérifier aisément par ailleurs.

*Démonstration.* Nous donnons simplement quelques idées de la preuve. On utilise bien entendu la formule  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{k[u]/u^{ep}, \text{Fil}^{\kappa-1}, \phi_{\kappa-1}, N}(\mathcal{M}, \hat{A})$ .

Notons  $n$  le degré de  $E$  sur  $k$  et supposons pour simplifier  $a$  engendre cette extension. Alors la famille des  $a^j e_i$  ( $0 \leq j \leq n - 1$ ,  $i \in S$ ) est une  $(k[u]/u^{ep})$ -base de  $\mathcal{M}$  et un élément de  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$  est entièrement déterminé par les images de ces vecteurs, images qui sont soumises à certaines relations. La première de celle-ci est  $N(x_{ij}) = 0$  (puisque  $f$  doit être compatible à l'action de  $N$ ), c'est-à-dire  $x_{ij} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ . Les autres relations s'obtiennent en écrivant la compatibilité à  $\text{Fil}^{\kappa-1}$  et  $\phi_{\kappa-1}$ .

Par ailleurs, on sait que  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$  est un  $E$ -espace vectoriel de dimension 1 et donc qu'il a même cardinal que  $E$ , c'est-à-dire  $p^{nr}$ . Il suffit donc, pour déterminer  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ , de trouver  $p^{nr}$  solutions distinctes pour les  $x_{ij}$  qui s'intuient en fait assez facilement une fois que les équations sur les  $x_{ij}$  ont été écrites.

Il ne reste alors plus qu'à comprendre l'action de Galois. □

### 3 La condition B' : schémas en groupes

#### 3.1 L'équivalence de Breuil

Appelons  $E$ -groupe sur  $\mathcal{O}_K$  un schéma en  $E$ -vectoriels fini et plat sur  $\mathcal{O}_K$ . Une donnée de descente (de  $K$  à  $K_0$ ) sur un  $E$ -groupe  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{O}_K$  est la donnée, pour tout élément  $g \in G$ , d'un morphisme  $[g] : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{[g]} & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) & \xrightarrow{\mathrm{Spec}(g)} & \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K) \end{array}$$

et tel que le morphisme déduit  $\mathcal{G} \rightarrow {}^g\mathcal{G}$  (où  ${}^g\mathcal{G}$  est déduit de  $\mathcal{G}$  par le changement de base  $\mathrm{Spec}(g)$ ) soit un morphisme de  $E$ -groupes, le tout étant soumis aux relations  $[\mathrm{id}] = \mathrm{id}$  et  $[gh] = [g] \circ [h]$  pour  $g$  et  $h$  dans  $G$ .

Notons  $E\text{-Gr}_{\mathrm{dd}}$  la catégorie des  $E$ -groupes sur  $\mathcal{O}_K$  munis d'une donnée de descente. Le théorème fondamental suivant (voir [2], [3] et éventuellement [7]) permet de comprendre comment les catégories introduites dans la section 2 interviennent dans notre propos.

**Theorème 3.1 (Breuil).** *Supposons  $p > 2$ . Il existe une anti-équivalence<sup>7</sup> de catégories  $\mathrm{Gr}^* : E\text{-BrMod}_{\mathrm{dd}} \rightarrow E\text{-Gr}_{\mathrm{dd}}$  qui rend le diagramme suivant commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} E\text{-BrMod}_{\mathrm{dd}}^1 & \xrightarrow{T_{\mathrm{st}}^*} & \mathrm{Rep}_E(G_{K_0}) \\ \mathrm{Gr}^* \downarrow \sim & & \uparrow \\ E\text{-Gr}_{\mathrm{dd}} & & \end{array}$$

où le foncteur  $E\text{-Gr}_{\mathrm{dd}} \rightarrow \mathrm{Rep}_E(G_{K_0})$  est celui donné par les  $\bar{K}$ -points.

*Remarque.* Dans le théorème précédent, la catégorie de modules considérée correspond à  $\kappa = 2$ . En particulier, on est dans la situation où l'opérateur  $N$  est défini de façon automatique.

#### 3.2 Schémas en groupes de classe $J$

Soit  $\mathcal{G}$  un  $E$ -groupe sur  $\mathcal{O}_K$  avec donnée de descente et  $\mathcal{M}$  son module associé. On suppose que  $\mathcal{M}$  est de rang 1, et donc qu'il a la forme donnée par la proposition 2.2. Appelons  $m_i, \mu$  et  $a$  les invariants numériques qui interviennent. La donnée des  $m_i$  permet de caractériser les groupes étales et ceux de type multiplication : exactement  $\mathcal{G}$  est étale (resp. de type multiplicatif) si, et seulement si tous les  $m_i$  sont égaux à  $e$  (resp. sont nuls). Pour  $J$  un sous-ensemble de  $S$ , nous introduisons suivant Gee, une notion intermédiaire entre ces deux extrêmes.

**Définition 3.2.** Soit  $J \subset S$ . Avec les notations précédentes, on dit que  $\mathcal{G}$  est de classe  $J$  si<sup>8</sup>  $m_i = e \mathbb{1}_J(i+1)$ .

*Remarque.* Comme  $e = p^r - 1$ , les  $m_i$  donnés par la définition vérifient toujours la congruence (2).

**Proposition 3.3.** *Fixons  $J$  un sous-ensemble de  $S$  ainsi qu'un caractère  $\psi : G_{K_0} \rightarrow E^*$  trivial sur  $I_K$ . Alors, il existe un unique  $E$ -groupe de classe  $J$  sur  $\mathcal{O}_K$  (avec donnée de descente) dont la représentation galoisienne associée correspond à  $\psi$ .*

<sup>7</sup>Dans [6], Gee travaille plutôt avec le foncteur covariant  $\mathrm{Gr}$  défini par  $\mathrm{Gr}(\mathcal{M}) = \mathrm{Gr}^*(\mathcal{M})^\vee$  où  $\langle \vee \rangle$  désigne le dual de Cartier. Cependant, dans (la preuve de) la proposition 3.3.1, il est contraint d'utiliser la version contravariante, et c'est pourquoi nous présentons celle-ci dans cette note.

<sup>8</sup>La formule que nous donnons diffère en deux endroits de celle que l'on peut lire dans [6]. Tout d'abord, nous écrivons  $\mathbb{1}_J$  à la place  $\mathbb{1}_J$ , mais cela est simplement dû au fait que nous utilisons le foncteur  $\mathrm{Gr}^*$  (et pas  $\mathrm{Gr}$ ). Le second écart est que nous appliquons cette fonction non pas à  $i$ , mais à  $i+1$  : cela fait par contre une différence considérable et c'est ici que réside l'erreur dans [6] que nous mentionnions au début de cette note.



*Démonstration.* Comme  $\psi$  est trivial sur  $I_K$ , il s'écrit sous la forme  $\lambda_b \omega_0^n$  où  $\lambda_b$  est le caractère non ramifié qui envoie un Frobenius géométrique sur  $b$ . Le résultat découle alors des propositions 2.2 et 2.3 : avec leurs notations, il suffit de choisir :

$$\mu_i \equiv -p^i n + \sum_{j=1}^r p^{r-j} \mathbb{1}_J(i+j+1) \pmod{p^r - 1}$$

et  $a = b$ . □

*Remarque.* D'après la théorie du corps de classe, l'hypothèse de trivialité sur  $I_K$  est en fait automatique.

### 3.3 Explication de la condition B'

Prenons pour  $E$  un corps suffisamment grand pour que  $\rho$  se factorise par  $\mathrm{GL}_2(E)$ . On suppose qu'il existe un sous-ensemble  $J$  de  $S$  pour lequel la condition **A** est satisfaite avec  $a_i = 0$  et  $2 \leq b_i \leq p-2$  pour tout  $i$ . D'après la proposition 3.3, il existe un unique  $E$ -groupe  $\mathcal{G}'$  (resp.  $\mathcal{G}''$ ) avec donnée de descente de classe  $J$  (resp. de classe  $S \setminus J$ ) dont la représentation galoisienne associée s'identifie à  $E(\psi')$  (resp.  $E(\psi'')$ ) via un isomorphisme  $f'$  (resp.  $f''$ ). La condition **B'** s'exprime alors comme suit :

*Condition B'* : Il existe un  $E$ -groupe  $\mathcal{G}$  avec donnée de descente qui s'insère dans une suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0$  et un isomorphisme  $G_{K_0}$ -équivariant  $f : \mathcal{G}(\bar{K}) \rightarrow E^2(\rho)$  (où  $E^2(\rho)$  est la représentation de dimension 2 donnée par  $\rho$ ) s'insérant dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}'(\bar{K}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\bar{K}) & \longrightarrow & \mathcal{G}''(\bar{K}) & \longrightarrow & 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & E(\psi') & \longrightarrow & E^2(\rho) & \longrightarrow & E(\psi'') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

## 4 La condition B : relevés cristallins

### 4.1 Représentations cristallines

Posons  $\mathcal{O}_L = W(E)$  et  $L = \mathcal{O}_L[1/p]$ . Considérons le produit tensoriel  $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$  et munissons-le d'un endomorphisme  $\phi$  agissant comme le Frobenius sur  $K_0$  et comme l'identité sur  $L$ . Comme précédemment, on a un isomorphisme d'anneaux  $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \simeq L^S$  et l'opérateur  $\phi$  correspond par cet isomorphisme au décalage vers la droite.

**Définition 4.1.** Un  $L$ -module filtré est un  $(K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)$ -module libre  $D$  muni d'un opérateur  $\phi$ -semi-linéaire  $\phi : D \rightarrow D$  et d'une filtration par des  $(K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} L)$ -sous-modules (pas nécessairement libres)  $\mathrm{Fil}^t D$  exhaustive et séparée.

Soit  $D$  un  $L$ -module filtré. Il lui est associé deux invariants numériques. Le premier est son nombre de Newton, noté  $t_N(D)$ , et est défini comme la pente de  $\phi$  sur la puissance extérieure maximale de  $D$  considéré comme  $K_0$ -espace vectoriel. Le second est son nombre de Hodge, noté  $t_H(D)$ , et est défini comme l'unique saut de la filtration sur la même puissance extérieure maximale. On dit que  $D$  est *faiblement admissible* si  $t_H(D) = t_N(D)$  et si pour tout  $D' \subset D$  stable par  $\phi$  et muni de la filtration « intersection », on a  $t_H(D') \leq t_N(D')$ . Fontaine construit un foncteur pleinement fidèle :

$$V_{\mathrm{cris}}^* : \{L\text{-module filtrés faiblement admissibles}\} \rightarrow \mathrm{Rep}_L(G_{K_0})$$

défini par  $V_{\mathrm{cris}}^*(D) = \mathrm{Hom}_{K_0, \mathrm{Fil}, \phi}(D, B_{\mathrm{cris}})$  où  $B_{\mathrm{cris}}$  est un anneau de périodes dont la définition est par exemple donnée dans [5]. Le foncteur  $V_{\mathrm{cris}}^*$  est de plus exact dans le sens où il transforme suites exactes courtes en suites exactes courtes, une suite de  $L$ -modules filtrés étant dite exacte si elle induit pour tout  $t$  une suite exacte sur les  $\mathrm{Fil}^t$ . Finalement, l'image essentielle de  $V_{\mathrm{cris}}^*$  constitue par définition ce que l'on appelle les *représentations cristallines*.

## 4.2 Description en rang 1

De l'isomorphisme  $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} L \simeq L^S$ , il résulte que tout module sur cet anneau s'écrit canoniquement comme une somme directe de  $r$  espaces vectoriels sur  $L$ . En particulier, si  $D$  est un  $L$ -module filtré, on peut écrire :

$$D = D_1 \oplus D_2 \oplus \cdots \oplus D_r \quad \text{et} \quad \text{Fil}^t D = \text{Fil}^t D_1 \oplus \text{Fil}^t D_2 \oplus \cdots \oplus \text{Fil}^t D_r \quad (3)$$

pour tout  $t$ . Les  $\text{Fil}^t D_i$  forment alors une filtration décroissante exhaustive et séparée de  $D_i$ . De plus le Frobenius induit par restriction des applications  $\phi : D_i \rightarrow D_{i+1}$ .

Supposons à présent que  $D$  est de rang 1. Les  $D_i$  qui interviennent dans la décomposition précédente sont des  $L$ -espaces vectoriels de dimension 1. Soient  $e'_1$  une base de  $D_1$ ,  $e'_2 = \phi(e'_1)$ ,  $e'_3 = \phi(e'_2)$ , etc. Comme  $e'_1$  et  $e'_{r+1}$  sont tous les deux des bases de  $D_1$ , on a  $e'_{r+1} = \lambda e'_1$  pour un certain  $\lambda \in L^*$ . Par ailleurs comme  $D_i$  étant de dimension 1, il existe un unique entier  $m_i$  tel que  $\text{Fil}^t D_i = D_i$  si  $t \leq m_i$  et  $\text{Fil}^t D_i = 0$  sinon. La condition de faible admissibilité se traduit ici simplement par l'égalité :

$$v(\lambda) = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$$

où  $v$  est la valuation sur  $L$  normalisée par  $v(p) = 1$ . Ainsi, on peut écrire  $\lambda = p^{m_1 + \cdots + m_r} x$  où  $x$  est un élément inversible de  $\mathcal{O}_L$ . On a ainsi obtenu une description complète de  $D$ . On peut la rendre un peu plus symétrique comme le résume la proposition suivante :

**Proposition 4.2.** *Soit  $D$  un  $L$ -module filtré faiblement admissible de rang 1 sur  $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ . Alors, il existe des entiers  $m_i$ , un élément  $x$  inversible dans  $\mathcal{O}_L$  et des  $e_i \in D$  tels que :*

- i) pour tout  $i \in S$ ,  $e_i$  forme une base de  $D_i$  ;
- ii) pour tout  $i \in S$ ,  $\text{Fil}^t D_i = D_i$  si  $t \leq m_i$  et  $\text{Fil}^t D_i = 0$  sinon ;
- iii) pour  $1 \leq i \leq r-1$ ,  $\phi(e_i) = p^{m_i} e_{i+1}$  et  $\phi(e_r) = x p^{m_r} e_1$ .

*Démonstration.* Il suffit de poser  $e_i = p^{m_i + m_{i+1} + \cdots + m_r} e'_i$ . □

*Remarque.* Les entiers  $m_i$  et l'élément  $a$  sont uniquement déterminés. De plus, les  $m_i$  sont reliés à des invariants plus usuels, puisque ce sont les opposés des poids de Hodge-Tate de la  $\mathbb{Q}_p$ -représentation associée à  $D$  par le foncteur  $V_{\text{cris}}^*$ .

## 4.3 Théorie de Fontaine-Laffaille

L'un des buts de la théorie de Fontaine-Laffaille est de décrire les réseaux stables par l'action de Galois dans les représentations cristallines en terme de modules filtrés. Pour y parvenir, la méthode consiste à définir des équivalents de ces réseaux dans les modules filtrés faiblement admissibles discutés précédemment. On aura cependant besoin d'une hypothèse supplémentaire sur la filtration : on demande qu'elle soit concentrée en bas degré. Plus précisément, Fontaine et Laffaille posent la définition suivante :

**Définition 4.3.** Soit  $D$  un  $L$ -module filtré. On suppose  $\text{Fil}^0 D = D$  et  $\text{Fil}^{p-1} D = 0$ . Un  $\mathcal{O}_L$ -réseau de  $D$  est la donnée d'un sous- $(\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L)$ -module  $M$  de  $D$  vérifiant :

- i)  $M[1/p] = D$  ;
- ii) pour tout  $t$ , l'application  $\phi_t = \frac{\phi}{p^t}$  envoie  $\text{Fil}^t M = M \cap \text{Fil}^t D$  dans  $M$  ;
- iii)  $\sum_{t=0}^{p-2} \phi_t(\text{Fil}^t M) = M$ .

*Remarques.* On n'a fait aucune hypothèse de faible admissibilité dans la définition précédente. En réalité, l'existence d'un réseau possédant ces propriétés est équivalente à la faible admissibilité de  $D$ .

Le prototype de modules filtrés de rang 1 donné par la proposition 4.2 admet le réseau évident  $M = \sum_{i=1}^r \mathcal{O}_L e_i$ .

Par ailleurs,  $B_{\text{cris}}$  contient lui aussi une structure entière qui consiste en un sous-anneau  $A_{\text{cris}}$  (voir [5] pour une définition) qui permet de relier les réseaux définis précédemment aux réseaux galoisiens. Précisément, considérons  $D$  un  $L$ -module filtré faiblement admissible tel que  $\text{Fil}^0 D = D$  et  $\text{Fil}^{p-1} D = 0$  et notons  $V = V_{\text{cris}}^*(D)$ . On associe alors à tout  $\mathcal{O}_L$ -réseau  $M \subset D$  la représentation :

$$T_{\text{cris}}^*(M) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{K_0}, \text{Fil}, \phi}(M, A_{\text{cris}})$$

qui est un réseau (au sens usuel) dans  $V$ . Fontaine et Laffaille montre que cette recette établit une bijection entre les réseaux de  $D$  et les réseaux de  $V$  stables par Galois. De plus, ils prouvent que le foncteur  $T_{\text{cris}}^*$  est lui aussi exact.

#### 4.4 Réduction modulo $p$

Considérons  $D$  un  $L$ -module filtré. À un  $\mathcal{O}_L$ -réseau  $M \subset D$ , il est possible d'associer un objet de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{p-2}$  qui calcule la réduction modulo  $p$  de  $T_{\text{cris}}^*(M)$ . Ceci se fait par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \tilde{S} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L} M \quad ; \quad \text{Fil}^{p-2} \mathcal{M} = \sum_{t=0}^{p-2} u^{et} \tilde{S} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_L} \text{Fil}^{p-2-t} M \\ \phi_{p-2} &= \sum \phi_t \otimes \phi_{p-2-t} \quad ; \quad N = N \otimes \text{id} \quad ; \quad [g] = \hat{g} \otimes \text{id} \text{ pour tout } g \in G \end{aligned}$$

où par définition  $\phi_t : u^{et} \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$  est l'unique application  $\phi$ -semi-linéaire qui envoie  $u^{et}$  sur 1. Le fait que  $\mathcal{M}$  calcule la réduction modulo  $p$  de  $T_{\text{cris}}^*(M)$  signifie que l'on a une identification canonique  $T_{\text{cris}}^*(M)/pT_{\text{cris}}^*(M) \simeq T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ .

En particulier, considérons  $\chi : G_{K_0} \rightarrow L^*$  le caractère qui correspond *via*  $V_{\text{cris}}^*$  à l'objet  $D$  de la proposition 4.2. Comme  $G_{K_0}$  est un groupe compact, il prend ses valeurs dans  $\mathcal{O}_L^\times$ , et on peut considérer  $\psi$  sa réduction modulo  $p$ ; c'est un caractère à valeurs dans  $E^*$  et un calcul direct à partir de ce qui précède montre qu'il s'exprime comme suit :

$$\psi = \lambda_{\bar{x}} \cdot \omega_1^{m_1} \omega_2^{m_2} \cdots \omega_r^{m_r} \quad (4)$$

où  $\lambda_{\bar{x}}$  est le caractère non ramifié de  $G_{K_0}$  qui envoie un Frobenius géométrique sur l'image de  $x \in \mathcal{O}_L^\times$  dans  $E^*$ .

#### 4.5 Explication de la condition **B**

On considère  $E$  suffisamment grand pour que  $\rho$  se factorise par  $\text{GL}_2(E)$ . On suppose qu'il existe un sous-ensemble  $J$  de  $S$  pour lequel la condition **A** est satisfaite avec  $a_i = 0$  et  $2 \leq b_i \leq p-2$  pour tout  $i \in S$ . D'après la formule (4), il existe un unique  $L$ -module filtré  $D'$  (resp.  $D''$ ) de rang 1 tel que :

- la réduction modulo  $p$  d'un réseau galoisien à l'intérieur de  $V_{\text{cris}}^*(D)$  est isomorphe à  $E(\psi')$  (resp.  $E(\psi'')$ ) par un morphisme noté  $f'$  (resp.  $f''$ );
- les invariants associés à  $D'$  (resp.  $D''$ ) par la proposition 4.2 sont tels  $m_i = b_i \mathbb{1}_J(i)$  (resp.  $m_i = b_i \mathbb{1}_{\bar{J}}(i)$ ) et  $x$  est un représentant de Teichmüller.

La condition **B** s'exprime alors comme suit :

*Condition B* : Il existe un  $\mathcal{O}_L$ -réseau  $M$  (inclus dans un  $L$ -module filtré  $D$ ) qui s'insère dans une suite exacte courte  $0 \rightarrow M'' \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow 0$  et un isomorphisme  $G_{K_0}$ -équivariant  $f : T_{\text{cris}}^*(M) \rightarrow E^2(\rho)$  (où  $E^2(\rho)$  est la représentation de dimension 2 donnée par  $\rho$ ) s'insérant dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T_{\text{cris}}^*(M') & \longrightarrow & T_{\text{cris}}^*(M) & \longrightarrow & T_{\text{cris}}^*(M'') & \longrightarrow & 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow f'' & & \\ 0 & \longrightarrow & E(\psi') & \longrightarrow & E^2(\rho) & \longrightarrow & E(\psi'') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

*Remarque.* Il est évidemment possible d'utiliser l'équivalence de catégories  $V_{\text{cris}}^*$  (ou  $T_{\text{cris}}^*$ ) pour exprimer la condition **B** simplement en termes de représentations cristallines.

## 5 Preuve de la proposition 3.3.1 de [6]

On conserve l'extension  $E/\mathbb{F}_p$  suffisamment grande pour que  $\rho$  se factorise par  $\text{GL}_2(E)$ . On fixe des entiers  $b_i$  compris entre 2 et  $p-2$  (en particulier, on notera que cela implique  $p \geq 5$ ), et un

sous-ensemble  $J$  de  $S$ . On suppose que  $\rho$  vérifie la condition **A** avec  $a_i = 0$  pour tout  $i \in S$  (et les  $b_i$  précédents). Le but est donc de prouver que les conditions **B** et **B'** expliquées dans les sections précédentes sont équivalentes. Notons pour cela  $M'$  et  $M''$  les  $\mathcal{O}_L$ -réseaux qui apparaissent dans la définition de la condition **B'**. Notons également  $\mathcal{G}'$  et  $\mathcal{G}''$  les  $E$ -groupes avec donnée de descente qui apparaissent dans la définition de la condition **B** et  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}''$  les objets de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^1$  associés.

Si  $x$  est un élément de  $E$ , désignons par  $\tilde{x} \in \mathcal{O}_L$  son représentant de Teichmüller, et si  $x$  est un élément, appelons  $\underline{x}$  la fonction de domaine  $S$  qui associe  $x$  à  $r$  et 1 aux autres éléments. Avec ces notations, il existe  $a$  et  $b$  dans  $E$  tels que l'on ait les descriptions explicites qui suivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}'_i = E[u]/u^{ep} \cdot \bar{f}_i \\ \text{Fil}^1 \mathcal{M}'_i = u^{e\mathbb{1}_J(i+1)} \mathcal{M}'_i \\ \phi_1(u^{e\mathbb{1}_J(i+1)} \bar{f}_i) = \underline{a}(i) \bar{f}_{i+1} \\ [g](\bar{f}_i) = \omega_i^{\mu'_i}(g) \bar{f}_i \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}''_i = E[u]/u^{ep} \cdot e_i \\ \text{Fil}^1 \mathcal{M}''_i = u^{e\mathbb{1}_J(i+1)} \mathcal{M}''_i \\ \phi_1(u^{e\mathbb{1}_J(i+1)} e_i) = \underline{b}(i) e_{i+1} \\ [g](e_i) = \omega_i^{\mu''_i}(g) e_i \end{array} \right.$$

où :

$$\mu'_i = \sum_{j=1}^r p^{r-j} [\mathbb{1}_J(i+j+1) - b_{i+j} \mathbb{1}_J(i+j)] \quad \mu''_i = \sum_{j=1}^r p^{r-j} [\bar{\mathbb{1}}_J(i+j+1) - b_{i+j} \bar{\mathbb{1}}_J(i+j)]$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} M'_i = \mathcal{O}_L \cdot \bar{F}_i \\ \text{Fil}^t D'_i = D'_i \text{ pour } t \leq b_i \mathbb{1}_J(i) \\ \text{Fil}^t D'_i = 0 \text{ pour } t > b_i \mathbb{1}_J(i) \\ \phi(\bar{F}_i) = \underline{a}(i) p^{b_i \mathbb{1}_J(i)} \bar{F}_{i+1} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} M''_i = \mathcal{O}_L \cdot E_i \\ \text{Fil}^t D''_i = D''_i \text{ pour } t \leq b_i \bar{\mathbb{1}}_J(i) \\ \text{Fil}^t D''_i = 0 \text{ pour } t > b_i \bar{\mathbb{1}}_J(i) \\ \phi(E_i) = \underline{b}(i) p^{b_i \bar{\mathbb{1}}_J(i)} E_{i+1} \end{array} \right.$$

## 5.1 Modules associés aux relevés cristallins

La proposition suivante donne la forme générale d'un  $M$  qui intervient dans la condition **B** :

**Proposition 5.1.** *Il existe, pour tout  $i$ , une  $\mathcal{O}_L$ -base  $(E_i, F_i)$  de  $M_i$  et des  $\Lambda_i \in \mathcal{O}_L$  avec  $\Lambda_i = 0$  si  $i \notin J$  et*

*i) Pour tout  $i \in S$ ,  $\text{Fil}^t M_i = M_i$  pour  $t \leq 0$  et  $\text{Fil}^t M_i = 0$  pour  $t > b_i$ .*

*ii) Si  $i \in J$ ,  $\text{Fil}^t M_i = \mathcal{O}_L F_i$  pour  $0 < t \leq b_i$ .*

*Si  $i \notin J$ ,  $\text{Fil}^t M_i = \mathcal{O}_L E_i$  pour  $0 < t \leq b_i$ .*

*iii)  $\phi(E_i) = \underline{b}(i) p^{b_i \bar{\mathbb{1}}_J(i)} E_{i+1}$  et  $\phi(F_i) = \underline{a}(i) p^{b_i \mathbb{1}_J(i)} (F_{i+1} - \Lambda_{i+1} E_{i+1})$ .*

*De plus, le morphisme  $N'' \rightarrow N$  (resp.  $N \rightarrow N'$ ) est donné sur cette description par  $E_i \mapsto E_i$  (resp.  $E_i \mapsto 0, F_i \mapsto \bar{F}_i$ ).*

*Démonstration.* Bien sûr, les  $E_i$  sont ceux qui proviennent de  $M''$ . La condition sur la filtration détermine les  $F_i$  lorsque  $i \in J$ . Par ailleurs, la condition sur  $\phi$ , couplée au fait que  $\Lambda_i$  s'annule pour  $i \notin J$ , détermine la valeur de  $F_i$  en fonction de  $F_{i-1}$  lorsque  $i \notin J$ . Ainsi lorsque  $J \neq \emptyset$ , tous les  $F_i$  sont déterminés et il est immédiat de vérifier qu'ils satisfont toutes les propriétés de la proposition.

Supposons  $J$  vide. Soit  $F'_1$  un relevé quelconque de  $\bar{F}_1$ . Définissons  $F'_2 = \phi(F'_1)$ ,  $F'_3 = \phi(F'_2)$  et ainsi de suite. Hélas, on n'a pas nécessairement comme cela  $F'_{r+1} = \tilde{a} F'_1$ . Toutefois, la réduction de cette égalité dans  $N'$  est vérifiée et donc on a  $F'_{r+1} = \tilde{a} F'_1 + \beta E_1$  pour un certain  $\beta \in \mathcal{O}_L$ . Les éléments :

$$F_1 = F'_1 + \frac{\beta}{\tilde{a} - \tilde{b} p^{b_1 + \dots + b_r}} E_1,$$

$F_2 = \phi(F_1)$ , etc. répondent alors à la question (notez que le dénominateur est bien inversible car  $b_1 + \dots + b_r \geq 2r \geq 1$ ).  $\square$

## 5.2 Modules associés aux $E$ -groupes $\mathcal{G}$

On souhaite maintenant parvenir à une description explicite analogue pour les objets qui interviennent dans la condition **B'**. La donnée d'un  $E$ -groupe (avec donnée de descente) qui s'insère dans une suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0$  est équivalente à la donnée d'un objet  $\mathcal{M} \in \text{E-BrMod}_{\text{dd}}^1$  s'insérant dans la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow 0$ . Cherchons à déterminer la forme de ces  $\mathcal{M}$ .

**Choix d'un relevé compatible à la donnée de descente** Fixons  $g$  un générateur de  $G$ . Choisissons  $f_1 \in \mathcal{M}$  un relevé de  $\bar{f}_1$  appartenant à l'image de  $\phi_1$ . On a une écriture de la forme :

$$[g](f_1) = \omega_1^{\mu'_1}(g)f_1 + se_1$$

pour un certain  $s \in E[u^p]/u^{ep}$ . Remplacer  $f_1$  par  $f_1 + \delta u^{pn}e_1$  modifie  $s$  en  $s + \delta[\omega_1^{\mu''_1 + pn}(g) - \omega_1^{\mu'_1}(g)]u^{pn}$ . Ainsi dès que  $pn \not\equiv \mu'_1 - \mu''_1 \pmod{p^r - 1}$ , on peut choisir  $\alpha$  de sorte à éliminer le terme en  $u^{pn}$  dans  $s$ . Par conséquent, si l'on désigne par  $n$  l'unique entier de  $[0, p^r - 1[$  congru à  $\frac{\mu'_1 - \mu''_1}{p}$  modulo  $(p^r - 1)$ , on peut choisir  $f_1$  de sorte à avoir :

$$[g](f_1) = \omega_1^{\mu'_1}(g)f_1 + \alpha(g)u^{pn}e_1 \quad (5)$$

avec  $\alpha(g) \in E$ . Libérons  $g$ . Utilisant la relation  $[gh] = [g] \circ [h]$ , on s'assure que l'égalité (5) est valable pour tout  $g \in G$  pour une certaine fonction  $\alpha : G \rightarrow E$  soumise à la relation :

$$\alpha(gh) = \omega_1^{\mu'_1}(g)\alpha(h) + \omega_1^{\mu'_1}(h)\alpha(g)$$

pour tous  $g$  et  $h$  dans  $G$ . Autrement dit la fonction  $\beta = \alpha\omega_i^{-\mu'_1}$  vérifie  $\beta(gh) = \beta(g) + \beta(h)$ . Comme  $G$  est d'exposant  $p^r - 1$  premier à  $p$  et que  $E$  est de caractéristique  $p$ , la seule solution est d'avoir  $\beta = 0$ , et par suite  $\alpha = 0$ .

Au final, on a prouvé le lemme suivant :

**Lemme 5.2.** *Il existe  $f_1 \in \phi_1(\text{Fil}^1 \mathcal{M})$  relevant  $\bar{f}_1$  et vérifiant :*

$$[g](f_1) = \omega_1^{\mu'_1} f_1$$

pour tout  $g \in G$ . De plus,  $f_1$  est défini à addition près d'un élément de la forme  $\alpha u^{pn}e_1$  pour  $\alpha \in E$  et  $n$  l'unique entier de  $[0, p^r - 1[$  congru à  $\frac{\mu'_1 - \mu''_1}{p}$  modulo  $(p^r - 1)$ .

**Forme de la filtration** Rappelons que la suite  $0 \rightarrow \text{Fil}^1 \mathcal{M}' \rightarrow \text{Fil}^1 \mathcal{M} \rightarrow \text{Fil}^1 \mathcal{M}'' \rightarrow 0$  est exacte. Ainsi  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_1$  est engendré par  $u^{e_1 J(2)}e_1$  et par un relevé de  $u^{e_1 J(2)}\bar{f}_1$  qui appartient à  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_1$ .

Supposons dans un premier temps que  $2 \notin J$ . Un relevé de  $u^e \bar{f}_1$  est alors par exemple  $u^e f_1$  : c'est bien un élément de  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_1$  puisque  $u^e \mathcal{M} \subset \text{Fil}^1 \mathcal{M}$ . Ainsi  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_1$  est engendré par  $e_1$  et  $u^e f_1$ .

Supposons maintenant que  $2 \in J$ . Un relevé dans  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_1$  de  $\bar{f}_1$  s'écrit  $f_1 + se_1$  avec  $s \in E[u]/u^{ep}$ . Ainsi  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_1$  est engendré par  $f_1 + se_1$  et  $u^e e_1$ . On peut évidemment choisir  $s$  de degré strictement inférieur à  $e$ . Calculons :

$$[g](f_1 + se_1) = \omega_1^{\mu'_1}(g)f_1 + \hat{g}(s)\omega_1^{\mu''_1}(g)e_1 = \omega_1^{\mu'_1}(g)(f_1 + se_1) + \left[ \hat{g}(s)\omega_1^{\mu''_1}(g) - \omega_1^{\mu'_1}(g)s \right] e_1.$$

Comme  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_1$  est stable par l'action de  $G$ , cet élément doit être dans  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_1$ , ce qui implique que le facteur entre crochets est nul (puisque l'on a supposé  $s$  de degré strictement inférieur à  $e$ ). Cette condition se réécrit  $\hat{g}(s) = \omega_1^{\mu'_1 - \mu''_1}(g)s$ . Ainsi si  $n_2$  est l'unique entier de  $[0, p^r - 1[$  congru à  $\mu'_1 - \mu''_1$  modulo  $(p^r - 1)$  (on rappelle que  $e = p^r - 1$ ), on a nécessairement  $s = \lambda_2 u^{n_2}$  avec  $\lambda_2 \in E$ . Donc :

**Lemme 5.3.** *Si  $2 \notin J$ , le sous-module  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_1$  est engendré par les deux éléments  $e_1$  et  $u^e f_1$ .*

*Si  $2 \in J$ , il existe  $\lambda_2 \in E$  tel que  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_1$  soit engendré par les deux éléments  $u^e e_1$  et  $f_1 + \lambda_2 u^{n_2} e_1$  où  $n_2$  est l'unique entier de  $[0, p^r - 1[$  congru à  $\mu'_1 - \mu''_1$  modulo  $(p^r - 1)$ .*

**Pour les  $\mathcal{M}_i$ ,  $i > 1$**  Posons à présent  $f_2 = \phi_1(u^e f_1)$  si  $2 \notin J$  et  $f_2 = \phi_1(f_1 + \lambda_2 u^{n_2} e_1)$  sinon. Il est clair que  $f_2$  se réduit sur  $\bar{f}_2$  dans  $\mathcal{M}''$ . De plus, en utilisant la commutation de  $[g]$  et  $\phi_1$ , on obtient :

$$[g](f_2) = \omega_2^{\mu'_2}(g)f_2$$

(notez que  $\omega_i^{\mu'_i}$  ne dépend pas de  $i$ ). En réappliquant l'argument de la preuve du lemme 5.3, on voit que  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_2$  est engendré par  $e_2$  et  $u^e f_2$  si  $3 \notin J$ , ou sinon par  $u^e e_2$  et  $f_2 + \lambda_3 u^{n_3} e_1$  avec  $\lambda_3 \in E$ ,  $0 \leq n_3 < p^r - 1$  et  $n_3 \equiv \mu'_2 - \mu''_2 \pmod{p^r - 1}$ .

Ainsi de suite, on construit  $f_3, f_4, \text{etc.}$ , jusqu'à arriver à  $f_{r+1}$ . Malheureusement, rien ne nous dit que celui-ci est égal à  $af_1$ . Cependant l'image de  $f_{r+1}$  dans  $\mathcal{M}''$  est bien  $af_1$ , d'où  $f_{r+1} = af_1 + se_1$  pour un certain  $s \in E[u]/u^{ep}$ . On doit par ailleurs avoir :

$$[g](f_{r+1}) = \omega_1^{\mu'_1}(g)f_{r+1}$$

d'où l'on déduit que  $s = \beta u^{pn}$  ( $\beta \in E$ ) où  $n$  est celui du lemme 5.2. Ce même lemme nous précise que l'on peut modifier  $f_1$  en lui ajoutant une quantité de la forme  $\alpha u^{pn}$ . Voyons comment cela modifie  $f_2$ .

Si  $2 \notin J$ , il est facile de voir que  $f_2$  n'est pas modifié. Ainsi en remplaçant  $f_1$  par  $\frac{f_{r+1}}{a}$ , on peut supposer que  $\beta = 0$ , c'est-à-dire que  $f_{r+1} = af_1$ . De même, si  $J \neq S$ , on peut reprendre tout le raisonnement précédent en commençant non pas à 1 mais à un entier  $i_0$  tel que  $i_0 + 1 \notin J$ .

Supposons donc  $J = S$ . Dans ce cas,  $\mu'_1 = \sum_{j=1}^r p^{r-j}(1 - b_{j+1})$  et  $\mu''_1 = 0$ . On en déduit la valeur de  $n_2$  :

$$n_2 = p^r - 1 - \sum_{j=1}^r p^{r-j}(b_{j+1} - 1)$$

ce qui donne en particulier  $n_2 \equiv -b_1 \pmod{p}$ . D'autre part,  $pn \equiv n_2 \pmod{p^r - 1}$  (puisque'ils sont tous les deux congrus à  $\mu'_1 - \mu''_1$ ). Écrivons  $pn = n_2 + q(p^r - 1)$  avec  $q \geq 0$ . Réduisant cette égalité modulo  $p$ , il reste  $q \equiv n_2 \equiv -b_1 \pmod{p}$  et donc en particulier  $q$  ne peut valoir ni 0, ni 1. Ainsi  $q \geq 2$ , ce qui implique que  $f_2$  n'est pas modifié lorsque l'on ajoute à  $f_1$  une quantité de la forme  $\alpha u^{pn}$ . On conclut comme précédemment.

**Conclusion** Au final, la structure de  $\mathcal{M}$  est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 5.4.** *Avec les notations précédentes, il existe, pour tout  $i$  une  $(E[u]/u^{ep})$ -base  $(e_i, f_i)$  de  $\mathcal{M}_i$  et des éléments  $\lambda_i \in E$  tels que  $\lambda_i = 0$  si  $i \notin J$  et :*

- i)  $[g](e_i) = \omega_i^{\mu''_i}(g)e_i$  et  $[g](f_i) = \omega_i^{\mu'_i}(g)f_i$  pour tout  $i \in S$  ;
- ii)  $\text{Fil}^1 \mathcal{M}_i$  est engendré par  $e'_i = u^{e_{1J}(i+1)}e_i$  et  $f'_i = u^{e_{\bar{1}J}(i+1)}f_i + \lambda_{i+1}u^{n_{i+1}}e_i$  où  $n_{i+1}$  est le reste de la division euclidienne de  $\mu'_i - \mu''_i$  par  $p^r - 1$  ;
- iii)  $\phi_1(e'_i) = \underline{b}(i)e_{i+1}$ ,  $\phi_1(f'_i) = \underline{a}(i)f_{i+1}$  ;
- iv)  $N(e_i) = 0$ ,  $N(f_i) = -\frac{\underline{b}(i-1)}{\underline{a}(i-1)}n_i\lambda_i u^{pn_i}e_i$ .

De plus, le morphisme  $\mathcal{M}'' \rightarrow \mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ ) est donné sur cette description par  $e_i \mapsto e_i$  (resp.  $e_i \mapsto 0, f_i \mapsto \tilde{f}_i$ ).

*Démonstration.* On a déjà tout prouvé sauf la forme de l'opérateur de monodromie. Comme  $\kappa = 2$ , il suffit de vérifier que le  $N$  de la proposition prolongé par la relation de Leibniz vérifie  $N(\mathcal{M}) \subset u\mathcal{M}$  et commute à  $\phi_1$ . La première condition est équivalente à  $n_i > 0$  pour tout  $i \in S$ , et en écrivant explicitement la relation de commutation, on montre que la seconde condition est impliquée par les inégalités  $pn_i \geq e$  pour tout  $i \in S$ .

Nous reportons la preuve de ce deuxième énoncé combinatoire (qui implique à l'évidence le premier) à une sous-section ultérieure (lemme 5.10).  $\square$

### 5.3 Interlude : défaut de pleine fidélité

Oublions un instant le fil de la démonstration pour nous concentrer sur une question différente. Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux objets de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$  de rang 1. On note  $a_i, \alpha_i$  et  $\alpha_{\text{fil},i}$  (resp.  $b_i, \beta_i$  et  $\beta_{\text{fil},i}$ ) les invariants numériques associés à  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  par la proposition 2.2, et  $A_i$  (resp.  $B_i$ ) une base correspondant à ces invariants. En particulier, tout au long de cet interlude, les  $a_i$  et les  $b_i$  n'ont aucun rapport avec ceux que l'on manipulait jusqu'à présent.

**Proposition 5.5.** *On conserve les notations précédentes et on suppose donné un isomorphisme  $f : T_{\text{st}}^*(\mathcal{B}) \rightarrow T_{\text{st}}^*(\mathcal{A})$ . Alors, il existe un morphisme non nul (dans la catégorie  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$ )  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  si, et seulement si  $\beta_{\text{fil},i} \geq \alpha_{\text{fil},i}$  pour tout  $i \in S$ .*

Le cas échéant, il existe  $\lambda \in E^*$  tel que le morphisme  $\hat{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  défini par  $A_i \mapsto \lambda u^{\beta_{\text{fil},i} - \alpha_{\text{fil},i}} B_i$  satisfasse  $T_{\text{st}}^*(\hat{f}) = f$ .

*Démonstration.* Le fait que  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{A})$  soit isomorphe à  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{B})$  entraîne, grâce à la proposition 2.3, d'une part que les éléments de  $E^*$  associés à  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  par la proposition 2.2 coïncident, et d'autre part que la congruence  $\alpha_i + \alpha_{\text{fl},i} \equiv \beta_i + \beta_{\text{fl},i} \pmod{p^r - 1}$  est satisfaite.

Soit  $\hat{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un morphisme non nul dans la catégorie  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$ . L'image de  $A_i$  est nécessairement de la forme  $s_i B_i$  avec  $s_i \in E[u]/u^{ep}$ . Si l'un des  $s_i$  est nul, la condition de commutation à  $\phi_{\kappa-1}$  implique que  $s_{i+1}$  l'est également, et par récurrence que  $\hat{f}$  est lui aussi nul. Comme ce cas a été exclu, tous les  $s_i$  sont non nuls. Notons  $v_i$  la « valuation  $u$ -adique » de  $s_i$  : c'est un entier compris entre 0 et  $ep - 1$ . En utilisant à nouveau, la commutation à  $\phi_{\kappa-1}$ , on obtient les relations  $v_{i+1} = pv_i + pa_i - pb_i$ . Celles-ci forment un système qui se résout aisément et conduit à  $v_i = \beta_{\text{fl},i} - \alpha_{\text{fl},i}$ . Ceci démontre le sens direct de l'équivalence de la proposition.

Pour la réciproque, on considère le morphisme défini  $\hat{f}'$  par  $A_i \mapsto u^{\beta_{\text{fl},i} - \alpha_{\text{fl},i}} B_i$ . Pour tout  $i$ , on a par hypothèse  $0 \leq a_i \leq e(\kappa - 1) \leq e(p - 2)$ . On en déduit :

$$\alpha_{\text{fl},i} \leq \frac{e(p-2)(p^r + p^{r-1} + \dots + p)}{p^r - 1} = \frac{ep(p-2)}{p-1} < ep$$

pour tout  $i$ . De même  $\beta_{\text{fl},i} < ep$ , d'où il suit que la différence  $\beta_{\text{fl},i} - \alpha_{\text{fl},i}$  est elle aussi strictement inférieure à  $ep$ . Ainsi le morphisme  $\hat{f}'$  est non nul. Il reste à vérifier qu'il commute aux structures supplémentaires, mais cela ne pose plus aucune difficulté particulière. (Pour la donnée de descente, il faut utiliser la congruence  $\alpha_i + \alpha_{\text{fl},i} \equiv \beta_i + \beta_{\text{fl},i} \pmod{p^r - 1}$ .)

Reste à prouver la dernière assertion. La preuve de la proposition 2.3 (dont nous avons seulement expliqué les idées) montre en fait que  $T_{\text{st}}^*(\hat{f}')$  est un isomorphisme. Comme  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{A})$  et  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{B})$  sont des  $E$ -espaces vectoriels de dimension 1, on a nécessairement  $f = \lambda T_{\text{st}}^*(\hat{f}')$  pour un  $\lambda \in E^*$ . Il suffit donc de poser  $\hat{f} = \lambda \hat{f}'$ .  $\square$

*Remarque.* Quitte à modifier la base  $A_i$ , on peut supposer dans l'énoncé de la proposition que  $\lambda = 1$ . C'est ce que nous ferons par la suite.

L'énoncé suivant montre même que dans le « mauvais » cas de la proposition, la situation n'est pas désespérée :

**Proposition 5.6.** *On conserve les notations précédentes et on suppose toujours donné un isomorphisme  $f : T_{\text{st}}^*(\mathcal{B}) \rightarrow T_{\text{st}}^*(\mathcal{A})$ . Alors il existe un objet  $\mathcal{C}$  de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$  et des morphismes  $\hat{f}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\hat{f}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  induisant des isomorphismes via  $T_{\text{st}}^*$  et tels que  $T_{\text{st}}^*(\hat{f}_{\mathcal{A}}) \circ T_{\text{st}}^*(\hat{f}_{\mathcal{B}})^{-1} = f$ .*

*Démonstration.* Évidemment si  $\beta_{\text{fl},i} \geq \alpha_{\text{fl},i}$  pour tout  $i \in S$ , il suffit de prendre  $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ ,  $\hat{f}_{\mathcal{B}} = \text{id}$  et d'appliquer la proposition 5.5 pour obtenir  $\hat{f}_{\mathcal{A}}$ . De même, si  $\alpha_{\text{fl},i} \geq \beta_{\text{fl},i}$  pour tout  $i \in S$ , on peut conclure avec  $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ .

Lorsque les  $r$ -uplets  $(\alpha_{\text{fl},i})$  et  $(\beta_{\text{fl},i})$  ne sont pas comparables, c'est plus compliqué. L'idée consiste à construire un  $\mathcal{C}$  dont les invariants associées  $\gamma_{\text{fl},i}$  vérifient  $\gamma_{\text{fl},i} = \max(\alpha_{\text{fl},i}, \beta_{\text{fl},i})$ . Pour y parvenir, on pose  $n_i = \frac{1}{p} \max(\beta_{\text{fl},i} - \alpha_{\text{fl},i}, 0)$  et  $c_i = a_i + pn_i - n_{i+1}$ . Ces nombres sont toujours des entiers, car on voit directement sur la définition que  $\alpha_{\text{fl},i}$  et  $\beta_{\text{fl},i}$  sont des multiples de  $p$ . Montrons que  $c_i$  est positif ou nul. Cela ne pose pas de problème si  $n_{i+1} = 0$ . Si par contre  $n_{i+1} > 0$ , on a  $n_{i+1} = \frac{\beta_{\text{fl},i+1} - \alpha_{\text{fl},i+1}}{p}$  puis :

$$a_i + pn_i \geq a_i + \beta_{\text{fl},i} - \alpha_{\text{fl},i} = b_i + \frac{\beta_{\text{fl},i+1} - \alpha_{\text{fl},i+1}}{p} = b_i + n_{i+1} \geq n_{i+1}$$

la première égalité se vérifiant simplement en remplaçant  $\alpha_{\text{fl},i}$ , etc. par leurs définitions. De même, on prouve  $c_i \leq e(\kappa - 1)$  : si  $n_i = 0$ , le résultat est immédiat et sinon on écrit :

$$a_i + pn_i = a_i + \beta_{\text{fl},i} - \alpha_{\text{fl},i} = b_i + \frac{\beta_{\text{fl},i+1} - \alpha_{\text{fl},i+1}}{p} \leq b_i + n_{i+1} \leq e(\kappa - 1) + n_{i+1}.$$

(En réalité, on a même obtenu  $\min(a_i, b_i) \leq c_i \leq \max(a_i, b_i)$ .) Un calcul simple montre par ailleurs que les  $\gamma_{\text{fl},i}$  associés aux  $c_i$  vérifient  $\gamma_{\text{fl},i} = \alpha_{\text{fl},i} + pn_i = \max(\alpha_{\text{fl},i}, \beta_{\text{fl},i})$ , c'est-à-dire la condition recherchée. Définissons à présent  $\gamma_i = \alpha_i + \alpha_{\text{fl},i} - \gamma_{\text{fl},i} \in \mathbb{Z}/(p^r - 1)\mathbb{Z}$  et  $\mathcal{C}$  l'objet de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$  associé aux nombres  $c_i$ ,  $\gamma_i$  et à l'élément de  $E^*$  correspondant à  $\mathcal{A}$  (ou ce qui revient au même, à  $\mathcal{B}$ ). La proposition 2.3 montre que  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{A})$  et  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{C})$  sont isomorphes et il ne reste plus, pour conclure la preuve, qu'à appliquer deux fois la proposition 5.5.  $\square$

*Remarque.* Les résultats précédents ne doivent pas surprendre le lecteur. Ils sont simplement l'illustration en termes de la catégorie  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{\kappa-1}$  de propriétés analogues sur les schémas en groupes de type  $(p, \dots, p)$  connues depuis Raynaud (voir [8], §2.2), la relation d'ordre (partiel) sur les prolongements d'un  $p$ -groupe sur  $K$  correspondant ici à l'ordre produit sur les  $\alpha_{\text{fil}, i}$ .

## 5.4 Fin de la démonstration

Revenons à nos moutons et reprenons en particulier les extensions  $0 \rightarrow M'' \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0$  et  $0 \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow 0$  données par les propositions 5.1 et 5.4. Voyons les objets  $\mathcal{M}''$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  comme appartenant à la catégorie  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{p-2}$  et notons  $\mathcal{N}''$ ,  $\mathcal{N}$  to  $\mathcal{N}'$  les objets de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{p-2}$  associés respectivement à  $M''$ ,  $M$  et  $M'$  par la recette de 4.4. Si on définit les constantes :

$$m'_i = e(p-3) + e\bar{\mathbb{1}}_J(i+1) \quad ; \quad m''_i = e(p-3) + e\mathbb{1}_J(i+1)$$

$$n'_i = e(p-2 - b_i\mathbb{1}_J(i)) \quad ; \quad n''_i = e(p-2 - b_i\bar{\mathbb{1}}_J(i))$$

les objets  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  se décrivent explicitement comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_i = E[u]/u^{ep} \cdot e_i \oplus E[u]/u^{ep} \cdot f_i \\ \text{Fil}^{p-2}\mathcal{M}_i \text{ est engendré par } u^{m''_i}e_i \text{ et } u^{m'_i}f_i + \lambda_{i+1}u^{e(p-3)+n_{i+1}}e_i \\ \phi_{p-2}(u^{m''_i}e_i) = \underline{b}(i)e_{i+1}, \quad \phi_{p-2}(u^{m'_i}f_i + \lambda_{i+1}u^{e(p-3)+n_{i+1}}e_i) = \underline{a}(i)f_{i+1} \\ N(\mathcal{E}_i) = 0, \quad N(\mathcal{F}_i) = -\frac{\underline{b}(i-1)}{\underline{a}(i-1)}n_i\lambda_i u^{pm_i}e_i \\ [g](\mathcal{E}_i) = \omega_i^{m''_i}(g)\mathcal{E}_i, \quad [g](\mathcal{F}_i) = \omega_i^{m'_i}(g)\mathcal{F}_i \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_i = E[u]/u^{ep} \cdot E_i \oplus E[u]/u^{ep} \cdot F_i \\ \text{Fil}^{p-2}\mathcal{N}_i \text{ est engendré par } u^{n''_i}E_i \text{ et } u^{n'_i}F_i \\ \phi_{p-2}(u^{n''_i}E_i) = \underline{b}(i)E_{i+1}, \quad \phi_{p-2}(u^{n'_i}F_i) = \underline{a}(i)(F_{i+1} - \bar{\Lambda}_{i+1}E_{i+1}) \\ N(E_i) = 0, \quad N(F_i) = 0 \\ [g](E_i) = E_i, \quad [g](F_i) = F_i \end{array} \right.$$

où  $\bar{\Lambda}_i$  désigne la réduction modulo  $p$  de  $\Lambda_i$ . On rappelle que lorsque  $i \notin J$ , on a  $\Lambda_i = 0$  et  $\lambda_i = 0$ . On rappelle également que l'objet  $\mathcal{M}''$  (resp.  $\mathcal{N}''$ ) est le sous-objet de  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{N}$ ) engendré par les  $e_i$  (resp. les  $E_i$ ) et que  $\mathcal{M}'$  (resp.  $\mathcal{N}'$ ) est le quotient par ce sous-objet. On note toujours  $\bar{f}_i$  (resp.  $\bar{F}_i$ ) les images de  $f_i$  (resp.  $F_i$ ) dans ce quotient.

**Stratégie de la preuve** Les objets précédents viennent avec des identifications  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}') \simeq E(\psi') \simeq T_{\text{st}}^*(\mathcal{N}')$  et  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}'') \simeq E(\psi'') \simeq T_{\text{st}}^*(\mathcal{N}'')$ . Appelons  $f'$  et  $f''$  les isomorphismes composés  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}') \rightarrow T_{\text{st}}^*(\mathcal{N}')$  et  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}'') \rightarrow T_{\text{st}}^*(\mathcal{N}'')$ . Pour conclure la preuve qui nous intéresse, il suffit de montrer que si  $\underline{a}(i-1)\bar{\Lambda}_i = \underline{b}(i-1)\lambda_i$ , il existe un (iso)morphisme  $f : T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{st}}^*(\mathcal{N})$  rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}') & \longrightarrow & T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) & \longrightarrow & T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}'') \longrightarrow 0 \\ & & f' \downarrow \sim & & \downarrow f & & \sim \downarrow f'' \\ 0 & \longrightarrow & T_{\text{st}}^*(\mathcal{N}') & \longrightarrow & T_{\text{st}}^*(\mathcal{N}) & \longrightarrow & T_{\text{st}}^*(\mathcal{N}'') \longrightarrow 0 \end{array}$$

à lignes exactes. Pour cela, on n'a pas envie de calculer explicitement les représentations galoisiennes  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$  et  $T_{\text{st}}^*(\mathcal{N})$ . L'idée, au contraire, est d'essayer de relever le diagramme précédent au niveau des objets de  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}$ . On commence modestement par relever les isomorphismes  $f'$  et  $f''$  et c'est là qu'interviennent les résultats de l'interlude.

Précisément, d'après la proposition 5.6, le morphisme  $f'$  (resp.  $f''$ ) se relève *via* des morphismes  $\hat{f}'_{\mathcal{N}'} : \mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{C}'$  et  $\hat{f}'_{\mathcal{M}'} : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{C}'$  (resp.  $\hat{f}''_{\mathcal{N}''} : \mathcal{N}'' \rightarrow \mathcal{C}''$  et  $\hat{f}''_{\mathcal{M}''} : \mathcal{M}'' \rightarrow \mathcal{C}''$ ) pour un certain objet  $\mathcal{C}'$  (resp.  $\mathcal{C}''$ ) de la catégorie  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{p-2}$ . On cherche donc au final à construire un objet



$\mathcal{C} \in \text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{p-2}$  qui s'insère dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{N}'' & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{N}' & \longrightarrow & 0 \\
& & \hat{f}_{\mathcal{N}}'' \downarrow & & \downarrow \hat{f}_{\mathcal{N}} & & \downarrow \hat{f}_{\mathcal{N}}' & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}'' & \cdots \cdots \cdots & \mathcal{C} & \cdots \cdots \cdots & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0 \\
& & \hat{f}_{\mathcal{M}}'' \uparrow & & \uparrow \hat{f}_{\mathcal{M}} & & \uparrow \hat{f}_{\mathcal{M}}' & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{M}'' & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{6}$$

où les flèches en pointillés restent aussi à définir. Remarquons tout de suite que si l'on y parvient, on aura terminé la démonstration puisque le lemme des cinq prouvera immédiatement que les applications  $T_{\text{st}}^*(\hat{f}_{\mathcal{M}})$  et  $T_{\text{st}}^*(\hat{f}_{\mathcal{N}})$  sont des isomorphismes.

**Description de  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}''$**  Notons  $\mu'_{\text{fil},i}$ ,  $\mu''_{\text{fil},i}$ ,  $\nu'_{\text{fil},i}$  et  $\nu''_{\text{fil},i}$  les sommes correspondantes respectivement aux nombres  $m'_i$ ,  $m''_i$ ,  $n'_i$  et  $n''_i$  par la formule de la proposition 2.2. Elle valent :

$$\begin{aligned}
\mu'_{\text{fil},i} &= p(p-3) + \sum_{j=0}^{r-1} p^{r-j} \bar{\mathbb{1}}_J(i+j+1) \quad ; \quad \mu''_{\text{fil},i} = p(p-3) + \sum_{j=0}^{r-1} p^{r-j} \mathbb{1}_J(i+j+1) \\
\nu'_{\text{fil},i} &= \sum_{j=0}^{r-1} p^{r-j} (p-2-b_{i+j} \mathbb{1}_J(i+j)) \quad ; \quad \nu''_{\text{fil},i} = \sum_{j=0}^{r-1} p^{r-j} (p-2-b_{i+j} \bar{\mathbb{1}}_J(i+j)).
\end{aligned}$$

**Lemme 5.7.** *On a  $i \in J$  si, et seulement si  $\mu'_{\text{fil},i} > \nu'_{\text{fil},i}$  si, et seulement si  $\mu''_{\text{fil},i} \leq \nu''_{\text{fil},i}$ .*

*Démonstration.* Des formules donnant les valeurs de  $\mu'_{\text{fil},i}$  et  $\nu'_{\text{fil},i}$ , on déduit l'expression suivante :

$$\mu'_{\text{fil},i} - \nu'_{\text{fil},i} = \sum_{j=0}^{r-1} p^{r-j} [b_{i+j} \mathbb{1}_J(i+j) - \mathbb{1}_J(i+j+1)].$$

Comme  $2 \leq b_{i+j} \leq p-2$ , le facteur entre crochets a toujours une valeur absolue inférieure ou égale à  $p-1$ . Ainsi, le signe de la somme est donné par le premier terme (*i.e.* celui pour lequel  $j$  est le plus petit) non nul de celle-ci. Si  $i \in J$ , ce terme est celui obtenu pour  $j=0$ , et la somme est donc strictement positive, *i.e.*  $\mu'_{\text{fil},i} > \nu'_{\text{fil},i}$ . Supposons maintenant  $i \notin J$ . Si  $J = \emptyset$ , alors la somme est nulle et  $\mu'_{\text{fil},i} = \nu'_{\text{fil},i}$ . Sinon, le premier terme non nul correspond au plus petit  $j$  tel que  $i+j+1 \in J$  et le facteur entre crochets associé est négatif (puisque  $i+j \notin J$  et donc le terme avec  $b_{i+j}$  n'apparaît pas). L'équivalence s'ensuit.

L'inégalité avec les  $\mu''_{\text{fil},i}$  et  $\nu''_{\text{fil},i}$  se traite de même.  $\square$

Posons pour simplifier les écritures qui vont suivre  $s_i = \frac{\mu'_{\text{fil},i} - \nu'_{\text{fil},i}}{p}$  et  $r_i = \frac{\mu''_{\text{fil},i} - \nu''_{\text{fil},i}}{p}$ . À partir du lemme précédent, une étude de la preuve de la proposition 5.6 montre que  $\mathcal{C}'$  et  $\mathcal{C}''$  se décrivent comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{C}'_i = E[u]/u^{ep} \cdot \bar{\mathcal{F}}_i \\ \text{Fil}^1 \mathcal{C}'_i = u^{c'_i} \mathcal{C}'_i \\ \phi_1(u^{c'_i} \bar{\mathcal{F}}_i) = \underline{a}(i) \bar{\mathcal{F}}_{i+1} \\ [g](\bar{\mathcal{F}}_i) = \omega_i^{\gamma'_i}(g) \bar{\mathcal{F}}_i \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{C}''_i = E[u]/u^{ep} \cdot \mathcal{E}_i \\ \text{Fil}^1 \mathcal{C}''_i = u^{c''_i} \mathcal{C}''_i \\ \phi_1(u^{c''_i} \mathcal{E}_i) = \underline{b}(i) \mathcal{E}_{i+1} \\ [g](\mathcal{E}_i) = \omega_i^{\gamma''_i}(g) \mathcal{E}_i \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\gamma'_i &= ps_i \mathbb{1}_J(i) \quad ; \quad \gamma''_i = -pr_i \bar{\mathbb{1}}_J(i) \\
c'_i &= -s_{i+1} \mathbb{1}_J(i+1) + ps_i \mathbb{1}_J(i) + e(p-2-b_i \mathbb{1}_J(i)) \\
c''_i &= -r_{i+1} \bar{\mathbb{1}}_J(i+1) + pr_i \bar{\mathbb{1}}_J(i) + e(p-2-b_i \bar{\mathbb{1}}_J(i))
\end{aligned}$$

**Quelques lemmes préparatoires** Avant de donner la construction de  $\mathcal{C}$ , nous regroupons dans ce paragraphe les identités combinatoires qu'il est bon de garder en tête pour faire les vérifications à venir :

**Lemme 5.8.** *On a les identités suivantes :*

- $pr_i - r_{i+1} = e[b_i\bar{\mathbb{1}}_J(i) - \bar{\mathbb{1}}_J(i+1)]$
- $ps_i - s_{i+1} = e[b_i\mathbb{1}_J(i) - \mathbb{1}_J(i+1)]$
- $c'_i = s_{i+1}\bar{\mathbb{1}}_J(i+1) - ps_i\bar{\mathbb{1}}_J(i) + e(p-3) + e\bar{\mathbb{1}}_J(i+1)$
- $c''_i = r_{i+1}\mathbb{1}_J(i+1) - pr_i\mathbb{1}_J(i) + e(p-3) + e\mathbb{1}_J(i+1)$
- $n_i = r_i - s_i + e\mathbb{1}_J(i)$

où on rappelle que  $n_i$  est défini dans la proposition 5.4. Si de plus  $i+1 \in J$ , on a aussi :

- $c''_i - s_{i+1} = e(p-3) - pr_i\mathbb{1}_J(i) + n_{i+1}$
- $c'_i - s_{i+1} - c''_i = ps_i\bar{\mathbb{1}}_J(i) - pr_i\mathbb{1}_J(i) + n_{i+1} \equiv n_{i+1} \pmod{p}$

*Démonstration.* Les deux premières égalités résultent directement des définitions, les deux suivantes en sont des conséquences immédiates, et les deux dernières s'obtiennent facilement à partir des quatre premières. Reste donc simplement à montrer la cinquième. Pour cela, on remarque que l'on a les congruences  $r_i \equiv pr_{i-1} \equiv -\mu''_{i-1} \pmod{p^r - 1}$  et  $s_i \equiv ps_{i-1} \equiv -\mu'_{i-1} \pmod{p^r - 1}$ . Ainsi  $n_i \equiv r_i - s_i \pmod{p^r - 1}$ . Grâce à l'écriture :

$$r_i - s_i = \sum_{j=0}^{r-1} p^{r-j-1} [b_{i+j}(\bar{\mathbb{1}}_J - \mathbb{1}_J)(i+j) - (\bar{\mathbb{1}}_J - \mathbb{1}_J)(i+j+1)]$$

on s'aperçoit que  $|r_i - s_i| < e$ . Supposons  $i \in J$ . D'après le lemme 5.7, on a  $r_i \leq 0$  et  $s_i > 0$ . Ainsi  $r_i - s_i < 0$  et  $n_i = r_i - s_i + e$ . Si au contraire,  $i \notin J$ , on a  $r_i - s_i \geq 0$  et puis  $n_i = r_i - s_i$ .  $\square$

**Lemme 5.9.** *Si  $i+1 \in J$ , alors  $c''_i \geq s_{i+1}$  et  $c'_i + s_{i+1} \leq e(p-2)$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 5.8, la différence  $c''_i - s_{i+1}$  s'exprime comme une somme de trois termes positifs. La première inégalité s'ensuit. Pour la seconde, l'expression :

$$c'_i + s_{i+1} = e(p-2) + (ps_i - eb_i)\mathbb{1}_J(i).$$

montre qu'il suffit donc de prouver  $ps_i - eb_i \leq 0$  pour  $i \in J$ . Or, dans ce cas :

$$ps_i - eb_i = -p^r + b_i + \sum_{j=1}^{r-1} p^{r-j} [b_{i+j}\mathbb{1}_J(i+j) - \mathbb{1}_J(i+j+1)].$$

La conclusion s'obtient en remarquant que  $b_i$  ainsi que tous les facteurs entre crochets sont majorés en valeur absolue par  $p-1$ .  $\square$

**Lemme 5.10.** *Pour tout  $i \in S$ , on a  $pn_i \geq e$ .*

*Démonstration.* Les égalités du lemme 5.8 impliquent la congruence :

$$n_{i+1} = r_{i+1} - s_{i+1} + e\mathbb{1}_J(i+1) \equiv b_i(\bar{\mathbb{1}}_J - \mathbb{1}_J)(i) - \bar{\mathbb{1}}_J(i+1) \pmod{p}.$$

De  $2 \leq b_i \leq p-2$ , on déduit que  $n_{i+1}$  n'est jamais un multiple de  $p$ . Par ailleurs, par le même lemme, on obtient les congruences  $r_{i+1} \equiv pr_i \pmod{e}$ ,  $s_{i+1} \equiv ps_i \pmod{e}$  et  $n_i \equiv r_i - s_i \pmod{e}$ . Il s'ensuit :

$$n_{i+1} \equiv pn_i \pmod{e} \tag{7}$$

Fixons  $i \in S$  et supposons par l'absurde que  $pn_i < e$ . Comme, par hypothèse, on a  $n_i \geq 0$  et  $0 \leq n_{i+1} < e$ , la congruence (7) entraîne l'égalité  $pn_i = n_{i+1}$ , ce qui contredit le fait que  $p$  ne divise pas  $n_{i+1}$ .  $\square$

**Définition de  $\mathcal{C}$**  On est enfin prêt à donner la définition du fameux objet  $\mathcal{C}$ . Il est obtenu par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{C}_i = E[u]/u^{ep} \cdot \mathcal{E}_i \oplus E[u]/u^{ep} \cdot \mathcal{F}_i \\ \text{Fil}^{p-2}\mathcal{C}_i \text{ est engendré par } u^{c_i''}\mathcal{E}_i \text{ et } u^{c_i'}\mathcal{F}_i + \lambda_{i+1}u^{c_i''-s_{i+1}}\mathcal{E}_i \\ \phi_{p-2}(u^{c_i''}\mathcal{E}_i) = \underline{b}(i)\mathcal{E}_{i+1}, \phi_{p-2}(u^{c_i'}\mathcal{F}_i + \lambda_{i+1}u^{c_i''-s_{i+1}}\mathcal{E}_i) = \underline{a}(i)\mathcal{F}_{i+1} \\ N(\mathcal{E}_i) = 0, N(\mathcal{F}_i) = -\frac{\underline{b}(i-1)}{\underline{a}(i-1)}n_i\lambda_i u^{pn_i-pr_i}\mathcal{E}_i \\ [g](\mathcal{E}_i) = \omega_i^{\gamma_i''}(g)\mathcal{E}_i, [g](\mathcal{F}_i) = \omega_i^{\gamma_i'}(g)\mathcal{F}_i \end{cases}$$

La première inégalité du lemme 5.9 assure que le terme  $\lambda_{i+1}u^{c_i''-s_{i+1}}$  qui apparaît dans l'écriture précédente a bien un sens (on rappelle que  $\lambda_i$  est nul pour  $i \notin J$ ), alors que la deuxième inégalité du même lemme implique l'inclusion  $u^{e(p-2)}\mathcal{C} \subset \text{Fil}^{p-2}\mathcal{C}$ . Les autres axiomes de la définition de la catégorie  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{p-2}$  se vérifient sans grande difficulté (éventuellement en utilisant les égalités et la congruence du lemme 5.8). Bien évidemment le morphisme  $\mathcal{C}_i'' \rightarrow \mathcal{C}_i$  est donné par  $\mathcal{E}_i \mapsto \mathcal{E}_i$  alors que celui  $\mathcal{C}_i \rightarrow \mathcal{C}_i'$  est donné par  $\mathcal{E}_i \mapsto 0, \mathcal{F}_i \mapsto \bar{\mathcal{F}}_i$ .

Voici enfin le lemme qui conclut la preuve :

**Lemme 5.11.** *Les applications  $E[u]/u^{ep}$ -linéaires  $f_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $f_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$  définis par  $f_{\mathcal{M}}(e_i) = u^{-pr_i}\mathbb{1}_J(i)\mathcal{E}_i$ ,  $f_{\mathcal{M}}(f_i) = u^{-ps_i}\mathbb{1}_J(i)\mathcal{F}_i$ ,  $f_{\mathcal{N}}(E_i) = u^{pr_i}\mathbb{1}_J(i)\mathcal{E}_i$  et  $f_{\mathcal{N}}(F_i) = u^{ps_i}\mathbb{1}_J(i)\mathcal{F}_i$  définissent des morphismes dans  $\text{E-BrMod}_{\text{dd}}^{p-2}$  qui font commuter le diagramme (6).*

*Démonstration.* C'est une vérification un peu longue mais très facile avec les identités regroupées dans le lemme 5.8. (Il est important aussi de garder à l'esprit que  $\lambda_i$  est nul pour  $i \notin J$  et que l'on a supposé  $\underline{a}(i-1)\bar{\lambda}_i = \underline{b}(i-1)\lambda_i$ .) Par voie de conséquence, nous la laissons au lecteur.  $\square$

## Références

- [1] C. Breuil, *Construction de représentations  $p$ -adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327
- [2] C. Breuil, *Groupes  $p$ -divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Annals of Math. **152** (2000), 489–549
- [3] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond et R. Taylor, *On the modularity of elliptic curves over  $\mathbb{Q}$  : wild 3-adic exercises*, J. of Amer. Math. Soc. **14** (2001), 843–939
- [4] K. Buzzard, F. Diamond et F. Jarvis, *On Serre's conjecture for mod  $l$  Galois representations over totally real fields*, preprint.
- [5] J.-M. Fontaine, *Le corps des périodes  $p$ -adiques*, Astérisque **223**, Soc. math. France (1994), 59–111
- [6] T. Gee, *On the weights of mod  $p$  Hilbert modular forms*, preprint.
- [7] D. Savitt, *Modularity of some potentially Barsotti-Tate Galois representations*, Compos. Math, **140** (2004), no. 1, 31–63
- [8] M. Raynaud, *Schémas en groupes de type  $(p, \dots, p)$* , Bull. Soc. Math. France **102** (1974), 241–280