



**HAL**  
open science

## Diviseurs des nombres ellipsépiques

Sylvain Col

► **To cite this version:**

| Sylvain Col. Diviseurs des nombres ellipsépiques. 2006. hal-00143713

**HAL Id: hal-00143713**

**<https://hal.science/hal-00143713v1>**

Preprint submitted on 26 Apr 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# DIVISEURS DES NOMBRES ELLIPSÉPHIQUES

SYLVAIN COL

RÉSUMÉ. Les propriétés multiplicatives des nombres ellipséphiques peuvent être obtenue à l'aide des moments de la série génératrice de cette suite. Nous donnons des estimations précises pour les grands moments de deux méthodes distinctes : l'une combinatoire fournit un résultat précis dans le cas réputé le plus difficile des nombres n'utilisant que les 0 et les 1 ; la seconde purement analytique fournit un résultat sans condition sur les chiffres.

## 1. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

Soient  $r \geq 3$  un entier et  $\mathcal{D}$  un sous-ensemble strict de  $\{0, \dots, r-1\}$  dont nous notons  $t := \#\mathcal{D}$  le cardinal. Nous supposons

$$2 \leq t \leq r-1 \quad (1)$$

et nous posons

$$\rho := \frac{\log t}{\log r} \in ]0, 1[. \quad (2)$$

Nous désignons par  $W_{\mathcal{D}}$  l'ensemble des nombres ellipséphiques :

$$W_{\mathcal{D}} := \left\{ \sum d_j r^j / \forall j, d_j \in \mathcal{D} \right\} \quad (3)$$

où toutes les sommes sur  $j$  sont finies. Nous noterons aussi

$$W_{\mathcal{D}}(x) := \{n \in W_{\mathcal{D}}, n < x\}, \quad (4)$$

$$W_{\mathcal{D}}(x, a, q) := \{n \in W_{\mathcal{D}}, n < x, n \equiv a \pmod{q}\}. \quad (5)$$

Différentes propriétés multiplicatives de ces entiers ont déjà été étudiées par P. Erdős, C. Mauduit et A. Sárközy [4, 5], C. Dartyge et C. Mauduit [2, 3], S. Konyagin [7] et W. D. Banks et I. E. Shparlinkski [1]. En particulier, dans [2], C. Dartyge et C. Mauduit montrent que l'étude de certains problèmes multiplicatifs se ramène à une majoration suffisamment fine de la norme  $L^1$  sur le cercle unité de la fonction génératrice des entiers ellipséphiques. Nous notons comme eux

$$G_{\mathcal{D}, N}(z) := \frac{1}{t^N} \sum_{n \in W_{\mathcal{D}}(r^N)} e(nz) = \prod_{0 \leq k < N} \mathcal{U}_{\mathcal{D}}(r^k z), \quad (6)$$

où  $e(z) := e^{2i\pi z}$ , et

$$\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(z) := \frac{1}{t} \sum_{d \in \mathcal{D}} e(dz). \quad (7)$$

Grâce à [4, théorème 4], nous savons que, si  $k$  est un entier assez grand, il existe beaucoup d'entiers ellipséphiques non divisibles par la puissance  $k$  d'un nombre premier vérifiant  $(p, r(r-1)) = 1$  :

**Théorème A.** *Si  $k > 1/\rho$ , il existe une constante  $c > 0$  (ne dépendant que de  $r$  et de  $k$ ) telle que*

$$\begin{aligned} & \#\{n \in W_{\mathcal{D}}(x) \mid (p, r(r-1)) = 1 \Rightarrow p^k \nmid n\} \\ &= \#W_{\mathcal{D}}(x) \prod_{p \nmid r(r-1)} (1 - p^{-k}) \left( 1 + O\left( \exp\left\{ -c\left(\rho - \frac{1}{k}\right) \log^{1/2} x \right\} \right) \right). \end{aligned}$$

Un résultat similaire avait déjà été montré par M. Filaseta et S. Konyagin dans [6].

Inversement, en autorisant suffisamment de chiffres pour que  $\rho > \frac{3}{4}$  (en base dix, nous devons prendre au moins 6 chiffres), [4, Théorème 5] montre également l'existence d'entiers ellipséphiens possédant un grand facteur carré :

**Théorème B.** *Si  $k < 1/(2(1-\rho))$ , alors il existe des entiers  $n$  dans  $W_{\mathcal{D}}(r^N)$  divisibles par la puissance  $k$  d'un nombre premier  $p$  avec*

$$p \gg_{k,r} \left( \frac{N^{\rho/2}}{\log N} \right)^{\frac{1}{(2k-1)}}.$$

Pour tout réel  $m \geq 1$ , nous définissons  $K_m$  par

$$K_m := \limsup_{N \rightarrow \infty} \| |G_{\mathcal{D},N}|^m \|_1^{\frac{1}{N}}. \quad (8)$$

Majorer les réels  $K_m$  est fondamental pour de nombreux problèmes concernant les entiers ellipséphiens. Par exemple, le Théorème 1 de [2] fournit un analogue du théorème de Bombieri-Vinogradov si nous pouvons trouver un  $m$  tel que  $K_m < r^{-\frac{1}{2}}$ .

Dans un premier temps nous traitons le cas  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$  qui est réputé le plus difficile, et peut-être le plus intéressant. En effet, moins  $\mathcal{D}$  comporte de chiffre, plus la famille  $W_{\mathcal{D}}$  est rare.

**Théorème 1.** *Si  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$  et  $m = 2l$  est un entier pair, on a*

$$\frac{1}{r} \leq K_{2l} \leq \frac{1}{r} + 2^{-2l} \binom{2l}{l} < \frac{1}{r} + \frac{1}{\sqrt{\pi l}}. \quad (9)$$

La démonstration du Théorème 1 est essentiellement combinatoire. Dans le cas général, nous devons mettre à profit un effet de périodicité sur les fonctions  $G_{\mathcal{D},N}$  définies par (6) pour majorer  $K_m$  :

**Théorème 2.** *Supposons que  $\text{pgcd } \mathcal{D} = 1$  et  $0 \in \mathcal{D}$  et qu'il existe une constante  $A > 0$  telle que, pour tout  $x$  réel, il existe  $d_1$  et  $d_2 \in \mathcal{D}$  vérifiant*

$$\|(d_1 - d_2)x\| \geq A\|x\|. \quad (10)$$

Alors, pour tout réel  $m \geq 1$ , nous avons

$$\frac{1}{r} \leq K_m < \frac{1}{r} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{t}}{A\sqrt{m}}. \quad (11)$$

*Remarque 1.* Si  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ , la constante  $A := 1$  est clairement admissible. La majoration (11) fournit  $K_m < \frac{1}{r} + \sqrt{\frac{\pi}{4m}}$ . Le second terme de (9), résultat d'une étude approfondie du cas particulier  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ , est donc plus précis que celui de (11) d'un facteur  $\frac{\pi}{\sqrt{8}}$ .

*Remarque 2.* Les résultats des Théorèmes 1 et 2 sont intéressants lorsque  $m$  est très grand : nous pouvons alors choisir  $K_m$  aussi proche de  $\frac{1}{r}$  que l'on désire.

Le Théorème 2 nécessite la détermination d'une constante  $A$  adéquate. Le Lemme 1 de [4] fournit la valeur admissible  $A := \frac{1}{2(r-1)^2}$ . En reprenant la démonstration de [4] et en procédant à quelques optimisations, nous améliorons ce résultat :

**Théorème 3.** Soit  $\mathcal{D}$  tel que  $\text{pgcd } \mathcal{D} = 1$ . Notons  $\delta$  (resp.  $\Delta$ ) le plus petit (resp. grand) élément strictement positif de  $\mathcal{D} - \mathcal{D}$ . Dans le Théorème 2, nous pouvons choisir

$$A := \frac{2}{\delta + \Delta} > \frac{1}{r - 1}. \quad (12)$$

Sous les hypothèses du théorème 2 (i.e.  $\text{pgcd } \mathcal{D} = 1$  et  $0 \in \mathcal{D}$ ), nous avons

$$\frac{1}{r} \leq K_m < \frac{1}{r} + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi(r+1)^3}{m}}. \quad (13)$$

Dans [4, Problème 2, p. 104] les auteurs demandent pour  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$  de trouver des nombres ellipséphiques divisibles par le carré de grands nombres premiers : est-il vrai que si  $r \geq 3$ , il existe une constante  $c = c_r > 0$  telle qu'une infinité d'entiers  $n$  dont tous les chiffres sont 0 ou 1 en base  $r$  possèdent au moins un facteur premier  $p$  vérifiant  $p > n^c$  et  $p^2 \mid n$  ?

M.Filaseta et S. Konyagin dans [6] ont répondu positivement à cette question si  $r \leq 5$ . C. Dartyge et C. Mauduit dans [2] ont étendu le domaine de validité à  $r \leq 8$ . S. Konyagin dans [7, corollaire 6] fournit une réponse sans condition sur  $r$ , mais sa méthode ne permet pas d'obtenir une estimation du nombre d'entiers ellipséphiques possédant un facteur premier de ce type. Le Théorème 4 ci-dessous répond positivement à cette question pour tout  $r \geq 3$  et l'étend à tout ensemble  $\mathcal{D}$  contenant 0. En outre, le Théorème 4 montre que la proportion de ces entiers est de l'ordre de grandeur attendu.

**Théorème 4.** On suppose que  $0 \in \mathcal{D}$ ,  $r \geq 3$  et  $k \geq 2$ . Il existe une constante  $c = c_{k,r} > 0$  telle que, uniformément pour  $2 \leq y \leq x^c$ ,

$$\#\{n \in W_{\mathcal{D}}(x) / \exists p \in [y, 2y[, p^k \mid n\} \geq \frac{k}{2^k} \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{y^{k-1} \log x} \left\{1 + O_k\left(\frac{1}{\log y}\right)\right\}.$$

Une valeur admissible de la constante  $c_{k,r}$  est donnée par la formule

$$c_{k,r} = \frac{32 (r^{1/2k} - 1)^2}{\pi k (r + 1)^5}. \quad (14)$$

Si  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$  et  $k = 2$ , nous pouvons prendre

$$c = \frac{\pi}{8} r^{-\frac{3}{2}} \left(1 - 2r^{-\frac{1}{4}}\right). \quad (15)$$

La démonstration du Théorème 4 repose de manière cruciale sur la majoration (9) dans le cas  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ , et sur la majoration (11) combinée avec (12) dans le cas général.

## 2. MOYENNE DE LA FONCTION $G_{\mathcal{D},N}$

### 2.1. Définition de la constante $K_m$ .

Dans toute la suite nous étendons la définition de la fonction  $G_{\mathcal{D},N}$  en posant pour tout réel  $\mu \geq 0$ ,  $G_{\mathcal{D},\mu} = G_{\mathcal{D},[\mu]}$ . Ce prolongement permet d'exprimer  $K_m$  de la manière suivante

**Lemme 1.** On a

$$K_m = \limsup_{\mu \rightarrow \infty} \left\| \|G_{\mathcal{D},\mu}^m\|_1 \right\|_1^{\frac{1}{\mu}}. \quad (16)$$

*Démonstration.* Nous écrivons pour  $\mu \geq 1$ ,

$$\left\| \|G_{\mathcal{D},\mu}^m\|_1 \right\|_1^{\frac{1}{\mu}} = \left( \left\| \|G_{\mathcal{D},[\mu]}^m\|_1 \right\|_1^{\frac{1}{[\mu]}} \right)^{[\mu]/\mu},$$

et en passant à la limite supérieure dans les deux membres, nous obtenons le résultat en vertu de la définition (8).  $\square$

Avant de nous concentrer sur la majoration de  $K_m$ , étape clef de notre étude, nous allons, pour illustrer la qualité des estimations que nous obtiendrons, donner une minoration simple et utile de  $K_m$  :

**Lemme 2.** *Pour tout réel  $m \geq 1$ , nous avons*

$$K_m \geq \frac{1}{r}.$$

*Démonstration.* Nous écrivons

$$\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x) - 1 = \frac{1}{t} \sum_{d \in \mathcal{D}} (e(dx) - 1).$$

En utilisant l'inégalité  $|e(x) - 1| \leq 2\pi |x|$  nous obtenons

$$|\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x) - 1| \leq \frac{1}{t} \sum_{d \in \mathcal{D}} 2\pi d |x| \leq 2\pi r |x|.$$

Ainsi pour  $|x| \leq \frac{1}{N}$ ,

$$|\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x)| \geq 1 - \frac{2\pi r}{N}.$$

Si  $0 < x < \frac{1}{N} r^{-N}$ , alors  $0 < r^k x < \frac{1}{N}$  pour  $0 \leq k < N$ , donc

$$|G_{\mathcal{D},N}(x)| = \prod_{0 \leq k < N} |\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(r^k x)| \geq \left(1 - \frac{2\pi r}{N}\right)^N.$$

Nous en déduisons la minoration

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 |G_{\mathcal{D},N}(x)|^m dx \right)^{\frac{1}{N}} &\geq \left( \int_0^{r^{-N}/N} |G_{\mathcal{D},N}(x)|^m dx \right)^{\frac{1}{N}} \\ &\geq \left( \frac{r^{-N}}{N} \left(1 - \frac{2\pi r}{N}\right)^{mN} \right)^{\frac{1}{N}} \\ &\geq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2\pi r}{N}\right)^m \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{N}} \end{aligned}$$

et par passage à la limite supérieure nous avons finalement

$$K_m = \limsup_{N \rightarrow +\infty} \left( \int_0^1 |G_{\mathcal{D},N}(x)|^m dx \right)^{\frac{1}{N}} \geq \frac{1}{r}.$$

□

Le lemme suivant, dont la démonstration fera l'objet du paragraphe 2.3, montre que si nous sommes capables de majorer la constante  $K_m$  pour un certain entier  $m$ , nous pourrions alors obtenir une majoration des moyennes de  $G_{\mathcal{D},N}$ . Un ensemble  $\mathfrak{R}$  est dit  $\delta$  bien espacé si  $r - r' \geq \delta$  dès que  $r$  et  $r'$  sont deux points distincts de  $\mathfrak{R}$ .

**Lemme 3.** *Soit  $\epsilon > 0$  fixé. Soit  $\delta > 0$  et  $\mathfrak{R}$  une famille  $\delta$  bien espacée de points de  $[\frac{\delta}{2}, 1 - \frac{\delta}{2}]$ , globalement invariante modulo 1 par la multiplication par  $r$ . Pour tout entier  $m$ , tel que*

$$1 \leq m \leq \frac{\log r}{\log \frac{1}{\delta}} N, \tag{17}$$

*nous avons*

$$\sum_{x \in \mathfrak{R}} |G_{\mathcal{D},N}(x)| \ll_{\epsilon, m, r} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1 + \frac{\log K_m}{\log r} + \epsilon}. \tag{18}$$

*la constante implicite dépendant au plus de  $\epsilon$ ,  $m$  et  $r$ .*

## 2.2. Moyenne de la dérivée de $(G_{\mathcal{D},N})^m$ .

La constante  $K_m$  permet aussi de majorer les moyennes de la dérivée de  $G_N$ . C'est l'objectif de ce lemme :

**Lemme 4.** *Soit  $\epsilon > 0$  fixé. Uniformément sur  $\mu$ , nous avons la majoration*

$$\|(G_{\mathcal{D},\mu}^m)'\|_1 \ll_{\epsilon,m,r} r^\mu (K_m + \epsilon)^\mu. \quad (19)$$

*Démonstration.* Nous calculons la dérivée de  $(G_N)^m$  comme un produit :

$$\begin{aligned} |(G_{\mathcal{D},\mu}^m)'(x)| &= m |(G_{\mathcal{D},\mu})'(x)| |G_{\mathcal{D},\mu}^{m-1}(x)| \\ &\leq m \sum_{k < \mu} r^k |\mathcal{U}'_{\mathcal{D}}(r^k x)| \left| \prod_{\substack{j < \mu \\ j \neq k}} \mathcal{U}_{\mathcal{D}}(r^j x) \right| |G_{\mathcal{D},\mu}^{m-1}(x)| \\ &\leq m \sum_{k < \mu} r^k |\mathcal{U}'_{\mathcal{D}}(r^k x)| |G_{\mathcal{D},k}^m(x)| \end{aligned}$$

puisque nous retirons des nombres de module inférieur à 1 du produit intérieur. Nous majorons trivialement la dérivée de  $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$  par une constante ne dépendant que de  $\mathcal{D}$  :

$$|\mathcal{U}'_{\mathcal{D}}(y)| \leq 2\pi \left| \sum_{d \in \mathcal{D}} d e(dy) \right| \leq 2\pi \sum_{d \in \mathcal{D}} d.$$

Donc

$$|(G_{\mathcal{D},\mu}^m)'(x)| \ll_r m \sum_{k < \mu} r^k |G_{\mathcal{D},k}^m(x)|. \quad (20)$$

Nous utilisons cette majoration pour obtenir

$$\begin{aligned} \|(G_{\mathcal{D},\mu}^m)'\|_1 &\ll_r m \sum_{k < \mu} r^k \|G_{\mathcal{D},k}^m\|_1 \\ &\ll_{r,m,\epsilon} \sum_{k < \mu} r^k (K_m + \epsilon)^k \end{aligned}$$

et comme, d'après le Lemme 2,  $r(K_m + \epsilon) > 1$ , on en déduit

$$\|(G_{\mathcal{D},\mu}^m)'\|_1 \ll_{r,m,\epsilon} \frac{r^{[\mu]} (K_m + \epsilon)^{[\mu]}}{r(K_m + \epsilon) - 1} \ll_{r,m,\epsilon} r^\mu (K_m + \epsilon)^\mu,$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

## 2.3. Preuve du lemme 3.

**Lemme 5.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble de points qui est globalement invariant modulo 1 par la multiplication par  $r$ . Pour tout  $m \geq 1$  entier,*

$$\sum_{x \in \mathfrak{X}} |G_{\mathcal{D},N}(x)| \leq \sum_{x \in \mathfrak{X}} |G_{\mathcal{D},N/m}(x)|^m.$$

*Démonstration.* Nous pouvons évidemment supposer que  $m \geq 2$ . Commençons par étudier le cas où  $\frac{N}{m}$  est un entier. On écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(N) &:= \sum_{x \in \mathfrak{X}} |G_{\mathcal{D},N}(x)| = \sum_{x \in \mathfrak{X}} \prod_{0 \leq k < N} |\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(r^k x)| \\ &\leq \sum_{x \in \mathfrak{X}} \prod_{0 \leq j \leq m-1} \prod_{\substack{j/m \leq k < \frac{j+1}{m} N}} |\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(r^k x)|. \end{aligned}$$

L'inégalité arithmético-géométrique

$$(a_0 \cdots a_{m-1})^{1/m} \leq \frac{1}{m} (a_0 + \cdots + a_{m-1}),$$

appliquée avec

$$a_j = \left( \prod_{\frac{j}{m}N \leq k < \frac{j+1}{m}N} |\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(r^k x)| \right)^m,$$

permet d'obtenir

$$\mathcal{R}(N) \leq \sum_{x \in \mathfrak{R}} \frac{1}{m} \sum_{0 \leq j \leq m-1} \left( \prod_{\frac{j}{m}N \leq k < \frac{j+1}{m}N} |\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(r^k x)| \right)^m.$$

Ainsi

$$\mathcal{R}(N) \leq \frac{1}{m} \sum_{0 \leq j \leq m-1} \sum_{x \in \mathfrak{R}} \left( \prod_{\frac{j}{m}N \leq k < \frac{j+1}{m}N} |\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(r^k x)| \right)^m.$$

Comme l'ensemble  $\mathfrak{R}$  est stable modulo 1 par la multiplication par  $r$ , nous avons donc la majoration cherchée :

$$\mathcal{R}(N) \leq \frac{1}{m} \sum_{j \leq m-1} \sum_{x \in \mathfrak{R}} \left( \prod_{k < \frac{N}{m}} |\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x)| \right)^m.$$

Pour le cas général, si  $\hat{N}$  désigne le plus grand multiple de  $m$  inférieur à  $N$ , alors nous pouvons écrire  $\lfloor N/m \rfloor = \hat{N}/m$  et

$$\mathcal{R}(N) \leq \mathcal{R}(\hat{N}) \leq \sum_{x \in \mathfrak{R}} |G_{\mathcal{D}, \hat{N}/m}(x)|^m = \sum_{x \in \mathfrak{R}} |G_{\mathcal{D}, N/m}(x)|^m$$

ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

*Démonstration du lemme 3.* Comme  $G_{\mathcal{D}, N}(r)$  est le produit de fonctions de module inférieur à 1, l'application

$$\mu \mapsto |G_{\mathcal{D}, \mu}(r)|$$

est pour chaque réel  $r$  décroissante. Si  $\mu \leq \frac{N}{m}$ , nous avons donc grâce au lemme 5

$$\sum_{r \in \mathfrak{R}} |G_{\mathcal{D}, N}(r)| \leq \sum_{r \in \mathfrak{R}} |G_{\mathcal{D}, N/m}(r)|^m \leq \sum_{r \in \mathfrak{R}} |G_{\mathcal{D}, \mu}(r)|^m. \quad (21)$$

Nous majorons cette somme en utilisant le lemme de Sobolev-Gallagher énoncé dans [8, lemme 1.2] que nous rappelons ici

**Lemme 6** (Sobolev-Gallagher). *Soient  $\delta > 0$ ,  $\mathfrak{R}$  un ensemble  $\delta$ -bien espacé de points de  $[\frac{\delta}{2}, 1 - \frac{\delta}{2}]$  et  $f$  une fonction admettant une dérivée continue sur  $[0, 1]$ . Alors*

$$\sum_{x \in \mathfrak{R}} |f(x)| \leq \delta^{-1} \|f\|_1 + \frac{1}{2} \|f'\|_1.$$

Alors, (21) devient

$$\sum_{r \in \mathfrak{R}} |G_{\mathcal{D}, N}(r)| \leq \frac{1}{\delta} \|G_{\mathcal{D}, \mu}^m\|_1 + \|(G_{\mathcal{D}, \mu}^m)'\|_1.$$

Le lemme 4 fournit donc pour tout  $\mu \leq \frac{N}{m}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{r \in \mathfrak{R}} |G_{\mathcal{D}, N}(r)| &\ll_{\epsilon, r} \frac{1}{\delta} (K_m + \epsilon)^\mu + m(r(K_m + \epsilon))^\mu \\ &\ll_{\epsilon, r} m \left( \frac{1}{\delta} + r^\mu \right) (K_m + \epsilon)^\mu. \end{aligned}$$

Nous optimisons le paramètre  $\mu$  en choisissant

$$\mu := -\frac{\log \delta}{\log r}.$$

L'hypothèse du lemme implique  $\mu \leq \frac{N}{m}$ , donc

$$\begin{aligned} \sum_{r \in \mathfrak{R}} |G_{\mathcal{D}, N}(r)| &\ll_{\epsilon, m, r} \frac{1}{\delta} (K_m + \epsilon)^\mu \\ &\ll_{\epsilon, m, r} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1 + \frac{\log(K_m + \epsilon)}{\log r}}. \end{aligned}$$

La majoration du lemme s'en déduit immédiatement puisque ce résultat est vrai pour tout  $\epsilon > 0$ .  $\square$

#### 2.4. Cardinal de $W_{\mathcal{D}}(x)$ et de $W_{\mathcal{D}}(x, a, q)$ .

Nous commençons par énoncer un résultat qui permet de limiter notre étude au cas où  $x$  est une puissance de  $r$ , *i.e.* lorsqu'il existe  $N$  tel que  $x = r^N$ . Des versions similaires ont déjà été exploitées par exemple par [2]. L'étude de ce cas particulier est naturelle car la moyenne des exponentielles

$$\frac{1}{t^N} \sum_{n \in W_{\mathcal{D}}(r^N)} e(nz) = G_{\mathcal{D}, N}(z)$$

se factorise alors complètement.

**Lemme 7.** *Soit  $x = \sum_{N < M} x_N r^N$  décomposé dans la base  $r$ . Notons*

$$K := \max\{N < M, x_N \notin \mathcal{D}\}$$

*en convenant que  $K = 0$  si l'ensemble est vide (*i.e.* si  $x$  est ellipséphique). Alors*

$$\#W_{\mathcal{D}}(x) = \sum_{K \leq N < M} \mathcal{D}(x_N) t^N, \quad (22)$$

*et pour tout ensemble d'entiers  $\mathcal{Q}$ ,*

$$\sum_{q \in \mathcal{Q}} \max_{a \in \mathbb{Z}} \left| \#W_{\mathcal{D}}(x, a, q) - \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{q} \right| \leq \sum_{K \leq N < M} \mathcal{D}(x_N) t^N \mathcal{R}_N(\mathcal{Q}) \quad (23)$$

*avec les notations*

$$\mathcal{D}(y) := \#\{d \in \mathcal{D}, d < y\}, \quad (24)$$

$$\mathcal{R}_N(\mathcal{Q}) := \sum_{q \in \mathcal{Q}} \frac{1}{q} \sum_{0 < l < q} \left| G_{\mathcal{D}, N}\left(\frac{l}{q}\right) \right|. \quad (25)$$

*Démonstration.* Nous pouvons séparer  $W_{\mathcal{D}}(x)$  en deux classes : les entiers dont le premier chiffre est strictement inférieur à  $x_{M-1}$  et ceux dont le premier chiffre est égal à  $x_{M-1}$ . Si  $x_{M-1} \notin \mathcal{D}$ , alors

$$W_{\mathcal{D}}(x) = W_{\mathcal{D}}(x_{M-1} r^{M-1})$$

Si  $x_{M-1} \in \mathcal{D}$ , alors nous avons l'union disjointe

$$W_{\mathcal{D}}(x) = W_{\mathcal{D}}(x_{M-1} r^{M-1}) \sqcup (x_{M-1} r^{M-1} + W_{\mathcal{D}}(x - x_{M-1} r^{M-1}))$$

et nous pouvons appliquer de nouveau ce découpage à  $x - x_{M-1} r^{M-1}$  (qui est le nombre  $x$  "privé" de son premier chiffre). À l'étape  $M - K$ , en notant  $X_N := \sum_{N < j < M} x_j r^j$ , nous obtenons l'égalité

$$W_{\mathcal{D}}(x) = \bigsqcup_{K \leq N < M} (X_N + W_{\mathcal{D}}(x_N r^N)).$$

L'égalité (22) s'en déduit puisque la réunion est disjointe. Nous obtenons aussi pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\sum_{n \in W_{\mathcal{D}}(x)} e(zn) = \sum_{K \leq N < M} e(zX_N) \sum_{n \in W_{\mathcal{D}}(x_N r^N)} e(zn). \quad (26)$$



La première étape pour montrer (23) est de se ramener à des sommes trigonométriques grâce à l'égalité

$$\#W_{\mathcal{D}}(x, a, q) = \sum_{n \in W_{\mathcal{D}}(x)} \frac{1}{q} \sum_{0 \leq l < q} e\left(\frac{l(n-a)}{q}\right)$$

En isolant le terme  $l = 0$  :

$$\#W_{\mathcal{D}}(x, a, q) = \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{q} + \frac{1}{q} \sum_{0 < l < q} e\left(-\frac{la}{q}\right) \sum_{n \in W_{\mathcal{D}}(x)} e\left(\frac{ln}{q}\right).$$

Nous obtenons successivement, en utilisant (26) avec  $z := \frac{l}{q}$  pour la seconde majoration,

$$\begin{aligned} \left| \#W_{\mathcal{D}}(x, a, q) - \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{q} \right| &\leq \frac{1}{q} \sum_{0 < l < q} \left| \sum_{n \in W_{\mathcal{D}}(x)} e\left(\frac{ln}{q}\right) \right| \\ &\leq \frac{1}{q} \sum_{0 < l < q} \sum_{K \leq N < M} \left| \sum_{n \in W_{\mathcal{D}}(x_N r^N)} e\left(\frac{ln}{q}\right) \right| \\ &\leq \sum_{K \leq N < M} \frac{1}{q} \sum_{0 < l < q} \left| \sum_{\substack{n_0, \dots, n_N \in \mathcal{D} \\ n_N < x_N}} \prod_{j \leq N} e\left(\frac{ln_j r^j}{q}\right) \right| \end{aligned}$$

où  $n = \sum_j n_j r^j$  est la décomposition de  $n$  en base  $r$ . Ainsi,

$$\sum_{q \in \mathcal{Q}} \left| \#W_{\mathcal{D}}(x, a, q) - \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{q} \right| \leq \sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{K \leq N < M} \frac{1}{q} \sum_{0 < l < q} \left| \prod_{j \leq N} \sum_{\substack{n_j \in \mathcal{D} \\ n_N < x_N}} e\left(\frac{ln_j r^j}{q}\right) \right|,$$

donc en isolant le terme  $j = N$  que l'on majore trivialement par  $\mathcal{D}(x_N)$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \left| \#W_{\mathcal{D}}(x, a, q) - \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{q} \right| &\leq \sum_{q \in \mathcal{Q}} \sum_{K \leq N < M} \mathcal{D}(x_N) t^N \frac{1}{q} \sum_{0 < l < q} \left| G_{\mathcal{D}, N}\left(\frac{l}{q}\right) \right| \\ &\leq \sum_{K \leq N < M} \mathcal{D}(x_N) t^N \mathcal{R}_N(\mathcal{Q}). \end{aligned}$$

□

*Remarque 3.* En réunissant les informations de (22) et de (23), nous obtenons la majoration moins précise mais plus “explicite” : pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{q \in \mathcal{Q}} \max_{a \in \mathbb{Z}} \left| \#W_{\mathcal{D}}(x, a, q) - \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{q} \right| \\ \leq \#W_{\mathcal{D}}(x) \left( \sup_{(1-\epsilon)M \leq N < M} (\mathcal{R}_N(\mathcal{Q})) + \frac{t^3}{t-1} \frac{\#\mathcal{Q}}{x^{\rho\epsilon}} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

*Démonstration de (27).* Majorons le membre de droite de (23) :

$$\begin{aligned} \sum_{K \leq N < M} \mathcal{D}(x_N) t^N \mathcal{R}_N(\mathcal{Q}) \\ \leq \sum_{\max\{K, (1-\epsilon)M\} \leq N < M} \mathcal{D}(x_N) t^N \mathcal{R}_N(\mathcal{Q}) + \sum_{N < (1-\epsilon)M} \mathcal{D}(x_N) t^N \mathcal{R}_N(\mathcal{Q}) \\ \leq \#W_{\mathcal{D}}(x) \sup_{(1-\epsilon)M \leq N < M} \mathcal{R}_N(\mathcal{Q}) + \frac{t}{t-1} (\#\mathcal{Q}) t^{M-\epsilon M+1} \end{aligned}$$

en remplaçant  $\mathcal{R}_N(\mathcal{Q})$  par sa borne supérieure dans le premier terme et par  $\#\mathcal{Q}$  dans le second. Comme  $r^{M-1} \leq x < r^M$ , nous avons  $t^{M-1} \leq \#W_{\mathcal{D}}(x)$  et  $t^{-M\epsilon} < x^{-\rho\epsilon}$ , ce qui permet de terminer la preuve de (27). □

### 2.5. Réduction de la preuve du Théorème 4.

Nous montrons comment une bonne majoration de  $K_m$  et le lemme 3 permet de démontrer le Théorème 4.

**Lemme 8.** *Soient  $r \geq 3$ ,  $k \geq 2$  et  $m$  un entier pair tel que*

$$r^{2k-1} K_m^{2k} < 1. \quad (28)$$

Soit  $c > 0$  un réel vérifiant

$$\begin{aligned} c &> \frac{2k-1}{\rho} && \text{si } tK_m^{\frac{1}{m}} \leq 1 ; \\ c &> 2km - \frac{1}{\rho} \left( 1 - 2k - 2k \frac{\log K_m}{\log r} \right) && \text{sinon.} \end{aligned}$$

Alors uniformément pour  $2 \leq y \leq x^{\frac{1}{c}}$ , on a

$$\#\{n \in W_{\mathcal{D}}(x), \exists p^k \mid n, y \leq p < 2y\} \geq \frac{k}{2^k} \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{y^{k-1} \log x} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \right).$$

*Démonstration.* Soit  $2 \leq y \leq x^{\frac{1}{c}}$ . En notant  $\nu_p(n)$  la valuation  $p$ -adique de  $n$ , on a pour tout entier  $n$  :

$$n \geq \prod_{\substack{p \mid n \\ p \geq y \\ \nu_p(n) \geq k}} p^{\nu_p(n)} \geq \prod_{\substack{p \mid n \\ p \geq y \\ \nu_p(n) \geq k}} y^k = \prod_{\substack{p^k \mid n \\ p \geq y}} y^k = y^{k \#\{p \geq y, p^k \mid n\}}.$$

Ainsi

$$\#\{p \geq y, p^k \mid n\} \leq \frac{\log n}{k \log y},$$

et donc

$$\begin{aligned} &\#\{n \in W_{\mathcal{D}}(x) / \exists p^k \mid n, y \leq p < 2y\} \\ &\geq \frac{k \log y}{\log x} \sum_{n \in W_{\mathcal{D}}(x)} \sum_{\substack{y \leq p < 2y \\ p^k \mid n}} 1 = \frac{k \log y}{\log x} \sum_{y \leq p < 2y} \#W_{\mathcal{D}}(x, 0, p^k) \\ &\geq \frac{k \log y}{\log x} \sum_{y \leq p < 2y} \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{p^k} - \sum_{y \leq p < 2y} \left| \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{p^k} - \#W_{\mathcal{D}}(x, 0, p^k) \right| \\ &\geq \frac{k \log y}{\log x} \sum_{y \leq p < 2y} \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{p^k} - \sum_{K \leq N < M} \mathcal{D}(x_N) t^N \mathcal{R}_N(\mathcal{Q}_y) \end{aligned} \quad (29)$$

en appliquant le Lemme 7 énoncé et prouvé dans le paragraphe précédent, avec le choix de  $\mathcal{Q}_y := \{p^k, y \leq p < 2y\}$ . En utilisant le théorème des nombres premiers, nous vérifions que le terme principal dans (29) est supérieur à

$$\frac{k}{2^k} \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{y^{k-1} \log x} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right) \right)$$

Une meilleure constante peut être obtenue en évaluant cette somme plus précisément. La preuve sera donc terminée dès que nous aurons montré

$$\sum_{K \leq N < M} \mathcal{D}(x_N) t^N \mathcal{R}_N(\mathcal{Q}_y) \ll \frac{\#W_{\mathcal{D}}(x)}{y^{k-1} \log^2 x}, \quad (30)$$

la constante implicite pouvant dépendre des paramètres  $r, t, k, m$  ou  $c$ .

Nos appliquons le lemme 3 à l'ensemble  $y^{-2k}$  bien espacé

$$\mathfrak{R} := \left\{ \frac{l}{p^k}, 0 < l < p^k, y \leq p < 2y \right\}. \quad (31)$$

Si  $y$  est assez grand, par exemple  $y > r$ , tout nombre premier  $p \in [y, 2y[$  est premier avec  $r$  donc le lemme de Gauß assure que  $\mathfrak{R}$  est bien globalement invariant modulo 1 par la multiplication par  $r$ . Dès que

$$m \leq \frac{\log r}{2k \log y} N, \quad (32)$$

nous avons d'après (18)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_N(\mathcal{Q}_y) &\leq \frac{1}{y^k} \sum_{y \leq p < 2y} \sum_{0 < l < p^k} \left| G_{\mathcal{D}, N} \left( \frac{l}{p^k} \right) \right| \\ &\ll_{\epsilon} y^{-k} m (y^{2k})^{1 + \frac{\log(K_m + \epsilon)}{\log r}} \\ &\ll_{\epsilon, m} (y^k)^{1 + 2 \frac{\log(K_m + \epsilon)}{\log r}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{K \leq N < M} \mathcal{D}(x_N) t^N \mathcal{R}_N(\mathcal{Q}_y) \\ \ll_{\epsilon, m} \sum_{K \leq N < M} \mathcal{D}(x_N) t^N y^{k(1 + 2 \frac{\log(K_m + \epsilon)}{\log r})} + \sum_{N < 2km \frac{\log y}{\log r}} t^{N+1} y^k (K_m + \epsilon)^{\frac{N}{m}}, \end{aligned}$$

la seconde majoration étant obtenue en appliquant le lemme 3 avec le choix de

$$m := \frac{\log r}{2k \log y} N$$

pour que notre hypothèse sur  $m$  soit vérifiée.

La première somme s'évalue grâce à (22), tandis que la seconde se calcule comme somme d'une série géométrique de raison  $t(K_m + \epsilon)^{\frac{1}{m}}$ . Traitons en détail le cas le plus compliqué où  $tK_m^{\frac{1}{m}} > 1$  :

$$\sum_{K \leq N < M} \mathcal{D}(x_N) t^N \mathcal{R}_N(\mathcal{Q}_y) \leq \left( \#W_{\mathcal{D}}(x) + \frac{t^2 (K_m + \epsilon)^{\frac{1}{m}}}{t(K_m + \epsilon)^{\frac{1}{m}} - 1} y^{2km\rho} \right) y^{k(1 + 2 \frac{\log(K_m + \epsilon)}{\log r})}.$$

Comme  $y \leq x^{\frac{1}{c}}$ , la condition (30) est vraie dès que (quitte à choisir  $\epsilon$  assez petit) :

$$\begin{aligned} 2km\rho + k \left( 1 + 2 \frac{\log K_m}{\log r} \right) &< c\rho + 1 - k, \\ k \left( 1 + 2 \frac{\log K_m}{\log r} \right) &< 1 - k. \end{aligned}$$

Ces conditions sur  $c$  et sur  $K_m$  sont exactement celles imposées dans l'énoncé du Lemme 8.  $\square$

*Remarque 4.* Nous ne parviendrons pas à obtenir de majoration de  $K_m$  suffisamment précise pour être dans le cas  $tK_m^{\frac{1}{m}} \leq 1$ . Il est d'ailleurs probable que cette condition soit impossible. Si  $tK_m^{\frac{1}{m}} > 1$ , l'hypothèse (28) montre que le choix de  $c = 2km$  est acceptable.

*Remarque 5.* Notre méthode permet aussi d'obtenir une majoration du nombre d'entiers ellipséphiens divisibles par une puissance d'un grand nombre premier en partant de la majoration

$$\#\{n \in W_{\mathcal{D}}(x), \exists p^k \mid n, y \leq p \leq 2y\} \leq \sum_{n \in W_{\mathcal{D}}(x)} \sum_{\substack{y \leq p \leq 2y \\ p^k \mid n}} 1.$$

## 2.6. Encadrement de $K_m$ pour $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ .

Nous prouvons dans cette partie le Théorème 1 par une méthode essentiellement combinatoire : nous interprétons  $K_m$  comme le nombre de solutions d'une équation et nous dénombrons par récurrence ces solutions.

**Lemme 9.** *Pour  $\beta \in \mathbb{Z}$ , notons  $X_N(\beta)$  le nombre de solutions dans  $W_{\mathcal{D}}(r^N)$  de l'équation*

$$n_1 + \cdots + n_l = m_1 + \cdots + m_l + \beta r^N. \quad (34)$$

Pour  $N = 0$ , nous convenons que  $X_0(\beta) = 1$  si  $\beta = 0$  et 0 sinon. Alors

$$\|G_{\mathcal{D}, N}^{2l}\|_1 = t^{-2lN} X_N(0) \quad (35)$$

et  $X_N(\beta)$  se calcule grâce à la relation de récurrence

$$X_{N+1}(\beta) = \sum_{|j| < \frac{l}{r-1}} \binom{2l}{l+j-\beta r} X_N(j), \quad (36)$$

*Démonstration.* Pour prouver (35), il suffit de remarquer qu'en développant le produit, nous avons

$$\begin{aligned} t^{2lN} \|G_{\mathcal{D}, N}^{2l}\|_1 &= \int_0^1 \left( \sum_{n \in W_{\mathcal{D}}(r^N)} e(nu) \right)^l \left( \sum_{m \in W_{\mathcal{D}}(r^N)} e(-mu) \right)^l \mathfrak{d}u \\ &= \int_0^1 \sum_{\substack{n_1, \dots, n_l \in W_{\mathcal{D}}(r^N) \\ m_1, \dots, m_l \in W_{\mathcal{D}}(r^N)}} e((n_1 + \cdots + n_l - m_1 - \cdots + m_l)u) \mathfrak{d}u \\ &= \sum_{\substack{n_1, \dots, n_l \in W_{\mathcal{D}}(r^N) \\ m_1, \dots, m_l \in W_{\mathcal{D}}(r^N)}} \int_0^1 e((n_1 + \cdots + n_l - m_1 - \cdots + m_l)u) \mathfrak{d}u \end{aligned}$$

et l'intégrale vaut 1 ou 0 suivant que  $n_1 + \cdots + n_l = m_1 + \cdots + m_l$  ou pas. Nous comptons donc exactement le nombre de solutions dans  $W_{\mathcal{D}}(r^N)$  de l'équation

$$n_1 + \cdots + n_l = m_1 + \cdots + m_l,$$

ce qui est la définition de  $X_N(0)$ .

Pour prouver (36), décomposons les nombres ellipséphiens de  $W_{\mathcal{D}}(r^{N+1})$  en isolant leur chiffre d'indice  $N$  :

$$\begin{aligned} n_k &= d_k r^N + \hat{n}_k && \text{avec } d_k \in \mathcal{D} \text{ et } \hat{n}_k \in W_{\mathcal{D}}(r^N); \\ m_k &= e_k r^N + \hat{m}_k && \text{avec } e_k \in \mathcal{D} \text{ et } \hat{m}_k \in W_{\mathcal{D}}(r^N). \end{aligned}$$

Alors  $n_1 + \cdots + n_l = m_1 + \cdots + m_l + \beta r^{N+1}$  si et seulement si

$$\left( \sum_k d_k \right) r^N + \sum_k \hat{n}_k = \left( \sum_k e_k \right) r^N + \sum_k \hat{m}_k + \beta r^{N+1}$$

si et seulement s'il existe  $j \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\sum_k \hat{n}_k = \sum_k \hat{m}_k + j r^N \quad (37)$$

et

$$\sum_k d_k = \sum_k e_k + \beta r - j. \quad (38)$$

Pour chaque  $j$ , nous avons donc  $X_N(j)$  choix possibles pour les  $\hat{n}_k$  et  $\hat{m}_j$  et nous avons  $\binom{2l}{l+\beta r-j}$  choix pour les  $d_k$  et  $e_k$ . Comme  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ , le nombre de solutions de l'équation (38) est en

effet

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \binom{l}{i} \binom{l}{l + \beta r - j} = \binom{2l}{l + \beta r - j}.$$

Cette relation se démontre par exemple en identifiant les coefficients de  $x^{l+\beta r-j}$  du polynôme  $(1+x)^l(1+x)^l = (1+x)^{2l}$  développé par la formule du binôme de Newton.

Remarquons aussi que l'égalité (37) impose  $|j| < \frac{l}{r-1}$  puisque nous avons les encadrements

$$0 \leq \sum_k \hat{n}_k \leq l \frac{r^N - 1}{r - 1}, \quad 0 \leq \sum_k \hat{m}_k \leq l \frac{r^N - 1}{r - 1}.$$

Ainsi,

$$X_{N+1}(\beta) = \sum_{|j| < \frac{l}{r-1}} \binom{2l}{l + j - \beta r} X_N(j), \quad (39)$$

ce qui termine la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme 10.** *Pour tout  $N \geq 0$ ,  $l \geq 1$  et  $r \geq 3$  des entiers,*

$$K_{2l} \leq \frac{1}{r} \sum_{0 \leq n < r} \cos^{2l} \left( \pi \frac{n}{r} \right) < \frac{1}{r} + 2^{-2l} \binom{2l}{l}. \quad (40)$$

*Démonstration.* Posons  $k := \lceil \frac{l}{r-1} \rceil$ . Notons

$$X_N := \begin{pmatrix} X_N(1-k) \\ \vdots \\ X_N(k-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2k-1}$$

et  $M$  la matrice définie par

$$M = \left[ \binom{2l}{l - ir + j} \right]_{-k < i, j < k}$$

de sorte que  $X_{N+1} = MX_N$ .

Munissons  $\mathbb{R}^{2k-1}$  de la norme 1 et  $M_{2k-1}(\mathbb{R})$  de la norme qui lui est subordonnée,

$$\|M\| := \max_{|j| < k} \left\{ \sum_{|i| < k} |m_{i,j}| \right\}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |X_N(0)| &\leq \|X_N\| = \|M^N X_0\| \\ &\leq \|M\|^N \|X_0\| = \|M\|^N. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (35), nous trouvons la première majoration

$$K_{2l} \leq 2^{-2l} \max_{|j| < \frac{l}{r-1}} \left\{ \sum_{|i| < \frac{l}{r-1}} \binom{2l}{l - ir} \right\}. \quad (41)$$

Fixons maintenant  $j$  et notons  $\xi := e(\frac{1}{r})$ . Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k \equiv j[r]} \binom{2l}{l-k} &= \sum_k \frac{1}{r} \sum_{0 \leq n < r} \xi^{(k-j)n} \binom{2l}{l-k} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{0 \leq n < r} \xi^{-n(j+l)} (1 + \xi^n)^{2l} \\ &= \frac{1}{r} \sum_{0 \leq n < r} \xi^{-nj} \left( \xi^{\frac{n}{2}} + \xi^{-\frac{n}{2}} \right)^{2l} \\ &\leq \frac{2^{2l}}{r} \sum_{0 \leq n < r} \cos^{2l} \left( \pi \frac{n}{r} \right). \end{aligned}$$

En prenant le maximum sur  $j$  dans (41), nous avons démontré la première majoration du lemme. Nous majorons la somme par l'intégrale correspondante pour en déduire

$$\begin{aligned} K_{2l} &\leq \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \sum_{0 < n < r} \cos^{2l} \left( \pi \frac{n}{r} \right) \\ &< \frac{1}{r} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2l}(\pi s) ds \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 10 après le calcul de l'intégrale de Wallis.  $\square$

## 2.7. Encadrement de $K_m$ pour $\mathcal{D}$ quelconque.

Le lemme 1 de [4] énonce que si  $\mathcal{D}$  est un sous-ensemble de  $\{0, \dots, r-1\}$  de cardinal au moins 2 et telle que  $\text{pgcd } \mathcal{D} = 1$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $d \in \mathcal{D}$  tel que

$$\|dx\| \geq \frac{1}{2(r-1)^2} \|x\|.$$

Cette minoration est ensuite utilisée pour majorer  $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$  point par point :

$$|\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x)| \leq 1 - \frac{1}{(r-1)^5} \|x\|^2,$$

majoration qui peut être utilisée à son tour pour estimer  $K_m$ . Nous commençons en reprenant la preuve de la majoration de  $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$  dans le but d'améliorer la constante obtenue : elle présentera l'avantage d'être du bon ordre de grandeur en  $r$ .

**Lemme 11.** *Soit  $\mathcal{D}$  tel que  $\text{pgcd } \mathcal{D} = 1$ . Notons  $\delta$  le plus petit élément non nul de  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  le plus grand. Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $d \in \mathcal{D}$  tel que*

$$\|dx\| \geq \frac{2}{\delta + \Delta} \|x\|. \quad (42)$$

*Démonstration.* Notons  $K := \frac{2}{\delta + \Delta}$  et considérons  $x \in \mathbb{R}$  tel que

$$\|\delta x\| < K \|x\|. \quad (43)$$

Nous allons montrer l'existence d'un  $d \in \mathcal{D}$  vérifiant (42).

Écrivons  $\delta x = m + \theta$  avec  $m \in \mathbb{Z}$ , et  $|\theta| = \|\delta x\| \leq \frac{1}{2}$ .

Supposons que  $\delta \mid md$  pour tout  $d \in \mathcal{D}$ . On aurait alors

$$\delta \mid \text{pgcd}(m\mathcal{D}) = m \text{pgcd } \mathcal{D} = m.$$

Donc  $\frac{m}{\delta}$  est un entier et l'hypothèse (43) permet de calculer

$$\|x\| = \left\| \frac{m}{\delta} + \frac{\theta}{\delta} \right\| = \frac{|\theta|}{\delta} = \frac{\|\delta x\|}{\delta} < \frac{K}{\delta} \|x\|.$$

Comme  $K \leq 1$  et  $\delta \geq 1$ , nous aboutissons à une absurdité. Par conséquent, il existe un  $d \in \mathcal{D}$  tel que  $\delta \nmid md$ . Pour un tel  $d \in \mathcal{D}$ , montrons que  $\|dx\| \geq K \|x\|$ .

On écrit  $dx = d\frac{m}{\delta} + d\frac{\theta}{\delta}$ , donc

$$\|dx\| \geq \left\| \frac{dm}{\delta} \right\| - \frac{d}{\delta} |\theta|.$$

Or

$$\left\| \frac{dm}{\delta} \right\| \geq \frac{1}{\delta} \geq \frac{2\|x\|}{\delta}$$

et, à l'aide de l'hypothèse (43),

$$\frac{d}{\delta} |\theta| = \frac{d}{\delta} \|\delta x\| \leq \frac{d}{\delta} K \|x\| \leq \frac{\Delta}{\delta} K \|x\|$$

puisque  $\Delta$  est le plus grand élément de  $\mathcal{D}$ . Ainsi

$$\|dx\| \geq \frac{2}{\delta} \|x\| - \frac{\Delta}{\delta} K \|x\|.$$

ce qui termine la preuve puisque  $2/\delta - K\Delta/\delta = K$ .  $\square$

*Remarque 6.* Montrons que la constante de (42) est du bon ordre de grandeur :

Si  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ , nous trouvons que  $K = 1$ , et nous ne pouvons évidemment pas faire mieux.

Si  $\mathcal{D} = \{0, d_1, d_2\}$  avec  $d_2 \geq 3$  impair et  $d_1 := d_2 - 2$ . Notons aussi  $k := \frac{d_2-1}{2}$  et  $l := d_1$  qui sont des entiers tels que

$$k(d_1 + d_2) = ld_2 + 1.$$

Pour le choix de  $x := \frac{l}{d_1+d_2}$ , nous avons donc

$$\begin{aligned} \|d_1 x\| &= \left\| \frac{d_1}{d_2} \frac{d_2 l}{d_1 + d_2} \right\| = \left\| l - k + \frac{1}{d_2} - \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{d_1 + d_2} \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{d_1 + d_2} \right\| = \frac{1}{d_1 + d_2}, \\ \|d_2 x\| &= \left\| \frac{d_2 l}{d_1 + d_2} \right\| = \left\| k - \frac{1}{d_1 + d_2} \right\| = \frac{1}{d_1 + d_2}. \end{aligned}$$

Comme  $\frac{1}{d_1 + d_2} = \frac{\|x\|}{d_1}$ , nous avons pour tout  $d$  de  $\mathcal{D}$ ,  $\|dx\| = \frac{1}{d_1} \|x\|$ . En choisissant  $d_1 = r - 3$  ou  $r - 4$  suivant la parité de  $r$ , nous avons bien trouvé un ensemble  $\mathcal{D}$  pour laquelle la constante de (42) est presque optimale (du bon ordre de grandeur en  $r$ ).

**Lemme 12.** *Pour tout réel  $y$ , nous avons la majoration*

$$|1 + e(y)| \leq 2(1 - 4\|y\|^2). \quad (44)$$

*Démonstration.* Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$  en utilisant la parité et la périodicité de la fonction étudiée. Alors

$$|1 + e(y)| = 2 \cos(\pi y) = 2 - 4 \sin^2(\pi y/2).$$

La concavité de  $z \mapsto \sin(\pi z/2)$  entre 0 et  $\frac{1}{2}$  permet de la minorer cette fonction par sa corde, donc

$$\sin(\pi y/2) \geq \sqrt{2} y$$

d'où l'on déduit la majoration du lemme.  $\square$

**Lemme 13.** *Soit  $\mathcal{D}$  une sous-ensemble de  $\{0, \dots, r - 1\}$  de cardinal  $t \geq 2$ . Soit  $A > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $d_1$  et  $d_2 \in \mathcal{D}$  avec  $\|(d_1 - d_2)x\| \geq A\|x\|$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , nous avons*

$$|\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x)| \leq 1 - \frac{8A^2}{t} \|x\|^2. \quad (45)$$

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Par hypothèse, il existe deux éléments  $d_1$  et  $d_2 \in \mathcal{D}$  tels que

$$\|(d_1 - d_2)x\| \geq A\|x\|. \quad (46)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x)| &= \frac{1}{t} \left| \sum_{d \in \mathcal{D}} e(dx) \right| \\ &\leq \frac{1}{t} |e(d_1x) + e(d_2x)| + \frac{t-2}{t} \\ &\leq 1 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t} |1 + e((d_1 - d_2)x)| \end{aligned}$$

en isolant les éléments de  $\mathcal{D}$  correspondant à  $d_1$  et  $d_2$ . La majoration (44) donne

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x)| &\leq 1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t} \left(1 - 4\|(d_1 - d_2)x\|^2\right) \\ &\leq 1 - \frac{8A^2}{t} \|x\|^2 \end{aligned}$$

en utilisant (46). □

**Corollaire 1.** *Soit  $\mathcal{D}$  est un sous-ensemble strict de  $\{0, \dots, r-1\}$  de cardinal  $t \geq 2$  contenant 0 tel que  $\text{pgcd } \mathcal{D} = 1$ . Alors pour tout  $x$  réel*

$$|\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x)| \leq 1 - \frac{64}{(r+1)^3} \|x\|^2. \quad (47)$$

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{D}' := (\mathcal{D} - \mathcal{D}) \cap [1, +\infty[$  et  $\delta$  (respectivement  $\Delta$ ) le plus petit (respectivement grand) élément de  $\mathcal{D}'$ .

Si  $\delta = 1$ , cela signifie qu'il existe deux éléments  $d_1$  et  $d_2$  dans  $\mathcal{D}$  avec  $d_2 = d_1 + 1$ . L'hypothèse du lemme 13 est donc vérifiée pour le choix de  $A := 1$ , ce qui implique

$$|\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x)| \leq 1 - \frac{8}{t} \|x\|^2.$$

Comme  $r \geq 3$ ,  $r^2 + 3r - 5 \geq 0$ , donc  $r^3 + 3r^2 - 5r + 7 \geq 0$  ce qui se réécrit  $(r+1)^3 \geq 8(r-1)$ . Donc

$$\frac{8}{t} \geq \frac{8}{r-1} \geq \frac{64}{(r+1)^3},$$

ce qui termine la preuve de la majoration du lemme lorsque  $\delta = 1$ .

Si  $t = 2$ , comme  $\mathcal{D}$  contient 0 et comme  $\text{pgcd } \mathcal{D} = 1$ , c'est que  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$  et la majoration (47) est vraie.

Nous pouvons donc supposer que  $\delta \geq 2$  et que  $t \geq 3$ . Comme  $0 \in \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} \setminus \{0\}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{D}'$ , donc  $\text{pgcd } \mathcal{D}' = 1$ . Nous pouvons donc utiliser le lemme 11 avec  $\mathcal{D}'$ , ce qui permet d'appliquer la majoration du lemme 13 et d'obtenir

$$|\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x)| \leq 1 - \frac{32}{t(\delta + \Delta)^2} \|x\|^2. \quad (48)$$

L'hypothèse  $0 \in \mathcal{D}$  implique aussi que

- l'ensemble  $\mathcal{D}$  est  $\delta$  bien espacé
- $\delta$  est inférieur au plus petit élément non nul de  $\mathcal{D}$
- $\Delta$  est aussi le plus grand élément de  $\mathcal{D}$ .

Donc  $\delta + (t-2)\delta$  est inférieur à  $\Delta \leq r-1$ , ce qui donne

$$\delta \leq \frac{r-1}{t-1}. \quad (49)$$



Donc

$$t(\delta + \Delta)^2 \leq t \left( \frac{r-1}{t-1} + r-1 \right)^2 = (r-1)^2 \frac{t^3}{(t-1)^2} =: P(t).$$

Nous avons

$$P'(t) = (r-1)^2 \frac{t^2(t-3)}{(t-1)^3} \geq 0,$$

donc  $P$  est croissante. La majoration (49) et notre hypothèse  $\delta \geq 2$  fournit  $t \leq \frac{r+1}{2}$ , donc

$$t(\delta + \Delta)^2 \leq P\left(\frac{r+1}{2}\right) = \frac{(r+1)^3}{2}.$$

La démonstration du lemme est achevée en reportant cette estimation dans (48).  $\square$

**Lemme 14.** Définissons  $M_m$  par

$$M_m = \max_{u \in [0,1]} \frac{1}{r} \sum_{0 \leq h < r} \left| \mathcal{U}_{\mathcal{D}}\left(\frac{u+h}{r}\right) \right|^m.$$

Alors  $K_m \leq M_m$  pour tout  $m \geq 1$ .

*Démonstration.* Prenons  $N \geq 1$  et calculons l'intégrale de  $G_{\mathcal{D},N}^{2l}$  en découpant le segment  $[0, 1]$  en  $r$  sous-segments de longueur  $\frac{1}{r}$  :

$$\begin{aligned} \|G_{\mathcal{D},N}^m\|_1 &= \sum_{0 \leq h < r} \int_{\frac{h}{r}}^{\frac{h+1}{r}} \prod_{k < N} \left| \mathcal{U}_{\mathcal{D}}(r^k s) \right|^m ds \\ &= \sum_{0 \leq h < r} \int_{\frac{h}{r}}^{\frac{h+1}{r}} \left| \mathcal{U}_{\mathcal{D}}(s) \right|^m \prod_{k < N-1} \left| \mathcal{U}_{\mathcal{D}}(r^k r s) \right|^m ds \\ &= \sum_{0 \leq h < r} \int_0^1 \left| \mathcal{U}_{\mathcal{D}}\left(\frac{u+h}{r}\right) \right|^m \prod_{k < N-1} \left| \mathcal{U}_{\mathcal{D}}(r^k(u+h)) \right|^m du \\ &= \sum_{0 \leq h < r} \int_0^1 \left| \mathcal{U}_{\mathcal{D}}\left(\frac{u+h}{r}\right) \right|^m |G_{\mathcal{D},N-1}|^m du \end{aligned}$$

puisque  $G_{\mathcal{D},N-1}$  est de période 1. La définition de  $M_m$  implique donc

$$\|G_{\mathcal{D},N}^m\|_1 \leq M_m \|G_{\mathcal{D},N-1}^m\|_1 \leq \dots \leq M_m^N$$

qui est un résultat plus précis que celui annoncé dans le lemme.  $\square$

**Lemme 15.** Soit  $B > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|\mathcal{U}_{\mathcal{D}}(x)| \leq 1 - B\|x\|^2. \quad (50)$$

Pour tout  $m \geq 1$ ,

$$M_m < \frac{1}{r} + \sqrt{\frac{\pi}{mB}}.$$

*Démonstration.* Utilisons notre hypothèse (50) pour majorer directement  $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$  dans la définition de  $M_m$ . Ainsi,

$$M_m \leq \max_{u \in [0,1]} \frac{1}{r} \sum_{0 \leq h < r} \left( 1 - B \left\| \frac{u+h}{r} \right\|^2 \right)^m.$$

Mais si  $u \in [0, 1]$ ,

$$\frac{1}{r} \sum_{0 \leq h < r} \left( 1 - B \left\| \frac{u+h}{r} \right\|^2 \right)^m \leq \frac{1}{r} \sum_{-\frac{r}{2} \leq h \leq \frac{r}{2}} \left( 1 - B \frac{(u+h)^2}{r^2} \right)^m$$

puisque  $\|\frac{u+h}{r}\| = \|\frac{u+h-r}{r}\|$ .

Dans le membre de droite, chaque terme de la somme est une fonction concave de  $u$ . Cette somme est donc aussi une fonction concave de  $u$ . La symétrie sur  $h$  impliquant celle en  $u$ , la dérivée de cette fonction majorante s'annule donc pour  $u = 0$ . Le maximum du membre de droite est donc atteint pour  $u = 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} M_m &\leq \frac{1}{r} \sum_{-\frac{r}{2} \leq h \leq \frac{r}{2}} \left(1 - \frac{B}{r^2} h^2\right)^m \\ &\leq \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \sum_{1 \leq h \leq \frac{r}{2}} \exp\left(-\frac{mB}{r^2} h^2\right) \\ &\leq \frac{1}{r} + \frac{2}{r} \int_0^{\frac{r}{2}} \exp\left(-\frac{mB}{r^2} s^2\right) ds \\ &< \frac{1}{r} + \frac{2}{\sqrt{mB}} \int_0^\infty \exp(-u^2) du \end{aligned} \tag{51}$$

qui est bien le résultat du lemme 15.  $\square$

### 3. PREUVE DES THÉORÈMES 1 À 4

#### 3.1. Preuve du Théorème 1.

Les lemmes 10 et 2 donnent les inégalités (9).

#### 3.2. Preuve des Théorèmes 2 et 3.

Les lemmes 13 14 et 15 donnent la majoration, le lemme 2 la minoration des inégalités (11).

Le lemme 11 fournit la preuve de (12). La majoration de (13) s'obtient en utilisant le corollaire 1 et les lemmes 14 et 15.

#### 3.3. Preuve du Théorème 4.

Si  $m$  est assez grand, on a  $K_m = \frac{1}{r} + O_r\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$ . Donc l'hypothèse (28) du Lemme 8 est vérifiée pour  $m$  assez grand (pouvant dépendre de  $r$ ). Le Théorème 4 est donc vrai pour le cas général.

Il reste à montrer que les valeurs annoncées sont possibles : numériquement, en utilisant le Théorème 3, il suffit de trouver un entier pair  $m$  avec

$$m > \frac{\pi (r+1)^3 r^2}{64 (r^{1/2k} - 1)^2}.$$

Nous pouvons donc trouver un entier pair  $m$  vérifiant l'hypothèse (28) avec

$$m < \frac{\pi (r+1)^5}{64 (r^{1/2k} - 1)^2}.$$

Finalement, nous pouvons prendre

$$c = \frac{1}{2km} > \frac{32 (r^{1/2k} - 1)^2}{\pi k (r+1)^5},$$

ce qui termine la démonstration de (14).

Dans le cas où  $\mathcal{D} = \{0, 1\}$  et  $k = 2$ , le Théorème 4 annonce une meilleure constante  $c$ . Pour l'obtenir, nous avons intérêt de choisir  $l$  le plus petit possible pour que l'inégalité (28) reste vraie. Le choix de

$$l := \left\lceil \frac{r^{1.5}}{\pi} + \frac{1}{8} \right\rceil$$

vérifie l'hypothèse (28) et permet de prendre

$$c = \frac{1}{8l} > \frac{\pi}{8} r^{-\frac{3}{2}} (1 - 2r^{-\frac{1}{4}})$$

dans (15).

## RÉFÉRENCES

- [1] W. D. BANKS ET I. E. SHPARLINSKI, Arithmetic properties of numbers with restricted digits, *Acta Arithmetica*, 2004, 313–332.
- [2] C. DARTYGE ET C. MAUDUIT, Nombres presque premiers dont l'écriture en base  $r$  ne comporte pas certains chiffres, *J. Number Theory* **81**,2 (2000), 270–291.
- [3] C. DARTYGE ET C. MAUDUIT, Ensembles de densité nulle contenant des entiers possédant au plus deux facteurs premiers, *J. Number Theory* **91**,2 (2001), 230–255.
- [4] P. ERDŐS, C. MAUDUIT ET A. SÁRKÖZY, On arithmetic properties of integers with missing digits. I. Distribution in residue classes, *J. Number Theory* **70**,2 (1998), 99–120.
- [5] P. ERDŐS, C. MAUDUIT ET A. SÁRKÖZY, On arithmetic properties of integers with missing digits. II. Prime factors, *Discrete Math.* **200**,1-3 (1999), 149–164. Paul Erdős memorial collection.
- [6] M. FILASETA ET S. KONYAGIN., Squarefree values of polynomials all of whose coefficients are 0 and 1, *Acta Arithmetica*, 1996, 191–205.
- [7] S. KONYAGIN, Arithmetic properties of integers with missing digits : distribution in residue classes, *Period. Math. Hungar.* **42**,1-2 (2001), 145–162.
- [8] H. L. MONTGOMERY, Topics in multiplicative number theory, *Lecture Notes in Mathematics*, 1971.