



HAL
open science

Un théorème de Beilinson-Bernstein pour les D-modules arithmétiques

Christine Noot-Huyghe

► **To cite this version:**

Christine Noot-Huyghe. Un théorème de Beilinson-Bernstein pour les D-modules arithmétiques. 2007.
hal-00144104v1

HAL Id: hal-00144104

<https://hal.science/hal-00144104v1>

Preprint submitted on 30 Apr 2007 (v1), last revised 25 May 2007 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un théorème de Beilinson-Bernstein pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques.

C. Noot-Huyghe*

30 avril 2007

Table des matières

1	Notations-Rappels	3
1.1	Notations	3
1.2	Coefficients p -adiques	3
1.3	Opérateurs différentiels arithmétiques	4
1.4	Algèbres symétriques de niveau m	4
1.5	Opérateurs différentiels à valeurs dans un faisceau inversible	6
1.6	Comparaison de systèmes de racines.	6
1.7	Faisceau tangent sur un espace homogène	9
1.8	Changements de base fidèlement plats	10
2	Un critère pour passer du cas algébrique au cas formel	11
2.2	Résultats à un niveau fini	12
2.3	Passage au schéma formel	16
2.4	Structure des algèbres de sections globales	19
3	Le théorème de Beilinson-Bernstein arithmétique	20

Introduction

Soit V un anneau de valuation discrète, d'inégales caractéristiques $(0, p)$. On considère ici les deux situations suivantes :

- 1- $S = \text{spec } V$, le spectre de V , X est un S -schéma noetherien,
- 2- $\mathcal{S} = \text{Spf } V$, le spectre formel de V , \mathcal{X} un schéma formel noetherien sur \mathcal{S} .

*This work has been supported by the research network Arithmetic Algebraic Geometry of the European Community (Programme FP6, contrat MRTN-CT2003-504917)

Soit \mathcal{A} un faisceau cohérent de \mathcal{O}_X -modules (resp. un faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -modules). Un \mathcal{A} -module sur le schéma X sera dit quasi-cohérent s'il est un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent. On dit que X (resp. \mathcal{X}) est \mathcal{A} -affine si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) Pour tout \mathcal{A} -module quasi-cohérent \mathcal{M} sur X (resp. tout \mathcal{A} -module cohérent sur \mathcal{X}) et tout $n \geq 1$ on a les égalités $H^n(X, \mathcal{M}) = 0$ (resp. $H^n(\mathcal{X}, \mathcal{M}) = 0$).
- (ii) Le foncteur Γ établit une équivalence de catégories entre la catégorie des \mathcal{A} -modules quasi-cohérents (resp. des \mathcal{A} -modules cohérents) et la catégorie des $\Gamma(X, \mathcal{A})$ -modules (resp. des $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ -modules de type fini).

Un énoncé important de la théorie des groupes est le théorème de Beilinson-Bernstein : soit G un groupe semi-simple sur \mathbf{C} , X la variété de drapeaux de G , \mathcal{D}_X le faisceau des opérateurs différentiels sur X , alors X est \mathcal{D}_X -affine. On se propose de donner ici un analogue arithmétique de cet énoncé, dans la situation qui suit. Soit G un groupe semi-simple sur S , ρ la demi-somme des racines positives de G , P un sous-groupe parabolique de G , $X = G/P$, qu'on suppose défini sur S , \mathcal{X} le schéma formel obtenu en complétant X le long de la fibre spéciale de S . Ce schéma est lisse et on peut s'intéresser au faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques sur \mathcal{X} construit par Berthelot, que nous noterons $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$. On montre alors que \mathcal{X} est $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ -affine. Plus généralement, \mathcal{X} est $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\lambda)$ -affine pour tout poids λ tel que $\lambda + \rho$ est dominant et régulier, le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\lambda)$ désignant le faisceau des opérateurs différentiels arithmétiques à valeurs dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(\lambda)$.

En caractéristique 0, pour le faisceau $\mathcal{D}(\lambda)$ tel que $\lambda + \rho$ est régulier, le résultat est démontré indépendamment par Beilinson-Bernstein ([BB81]) et par Brylinski-Kashiwara ([BK80]) et joue un rôle essentiel dans la démonstration de la conjecture de multiplicité de Kazhdan-Lusztig ([KL79]).

En caractéristique $p > 0$, Haastert a montré que cet énoncé d'affinité était vérifié pour les espaces projectifs, ainsi que pour la variété de drapeaux de SL_3 ([Haa87]). En revanche, Kashiwara-Lauritzen ont donné un contre-exemple à cet énoncé, pour le faisceau usuel \mathcal{D} ([KL02]) et pour la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension 2 d'un espace de dimension 5. Enfin, Bezrukavnikov, Mirkovic, Rumynin ont montré (3.2 de [BMR04]) un analogue de ce résultat d'affinité en passant à la catégorie dérivée bornée des $\mathcal{D}^{(0)}$ -modules cohérents sur X (i.e. les opérateurs différentiels sans puissances divisées) et sous la condition que p soit strictement plus grand que le nombre de Coxeter de G .

En caractéristique mixte, le résultat a été montré pour les espaces projectifs ([Huy97]). Dans ce cas, on utilise de façon cruciale le fait que le faisceau tangent est très ample, ce qui caractérise l'espace projectif. Le point clé pour les variétés de drapeaux est que la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ -modules cohérents est engendrée par les modules induits (i.e. du type $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{E}$ où \mathcal{E} est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent). On utilise cette propriété pour montrer que si le résultat de \mathcal{D} -affinité est vrai algébriquement, pour le faisceau \mathcal{D}_{X_K} , alors il est vrai pour le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ sur le schéma formel \mathcal{X} (théorème 2.1).

Nous n'aborderons pas ici l'aspect localisation de $Lie(G)$ -modules (ou plutôt des modules sur la complétion faible de $Lie(G)$), qui est bien entendu sous-jacent et fera l'objet d'un article ultérieur.

1 Notations-Rappels

1.1 Notations

Dans toute la suite, on note K le corps des fractions de V , π une uniformisante et k le corps résiduel de V . Soit G un groupe semi-simple sur S , P un sous-groupe parabolique de G , $X = G/P$, \mathcal{X} le schéma formel associé par complétion à X .

D'une façon générale, si Z est un S -schéma, la lettre cursive \mathcal{Z} désignera le schéma formel obtenu en complétant Z le long de l'idéal π , Z_k la fibre spéciale $Z_k = \text{spec } k \times_S Z$ et Z_K la fibre générique $Z_K = \text{spec } K \times_S Z$. On posera i_Z l'immersion fermée $Z_k \hookrightarrow Z$ et j_Z l'immersion ouverte $Z_K \rightarrow Z$ (on omettra éventuellement le Z dans les notations quand le contexte sera clair). On notera aussi

$$Z_i = Z \times_S \text{spec } (S/\pi^{i+1}S).$$

Pour un faisceau \mathcal{E} sur un S -schéma Z , on notera $\mathcal{E}_k = i^*\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_K = j^*\mathcal{E}$.

1.2 Coefficients p -adiques

Fixons un entier m . Si $k_i \in \mathbf{N}$, on introduit q_{k_i} le quotient de la division euclidienne de k_i par p^m et pour un multi-indice $\underline{k} = (k_1, \dots, k_N)$ on définit

$$q_{\underline{k}}! = \prod_{i=1}^N q_{k_i}!.$$

Pour $k \leq l \in \mathbf{N}$, on pose

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{q_k!}{q_k! q_{l-k}!},$$

$$\left\langle \begin{matrix} l \\ k \end{matrix} \right\rangle = \binom{l}{k} \left\{ \begin{matrix} l \\ k \end{matrix} \right\}^{-1} \in \mathbf{Z}_{(p)},$$

et pour des multi-indices $\underline{k}, \underline{l} \in \mathbf{N}^N$, tels que $\underline{k} \leq \underline{l}$ (i.e. $k_i \leq l_i$ pour tout $1 \leq i \leq N$),

$$\left\langle \begin{matrix} \underline{l} \\ \underline{k} \end{matrix} \right\rangle = \prod_{i=1}^N \left\langle \begin{matrix} l_i \\ k_i \end{matrix} \right\rangle.$$

On définit de façon analogue les coefficients $\left\{ \begin{matrix} \underline{l} \\ \underline{k} \end{matrix} \right\}$ et $\left\langle \begin{matrix} \underline{l} \\ \underline{k} \end{matrix} \right\rangle$.

Décrivons maintenant les différents faisceaux d'opérateurs différentiels intervenant dans cette situation.

1.3 Opérateurs différentiels arithmétiques

Dans cette partie, X est un S -schéma formel lisse et \mathcal{X} est son complété formel lelong de l'idéal engendré par π . On décrit les différents faisceaux d'opérateurs différentiels en coordonnées locales. Nous renvoyons à [A. 67] et à [Ber96] pour une définition intrinsèque de ces faisceaux. Soit U un ouvert affine lisse de X , x_1, \dots, x_N une famille de coordonnées locales sur X , dx_1, \dots, dx_N une base de $\Omega_X^1(U)$, $\partial_1, \dots, \partial_N$ la base duale de $\mathcal{T}_X(U)$. Si $k_i \in \mathbf{N}$, on note $\partial_i^{[k_i]} = \partial_i / k_i!$ et pour un multi-indice $\underline{\partial}^{[k]} = \prod_{i=1}^N \partial_i^{[k_i]}$. Alors on a la description suivante ([A. 67])

$$\mathcal{D}_X(U) = \left\{ \sum_{\text{finies}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[k]} \mid a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_X(U) \right\}.$$

Donnons maintenant une description des faisceaux d'opérateurs différentiels construits par P. Berthelot.

Soit $m \in \mathbf{N}$. P. Berthelot introduit les faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$, ainsi que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$, leur complété p -adique sur \mathcal{X} . Notons

$$\underline{\partial}^{(k)(m)} = q_{\underline{k}}! \underline{\partial}^{[k]}.$$

On a alors les descriptions suivantes

$$\mathcal{D}_X^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{\text{finies}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{[k]} \mid a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_X(U) \right\},$$

$$\mathcal{D}_X^{(m)}(U) = \left\{ \sum_{\text{finies}} a_{\underline{k}} \underline{\partial}^{(k)(m)} \mid a_{\underline{k}} \in \mathcal{O}_X(U) \right\}.$$

Pour $m = +\infty$, on retrouve le faisceau usuel \mathcal{D}_X . Les faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ forment un système inductif, ainsi que leurs complétés p -adiques $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. On posera

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger = \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}.$$

Les faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}$ sont à sections noethériennes sur les ouverts affines, c'est donc aussi le cas des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$, qui sont cohérents. On en déduit, via un théorème de platitude que le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ est cohérent.

Plus précisément, la structure de l'algèbre graduée de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est décrite en 1.3.7.3 de [Huy97] en termes d'algèbre symétrique de niveau m du faisceau tangent.

Rappelons comment est construite l'algèbre symétrique de niveau m d'un \mathcal{O}_X -module localement libre \mathcal{E} (section 1 de [Huy97]).

1.4 Algèbres symétriques de niveau m .

Pour les définitions relatives aux m -PD-structures, on se reportera à [Ber96]. Soit \mathcal{E} un \mathcal{O}_X -module localement libre. Le faisceau d'algèbres symétriques $\mathbf{S}(\mathcal{E}^\vee)$ est gradué et muni de

l'idéal d'augmentation $I(\mathcal{E}^\vee) = \bigoplus_{n \geq 1} S_n(\mathcal{E}^\vee)$. Par définition, $\mathbf{\Gamma}_{(m)}(\mathcal{E}^\vee)$ est la m -PD-enveloppe du couple $(\mathbf{S}(\mathcal{E}^\vee), I(\mathcal{E}^\vee))$. Ce faisceau d'algèbres est muni d'un m -PD-idéal $\overline{\mathcal{I}}$, définissant une m -PD-filtration et on définit

$$\Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}^\vee) = \mathbf{\Gamma}_{(m)}(\mathcal{E}^\vee) / \overline{\mathcal{I}}^{\{n+1\}}.$$

On pose enfin

$$\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E}) = \bigcup_n \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Gamma_{(m)}^n(\mathcal{E}^\vee), \mathcal{O}_X),$$

qui est (1.3.3 de [Huy97]) un faisceau de \mathcal{O}_X -algèbres commutatives graduées par

$$\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E}) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} S_n^{(m)}(\mathcal{E}), \text{ où } S_n^{(m)}(\mathcal{E}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\overline{\mathcal{I}}^{\{n\}} / \overline{\mathcal{I}}^{\{n+1\}}, \mathcal{O}_X).$$

Les modules $S_n^{(m)}(\mathcal{E})$ sont localement libres de rang fini et le faisceau $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$ est un faisceau d'algèbres localement noetheriennes. Ces constructions définissent des foncteurs contravariants $\mathbf{\Gamma}_{(m)}$ et covariants $\mathbf{S}^{(m)}$ de la catégorie des \mathcal{O}_X -modules localement libres vers la catégorie des faisceaux d'algèbres commutatives graduées.

Si y_1, \dots, y_N sont une base locale de \mathcal{E} sur un ouvert U de X , le faisceau $S_m(\mathcal{E})$ admet pour base sur U des éléments

$$\underline{y}^{\langle \underline{k} \rangle} = y_1^{\langle k_1 \rangle} y_2^{\langle k_2 \rangle} \dots y_N^{\langle k_N \rangle} \text{ tels que } |\underline{k}| = n.$$

De plus ces éléments vérifient

$$\underline{y}^{\langle \underline{k} \rangle} \cdot \underline{y}^{\langle \underline{l} \rangle} = \left\langle \begin{matrix} \underline{k} + \underline{l} \\ \underline{k} \end{matrix} \right\rangle \underline{y}^{\langle \underline{k} + \underline{l} \rangle}.$$

Les algèbres $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{E})$ vérifient les propriétés usuelles des algèbres symétriques. Nous aurons besoin de la propriété de dévissage suivante (1.3.9 de [Huy97]). Soit $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules localement libres. On pose, pour $0 \leq l \leq k$,

$$\Lambda_k^l = \sum_{i \geq l} \text{Im}(S_i^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} S_{k-i}^{(m)}(\mathcal{F}) \rightarrow S_k^{(m)}(\mathcal{F})).$$

Les modules Λ_k^l forment une filtration décroissante de $S_k^{(m)}(\mathcal{F})$. Les modules Λ_k^0 et Λ_k^k sont isomorphes respectivement à $S_k^{(m)}(\mathcal{F})$ et $S_k^{(m)}(\mathcal{E})$.

Proposition 1.4.1. *Pour tout $l \leq k$, il existe des suites exactes de \mathcal{O}_X -modules*

$$0 \rightarrow \Lambda_k^{l+1} \rightarrow \Lambda_k^l \rightarrow S_l^{(m)}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} S_{k-l}^{(m)}(\mathcal{G}) \rightarrow 0.$$

L'intérêt de cette construction pour nous est le résultat suivant (1.3.7.3 de [Huy97]).

Proposition 1.4.2. *Il existe un isomorphisme canonique de faisceaux de \mathcal{O}_X -algèbres graduées*

$$\text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)} \simeq \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X).$$

1.5 Opérateurs différentiels à valeurs dans un faisceau inversible

Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X (resp. un faisceau inversible sur \mathcal{X}). On note \sharp l'un des symboles (m) ou \dagger

$$\mathcal{D}_X^{(m)}(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1}, \quad \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\sharp}(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\sharp} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1} \quad (\text{resp. } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(\mathcal{L})).$$

C'est le faisceau des opérateurs différentiels à valeurs dans \mathcal{L} . Si \mathcal{L} est un faisceau inversible sur X , on notera toujours \mathcal{L} le \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1 obtenu en complétant \mathcal{L} le long de π .

Donnons maintenant quelques considérations sur les liens entre système de racines de $Lie(G)$ et donnée de racines de G .

1.6 Comparaison de systèmes de racines.

Dans cette partie, on suppose que G est semi-simple déployé. On pourra remplacer V par \mathbf{Z} si G est défini sur \mathbf{Z} et un tore maximal est déployé sur \mathbf{Z} . On peut alors introduire la donnée de racines de ce groupe algébrique. On peut aussi considérer le système de racines de l'algèbre de Lie de G . On explique ici comment identifier ces données (après avoir tensorisé par K). Dans le cas complexe, ces résultats sont bien connus. Faute de référence dans notre cas, nous expliquons comment procéder.

1.6.1 Donnée de racines d'un groupe algébrique et algèbre de distributions

On note 1_G l'élément neutre de G , $1_G : \text{spec } V \hookrightarrow G$, ε l'application correspondante : $V[G] \rightarrow V[G]$, $i_G : G \rightarrow G$ l'application de passage à l'inverse et $\sigma_G : V[G] \rightarrow V[G]$ l'application correspondante. Soit T un tore maximal déployé fixé de G . La présentation de Jantzen ([Jan03]) est particulièrement bien adaptée à notre cadre. L'algèbre de groupe $V[G]$ se décompose $V[G] = V \oplus I_1$ où I_1 est l'idéal d'augmentation de G , c'est-à-dire le noyau du morphisme ε . On pose alors

$$Lie(G) = Hom_V(I_1/I_1^2, V).$$

Si G est lisse, on introduit \mathcal{T}_G le faisceau tangent du groupe G . La suite exacte des faisceaux de formes différentielles appliquée à l'immersion fermée 1_G (voir par exemple chapitre II prop. 7 de [BLR90]) donne que $J_1/J_1^2 \simeq 1_G^* \Omega_{G/V}^1$ et en dualisant, cela donne que $Lie(G) \simeq 1_G^* \mathcal{T}_G$, de sorte que, si G est lisse, $Lie(G)$ est un V -module libre de rang fini, dont la formation commute aux changements de base. Le K -espace vectoriel $Lie(G)_K = Lie(G) \otimes_V K$ est une algèbre de Lie sur K .

On introduit aussi

$$Dist(G)_n = Hom_V(V[G]/I_1^{n+1}, V)$$

et

$$Dist(G) = \varinjlim_n Dist(G)_n,$$

qui est une algèbre (cf I 7. de [Jan03]). On peut montrer, mais cela ne nous sera pas utile ici, que cette algèbre coïncide avec la fibre en 1_G du faisceau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_G^{(0)}$. Après extension de V à K , cette algèbre est l'algèbre enveloppante de $Lie(G)_K$. Le module $Lie(G)$ est canoniquement un sous-module de $Dist(G)$ et cet homomorphisme est un homomorphisme d'algèbres de Lie après extension des scalaires à K .

Soient $X(T)$ le groupe des caractères de T ($X(T) = Hom(T, \mathbf{G}_m)$) et $Y(T)$ le groupe des sous-groupes de rang 1 de T ($Y(T) = Hom(\mathbf{G}_m, T)$). Ce sont deux \mathbf{Z} -modules libres de rang fini et on dispose du crochet de dualité $\langle, \rangle : X(T) \times Y(T) \rightarrow \mathbf{Z}$. En effet, soient $(\lambda, \mu) \in X(T) \times Y(T)$, alors $\lambda \circ \mu$ définit un élément de $Hom_{Gr}(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_m) \simeq \mathbf{Z}$. A un élément λ de $X(T)$, on associe un élément inversible de $V[T]$, que l'on notera aussi λ . Si M est un T -module et $\lambda \in X(T)$, et si Δ_m est l'application de co-module $M \rightarrow M \otimes_V V[T]$, on note $M_\lambda = \{m \in M \mid \Delta_m(m) = m \otimes \lambda\}$. L'action par conjugaison de T sur $Lie(G)$ notée Ad se décompose comme d'habitude

$$Lie(G) = Lie(T) \bigoplus_{\alpha \in R} Lie(G)_\alpha.$$

Par définition, $R \subset X(T)$ est l'ensemble des racines de G . A chaque α , on associe un élément α^\vee de $Y(T)$. L'ensemble des éléments α^\vee est noté R^\vee . Le quadruplet $(X(T), R, Y(T), R^\vee)$ associé à la bijection $R \rightarrow R^\vee$ et à l'accouplement \langle, \rangle , constitue la donnée de racines de G . Comme G est semi-simple, le couple $(R, X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} K)$ est un système de racines sur le corps K (cf chap. 6 de [Bou68]).

1.6.2 Système de racines de l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique

Soit $\lambda \in X(T)$. L'application tangente $d\lambda$ définit une application $Lie(T) \rightarrow Lie(\mathbf{G}_m)$ et donc un élément de $Lie(T)^*$, une fois fixée une coordonnée t de \mathbf{G}_m . De même l'application tangente d'un élément μ de $Y(T)$ est une application $d\mu : Lie(\mathbf{G}_m) \rightarrow Lie(T)$. Après avoir identifié $Hom_{Lie}(Lie(\mathbf{G}_m), Lie(T))$ à $Lie(T)$, on peut voir l'élément $d\mu$ comme un élément de $Lie(T)$, ce que nous ferons dans la suite. On obtient un accouplement canonique $\langle d\lambda, d\mu \rangle$ en composant $d\lambda \circ d\mu \in Hom_{Lie}(Lie(\mathbf{G}_m), Lie(\mathbf{G}_m)) \simeq V$. Par construction, on a, après choix d'une coordonnée t sur \mathbf{G}_m : $\langle \lambda, \mu \rangle = \langle d\lambda, d\mu \rangle$ (car l'application tangente en $t = 1$ de $t \mapsto t^n$ est la multiplication par n). L'application $X(T) \rightarrow Lie(T)^*$ n'est pas injective en caractéristique $p > 0$ (car le caractère $t \mapsto t^p$ est envoyé sur 0), mais après tensorisation par K on a un isomorphisme $X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} K \simeq Lie(T_K)^*$ (resp. $X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} k \simeq Lie(T_k)^*$).

Soit $\alpha \in R$, on lui associe $d\alpha \in Lie(T)^*$, qu'on notera α_* . A la co-racine α^\vee , on associe de même $d\alpha^\vee \in Lie(T)$, qu'on notera $H_\alpha \in Lie(T)$. On note enfin $R_* = \{\alpha_* \mid \alpha \in R\} \subset Lie(T)^*$ et $R_*^\vee = \{H_\alpha \mid \alpha \in R\} \subset Lie(T)$.

On définit comme d'habitude $s_\alpha : X(T) \rightarrow X(T)$ par $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$. Les applications s_α sont les réflexions associées au système de racines sur K ($R, X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} K$). On définit de façon analogue pour $h \in Lie(T)^*$, $\alpha \in R$, $\sigma_{\alpha_*}(h) = h - \langle h, \alpha_*^\vee \rangle \alpha_*$. On vérifie facilement

que les applications σ_{α_*} sont des réflexions. De plus, on a l'égalité, pour $\alpha, \beta \in R$, $\sigma_{\alpha_*}(\beta_*) = (s_\alpha(\beta))_*$ de sorte que les réflexions σ_{α_*} préservent R_* . On identifie ainsi les systèmes de racines $(R, X(T) \otimes_{\mathbf{Z}} K)$ et $(R_*, \text{Lie}(T_K)^*)$.

On remarquera enfin que si $\lambda \in X(T)$ et si $H \in \text{Lie}(T)$, alors $d\lambda(H) = H(\lambda)$. C'est vrai même si le tore T n'est pas déployé. Pour voir cela, on commence par se ramener au cas où le tore est déployé après une extension fidèlement plate de la base. On est alors ramené à montrer cette égalité pour λ un caractère de \mathbf{G}_m , or, dans ce cas, si $\lambda(t) = t^n$, et $H = \partial_1$ définie par $\partial_1(f) = (\partial f / \partial t)(1)$, on a $d\lambda(\partial_1) = \partial_1(\lambda) = n$.

Il nous reste maintenant à vérifier que le système de racines $(R_*, \text{Lie}(T_K)^*)$ est le système de racines associé à $\text{Lie}(G)$, c'est-à-dire que les racines ainsi obtenues sont celles données par la représentation adjointe de $\text{Lie}(T)$ sur $\text{Lie}(G)$. Cela fait l'objet de la sous-section suivante.

1.6.3 Comparaison des actions adjointes

L'action adjointe Ad de T sur $\text{Lie}(G)$ induit une action adjointe ad de $\text{Lie}(T)$ sur $\text{Lie}(G)$ (I 7.11 de [Jan03]), et, si $\alpha \in R$, l'action de $H \in \text{Lie}(T)$ sur $v \in \text{Lie}(G)_\alpha$ est donnée par $H(v) = H(\alpha)v$. Dans la suite, nous vérifions que cette action de $\text{Lie}(T)$ déduite de l'action de conjugaison par T est bien l'action adjointe induite par le crochet de Lie de $\text{Lie}(G)$. C'est classique sur le corps des nombres complexes mais nous n'avons pas trouvé de référence sur une base plus générale. En particulier, cette assertion est valable sur un corps k de caractéristique $p > 0$ (dans ce cas, le lecteur identifiera $V = k = K$ dans les notations). Pour ce faire, nous utilisons des formules sur les algèbres de distributions citées dans [Jan03]. Nous en déduisons la description de l'action de $\text{Lie}(T)$ sur $\text{Lie}(G)$ en vertu des injections $\text{Lie}(T) \subset \text{Dist}(T)$, $\text{Lie}(G) \subset \text{Dist}(G)$ et $\text{Dist}(T) \subset \text{Dist}(G)$.

Si $H \in \text{Dist}(G)$, on note $\sigma'_G(H) = H \circ \sigma_G$. En I 7.18 (formule (3)) de [Jan03], Jantzen donne le calcul de l'action obtenue de $\text{Dist}(T)$ sur $\text{Dist}(G)$. L'immersion diagonale $T \hookrightarrow T \times T$ définit sur $\text{Dist}(T)$ une co-multiplication $\Delta'_T : \text{Dist}(T) \rightarrow \text{Dist}(T) \otimes_V \text{Dist}(T)$ définie par $\Delta'_T(H) = 1 \otimes H + H \otimes 1$. Pour des raisons de functorialité, la co-multiplication sur $\text{Dist}(T)$ (resp. σ'_T) est la restriction à $\text{Dist}(T)$ de la co-multiplication sur $\text{Dist}(G)$ (resp. σ'_G). Si $\Delta'_G(H) = \sum_i H_i \otimes H'_i$, Jantzen établit que $ad(H)H' = \sum_i H_i H' \sigma'_G(H'_i) \in \text{Dist}(G)$. Comme $H \in \text{Dist}(T)$, on trouve $ad(H)(H') = HH' + H' \sigma'_T(H)$. Remarquons maintenant que $\sigma'_T(H) = -H$. En effet, après extension fidèlement plate de la base, on se ramène au cas où le tore T est déployé, et finalement on est ramené au cas où $T = \mathbf{G}_m = \text{spec}(V[t, t^{-1}])$. Dans ce cas, $\text{Dist}(T)$ est libre de base ∂_1 défini par $\partial_1(f) = (\partial f / \partial t)(1)$. On calcule alors

$$\sigma'_T(\partial_1)(f) = \frac{\partial(f(t^{-1}))}{\partial t}(1) = \left(-t^{-2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) (t^{-1}) \right) (1) = -\partial_1(f).$$

Finalement, cela montre que $ad(H)(H') = [H, H']$, de sorte que la décomposition de $\text{Lie}(G) = \text{Lie}(T) \bigoplus_{h_\alpha \in R} \text{Lie}(G)_\alpha$ est la décomposition définissant le système de racines de $\text{Lie}(G_K)$.

Un corollaire de toutes ces vérifications est qu'on peut identifier le système de racines

$(R, X(T_K))$ utilisé par Jantzen dans [Jan03] et le système de racines $(R_*, Lie(T_K))$. Il reste à choisir un système de racines positifs. On remarquera que Kashiwara dans [Kas89] et Beilinson-Bernstein dans [BB81] prennent la convention opposée. Nous adopterons ici la convention de Beilinson-Bernstein (et de Jantzen) en imposant que les racines venant du groupe de Borel constituent un système de racines négatives.

1.6.4 Poids dominants et réguliers

Soit $\lambda \in X(T)$, on note $\mathcal{L}(\lambda)$ le faisceau inversible associé à λ (I 5. de [Jan03]). Le caractère λ induit un poids toujours noté λ sur G_K et sur G_k . Soient V_λ , resp. K_λ et resp. k_λ les représentations de T , resp. T_K et T_k associées à λ . A ces représentations, on associe les faisceaux $\mathcal{L}(\lambda)$ sur X , resp. $\mathcal{L}(\lambda_k)$ sur X_k et $\mathcal{L}(\lambda_K)$ sur X_K . Il résulte de I 5.17 de [Jan03] que $i^*\mathcal{L}(\lambda) \simeq \mathcal{L}(\lambda_k)$ (resp. $j^*\mathcal{L}(\lambda) \simeq \mathcal{L}(\lambda_K)$). D'autre part, le faisceau $\mathcal{L}(\lambda)$ est inversible sur X d'après I 5.16 de [Jan03].

On rappelle les définitions suivantes (II 2.6 de [Jan03]).

Définition 1.6.4.1. *Un poids λ de G_K est appelé dominant (resp. régulier) si $\forall \alpha^\vee \in R^\vee$, on a $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geq 0$ (resp. $\forall \alpha^\vee \in R^\vee$, on a $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$).*

De façon équivalente, λ est dominant si et seulement si le module de sections globales $H^0(X, \mathcal{L}_K(\lambda)) \neq 0$ et λ est régulier si et seulement si le faisceau $\mathcal{L}_K(\lambda)$ est ample. Si λ est dominant, $H^0(X, \mathcal{L}_K(\lambda))$ est la représentation irréductible de G_K de plus haut poids λ (à isomorphisme près). Nous aurons besoin d'une variante sur X du théorème de Kempf (II 4.5 de [Jan03]).

Proposition 1.6.4.2. *Si λ est dominant, alors $\forall n \geq 1$, $H^n(X, \mathcal{L}(\lambda)) = 0$.*

Le résultat est classique pour $\mathcal{L}(\lambda_K)$ et $\mathcal{L}(\lambda_k)$ sur X_K et X_k respectivement. Il résulte du lemme précédent que $i^*\mathcal{L}(\lambda)$ et $j^*\mathcal{L}(\lambda)$ sont acycliques pour le foncteur sections globales. Comme la cohomologie commute à la limite inductive sur un schéma noetherien, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $H^n(X_K, \mathcal{L}(\lambda_K)) = K \otimes_V H^n(X, \mathcal{L}(\lambda))$. Comme ces groupes sont nuls pour $i \geq 1$, on voit que les groupes $H^n(X, \mathcal{L}(\lambda))$ sont de torsion et donc de torsion finie car ce sont des V -modules de type fini par les théorème généraux. La longue suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(\lambda) \xrightarrow{\cdot\pi} \mathcal{L}(\lambda) \rightarrow i_*\mathcal{L}(\lambda_k) \rightarrow 0,$$

donne des surjections, pour tout $n \geq 1$

$$\cdot\pi : H^n(X, \mathcal{L}(\lambda)) \twoheadrightarrow H^n(X, \mathcal{L}(\lambda)),$$

ce qui montre finalement que ces groupes sont nuls puisqu'ils sont de torsion finie.

1.7 Faisceau tangent sur un espace homogène

On termine par le fait classique suivant.

Proposition 1.7.1. *Le faisceau \mathcal{T}_X est engendré par ses sections globales.*

L'action à gauche de G sur X (resp. G) munit \mathcal{T}_X (resp. \mathcal{T}_G) d'une structure de G -module équivariant (chapitre 1 de [MFK94]). En particulier, le groupe abélien $\Gamma(G, \mathcal{T}_G)$ est un G -module. Le module des dérivations invariantes $\Gamma(G, \mathcal{T}_G)^G$ s'identifie à $Lie(G)$ (II 4 6.5 de [DG70]). La formation de ce module commute donc aux changements de base. D'après II 4 6.3 de [DG70], on dispose d'une application canonique $Lie(G) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{T}_X)$. On en déduit une application canonique $u : \mathcal{O}_X \otimes_V \Gamma(G, \mathcal{T}_G)^G \rightarrow \mathcal{T}_X$.

Dans le cas où la base est un corps algébriquement clos, il est bien connu que u est surjectif et cela résulte du fait que l'action de G sur X est transitive. Rappelons la démonstration dans ce cas. Supposons maintenant que $S = \text{spec } \bar{l}$ où \bar{l} est un corps algébriquement clos. Notons $e = 1_G P$, la fibre $i_e^* \mathcal{T}_X$ est un quotient de $Lie(G)$ d'après II 4.2 de [Jan03]. Il suffit de montrer que u est surjectif au-dessus des points fermés d'après le lemme de Nakayama. Soit $x \in X(\bar{l})$, alors il existe $g \in G(\bar{l})$ tel que $x = gP$. On dispose alors d'opérateurs de translation $\lambda_g : k(x) = \bar{l} \simeq k(e) = \bar{l}$ et $\rho_g : i_x^* \mathcal{T}_X \simeq i_e^* \mathcal{T}_X$, semi-linéaires par rapport aux λ_g tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(G, \mathcal{T}_G)^G & \xrightarrow{u(x)} & i_x^* \mathcal{T}_X \\ \parallel & & \downarrow \rho_g \\ \Gamma(G, \mathcal{T}_G)^G & \xrightarrow{u(e)} & i_e^* \mathcal{T}_X. \end{array}$$

Cela montre que $u(x)$ est surjectif et donc finalement que u est surjectif. Sur une base S générale, il suffit de montrer la surjectivité de u en tout point fermé s de S , d'après le lemme de Nakayama. Soient i_s l'immersion fermée correspondante à s , $k(s)$ le corps résiduel de s et \bar{l} une clôture algébrique de $k(s)$. Après application de i_s^* , l'application u donne une application $u_s : \mathcal{O}_{X_s} \otimes_{k(s)} \Gamma(G_s, \mathcal{T}_{G_s})^{G_s} \rightarrow \mathcal{T}_{X_s}$. Après extension des scalaires à \bar{l} , cette flèche est surjective d'après ce qui précède. Par fidèle platitude de \bar{l} sur $k(s)$, la flèche u_s est surjective et donc u est surjectif.

Dans la sous-section suivante, on explique pourquoi il suffit de montrer le théorème de Beilinson-Bernstein après extension fidèlement plate de la base.

1.8 Changements de base fidèlement plats

Dans cette sous-section, X est un schéma lisse sur S , dont le complété formel est \mathcal{X} . Soit $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ l'un des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^{(m)}$ pour un certain m ou $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbb{Q}}^\dagger$. Soient V' un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $0, p$, qui est une V -algèbre finie fidèlement plate, $S' = \text{spec } V'$, $X' = X \times_S S'$, $\mathcal{S}' = \text{Spf } V'$, $\mathcal{X}' = S' \times_S \mathcal{X}$. On dispose alors de la proposition suivante

Proposition 1.8.1. *Si \mathcal{X}' est $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}$ -affine, alors \mathcal{X} est $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ -affine (resp. si X' est $\mathcal{D}_{X'}$ -affine, alors X est \mathcal{D}_X -affine).*

Démonstration. Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ -module cohérent. Il suffit de montrer qu'il est acyclique pour le foncteur Γ et engendré par ses sections globales comme $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ -module. Le $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}$ -module $V' \otimes_V \mathcal{M}$ est cohérent, donc acyclique pour le foncteur Γ et engendré par ses sections globales. De plus, par platitude du morphisme $V \rightarrow V'$, on a pour tout $n \geq 0$,

$$H^n(\mathcal{X}', V' \otimes_V \mathcal{M}) = V' \otimes_V H^n(\mathcal{X}, \mathcal{M}),$$

de sorte que $\forall n \geq 1$, les groupes $H^n(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ sont nuls. De façon analogue, on a une surjection

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}^\dagger \otimes_{\Gamma(\mathcal{X}', \mathcal{D}_{\mathcal{X}'})} \Gamma(\mathcal{X}, V' \otimes_V \mathcal{M}) \twoheadrightarrow V' \otimes_V \mathcal{M},$$

dont on déduit que \mathcal{M} est engendré par ses sections globales par fidèle platitude de V' sur V . \square

Remarque. On donnera une réciproque à cet énoncé en 2.3.2 en supposant seulement que $V \rightarrow V'$ est fini et plat, pour les espaces homogènes, et plus généralement les schémas vérifiant l'hypothèse (H) de 2.

Passons maintenant à la démonstration du théorème principal.

2 Un critère pour passer du cas algébrique au cas formel

Le théorème d'annulation va provenir d'un énoncé plus général sur des schémas projectifs sur S , sur lesquels le faisceau structural est acyclique et dont le faisceau tangent est engendré par ses sections globales. Il s'agit de donner un critère pour passer d'un énoncé d'acyclicité pour les \mathcal{D} -modules sur un schéma projectif lisse X_K sur un corps p -adique à un tel énoncé d'acyclicité pour les $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ -modules cohérents sur le complété formel d'un modèle entier de X_K . Dans cette partie, on suppose que X est un schéma projectif lisse vérifiant les hypothèses suivantes (H) :

- (i) Le faisceau \mathcal{O}_X est acyclique pour le foncteur Γ .
- (ii) Le faisceau tangent \mathcal{T}_X est engendré par ses sections globales.

Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur X . On note encore \mathcal{L} le faisceau inversible obtenu à partir de \mathcal{L} sur la complétion formelle \mathcal{X} de X et pour n'importe quel symbole \sharp égal à (m) ou \dagger , on introduit comme en 1.5 le faisceau des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\sharp(\mathcal{L})$ à valeurs dans \mathcal{L} défini par $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\sharp(\mathcal{L}) = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\sharp \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1}$.

L'un des points clefs de la démonstration consiste à avoir un résultat de finitude de la torsion des groupes $H^n(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(s))$ pour $s \in \mathbf{Z}$ fixé et $n \geq 1$. Pour cela on utilise les techniques de [Huy97] et les techniques de Kashiwara exposées en 1.4 de [Kas89]. L'idée consiste à donner un critère analogue à celui de Kashiwara, à torsion finie près.

Fixons maintenant un faisceau ample inversible $\mathcal{O}_X(1)$ sur X . Tout \mathcal{O}_X -module cohérent est quotient d'un faisceau du type $\mathcal{O}_X(-r)^a$, avec $a, r \in \mathbf{N}$. De plus, il existe $U \in \mathbf{N}$, tel que

pour tout $u \geq U$, le faisceau $\mathcal{O}_X(u)$ est engendré par ses sections globales au sens où la flèche suivante est surjective

$$\mathcal{O}_X \otimes_V \Gamma(X, \mathcal{O}_X(u)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X(u),$$

et est acyclique pour le foncteur Γ .

Ces propriétés ainsi que les propriétés cohomologiques du faisceau structural \mathcal{O}_X seront essentielles dans ce qui suit. Si \mathcal{E} est un \mathcal{O}_X -module, $\mathcal{E}(s)$ pour $s \in \mathbf{Z}$ désigne

$$\mathcal{E}(s) = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X(1))^{\otimes s}.$$

Soit \mathcal{L} un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang 1 (induisant \mathcal{L} sur X_K et \mathcal{L} sur \mathcal{X}). L'objet de cette section est de montrer le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Soit X un schéma lisse vérifiant les hypothèses (H), \mathcal{X} le schéma formel associé, on a l'énoncé suivant : si X_K est \mathcal{D}_{X_K} -affine (resp. $\mathcal{D}_{X_K}(\mathcal{L})$ -affine), alors \mathcal{X} est $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ -affine (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\mathcal{L})$ -affine).*

Ce théorème sera démontré en 2.3.5 et en 2.3.7. On montrera aussi que les hypothèses entraînent que \mathcal{X} est $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ -affine pour tout entier m . Pour un m fixé, la démonstration repose sur la structure de l'algèbre graduée $\text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)}$ et sur les résultats classiques de la cohomologie des faisceaux cohérents sur un schéma projectif. On remarquera que si \mathcal{L} est un \mathcal{O}_X -module inversible,

$$\text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)}(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{-1},$$

et donc $\text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)}(\mathcal{L}) \simeq \text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)}$ puisque l'algèbre graduée $\text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)}$ est commutative. Grâce à cette remarque, le lecteur se rendra compte que la démonstration du théorème est la même dans le cas de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$) et de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}(\mathcal{L})$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(\mathcal{L})$). Pour éviter d'alourdir les notations, nous ferons la démonstration pour le cas de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$).

2.2 Résultats à un niveau fini

Dans cette partie, m est fixé. Le premier résultat consiste à établir que si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module cohérent, alors $\mathcal{M}(r)$ est acyclique pour le foncteur $\Gamma(X, \cdot)$ pourvu que r soit assez grand. Ce résultat repose sur un résultat analogue pour les modules sur l'algèbre graduée $\text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)}$ et pour les \mathcal{O}_X -modules. Pour l'algèbre graduée $\text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)}$, nous avons en effet la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. *Il existe $r_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall r \geq r_0, \forall n \geq 1, H^n(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)}(r)) = 0$.*

En particulier, pour tous $r \geq r_0, n \geq 1, t \geq 0$, les groupes $H^n(X, \text{gr}_t \mathcal{D}_X^{(m)}(r))$ sont nuls.

Démonstration. D'après (H), il existe une surjection $\mathcal{O}_X^a \rightarrow \mathcal{T}_X$, d'où on déduit (1.4.1) un morphisme surjectif de faisceaux cohérents d'algèbres graduées

$$\mathcal{C} = \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_X^a) \twoheadrightarrow \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X),$$

et cette dernière algèbre graduée s'identifie à l'algèbre graduée $gr_{\bullet} \mathcal{D}_X^{(m)}$ (1.4.2). Il suffit donc de montrer l'assertion pour un \mathcal{C} -module cohérent \mathcal{E} . Comme X est noetherien, et \mathcal{E} est un \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent, \mathcal{E} est limite inductive de ses sous \mathcal{O}_X -modules cohérents \mathcal{E}_i pour $i \in I$. Comme \mathcal{E} est un \mathcal{C} -module cohérent et que le faisceau d'algèbres \mathcal{C} est à sections noetheriennes sur les ouverts affines, il existe une surjection \mathcal{C} -linéaire

$$\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}_i \twoheadrightarrow \mathcal{E},$$

et donc une surjection \mathcal{C} -linéaire

$$\mathcal{C}(s_0)^{a_0} \twoheadrightarrow \mathcal{E},$$

avec $a_0 \in \mathbf{N}$ et $s_0 \in \mathbf{Z}$. Si \mathcal{E} est gradué, on peut faire en sorte que la surjection soit graduée mais cela ne sera pas important ici. Finalement, on peut construire ainsi de proche en proche, une résolution de longueur $N + 1$ de \mathcal{E} par des \mathcal{C} -modules cohérents, du type suivant

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow 0$$

avec

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{C}(s_i)^{a_i},$$

pour $0 \leq i \leq N - 1$, $a_i \in \mathbf{N}$, $s_i \in \mathbf{Z}$. Tensorisons cette résolution par $\mathcal{O}_X(r)$ avec $r \geq r_0 = \max\{U, U - s_i\}_{0 \leq i \leq N-1}$. Les termes d'indice $0, \dots, N - 1$ de cette résolution sont des modules du type $\mathcal{C}(r + s_i)^{a_i}$. Ces modules sont sommes directes de composantes homogènes du type $\mathcal{O}_X(r + s_i)^{b_i}$. D'après notre choix de r_0 et de U , ces modules sont acycliques pour le foncteur $\Gamma(X, \cdot)$. On utilise alors l'énoncé suivant : si un \mathcal{C} -module cohérent \mathcal{E} admet une résolution de longueur $\geq N + 1$,

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}_{N-1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow 0,$$

par des \mathcal{C} -modules cohérents, telle que pour un entier $0 \leq i \leq N - 1$, les modules $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_i$ sont acycliques pour le foncteur $\Gamma(X, \cdot)$, alors, pour tout $N - i \leq n \leq N$, $H^n(X, \mathcal{E}) = 0$. En effet, on dispose d'une suite spectrale bi-régulière associée à cette résolution

$$H^j(X, \mathcal{E}_t) \implies H^{j-t}(X, \mathcal{E}),$$

et, par hypothèse, pour $n \geq N - i$, les seuls termes $H^j(X, \mathcal{E}_t)$ intervenant dans le gradué de la filtration sur $H^n(X, \mathcal{E})$ vont correspondre à des valeurs de $t \leq i$ et $j \geq 1$, pour lesquelles les groupes $H^{j-t}(X, \mathcal{E})$ sont nuls. Si bien que l'aboutissement $H^n(X, \mathcal{E})$ est égal à 0 pour $N - i \leq n \leq N$. \square

On en déduit le corollaire

Corollaire 2.2.2. (i) $\forall r \geq r_0, \forall n \geq 1, \forall t \geq 0, H^n(X, \mathcal{D}_{X,t}^{(m)}(r)) = 0,$

(ii) $\forall r \geq r_0, \forall n \geq 1, H^n(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(r)) = 0,$

(iii) Pour tout $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module cohérent \mathcal{M} , il existe $r_1 \in \mathbf{N}$, tel que $\forall r \geq r_1, \forall n \geq 1,$
 $H^n(X, \mathcal{M}(r)) = 0.$

Démonstration. Le (ii) résulte du (i) par passage à la limite inductive. On montre le (i) par récurrence sur t . Pour $t = 0$, $\mathcal{D}_{X,0}^{(m)}(r) = \mathcal{O}_X(r)$, qui est acyclique pour le foncteur Γ car $r \geq r_0 \geq U$. Pour tout $t \geq 1$, et tout $r \geq r_0$, on dispose de suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \mathcal{D}_{X,t-1}^{(m)}(r) \rightarrow \mathcal{D}_{X,t}^{(m)}(r) \rightarrow \mathrm{gr}_t \mathcal{D}_X^{(m)}(r) \rightarrow 0.$$

Comme le faisceau $\mathrm{gr}_t \mathcal{D}_X^{(m)}(r)$ est acyclique pour Γ d'après la proposition précédente, on voit par récurrence sur t qu'il en est de même pour les faisceaux $\mathcal{D}_{X,t}^{(m)}(r)$ après application de la suite exacte longue de cohomologie pour Γ .

Pour le (iii), on remarque, en procédant comme en 2.2.1, que \mathcal{M} admet une résolution du type suivant

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_N \rightarrow \mathcal{E}_{N-1} \rightarrow \dots \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow 0$$

avec

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{D}_X^{(m)}(s_i)^{a_i},$$

pour $0 \leq i \leq N-1$ et $s_i \in \mathbf{Z}$. Tensorisons cette résolution par $\mathcal{O}_X(r_1)$ avec $r_1 = \max\{r_0 + s_i\}_{0 \leq i \leq N-1}$. On voit que le (iii) résulte du (ii) en utilisant le même argument de suite spectrale qu'en 2.2.1. \square

Dans la suite de cette sous-section, on se place sous les hypothèses du théorème et on suppose que X_K est \mathcal{D}_{X_K} -affine.

Le point clé de la démonstration est le résultat suivant, qui concerne la cohomologie des faisceaux $\mathcal{D}_X^{(m)}(s)$ pour $s \in \mathbf{Z}$.

Proposition 2.2.3. *Soit $s \in \mathbf{Z}$. Alors $\forall n \geq 1$, $H^n(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(s))$ est un groupe de torsion finie.*

Démonstration. Le faisceau $\mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}}^{(m)}(s)$ est un \mathcal{D}_{X_K} -module cohérent, donc pour $n \geq 1$ les groupes $H^n(X_K, \mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}}^{(m)}(s))$ sont nuls par hypothèse, et sont égaux à $H^n(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(s)) \otimes_V K$, par commutation de la cohomologie à la limite inductive, de sorte que les groupes $H^n(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(s))$ sont de torsion pour $n \geq 1$. Pour voir que la torsion est finie, on s'inspire des arguments de 1.4 [Kas89].

Fixons $u \geq \max\{r_0 - s, U\}$. Commençons par remarquer qu'on a une section $\tilde{\tau}$, $\mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}}$ -linéaire à gauche, à la surjection canonique $\tilde{\sigma}$

$$\mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_K}} \mathcal{O}_{X_K}(-u) \otimes_K \Gamma(X, \mathcal{O}_X(u)) \xrightarrow[\tilde{\tau}]{\tilde{\sigma}} \mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}}.$$

On part en effet de la surjection canonique

$$\mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}} \otimes_K \Gamma(X_K, \mathcal{O}_{X_K}(u)) \twoheadrightarrow \mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_K}} \mathcal{O}_{X_K}(u).$$

Comme le foncteur Γ est exact sur la catégorie des $\mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}}$ -modules cohérents, on trouve une surjection

$$\Gamma(X, \mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}}(-u)) \otimes_K \Gamma(X, \mathcal{O}_{X_K}(u)) \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}}),$$

dont on trouve une section $\tilde{\tau}$, $\mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}}$ -linéaire à gauche, en relevant $1 \in \Gamma(X, \mathcal{D}_{X,\mathbf{Q}})$. Observons maintenant qu'il existe $i \in \mathbf{N}$ tel que $\pi^i \tilde{\tau}(1) \in \Gamma(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(-u)) \otimes_V \Gamma(X, \mathcal{O}_X(u))$. Définissons $\bar{\tau}$ comme l'unique application $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire $\mathcal{D}_X^{(m)} \rightarrow \mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-u) \otimes_V \Gamma(X, \mathcal{O}_X(u))$ définie par $\bar{\tau}(1) = \pi^i \tilde{\tau}(1)$. En particulier, le conoyau de l'application suivante $\tilde{\sigma}_m$ est annulé par π^i

$$\mathcal{D}_X^{(m)} \otimes_V \Gamma(X, \mathcal{O}_X(u)) \rightarrow \mathcal{D}_X^{(m)}(u).$$

Par construction, on a alors

$$\tilde{\sigma}_m \circ \bar{\tau}_m = \pi^i \text{id}_{\mathcal{D}_X^{(m)}}.$$

En dualisant (après application de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X^{(m)}}(\cdot, \mathcal{D}_X^{(m)})$) et en tensorisant par $\mathcal{O}_X(s)$, on trouve le diagramme suivant de $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -modules à droite

$$\mathcal{D}_X^{(m)}(s) \begin{array}{c} \xrightarrow{\sigma_m} \\ \xleftarrow{\tau_m} \end{array} \mathcal{D}_X^{(m)}(u+s) \otimes_V \Gamma(X, \mathcal{O}_X(u))^*,$$

et on a la relation

$$\tau_m \circ \sigma_m = \pi^i \text{id}_{\mathcal{D}_X^{(m)}(s)}.$$

Considérons maintenant le diagramme commutatif suivant, pour $n \geq 1$, $t \geq 0$,

$$\begin{array}{ccc} H^n(X, \mathcal{D}_{X,t}^{(m)}(s)) & \longrightarrow & H^n(X, \mathcal{D}_{X,t}^{(m)}(u+s) \otimes_V \Gamma(X, \mathcal{O}_X(u))^*) \\ a_t \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ H^n(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(s)) & \xrightarrow{b} & H^n(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(u+s) \otimes_V \Gamma(X, \mathcal{O}_X(u))^*), \end{array}$$

avec $b = H^n \circ \sigma_m$. Posons aussi $c = H^n \circ \tau_m$, de sorte que

$$c \circ b = \pi^i \text{id}_{H^n(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(s))}.$$

On a choisi u pour que les deux termes de la colonne de droite du diagramme soient nuls, ce qui implique que $b \circ a_t = 0$ et donc, en composant avec c , que $\pi^i a_t = 0$. En passant à la limite inductive sur t , cela nous donne que, pour $n \geq 1$ fixé, $\pi^i H^n(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(s)) = 0$ et donc l'énoncé de la proposition. \square

On en tire le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.4. *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -module cohérent, alors $\forall n \geq 1$, $H^n(X, \mathcal{M})$ est de torsion finie.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{D}_X^{(m)}$ est à sections noetheriennes sur les affines, on peut procéder comme en 2.2.1 et \mathcal{M} admet une résolution $\mathcal{D}_X^{(m)}$ -linéaire de longueur $\geq N$ par des modules sommes directe de modules du type $\mathcal{D}_X^{(m)}(s)$. En procédant comme en 2.2.1 et en utilisant le même argument de suite spectrale, on voit que les groupes $H^n(X, \mathcal{M})$ sont de torsion finie pour $n \geq 1$. \square

Contrairement aux résultats de la partie 4 de [Huy97], nous ne pouvons pas donner d'énoncé de finitude des sections globales de $\mathcal{D}_X^{(m)}$. Cela vient du fait qu'on ne sait pas si $\Gamma(X, \text{gr}_\bullet \mathcal{D}_X^{(m)})$ est finie sur $\text{gr}_\bullet \Gamma(X, \mathcal{D}_X^{(m)})$ en général. Sous les hypothèses (H), on a le résultat de finitude suivant sur la cohomologie des $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X)$ -modules. Reprenons les notations de 2.2.1.

Proposition 2.2.5. *L'algèbre $\Gamma(X, \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X))$ est noetherienne. De plus, si \mathcal{E} est un $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X)$ -module cohérent, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le module $H^n(X, \mathcal{E})$ est de type fini sur $\Gamma(X, \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X))$.*

Démonstration. Fixons un plongement projectif $i' : X \hookrightarrow Y = \mathbf{P}_V^N$ tel que $\mathcal{O}_X(1) = i'^* \mathcal{O}_Y(1)$. Par hypothèse (H), le faisceau $\mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X)$ est un \mathcal{C} -module cohérent. Posons $\mathcal{C}' = \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{O}_Y^a)$. Alors le faisceau $i'_* \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X)$ est un \mathcal{C}' -module cohérent. Le morphisme i' est fini, de sorte qu'il suffit de montrer que $\mathcal{C}' = \Gamma(Y, \mathcal{C}')$ est une algèbre noetherienne et que si \mathcal{F} est un \mathcal{C}' -module cohérent, les modules $H^n(Y, \mathcal{F})$ sont de type fini sur \mathcal{C}' . Remarquons que $\mathcal{C}' = \mathbf{S}^{(m)}(V^a)$ est une V -algèbre de type fini (1.4) et est donc noetherienne. Par le même argument de suite spectrale et d'existence de résolutions particulières que celui qui est utilisé en 2.2.1, il suffit de montrer que les modules $H^n(Y, \mathcal{C}'(s))$ sont de type fini sur \mathcal{C}' pour tout $s \in \mathbf{Z}$ et tout $n \in \mathbf{N}$. Or, par commutation de la cohomologie à la limite inductive, on a

$$H^n(Y, \mathcal{C}'(s)) \simeq \mathcal{C}' \otimes_V H^n(Y, \mathcal{O}_Y(s)).$$

Comme les groupes $H^n(Y, \mathcal{O}_Y(s))$ sont des V -modules de type fini, cela donne le fait que les \mathcal{C}' -modules $H^n(Y, \mathcal{F})$ sont de type fini pour tout \mathcal{C}' -module cohérent \mathcal{F} . C'est en particulier le cas pour $\Gamma(X, \mathbf{S}^{(m)}(\mathcal{T}_X))$, qui est donc une algèbre noetherienne. \square

Il s'agit désormais de passer au cas du schéma formel \mathcal{X} .

2.3 Passage au schéma formel

On suppose dans toute cette sous-section que X est un S -schéma vérifiant l'hypothèse (H). On commence par montrer que la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -modules cohérents est engendrée par les modules du type $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(-r)$ pour $r \in \mathbf{Z}$. Cela correspond à la proposition 3.5 de [Huy97]. La démonstration est identique et suit de 2.2.2.

Proposition 2.3.1. *Soit \mathcal{M} un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module cohérent (resp. un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ -module cohérent).*

- (i) *Il existe $r_2 \in \mathbf{N}$, tel que $\forall r \geq r_2, \forall n \geq 1, H^n(X, \mathcal{M}(r)) = 0$.*
- (ii) *Il existe $(a, r) \in \mathbf{N}^2$ et une surjection $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -linéaire $\left(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(-r)\right)^a \rightarrow \mathcal{M}$ (resp. $(a, b, r, s) \in \mathbf{N}^4$ et une résolution à 2 termes $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ -linéaire $\left(\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(-s)\right)^b \rightarrow \left(\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger(-r)\right)^a \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0$).*

Comme corollaire, on en déduit une réciproque à 1.8.1. Reprenons les notations de cet énoncé en supposant seulement que le morphisme $V \rightarrow V'$ est fini et plat. Alors, on a

Corollaire 2.3.2. *Si \mathcal{X} est $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ -affine, \mathcal{X}' est $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}$ -affine.*

Démonstration. Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}$ -module cohérent. Il est clair que X' vérifie (H). Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}$ -module cohérent. Ce module admet une résolution de longueur arbitrairement grande par

des modules du type $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}(-r)^a$. Par le même argument de suite spectrale qu'en 2.2.1, il suffit de montrer que les modules $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}(-r)$ sont acycliques pour Γ pour vérifier qu'il en est de même pour \mathcal{M} . Or, $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}(-r) = V' \otimes_V \mathcal{D}_{\mathcal{X}}(-r)$, et comme $V \rightarrow V'$ est plat, on a, pour tout $n \geq 0$,

$$H^n(\mathcal{X}', \mathcal{D}_{\mathcal{X}'}(-r)) = V' \otimes_V H^n(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}(-r)),$$

d'où l'énoncé d'acyclicité. De plus, le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}(-r)$ qui est obtenu par changement de base à partir de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}(-r)$, est engendré par ses sections globales comme $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}$ -module. Comme le foncteur Γ est exact pour les $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}$ -modules cohérents, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\mathcal{X}'} \otimes_{\Gamma(\mathcal{X}', \mathcal{D}_{\mathcal{X}'})} \Gamma(\mathcal{X}', \mathcal{D}_{\mathcal{X}'}(-r)^a) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathcal{X}'} \otimes_{\Gamma(\mathcal{X}', \mathcal{D}_{\mathcal{X}'})} \Gamma(\mathcal{X}', \mathcal{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}_{\mathcal{X}'}(-r)^a & \longrightarrow & \mathcal{M}, \end{array}$$

qui montre que \mathcal{M} est engendré par ses sections globales comme $\mathcal{D}_{\mathcal{X}'}$ -module. \square

A partir de maintenant, dans tout le reste de cette sous-section, on suppose que X_K est \mathcal{D}_{X_K} -affine. Grâce à la proposition précédente 2.3.1, on est ramené à contrôler les groupes $H^n(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(s))$, en vue de l'énoncé d'acyclicité. Dans la partie 3. de [Huy97], on utilise le fait que les groupes $H^n(X, \mathcal{D}_X^{(m)}(s))$ sont des V -modules de type fini de torsion pour $n \geq 1$ et $s \in \mathbf{Z}$. La différence ici est que l'on n'a pas de propriétés de finitude sur V , mais on sait que ces groupes sont de torsion finie d'après 2.2.3. Cependant, le lecteur pourra vérifier que dans la partie 3 de [Huy97], seule la finitude de la torsion des groupes $H^n(X, \mathcal{M})$ est utilisée. Cette propriété permet de vérifier des conditions de Mittag-Leffler pour les groupes de cohomologie $H^n(X_i, \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}(s))$ pour i variable, et permettent des passages à la limite pour la cohomologie. Le résultat suivant se démontre comme la proposition 3.2 de [Huy97] compte tenu de 2.2.3.

Proposition 2.3.3. *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module cohérent et $\widehat{\mathcal{M}} = \varprojlim_i \mathcal{M}/\pi^{i+1}\mathcal{M}$. Alors*

- (i) $\forall n \in \mathbf{N}$, $H^n(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{M}}) = \varprojlim_i H^n(X_i, \mathcal{M}/\pi^{i+1}\mathcal{M})$,
- (ii) $\forall n \geq 1$, $H^n(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{M}}) = H^n(X, \mathcal{M})$.

En particulier, pour $n \geq 1$, $H^n(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{M}})$ est un V -module de torsion finie.

A partir du (ii) de la proposition 2.3.1, on peut procéder comme pour 2.2.4, ce qui donne le résultat de finitude suivant

Proposition 2.3.4. *Soit \mathcal{M} un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module cohérent, alors pour tout $n \geq 1$, les groupes $H^n(\mathcal{X}, \mathcal{M})$ sont de torsion finie.*

Donnons les conséquences de ces résultats pour les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ -modules cohérents. Soit \mathcal{N} un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent. Comme l'espace topologique associé à \mathcal{X} est noetherien, il existe d'après 3.4.5 de [Ber96] un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ -module cohérent \mathcal{M} tel que $\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes_V K$. Soit maintenant \mathcal{N} est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$ -module cohérent, d'après 3.6.2 de [Ber96], il existe un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent \mathcal{N}_0 tel que

$$\mathcal{N} \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}} \mathcal{N}_0.$$

Comme la cohomologie commute à la limite inductive sur \mathcal{X} , les deux propositions précédentes nous permettent de montrer les énoncés suivants, en procédant comme en 3.5 de [Huy97] et montrent la partie « acyclicité » de 2.1.

Proposition 2.3.5. *Soit \mathcal{N} un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent (resp. un $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger$ -module cohérent), alors $\forall n \geq 1, H^n(X, \mathcal{N}) = 0$,*

Indiquons comment passer à des énoncés de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$ -affinité (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger$ -affinité). Fixons $u \geq \max\{r_0, U\}$ et reprenons les applications τ_m et σ_m pour $s = 0$ construites lors de la démonstration de 2.2.3. Complétons ces applications, tensorisons par $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(-u)$ et inversons π , cela nous donne un diagramme

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(-u) \underset{\widehat{\tau}_m}{\overset{\widehat{\sigma}_m}{\rightleftarrows}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)} \otimes_V \Gamma(X, \mathcal{O}_X(u))^*,$$

et l'application $s_m = \pi^{-i}\widehat{\tau}_m$ est une section $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$ -linéaire de $\widehat{\sigma}_m$. On obtient une surjection $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$ -linéaire $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)} \otimes_V \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(u))^* \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}(-u)$. En utilisant la proposition 2.3.1, on trouve ainsi l'énoncé

Proposition 2.3.6. *Soit \mathcal{N} un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$ -module cohérent (resp. un $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger$ -module cohérent), alors il existe une résolution à deux termes $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$ -linéaire (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger$ -linéaire) du type suivant*

$$\left(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)b} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)a} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0 \quad \left(\text{resp. } \left(\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger \right)^b \rightarrow \left(\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger \right)^a \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow 0 \right) \right).$$

A partir de maintenant, \mathcal{D} désigne l'un des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^{(m)}$ ou $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbf{Q}}^\dagger$, $D = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D})$. Le corollaire suivant achève la démonstration du théorème.

Corollaire 2.3.7. *Les foncteurs $\Gamma(\mathcal{X}, \cdot)$ et $\mathcal{D} \otimes_D \cdot$ sont quasi-inverses et induisent une équivalence de catégories entre la catégorie des D -modules à gauche de présentation finie et la catégorie des \mathcal{D} -modules à gauche cohérents.*

Soit M un D -module de présentation finie et

$$D^a \rightarrow D^b \rightarrow M \rightarrow 0$$

une présentation de M . En tensorisant cette présentation par \mathcal{D} , on trouve une présentation

$$\mathcal{D}^b \rightarrow \mathcal{D}^a \rightarrow \mathcal{D} \otimes_D M \rightarrow 0.$$

En particulier, le module $\mathcal{D} \otimes_D M$ est cohérent comme \mathcal{D} -module à gauche. Par acyclicité du foncteur $\Gamma(\mathcal{X}, \cdot)$ pour les \mathcal{D} -modules cohérents, on trouve un diagramme dont les deux carrés sont commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^b) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}^a) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D} \otimes_D M) & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \uparrow g_M & & \\ \mathcal{D}^a & \longrightarrow & \mathcal{D}^b & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Cela nous indique que la flèche g_M est un isomorphisme.

Partons maintenant d'un \mathcal{D} -module cohérent \mathcal{M} . D'après la proposition précédente 2.3.6, il existe une résolution

$$\mathcal{D}^b \rightarrow \mathcal{D}^a \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0.$$

Comme le foncteur Γ est exact, on peut procéder comme précédemment pour voir que la flèche canonique $\mathcal{D} \otimes_D \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ est un isomorphisme.

Une première application de ce résultat est que l'on peut donner des propriétés de finitude des algèbres de sections globales des faisceaux d'opérateurs différentiels $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$.

2.4 Structure des algèbres de sections globales

On garde les notations de 2.3.7, en supposant toujours que X vérifie (H) et que X_K est \mathcal{D}_{X_K} -affine. On a la proposition.

Proposition 2.4.1. *Le faisceau \mathcal{D} est un faisceau de D -modules plats à gauche.*

Démonstration. Soit I un idéal à gauche de présentation finie. Partons d'une suite exacte de D -modules à gauche de présentation finie

$$0 \rightarrow I \rightarrow D \rightarrow D/I \rightarrow 0, .$$

On en déduit un complexe exact de \mathcal{D} -modules à gauche cohérents, puisque le faisceau \mathcal{D} est cohérent

$$0 \rightarrow \text{Tor}_D^1(\mathcal{D}, D/I) \rightarrow \mathcal{D} \otimes_D I \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{D}I \rightarrow 0.$$

On peut donc appliquer le foncteur exact Γ , ce qui donne un diagramme dont tous les carrés sont commutatifs

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{X}, \text{Tor}_D^1(\mathcal{D}, D/I)) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D} \otimes_D I) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}/\mathcal{D}I) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & D & \longrightarrow & D/I & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

et dont les 3 dernières flèches verticales sont des isomorphismes en vertu de 2.3.7. On en déduit que $\Gamma(\mathcal{X}, \text{Tor}_D^1(\mathcal{D}, D/I)) = 0$ et, donc que $\text{Tor}_D^1(\mathcal{D}, D/I) = 0$ puisque ce module est cohérent. Supposons maintenant que I est un idéal à gauche de type fini, alors il existe des idéaux à gauche de présentation finie, $\{I_i\}_{i \in \Omega}$ formant un système inductif et tel que

$$I = \varinjlim_i I_i.$$

Comme le foncteur $\text{Tor}_D^1(\mathcal{D}, \cdot)$ commute à la limite inductive et que

$$D/I = \varinjlim_i D/I_i,$$

on trouve

$$\mathrm{Tor}_D^1(\mathcal{D}, D/I) = \varinjlim_i \mathrm{Tor}_D^1(\mathcal{D}, D/I_i) = 0,$$

ce qui donne l'énoncé. \square

A partir des propriétés de finitude des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger$, on a l'énoncé suivant pour les schémas \mathcal{X} vérifiant les hypothèses du début de la section.

Théorème 2.4.2. (i) *La V -algèbre $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)})$ est une V -algèbre complète noethérienne à gauche.*

(ii) *La V -algèbre $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger)$ est une V -algèbre faiblement complète cohérente à gauche.*

Démonstration. Compte tenu de 2.3.3, $\Gamma(X, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ est obtenu comme complété de $\Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)})$, de sorte que $\Gamma(X, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)})$ est une K -algèbre de Banach. L'algèbre $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger)$ est limite inductive (sur m) des algèbres $\Gamma(X, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ et est donc faiblement complète, tout comme $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger)$. Montrons maintenant la noetherianité de $\Gamma(X, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)})$. Notons comme précédemment $D = \Gamma(X, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)})$ et $\mathcal{D} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$. Soit I un idéal de D et $\{I_i\}_{i \in \Omega}$ un système inductif d'idéaux de présentation finie de D tels que

$$I = \varinjlim_i I_i.$$

introduisons $\mathcal{I}_i = \mathcal{D} \otimes_D I_i \subset \mathcal{D}$, qui forment une suite croissante d'idéaux d'après l'énoncé de platitude 2.4.1 précédent. Comme le faisceau \mathcal{D} est à sections noethériennes sur les affines, il existe $i_0 \in \Omega$ tel que $\mathcal{I}_{i_0} = \mathcal{I}_j$ pour tout $j \geq i_0$. Ce qui donne, en appliquant de nouveau 2.3.7 $I_{i_0} = I_j$ pour tout $j \geq i_0$, et donc $I = I_0$ est de présentation finie et en particulier de type fini. En ce qui concerne (ii), considérons un idéal I de type fini de $D = \Gamma(X, \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^\dagger)$, et J le noyau d'une surjection $D^a \rightarrow I$. Ecrivons

$$J = \varinjlim_i J_i,$$

où $\{J_i\}_{i \in \Omega}$ est un système inductif de D -modules à gauche de type fini. En tensorisant par \mathcal{D} , en notant $\mathcal{J}_i = \mathcal{D} \otimes_D J_i$ (resp. $\mathcal{J} = \mathcal{D} \otimes_D J$), on trouve une suite exacte de faisceaux de D -modules à gauche

$$0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{D}^a \rightarrow \mathcal{D} \otimes_D I \rightarrow 0.$$

Comme le faisceau \mathcal{D} est cohérent sur les ouverts affines, il existe $i_0 \in \Omega$ tel que $\forall j \geq i_0$, $\mathcal{J}_j = \mathcal{J}_{i_0}$. On conclut par les mêmes arguments que précédemment que $J = J_{i_0}$, de sorte que I est de présentation finie. \square

Remarque : cet énoncé permet de voir que si I est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}$ -module de type fini, alors $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)} \otimes_D I) \simeq I$ dans 2.3.7.

3 Le théorème de Beilinson-Bernstein arithmétique

Tout est désormais en place pour le théorème principal de cet article. Reprenons les notations de 1. Le théorème de Kempf de 1.6.4.2, ainsi que 1.7.1 entraînent que X vérifie

l'hypothèse (H). Soit $\lambda \in X(T)$ et ρ la demi-somme des racines positives de G . Si $\lambda + \rho$ est dominant, le poids correspondant de l'algèbre de Lie $d\lambda + d\rho$ est dominant (1.6.2). Soit $\mathcal{L}(\lambda)$ le faisceau inversible associé à λ . On peut donc appliquer le théorème principal de [BB81] et X est $\mathcal{D}_{X, \mathbf{Q}}(\mathcal{L}(\lambda))$ -affine. Pour simplifier les notations, nous noterons dans la suite $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}(\lambda) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}(\mathcal{L}(\lambda))$ (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger}(\lambda) = \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger}(\mathcal{L}(\lambda))$). Appliquons 2.1. On obtient :

Théorème 3.1. *Soit $\lambda \in X(T)$ tel que $\lambda + \rho$ est dominant et régulier, alors \mathcal{X} est $\mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger}(\lambda)$ -affine (resp. $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}(\lambda)$ -affine pour tout entier m).*

On obtient de plus les résultats suivants sur les algèbres de sections globales sous les hypothèses du théorème précédent.

Théorème 3.2. (i) *Pour tout entier m , la V -algèbre $\Gamma(\mathcal{X}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{(m)}(\lambda))$ est une V -algèbre complète noetherienne à gauche.*

(ii) *La V -algèbre $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}, \mathbf{Q}}^{\dagger}(\lambda))$ est une V -algèbre faiblement complète cohérente à gauche.*

Références

- [A. 67] A. Grothendieck and J. Dieudonné. Éléments de Géométrie Algébrique, étude locale des schémas et des morphismes de schémas, 4e partie. *Publ. Math. I.H.E.S.*, 32, 1967.
- [BB81] A. Beilinson and J. Bernstein. Localisation de \mathcal{G} -modules. *Comptes-rendus Acad. Sc.*, 292, p. 15–18, 1981.
- [Ber96] P. Berthelot. \mathcal{D} -modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 29, p.185–272, 1996.
- [BK80] Jean-Luc Brylinski and Masaki Kashiwara. Démonstration de la conjecture de Kazhdan-Lusztig sur les modules de Verma. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 291(6) :373–376, 1980.
- [BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud. *Néron models*, volume 21 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [BMR04] Roman Bezrukavnikov, Ivan Mirkovic, and Dmitriy Rumynin. Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic. *arXiv :math/0205144v8*, 2004.
- [Bou68] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1337. Hermann, Paris, 1968.
- [DG70] Michel Demazure and Pierre Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*. Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970. Avec un appendice *Corps de classes local* par Michiel Hazewinkel.

- [Haa87] B. Haastert. *Über Differentialoperatoren und D -Moduln in positiver Charakteristik*. *Manuscripta Mathematica*, 58, p. 385–415, 1987.
- [Huy97] C. Huyghe. \mathcal{D}^\dagger -affinité de l'espace projectif, avec un appendice de P. Berthelot. *Compositio Mathematica*, 108, No. 3, p. 277–318, 1997.
- [Jan03] Jens Carsten Jantzen. *Representations of algebraic groups*, volume 107 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2003.
- [Kas89] Masaki Kashiwara. Representation theory and D -modules on flag varieties. *Astérisque*, 173-174 :9, 55–109, 1989. Orbites unipotentes et représentations, III.
- [KL79] David Kazhdan and George Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.*, 53(2) :165–184, 1979.
- [KL02] Masaki Kashiwara and Niels Lauritzen. Local cohomology and D -affinity in positive characteristic. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(12) :993–996, 2002.
- [MFK94] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory*, volume 34 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) [Results in Mathematics and Related Areas (2)]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1994.

Christine Noot-Huyghe

IRMA

Université Louis Pasteur

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG cedex FRANCE

mél huyghe@math.u-strasbg.fr, <http://www-irma.u-strasbg.fr/~huyghe>