

# La parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles

## Damien Chablat

McGill Centre for Intelligent  
Machines,  
McGill University  
817, Sherbrooke Street West  
Montréal, Québec H3A 2K6

Chablat@cim.mcgill.ca

INRIA Rocquencourt,  
Domaine de Voluceau  
B.P. 105  
78153 Le Chesnay France

## Philippe Wenger

Institut de Recherche en Cybernétique  
de Nantes  
1, rue de la Noë, B.P. 92101  
44321 Nantes France

Philippe.Wenger@ircyn.ec-nantes.fr

## Résumé

De nombreuses études portent sur la conception optimale de manipulateurs pleinement parallèles. Un critère souvent rencontré est la maximisation de l'espace de travail [1] ou l'adaptation de celui-ci à une tâche donnée. Cependant, la multiplicité des solutions des modèles géométriques direct et inverse complique fortement la topologie de l'espace de travail et de l'ensemble articulaire. De plus, la présence de singularités à l'intérieur de l'espace de travail rend parfois impossible la réalisation de trajectoires pour lesquelles le manipulateur a été conçu. Le but de cet article est de vérifier la faisabilité de trajectoires discrètes et continues afin de définir les plus grands domaines dans lesquels n'importe quelle tâche est réalisable. Cet article est illustré à l'aide d'un manipulateur parallèle plan à deux degrés de liberté. Les domaines parcourables sont représentés à l'aide de modèles quadrees.

## Abstract

The optimum design of fully parallel manipulators has been the subject of intensive work. A criterion often used is either the maximization of the workspace volume or the geometry workspace for a given task. However, the multiple solutions of the direct and inverse kinematics complicates greatly the topology of both the Cartesian and the joint workspace. Some singular configurations inside the workspace sometimes prevent the implementation of the trajectories for which the manipulator is designed. The aim of this paper is to verify the feasibility of point-to-point trajectories and continuous path tracking so as to define the largest domains where any task is feasible. These concepts are illustrated with a 2-dof planar parallel manipulator. The domains defined are represented by an octree model.

## 1. Introduction

L'objectif de cet article est d'étudier la parcourabilité dans l'espace de travail. Cette notion peut s'exprimer de deux manières différentes selon la complexité de la tâche à exécuter. La tâche la plus simple qu'un manipulateur peut être amené à réaliser, est définie par un nombre quelconque de configurations de l'espace opérationnel à relier. Nous définirons ainsi une trajectoire discrète. Une tâche plus complexe que l'on peut demander à un manipulateur, est la réalisation de trajectoires où l'on souhaite une continuité en position et en orientation. Nous définirons ainsi une trajectoire continue. Pour ces deux types de trajectoires, nous allons définir, comme cela avait été fait pour les manipulateurs sériels [2], des conditions de parcourabilité dans l'espace de travail. La « N - parcourabilité » sera associée à la réalisation de trajectoires discrètes et la « T - parcourabilité » à la réalisation de trajectoires continues.

## 2. Définitions

L'étude géométrique et cinématique des manipulateurs pleinement parallèles nous permet d'écrire une relation entre les entrées ( $\mathbf{q}$ ), c'est-à-dire les variables articulaires motorisées et les sorties ( $\mathbf{X}$ ), c'est-à-dire les configurations de la plate-forme mobile d'un manipulateur de la manière suivante :  $F(\mathbf{X}, \mathbf{q}) = 0$ . Par une dérivation au premier ordre de cette équation, nous obtenons l'équation suivante :  $\mathbf{A}\dot{\mathbf{t}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ , où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont deux matrices jacobiennes.

### **Définition 1 : Les singularités parallèles**

Les *singularités parallèles* sont dues à la perte de rang de la matrice jacobienne  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire lorsque  $\text{Det}(\mathbf{A}) = 0$ . Dans ce cas, il est possible de déplacer la plate-forme mobile alors que les articulations motorisées sont bloquées. Dans ces configurations, le manipulateur gagne un ou plusieurs degré(s) de liberté. Ces singularités sont propres aux manipulateurs parallèles. Des singularités parallèles existent à l'intérieur de l'espace de travail ce qui est particulièrement gênant lorsque l'on souhaite planifier des trajectoires.

### **Définition 2 : Les singularités sérielles**

Les *singularités sérielles* sont dues à la perte de rang de matrice jacobienne  $\mathbf{B}$ , c'est-à-dire lorsque  $\text{Det}(\mathbf{B}) = 0$ . Dans ce cas, il n'est pas possible d'engendrer certaines vitesses de la plate-forme mobile. Les singularités sérielles représentent les limites de l'espace de travail [3]. Dans ces configurations, le manipulateur perd un ou plusieurs degré(s) de liberté.

### **Définition 3 : Les modes de fonctionnement**

Pour les manipulateurs pleinement parallèles, la matrice jacobienne  $\mathbf{B}$  est toujours diagonale ( $\mathbf{B}_{j,j} = \text{Diag}(B_{1,1}, \dots, B_{j,j}, \dots, B_{n,n})$  pour  $j= 1$  à  $n$ ). Un mode de fonctionnement, noté  $Mf_i$  est l'ensemble des configurations du mécanisme  $(\mathbf{X}, \mathbf{q})$  pour lesquelles  $B_{j,j}$  ( $j = 1$  à  $n$ ) ne change pas de signe et ne s'annule pas [4]. Soit :

$$Mf_i = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{q}) \in \mathcal{W} \times \mathcal{Q} \mid \text{signe}(B_{j,j}) = \text{constante pour } j= 1 \text{ à } n \text{ et } \det(\mathbf{B}) \neq 0 \right\} \quad (1)$$

L'ensemble des modes de fonctionnement  $Mf = \{Mf_i\}$ ,  $i \in I$  est donc obtenu en utilisant toutes les permutations de signe de chaque terme  $B_{j,j}$ . S'il existe des contraintes sur les articulations (limites articulaires ou collisions internes) alors les modes de fonctionnement ne sont pas toujours tous accessibles.

### **Définition 4 : Les aspects généralisés**

On appelle aspects généralisés  $\mathcal{A}_{i,j}$  d'un manipulateur pleinement parallèle, les plus grands domaines de  $\mathcal{W} \times \mathcal{Q}$  tels que :

- $\mathcal{A}_{i,j} \subset \mathcal{W} \times \mathcal{Q}$ ;
- $\mathcal{A}_{i,j}$  est connexe ;
- $\mathcal{A}_{i,j} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{q}) \in \mathcal{W} \times \mathcal{Q} \mid \det(\mathbf{A}) \neq 0 \text{ et } \det(\mathbf{B}) \neq 0 \right\} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{q}) \in Mf_i \mid \text{tel que } \det(\mathbf{A}) \neq 0 \right\}$

En d'autres termes, les aspects généralisés sont les plus grands domaines définis sur le produit cartésien de l'ensemble articulaire et de l'espace de travail exempts de tout type de singularité. Pour utiliser les aspects généralisés, nous allons les projeter sur l'espace de travail pour former les  $\mathcal{W}$ -aspects.

### **Définition 5 : Les $\mathcal{W}$ -aspects**

La projection  $\pi_{\mathcal{W}}$  des aspects généralisés sur l'espace de travail donne les domaines  $\mathcal{WA}_{i,j}$  tels que :

- $\mathcal{WA}_{i,j} \subset \mathcal{W}$ ;
- $\mathcal{WA}_{i,j}$  est connexe.

Les domaines  $\mathcal{WA}_{i,j}$  sont appelés les  $\mathcal{W}$ -aspects, ils sont les plus grands domaines connexes de l'espace de travail, pour un mode de fonctionnement donné  $Mf_i$  [4], exempts de singularités sérielle et parallèle.

## **3. La parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles**

### **3.1 Définitions**

L'analyse de la parcourabilité de l'espace de travail nous conduit à étudier les différentes trajectoires possibles dans l'espace opérationnel. Nous allons, dans les paragraphes suivants, définir géométriquement deux types de trajectoires et poser quelques hypothèses concernant leurs réalisations.

### **Définition 6 : Les trajectoires discrètes**

Une *trajectoire discrète*  $T_d$  (Figure 1) est une trajectoire définie par  $p$  configurations de l'espace opérationnel. Elle est définie à partir des éléments suivants :

- Une origine  $X_O$  ;
- Une extrémité  $X_E$  ;
- Un ensemble de configurations de la plate-forme mobile à atteindre,  $T_d = \{X_O, \dots, X_i, \dots, X_E\}$  avec  $i \in [1, p]$ ,  $X_O = X_1$  et  $X_E = X_p$

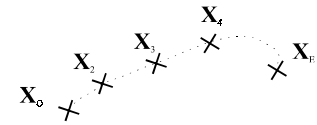


Figure 1 : Trajectoire discrète  $T_d$

Entre chaque configuration  $X_i$  à atteindre, aucune trajectoire n'est définie.

### **Hypothèse 1 :**

*Lors d'une trajectoire discrète, le manipulateur ne peut pas franchir de singularité parallèle.*

En effet, la réalisation d'une trajectoire franchissant une singularité parallèle suppose l'emploi d'une commande dynamique car le manipulateur gagne un ou plusieurs degré(s) de liberté. Pour ce faire, l'utilisation d'une telle commande suppose que le paramétrage utilisé assure la continuité du modèle géométrique direct, ce qui n'est pas toujours possible [5]. Notre étude étant purement cinématique, nous appliquerons donc l'hypothèse 1.

On dira donc qu'une trajectoire discrète  $T_d$  est réalisable s'il existe un chemin continu de l'ensemble des configurations  $\mathcal{W} \times \mathcal{Q}$  qui ne rencontre pas de singularité parallèle tel que sa projection sur l'espace de travail passe par toutes les configurations de la plate-forme mobile définies par  $T_d$ .

### **Remarque :**

Pour les manipulateurs possédant plusieurs solutions à leur modèle géométrique inverse, nous pouvons effectuer une trajectoire de changement de mode de fonctionnement entre chaque configuration. Ces trajectoires auront pour but d'éviter les configurations singulières présentes à l'intérieur de l'espace de travail. Pendant l'exécution de ces trajectoires de changement de mode de fonctionnement, le manipulateur rencontre une singularité sérielle mais le contrôle de la plate-forme mobile n'est pas perdu.

### **Définition 7 : Les trajectoires continues**

Une *trajectoire continue*  $T_C$  (Figure 2) est un arc paramétré de l'espace opérationnel  $EO_m$ . Elle est définie à partir des éléments suivants :

- Une origine  $X_O$  ;
- Une extrémité  $X_E$  ;
- Un arc paramétré, continu et dérivable par morceaux  $\exists \lambda : [0, 1] \rightarrow EO_m, T_C = \lambda([0, 1])$  où  $\lambda$  est une fonction continue sur  $[0,1]$  et dérivable par morceaux sur cet intervalle.



Figure 2 : Trajectoire continue  $T_C$

En d'autres termes, nous définissons une *trajectoire continue*, par une origine  $X_O$  et une extrémité  $X_E$ , et un arc paramétré  $T_C$  de longueur finie (l'origine et l'extrémité peuvent être confondues auquel cas la trajectoire est fermée).

### **Hypothèse 2 :**

*Lors d'une trajectoire continue, le manipulateur ne peut franchir ni une singularité parallèle ni une singularité sérielle.*

En effet, nous souhaitons une continuité en position et orientation lors de la réalisation de trajectoires continues. Cette propriété ne peut pas être garantie pour n'importe quelle trajectoire franchissant une singularité parallèle ou sérielle. Une trajectoire continue  $T_C$  sera dite réalisable s'il existe un chemin continu de l'ensemble des configurations  $\mathcal{W} \times \mathcal{Q}$  qui ne rencontre ni singularité parallèle et ni singularité sérielle et dont la projection sur l'espace de travail est la trajectoire continue  $T_C$ .

### 3.2 Caractérisation de la N - parcourabilité

Le but de ce paragraphe est de garantir la faisabilité de toute trajectoire discrète dans l'espace de travail. Nous allons définir pour cela la N - parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles.

#### **Définition 8 : La N - parcourabilité**

Un domaine de l'espace de travail sera dit N - parcourable si toute trajectoire discrète de ce domaine est réalisable [2].

À cause de la dépendance entre l'espace de travail et l'espace articulaire, nous définissons des domaines intermédiaires que nous nommons domaines de configurations accessibles. Dans une trajectoire discrète, seules les configurations de la plate-forme mobile sont données. S'il existe plusieurs modes de fonctionnement pour chacune de ces configurations, nous serons amenés à trouver un critère pour en choisir un.

#### **Définition 9 : Les domaines de configurations accessibles**

Nous définissons les *domaines de configurations accessibles*  $\mathcal{D}_{CAj}$  comme étant les plus grandes parties connexes de  $\mathcal{W} \times \mathcal{Q}$  (espace de travail et domaine articulaire) exempts de singularité parallèle.

- $\mathcal{D}_{CAj} \in \mathcal{W} \times \mathcal{Q}$
- $\mathcal{D}_{CAj}$  est connexe
- $\mathcal{D}_{CAj} = \left\{ (\mathbf{X}, \mathbf{q}) \text{ tel que } \det(\mathbf{A}) \neq 0 \right\}$

En effet, nous avons posé comme hypothèse qu'un manipulateur ne pouvait pas franchir une singularité parallèle. Ainsi, à partir d'une configuration appartenant à un mode d'assemblage donné, un domaine de configurations accessibles représente l'ensemble des configurations que le manipulateur peut atteindre sans rencontrer de configuration singulière.

#### **Notes :**

- Les domaines de configurations accessibles ne sont pas exempts de singularité sérielle. Le manipulateur peut donc effectuer une trajectoire de changement de mode de fonctionnement à l'intérieur de ces ensembles. Le cas échéant, il peut même effectuer un changement de mode d'assemblage non singulier ;
- Pour un manipulateur pleinement parallèle simple, la projection d'un domaine de configurations accessibles est un aspect généralisé car ces manipulateurs ne peuvent pas changer de mode de fonctionnement.

#### **Proposition 1 :**

Pour qu'une trajectoire discrète  $T_d = \{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p\}$  de l'espace de travail  $\mathcal{W}$  soit réalisable, il faut et il suffit que [6] :

$$\forall \mathbf{X}_i \in \left\{ \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p \right\}, \exists \mathbf{q}_i \in \mathcal{Q}, \exists \mathcal{D}_{CAj} \text{ tel que } (\mathbf{X}_i, \mathbf{q}_i) \in \mathcal{D}_{CAj} \quad (2)$$

En d'autres termes, il faut et il suffit que pour chaque configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_i$  de la trajectoire discrète  $T_d$ , il existe une configuration  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{q})$  appartenant à un même domaine de configurations accessibles  $\mathcal{D}_{CAj}$ .

#### **Démonstration :**

En effet, si pour toutes les configurations de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_i$  appartenant à l'espace de travail  $\mathcal{W}$ , il existe une configuration articulaire  $\mathbf{q}_i$  telle que  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{q}_i) \in \mathcal{D}_{CAj}$  alors la trajectoire est réalisable, car, par définition, un domaine de configurations accessibles est un domaine connexe et exempt de singularité parallèle.

Si pour une configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_i$  appartenant à l'espace de travail  $\mathcal{W}$ , il n'existait pas de configuration articulaire  $\mathbf{q}_i$  telle que  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{q}_i) \in \mathcal{D}_{CAj}$  alors le manipulateur doit franchir une singularité parallèle pour changer de domaine de configurations accessibles. Ce qui est contraire à notre hypothèse 1.

#### **Notes :**

- Pour une même configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_i$ , il peut exister plusieurs configurations articulaires  $\mathbf{q}$  telles que chaque configuration  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{q})$  appartient à un même domaine de configurations accessibles  $\mathcal{D}_{CAj}$ .
- Le choix de la configuration articulaire associée à une configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_i$ , peut-être réalisé en utilisant un des critères suivants : temps de cycle, précision du manipulateur, rigidité, etc. . En effet, les

trajectoires de changement de mode de fonctionnement peuvent être pénalisantes pour le temps de cycle. Cependant, certaines configurations articulaires du manipulateur permettent de garantir un meilleur positionnement de la plate-forme mobile.

**Théorème 1 :**

La projection  $\pi_W$  des domaines de configurations accessibles  $\mathcal{D}_{CAj}$  sur l'espace de travail  $\mathcal{W}$  donne les domaines N - parcourables  $\mathcal{W}_{NPj}$  :

- $\mathcal{W}_{NPj} = \pi_W \mathcal{D}_{CAj}$  ;
- $\mathcal{W}_{NPj}$  est connexe.

Les domaines N - parcourables sont donc les plus grands domaines connexes de l'espace de travail sans singularité parallèle.

**Démonstration :**

La projection d'un domaine connexe donne un domaine connexe. En vertu de la proposition 1, les domaines de configurations accessibles  $\mathcal{D}_{CAj}$  sont bien les domaines où n'importe quelle trajectoire discrète est réalisable. Leur projection sur un espace de dimension inférieure donne donc les domaines N - parcourables.

**Remarque :**

Les domaines N - parcourables ne sont pas directement exploitables pour planifier des trajectoires discrètes puisqu'il est nécessaire de choisir une configuration articulaire pour chaque configuration de la plate-forme mobile garantissant l'appartenance à un même domaine de configurations accessibles  $\mathcal{D}_{CAj}$ .

En revanche, les domaines N - parcourables offrent des informations globales intéressantes sur les performances d'un manipulateur puisqu'ils définissent les plus grands domaines exploitables pour définir des trajectoires discrètes.

**Conséquence :**

L'espace de travail  $\mathcal{W}$  est N - parcourable si et seulement si :

$$\exists \mathcal{W}_{NPj} \text{ tel que } \mathcal{W}_{NPj} = \mathcal{W} \tag{3}$$

**Exemple : Calcul des domaines N - parcourables de l'espace de travail**

Pour illustrer les domaines de configurations accessibles, nous allons étudier le manipulateur RR-RRR (Figure 3) possédant les dimensions et les débattements articulaires (Tableau 1). Nous supposons qu'il n'existe pas de collisions entre les segments. L'introduction de butées sur les articulations motorisées réduit considérablement l'ensemble articulaire (Figure 5). Nous allons étudier l'espace de travail (Figure 4), pour savoir s'il est N - parcourable.

$L_0$	$L_1$	$L_2$	$\theta_{1 \text{ min}}$	$\theta_{1 \text{ max}}$	$\theta_{2 \text{ min}}$	$\theta_{2 \text{ max}}$
8.0	5.0	7.0	0.0	$\pi$	0.0	$\pi$

Tableau 1 : Dimensions du manipulateur RR-RRR étudié pour la N - parcourabilité

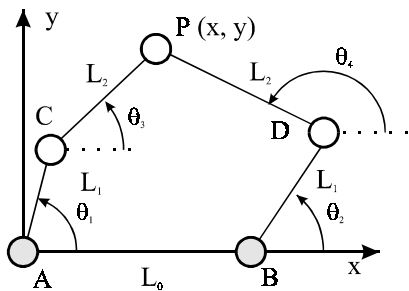


Figure 3 : Manipulateur RR\_RRR

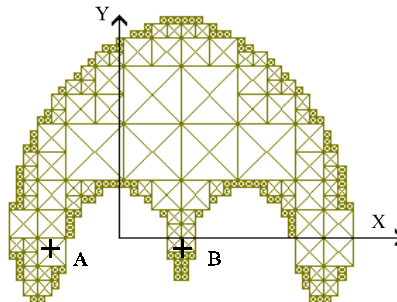


Figure 4 : Espace de travail

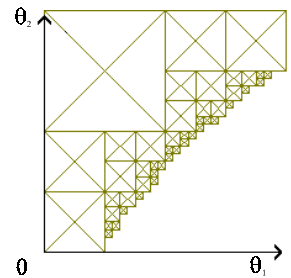


Figure 5 : Ensemble articulaire

Nous obtenons deux domaines de configurations accessibles (Figures 6 et 7). Leur projection sur l'ensemble articulaire est identique alors que leur projection sur l'espace de travail est différente et surtout plus petite que l'espace de travail du manipulateur. Ce qui revient à dire que l'espace de travail n'est pas N - parcourable. Par exemple, il n'est

pas possible de relier les points A et B. En effet, toutes les configurations de la plate-forme mobile ne possèdent pas 4 solutions au modèle géométrique inverse à cause de l'introduction de butées sur les articulations motorisées. Pour les configurations de la plate-forme mobile A et B, il n'existe qu'une configuration articulaire A\* et B\* dans l'ensemble articulaire.

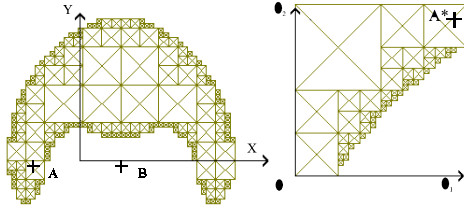


Figure 6 : Premier domaine de configurations accessibles lorsque  $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$

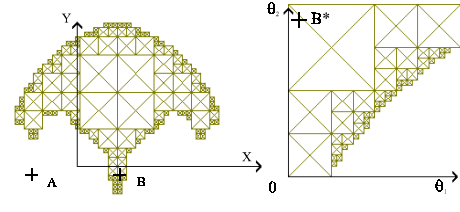


Figure 7 : Second domaine de configurations accessibles lorsque  $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$

**Remarque :**

Contrairement aux manipulateurs sériels, on remarque que l'espace de travail peut ne pas être N - parcourable en l'absence d'obstacle.

Si l'on modifie les valeurs des butées articulaires, en posant  $\theta_{1 \min} = -\pi$  et  $\theta_{2 \min} = -\pi$ , nous obtenons un espace de travail connexe (Figure 8). Pour chaque configuration de la plate-forme mobile, il existe 4 configurations articulaires qui définissent deux domaines de configurations admissibles. Ces domaines étant égaux à l'espace de travail, par définition, nous pouvons dire que l'espace est N - parcourable.

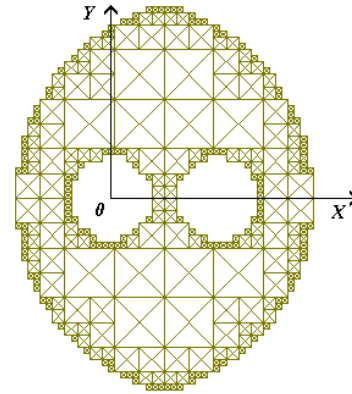


Figure 8 : Espace de travail N - parcourable d'un manipulateur RR-RRR lorsque  $-\pi \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi$

**3.3 Caractérisation de la T - parcourabilité**

Le but de ce paragraphe est de garantir la faisabilité de toute trajectoire continue dans l'espace de travail. Nous allons définir la T - parcourabilité pour les manipulateurs pleinement parallèles, dans le cas général.

**Définition 10 : La T - parcourabilité**

Un domaine de l'espace de travail sera dit T - parcourable si toute trajectoire continue de ce domaine est réalisable [2].

Nous avons émis comme hypothèse qu'une trajectoire continue ne pouvait pas passer par une singularité sérielle ou parallèle. Nous utilisons donc la définition des aspects  $\mathcal{A}_{ij}$  et plus particulièrement leurs projections dans l'espace de travail pour définir la T - parcourabilité.

**Proposition 2 :**

Pour qu'une trajectoire continue  $T_C = \{\mathbf{X}_t, t \in [0,1]\}$  de l'espace de travail  $\mathcal{W}$  soit réalisable, il faut et il suffit que [6] :

$$\forall t \in [0 ; 1], \exists \mathbf{q} \in \mathcal{Q} \text{ tel que } (\mathbf{X}_t, \mathbf{q}) \in \mathcal{A}_{ij} \tag{4}$$

En d'autres termes, il faut et il suffit que pour chaque configuration  $\mathbf{X}_t$  de la plate-forme mobile, il existe une configuration  $(\mathbf{X}_t, \mathbf{q})$  appartenant à un même aspect  $\mathcal{A}_{ij}$ .

**Démonstration :**

En effet, si pour toutes les configurations de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_t$  appartenant à l'espace de travail  $\mathcal{W}$ , il existe une configuration articulaire  $\mathbf{q}$  tel que  $(\mathbf{X}_t, \mathbf{q}) \in \mathcal{A}_{ij}$  alors la trajectoire est réalisable car, par définition, un aspect généralisé est un domaine connexe sans singularité parallèle ni sérielle. Ce qui est conforme à l'hypothèse 2.

Si pour une configuration de la plate-forme mobile  $\mathbf{X}_t$  appartenant à l'espace de travail  $\mathcal{W}$ , il n'existait pas de configuration articulaire  $\mathbf{q}$  tel que  $(\mathbf{X}_t, \mathbf{q}) \in \mathcal{A}_{ij}$  alors le manipulateur devrait franchir une ou plusieurs singularités parallèles ou sérielles pour changer d'aspect. Ce qui est contraire à notre hypothèse 2.

**Note :**

Pour une configuration de la plate-forme  $\mathbf{X}_p$ , il n'existe qu'une configuration articulaire associée à la configuration  $(\mathbf{X}_p, \mathbf{q})$  appartenant à un même aspect généralisé  $\mathcal{A}_{ij}$ . Cependant, il peut exister plusieurs aspects dans lesquels il est possible de planifier la même trajectoire  $T_C$ .

**Théorème 2 :**

La projection  $\pi_{\mathcal{W}}$  des aspects généralisés  $\mathcal{A}_{ij}$  sur l'espace de travail  $\mathcal{W}$  donne les domaines T - parcourables  $\mathcal{W}_{T P_j}$  qui sont aussi les  $\mathcal{W}$ - aspects  $\mathcal{W}\mathcal{A}_{ij}$ .

Ce résultat découle de la définition des  $\mathcal{W}$ - aspects généralisés.

**Conséquence :**

L'espace de travail  $\mathcal{W}$  est T - parcourable si et seulement si :

$$\forall \mathcal{W}\mathcal{A}_{ij}, \mathcal{W}\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{W} \tag{5}$$

C'est à dire, si et seulement si, il existe un aspect généralisé  $\mathcal{A}_{ij}$  tel que sa projection sur l'espace de travail soit égale à l'espace de travail.

**Note :**

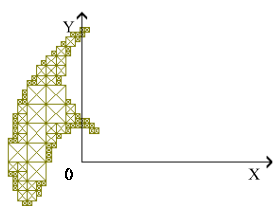
Pour le manipulateur RR-RRR étudié, la recherche des domaines T - parcourables revient donc à étudier les aspects généralisés.

**Exemple : Détermination des domaines T - parcourables à partir des aspects généralisés**

On calcule les espaces T - parcourables en projetant les aspects généralisés sur l'espace de travail. Les aspects généralisés sont regroupés dans le tableau 2 en fonction de leur mode de fonctionnement et du signe du déterminant de la matrice jacobienne parallèle  $\mathbf{A}$ .

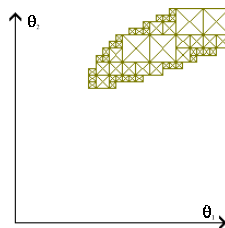
Figure	9	10	11	12	13	14	15	16
Mf <sub>i</sub>	1	2	3	4	1	2	3	4
Det( $\mathbf{A}$ )	positif	positif	positif	positif	négatif	négatif	négatif	négatif
Nombre d'aspects	1	1	1	1	1	1	1	2

Tableau 2 : Domaines T - parcourables du manipulateur RR-RRR à partir des aspects généralisés

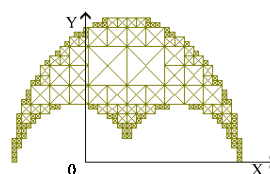


Espace de travail

Figure 9 : Aspect généralisé 1 du manipulateur RR-RRR

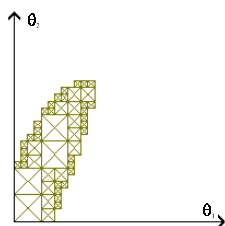


Ensemble articulaire

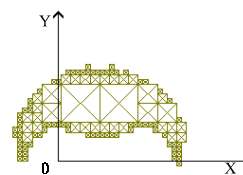


Espace de travail

Figure 11 : Aspect généralisé 3 du manipulateur RR-RRR

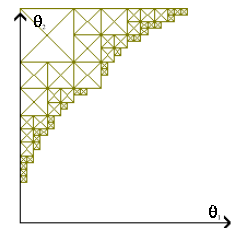


Ensemble articulaire

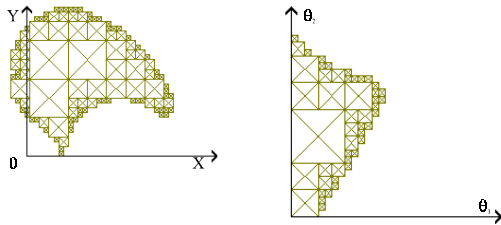


Espace de travail

Figure 12 : Aspect généralisé 4 du manipulateur RR-RRR



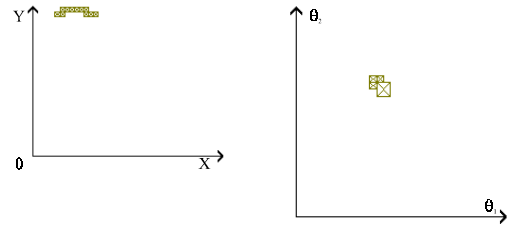
Ensemble articulaire



Espace de travail

Ensemble articulaire

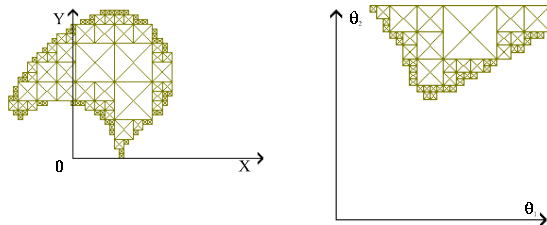
Figure 13 : Aspect généralisé 5 du manipulateur RR-RR



Espace de travail

Ensemble articulaire

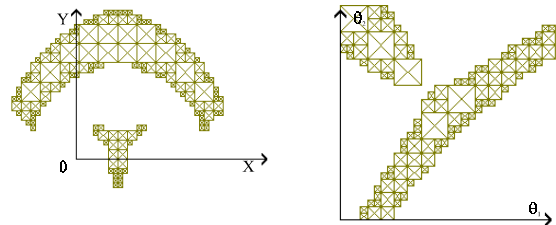
Figure 14 : Aspect généralisé 6 du manipulateur RR-RRR



Espace de travail

Ensemble articulaire

Figure 15 : Aspect généralisé 7 du manipulateur RR-RRR



Espace de travail

Ensemble articulaire

Figure 16 : Aspects généralisés 8 et 9 du manipulateur RR-RRR

La projection des aspects généralisés dans l'espace de travail permet de déterminer les domaines T - parcourables de l'espace de travail. Aussi, le W - aspect représenté dans la figure 10 est le plus grand domaine T - parcourable de l'espace de travail.

## Conclusion

Nous venons d'étudier la parcourabilité des manipulateurs pleinement parallèles permettant la réalisation de trajectoires continues et discrètes. L'étude des singularités parallèles et sérielles nous a permis de définir les domaines nécessaires à l'étude de la parcourabilité. Nous avons ainsi défini les domaines de configurations accessibles pour caractériser les domaines N - parcourables et nous avons utilisé les aspects généralisés pour caractériser la T - parcourabilité. Ainsi, nous pouvons savoir si, dans l'espace de travail, n'importe quelle trajectoire discrète ou continue est faisable. Cependant, pour la planification de trajectoires pour les manipulateurs pleinement parallèles, il est nécessaire d'associer un mode de fonctionnement. Ce problème existe aussi pour les manipulateurs sériels lorsque l'on doit choisir une posture.

## Bibliographie

- [1] : Merlet J-P, Gosselin C., Mouly N., Workspace of Planar Parallel Manipulators, *Mech. Mach. Theory*, Vol. 33 (1/2), pp. 7-20, 1998
- [2] : Wenger Ph., Chedmail P., Ability of a robot to travel through its free-workspace in an environment with obstacles, *The Int. Journal of Robotic Research*, Vol. 10(3), pp. 214-227, Juin, 1991.
- [3] : Merlet J-P., *Les robots parallèles*, 2e édition, HERMES, Paris, 1997.
- [4] : Chablat D., Wenger Ph., Working Modes and Aspects in Fully-Parallel Manipulator, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1964-1969, May 1998.
- [5] : Nenchev, D.N., Uchiyama, M., Singularity-Consistent Path Planning and Motion Control Through Instantaneous Self-Motion Singularities of Parallel-Link Manipulators, *Journal of Robotic Systems*, Vol. 14 (1), pp. 27-36, 1997.
- [6] : Chablat D., Domaines d'Unité et Parcourabilité pour les Manipulateurs Pleinement Parallèles, *Thèse de Doctorat*, Nantes, 1998.