



**HAL**  
open science

## Validation de données des systèmes linéaires de très grande dimension à l'aide du calcul décentralisé

Michel Zasadzinski, Mohamed Darouach, Philippe Pierrot, Didier Maquin,  
Gérard Krzakala

► **To cite this version:**

Michel Zasadzinski, Mohamed Darouach, Philippe Pierrot, Didier Maquin, Gérard Krzakala. Validation de données des systèmes linéaires de très grande dimension à l'aide du calcul décentralisé. International Journal of Control and Computers, 1990, 18 (3), pp.74-78. hal-00144133

**HAL Id: hal-00144133**

**<https://hal.science/hal-00144133v1>**

Submitted on 21 Dec 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# VALIDATION DES DONNEES DES SYSTEMES LINEAIRES DE TRES GRANDE DIMENSION A L'AIDE DU CALCUL DECENTRALISE

M. ZASADZINSKI - M. DAROUACH - P. PIERROT - D. MAQUIN\* - G. KRZAKALA

L.A.R.A.L. C.R.A.N. C.N.R.S. U.A. 821  
I.U.T. de Longwy, Université de NANCY I  
route de Romain, 54400 Longwy, FRANCE

\*L.A.R.A. C.R.A.N. C.N.R.S. U.A. 821 - C.R.M.V. U.A. 235  
rue du Doyen Marcel Roubault, 54500 Vandœuvre, FRANCE

## Résumé

Dans cette communication, les auteurs présentent deux méthodes de validation des données des systèmes linéaires de très grande dimension, basées sur une décomposition structurelle du processus en sous-systèmes faiblement couplés.

## Mots clés

Bilan-matière, Décomposition structurelle, Calcul décentralisé, Réseau, Système de grande dimension.

## 1. Introduction

La fiabilité des données est d'une grande importance pour l'évaluation des performances, l'identification et la conduite des processus.

La validation des données se situe entre la phase d'acquisition des mesures et la phase de prise de décisions élaborées à partir de ces dernières et permet :

- de tester la cohérence des mesures,
- de déterminer la distribution et la composition des flux de matière,
- de choisir au mieux l'emplacement des capteurs.

Les modèles considérés sont exacts car ils découlent des lois de conservation de la matière ou de l'énergie.

La théorie de l'estimation permet d'élaborer des algorithmes de validation des données dans le cas des systèmes de faible dimension. Cependant, pour des systèmes complexes (nombre important de variables et d'équations), ces méthodes sont difficilement applicables. Il est donc nécessaire de décomposer le système initial en plusieurs sous-systèmes faiblement couplés.

Des méthodes de décomposition structurelle ont été établies et appliquées à une classe de systèmes représentés par des réseaux, [1], [2], [5].

Dans ce qui suit, nous présenterons trois algorithmes de validation de données par équilibrage de bilan-matière basés sur une décomposition structurelle du processus caractérisé par un réseau de transport de matière.

## 2. Position du problème

Les systèmes considérés sont représentés par des réseaux de transport de matière, et peuvent être décrits par des modèles linéaires exacts en régime statique, qui découlent des lois de conservation de la matière :

$$M Q^* = 0 \quad (1)$$

où  $M$  est la matrice d'incidence de dimension  $(n,v)$  d'éléments

$$m_{ij} = 1 \text{ si la voie } j \text{ entre dans le nœud } i,$$

$$m_{ij} = -1 \text{ si la voie } j \text{ sort du nœud } i,$$

$$m_{ij} = 0 \text{ s'il n'y a pas de lien entre le nœud } i \text{ et la voie } j.$$

$Q^*$  est le vecteur des vraies valeurs de dimension  $v$  et  $Q$  est le vecteur des mesures. La relation entre les mesures et les valeurs vraies est :

$$Q^* + \varepsilon = Q \quad (2)$$

où  $\varepsilon$  est le vecteur des erreurs de mesures.

Sous l'hypothèse que  $\varepsilon$  suit une loi normale centrée, de matrice de variance  $V$ , le problème de la validation des données se formule :

$$\min \frac{1}{2} \|\hat{Q} - Q\|_V^{-1} \quad (3.1)$$

$$\text{sous } M \hat{Q} = 0 \quad (3.2)$$

où  $\hat{Q}$  représente le meilleur estimateur de  $Q^*$  au sens du maximum de vraisemblance. Le lagrangien associé à ce problème est :

$$L = \frac{1}{2} \|\hat{Q}\|^2 - Q \|\hat{V}\|^{-1} + \lambda^T M \hat{Q} \quad (4)$$

où  $\lambda$  est le vecteur des paramètres de Lagrange de dimension  $n$ .

Ce lagrangien est stationnaire lorsque :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{Q}} = V^{-1}(\hat{Q} - Q) + M^T \lambda = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M \hat{Q} = 0. \quad (5.2)$$

Ce système linéaire à autant d'équations que d'inconnues a pour solution :

$$\hat{Q} = P Q \quad (6)$$

où  $P$  est la matrice de projection définie par :

$$P = I - VM^T(MVM^T)^{-1}M. \quad (7)$$

Pour un réseau de  $n$  nœuds et  $v$  voies, la matrice d'incidence est de dimension  $(n,v)$  et le calcul de  $\hat{Q}$  nécessite l'inversion d'une matrice  $(n,n)$ . L'inversion de cette matrice pose des problèmes de temps et de volume de calcul si le nombre de nœuds est important.

Cette difficulté peut être évitée en utilisant un calcul décentralisé.

### 3. Validation des données décentralisée

Une décomposition structurelle du réseau initial, [1], [2], [3], en  $N$  sous-réseaux faiblement couplés permet de formuler le problème de validation des données de la façon suivante :

$$\min J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\hat{Q}_i - Q_i\|_{V_i}^2 + \frac{1}{2} \|\hat{q} - q\|_{V_q}^2 \quad (8.1)$$

$$\text{sous } M_i \hat{Q}_i + m_i \hat{q} = 0 \quad i = 1, N \quad (8.2)$$

- où  $Q_i$  : vecteur des débits du sous-système  $i$ ,  
 $M_i$  : matrice d'incidence du sous-système  $i$ ,  
 $V_i$  : matrice de variance-covariance des erreurs de mesures du sous-système  $i$ ,  
 $q$  : vecteur des débits de couplage entre les sous-systèmes,  
 $m_i$  : matrice d'incidence du couplage du sous-système  $i$  aux autres sous-systèmes,  
 $V_q$  : matrice de variance-covariance des erreurs de mesures des voies de couplage,  
 $N$  : nombre de sous-systèmes.

Le lagrangien associé à ce problème est :

$$L = J + \sum_{i=1}^N \lambda_i^T (M_i \hat{Q}_i + m_i \hat{q}) \quad (9)$$

où  $\lambda_i$  est le vecteur des paramètres de Lagrange du

sous-système  $i$ . Ce lagrangien est stationnaire si :

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{Q}_i} = V_i^{-1}(\hat{Q}_i - Q_i) + M_i^T \lambda_i = 0 \quad i = 1, N \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \hat{q}} = V_q^{-1}(\hat{q} - q) + \sum_{i=1}^N m_i^T \lambda_i = 0 \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = M_i \hat{Q}_i + m_i \hat{q} = 0 \quad i = 1, N. \quad (10.3)$$

Plusieurs méthodes de résolution peuvent être envisagées.

### 4. Méthodes de résolution

#### 4.1. Résolution par coordination des variables de couplage

De l'équation (10.1), on obtient :

$$\hat{Q}_i = Q_i - V_i M_i^T \lambda_i. \quad (11)$$

(11) remplacée dans (10.3) donne :

$$\lambda_i = (M_i V_i M_i^T)^{-1} (M_i Q_i + m_i \hat{q}). \quad (12)$$

(12) remplacée dans (10.2) donne :

$$\hat{q} = A^{-1} (q - V_q \sum_{i=1}^N m_i^T (M_i V_i M_i^T)^{-1} M_i Q_i) \quad (13)$$

avec

$$A = I + V_q \sum_{i=1}^N m_i^T (M_i V_i M_i^T)^{-1} m_i. \quad (14)$$

On obtient un algorithme à deux niveaux de calcul qui se présente d'une façon séquentielle et parallèle, la coordination étant assurée par la variable de couplage  $\hat{q}$  (figure 1).

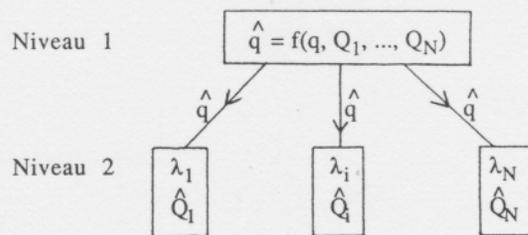


figure 1

Cette résolution a l'avantage d'être totalement analytique, elle nécessite l'inversion de la matrice  $A$  dont la dimension est égale au nombre de voies de couplage.

Son inconvénient majeur réside dans les  $N$  inversions des matrices  $(M_i V_i M_i^T)$  qui peuvent être

singulières (rang de  $M_i$  inférieur au nombre de nœuds du sous-réseau  $i$ ).

## 4.2. Résolutions itératives

Deux algorithmes à itérations directes, l'un à décomposition parallèle de type Jacobi, l'autre à décomposition séquentielle de type Gauss-Seidel, [1], [4], [6], seront présentés pour le niveau de coordination.

### 4.2.1. Algorithme de type Jacobi

De l'équation (10.1), on a :

$$\hat{Q}_i = Q_i - V_i M_i^T \lambda_i \quad i = 1, N. \quad (15)$$

De (10.2), on déduit :

$$\hat{q} = q - V_q \sum_{i=1}^N m_i^T \lambda_i \quad i = 1, N. \quad (16)$$

(15) et (16) remplacées dans (10.3) donnent :

$$\lambda_i = R_i^{-1} (r_i - m_i V_q \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_j^T \lambda_j) \quad i = 1, N \quad (17)$$

avec

$$R_i = M_i V_i M_i^T + m_i V_q m_i^T \quad i = 1, N \quad (18)$$

$$r_i = M_i Q_i + m_i q \quad i = 1, N \quad (19)$$

et  $\text{rang}(R_i) = n_i$ , nombre de nœuds du sous-réseau  $i$ . La relation (17) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\lambda = A + B\lambda \quad (20)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} R_1^{-1} \cdot r_1 \\ \vdots \\ R_N^{-1} \cdot r_N \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} (R_1^{-1} m_1 V_q) \cdot \begin{pmatrix} 0 & m_2^T & \dots & \dots & \dots & m_N^T \end{pmatrix} \\ \vdots \\ (R_i^{-1} m_i V_q) \cdot \begin{pmatrix} m_1^T & \dots & m_{i-1}^T & 0 & m_{i+1}^T & \dots & m_N^T \end{pmatrix} \\ \vdots \\ (R_N^{-1} m_N V_q) \cdot \begin{pmatrix} m_1^T & \dots & \dots & \dots & \dots & m_{N-1}^T & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

La résolution de (20) se fait selon l'algorithme de Jacobi :

$$\lambda^{k+1} = A + B\lambda^k. \quad (21)$$

Le schéma de résolution est donné à la figure 2.

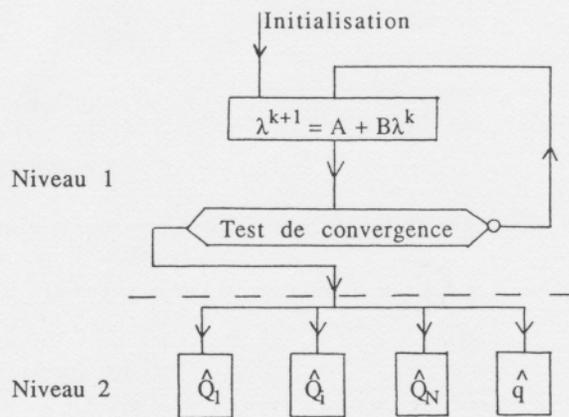


figure 2

### 4.2.2. Algorithme de type Gauss-Seidel

Dans cet algorithme, la relation (17) s'écrit :

$$\lambda_i^{k+1} = R_i^{-1} (r_i - m_i V_q (\sum_{j=1}^{i-1} m_j^T \lambda_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^N m_j^T \lambda_j^k)) \quad i = 1, N \quad (22)$$

et la résolution se fait d'une manière séquentielle. Le deuxième niveau est identique à celui de la méthode précédente.

### 4.2.3. Remarques

- Ces deux méthodes nécessitent l'inversion des  $N$  matrices  $R_i$  de dimension  $n_i$ . Ces inversions peuvent être faites avant le calcul itératif.

- La première méthode converge si le rayon spectral de la matrice  $B$  est inférieur à 1. Ce test peut être réalisé préalablement au calcul itératif.

- L'équation (10.2) permet de calculer itérativement le couplage  $\hat{q}$  au niveau supérieur. Cette solution n'a pas été retenue car elle présente le même inconvénient que la méthode de résolution par coordination des variables de couplage.

## 5. Résultats numériques

### 5.1. Premier exemple

La figure 3 représente une unité d'enrichissement par flottation formée de 11 nœuds et de 19 voies, [1], [3]. Une décomposition structurale de ce système fait apparaître 3 sous-systèmes faiblement couplés (figure 4).

Les résultats de la validation des données décentralisées sont présentés dans le tableau de la figure 5.

### 5.2. Deuxième exemple

Le réseau de la figure 6 est formé de 17 nœuds et de 30

voies, [2]. La décomposition de ce système en 3 sous-systèmes faiblement couplés est présentée dans la figure 7.

Les résultats de la validation des mesures à l'aide des deux algorithmes itératifs proposés sont donnés dans le tableau de la figure 8. La matrice de variance-covariance des erreurs de mesures est égale à l'identité.

### 5.3. Analyse des résultats

Pour les deux exemples présentés, le test de convergence pour les deux algorithmes itératifs a été fixé à  $10^{-4}$ .

On constate que la méthode itérative de Gauss-Seidel converge plus rapidement que celle de Jacobi.

La méthode de coordination par les variables de couplage est inapplicable pour le premier exemple car la matrice  $(M_2 V_2 M_2^T)$  est singulière.

Une comparaison des temps de calcul a été faite entre trois méthodes : les deux méthodes itératives et la méthode globale (voir équations (6) et (7)) (figure 9).

En prenant en compte les multiplications élémentaires, on trouve que le nombre de celles-ci, pour les deux méthodes itératives, est le même, d'une part avant les itérations et d'autre part à chaque itération. Ces deux méthodes se différencient donc essentiellement par le nombre d'itérations nécessaires.

Pour le premier réseau, les méthodes itératives demandent plus de calculs que la méthode globale. Pour le deuxième réseau, c'est l'inverse.

Le temps de calcul est donc un paramètre important pour le choix de l'algorithme de validation de données.

## 6. Conclusion

Dans cette communication, nous avons présenté deux méthodes itératives de validation des données décentralisées des systèmes linéaires basées sur une décomposition structurelle du réseau en sous-réseaux faiblement couplés, cette décomposition étant supposée réalisée. Les deux algorithmes ne font intervenir que des sous-systèmes de taille réduite.

Ces méthodes sont avantageuses par rapport à la méthode globale dans le cas des systèmes de très grande dimension décomposables en sous-systèmes faiblement couplés.

## Bibliographie

[1] M. Darouach, "Observabilité et Validation des Données de Systèmes de Grandes Dimensions. Application à l'Équilibrage de Bilans de Mesures", Thèse de Docteur ès Sciences, Université de Nancy I, 1986.

[2] D. Maquin, "Observabilité, Diagnostic et Validation des Données des Procédés Industriels", Thèse de Doctorat de l'Université de Nancy I, 1987.

[3] G. Krzakala, "Contribution à l'Extension du Calcul Hiérarchisé. Application à l'Équilibrage des Bilans de Mesures et à la Commande des Systèmes Cascades", Thèse de Docteur ès Sciences, Université de Nancy I, 1981.

[4] J.L. Calvet, "Méthodes Itératives et Partitionnement. Application aux Problèmes de Commande", Thèse de Docteur ès Sciences, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1984.

[5] M. Darouach, J. Ragot, J. Fayolle & D. Maquin, "Calcul Hiérarchisé et Décomposition des Systèmes Linéaires et Bilineaires Appliqués à la Validation des Données", *R.A.I.R.O.-A.P.I.I.*, 20, 405-432, 1986.

[6] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*, Masson, 1982.

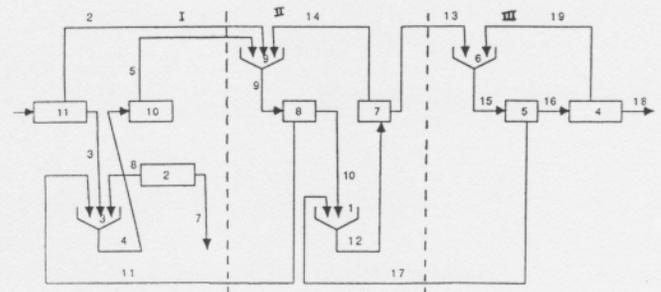


Figure 3 Circuit de flottation : 1<sup>er</sup> réseau.

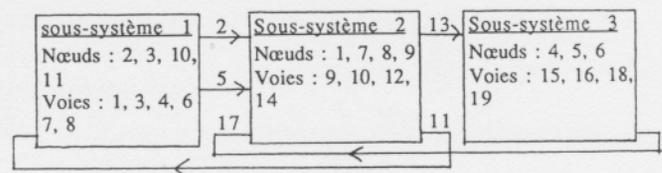


Figure 4 Structure décentralisée à trois sous-systèmes faiblement couplés.

Voies	Valeurs des mesures	Variances	Estimations	Variances estimées
1	3.46	0.01	3.47	0.006
2	3.09	0.10	3.01	0.019
3	0.49	0.02	0.46	0.014
4	2.87	0.20	3.43	0.057
5	1.92	0.10	1.69	0.036
6	1.82	0.10	1.74	0.036
7	0.17	0.01	0.15	0.006
8	1.73	0.07	1.59	0.036
9	4.67	0.20	4.81	0.040
10	4.06	0.20	3.43	0.014
11	1.47	0.07	1.38	0.032
12	3.90	0.20	3.69	0.019
13	3.94	0.20	3.59	0.014
14	0.07	0.01	0.11	0.008
15	4.23	0.20	4.54	0.040
16	4.09	0.20	4.28	0.036
17	0.25	0.01	0.26	0.008
18	3.30	0.01	3.32	0.006
19	1.08	0.05	0.96	0.032

Figure 5

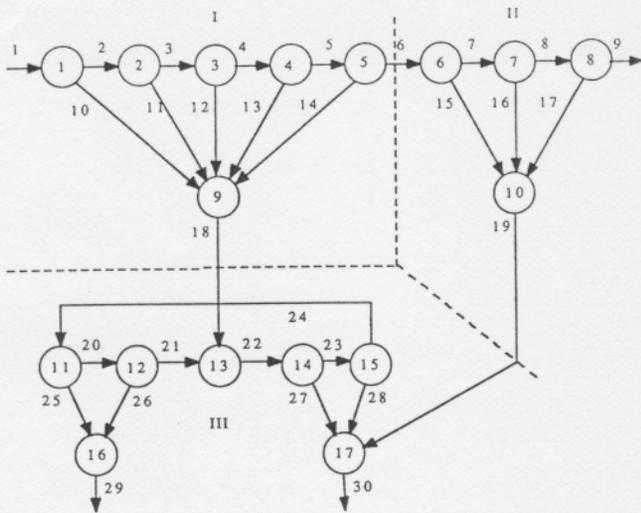


Figure 6 Circuit de flottation : 2<sup>ème</sup> réseau.

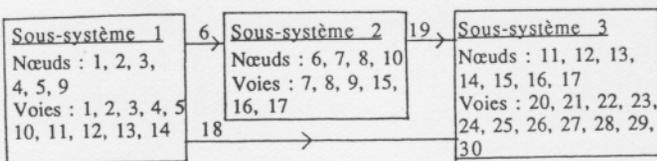


Figure 7 Structure décentralisée à trois sous-systèmes faiblement couplés.

Voies	Valeurs des mesures	Estimations
1	811.60	806.57
2	738.80	753.75
3	734.70	724.60
4	702.20	692.62
5	653.80	662.88
6	641.20	652.32
7	624.00	609.86
8	576.80	575.36
9	543.90	549.03
10	47.30	52.82
11	38.60	29.16
12	31.30	31.97
13	19.50	29.74
14	9.40	10.56
15	52.80	42.46
16	30.70	34.50
17	21.10	26.33
18	148.60	154.25
19	98.20	103.29
20	69.70	68.70
21	59.10	59.93
22	213.80	214.19
23	120.70	121.92
24	86.50	85.06
25	19.60	16.37
26	11.00	8.77
27	93.60	92.27
28	39.40	36.85
29	28.20	25.13
30	237.60	232.41

Figure 8

	Nombre d'itérations	Nombre de multiplications			
		Avant itérations	A chaque itérations	Total	
1 <sup>er</sup> réseau	Méthode parallèle de Jacobi	324	1614	80	27534
	Méthode séquentielle de Gauss-Seidel	142	1614	80	12974
	Méthode globale	-	-	-	4396
2 <sup>ème</sup> réseau	Méthode parallèle de Jacobi	34	4275	188	10667
	Méthode séquentielle de Gauss-Seidel	20	4275	188	8035
	Méthode globale	-	-	-	15401

Figure 9 Comparaison des temps de calculs à partir du nombre de multiplications élémentaires.