Un module inversible associé au ruban de Möbius, et quelques autres

Daniel Ferrand

Un module inversible associé au ruban de Möbius, et quelques autres

Daniel Ferrand
mars 2007

Abstract Invertible modules are, in a sense, the simplest interesting modules one encounters in commutative algebra, and one cannot avoid them when dealing with algebraic problems coming from number theory or geometry ; they may be seen as the algebraic counterpart of the notion of twisting, or glueing in geometry.

Unfortunately, in most of the textbooks, invertible modules are introduced after quite an amount of prerequisites which dissuade students from discovering them, if they don't intend to become specialists in algebraic geometry ; this notion deserves, however, to be part of the basic education of any mathematician.

To remedy this fact a little, this paper, and the lectures it is based on, aims to introduce the notion of invertible module as directly as possible. The text begins, in a very elementary way, by attaching such a module to the famous Möbius strip — mere translation exercises between a geometric language dealing with a "concrete" object, and perhaps more abstract algebraic notions. In the paragraph 4, invertible modules are defined as projective modules of rank one ; those generated by two elements are constructed in an explicit (versal) way. In the next paragraph some rudiments of Zariski topology are required in order to identify an invertible A-module as a module which is locally isomorphic to A.

In the paragraph 6, I give a new way of attaching to a binary quadratic form an invertible module over a suitable ring of integers ; such a correspondence between forms and *ideals* was already known by Gauss and Dedekind, but it is drastically simplified by the use of the notion of invertible module which is more flexible than that of ideal.

Then follows a very short proof of the triviality of invertible modules over factorial rings.

After that, in the paragraphs 8 and 9, the level of the text is raising a little : tensor products are taken for granted and I review, and use, the first steps of descent theory.

The paper ends with specialisation to Galois coverings, and invertible modules constructed from cocycles of the Galois group ; the particular case where the group is abelian receives some attention in the paragraph 11.

None of the results is really new, but the short ways I manage to get them deserve, I think, to be known. The first half of the text may be understood by students at the advanced undergraduate level.

Introduction

Ce texte est centré sur la notion de *module inversible* ; il en explore la plupart des aspects algébriques, mais de façon élémentaire. Si aucun résultat n'est vraiment nouveau, les parcours - directs - pour y parvenir le sont peut-être.

J'ai rédigé ce texte, qui prolonge des cours de Master anciens, en pensant à des lecteurs qui n'approfondiront peut-être pas la géométrie algébrique, et pour lesquels on peut (on doit) donc éviter les longs préliminaires dissuasifs des présentations usuelles.

Les trois premiers paragraphes sont très élémentaires : ils n'utilisent même pas le produit tensoriel, qui ne sera employé qu'à partir du paragraphe 8. Ce début est une sorte de variation géométrique et algébrique sur le thème du ruban de Möbius ; j'en donne un plongement dans $\mathbf{C}^2$ qui évite l'usage habituel des fonctions trigonométriques, et qui est plus commode que la définition comme quotient de $\mathbf{R}^2$ par l'action d'un groupe.

Le paragraphe 4 définit un module inversible comme un module projectif de rang 1 ; définition et résultats utilisent uniquement l'algèbre linéaire sur un anneau. Les modules inversibles engendrés par deux éléments sont construits très explicitement.

Le paragraphe 5 emploie quelques mots provenant de la topologie (de Zariski) pour désigner des constructions purement algébriques qui auraient eu plus de sens si le dictionnaire entre elles et cette topologie avait été developpé comme il le mérite. Mais cela aurait contrecaré le projet de ce texte : faire court.

Le paragraphe 6 suggère que le concept de module inversible peut simplifier drastiquement la présentation vénérable des liens entre formes quadratiques binaires et classes d'idéaux d'entiers algébriques. L'idée est probablement nouvelle.

Au paragraphe 7, je démontre en quelques lignes le résultat, frappant, de son titre.

Les quatre derniers paragraphes, peut-être un peu plus élaborés, utilisent le produit tensoriel et les diagrammes commutatifs. J'ai tenu à mettre en œuvre (une petite partie de) la théorie de la descente pour en montrer l'efficacité, et parce que je regrette qu'elle n'ait pas encore acquis sa place dans l'enseignement, parmi les outils de base. Le paragraphe sur les constructions galoisiennes s'achève sur le constat que la construction du début du texte en est une !

Le cas où le groupe de Galois est abélien est précisé dans le dernier paragraphe.

1. Géométrie : le ruban de Möbius.

Sur votre bande de papier calque, de forme rectangulaire assez alongée, tracez une droite parallèle aux deux grands côtés, et équidistante d'iceux ; en chaque point de cette droite pensez à, ou tracez, un segment perpendiculaire, que vous imaginerez de longueur infinie. Collez les petits côtés du rectangle, après avoir effectué *le demi-tour fatidique*. La droite parallèle aux grands côtés devient un cercle, et les deux grands côtés sont raboutés et forment l'unique bord de cette surface. Cette chose, la bande de Möbius, devrait vous faire penser à une famille de droites paramétrée par le cercle, famille radicalement différente de celle représentée par un cylindre... et pourtant il suffit de les couper le long d'une droite verticale pour que ces deux surfaces deviennent évidemment isomorphes.

Cet objet géométrique a un analogue algébrique. Considérez l'anneau $A = \mathbf{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ des applications polynomiales définies sur le cercle, à valeurs réelles. C'est un anneau intégralement clos mais l'idéal engendré par $1+x$ et y *n'est pas principal*, et ceci bien que le complexifié de A, $\mathbf{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$, soit un anneau principal.

Dans le paragraphe 1, je donne un modèle mathématique très simple du ruban de Möbius. Certaines propriétés algébriques de ce modèle conduisent, au §2, à lui associer un module sur l'anneau A, module dont le ruban peut être vu comme la figure géométrique ; le fait que le ruban ne soit pas un cylindre est traduit par le fait que ce module n'est pas libre. Au §3 on établit un isomorphisme entre cet A-module et l'idéal de A engendre par $1+x$ et y.

L'article de Swan [8] contient, p. 273, quelques lignes qui m'ont éclairé.

Dans tout ce texte, le symbole $\mathbf{U}$ désigne le groupe des nombres complexes de module 1, vu, géométriquement, comme le cercle unité.

1.1. Définition

Le ruban de Möbius est le sous-ensemble de $\mathbf{U}\times\mathbf{C}$ défini par :

$$\mathbf{M} \;=\; \{(u,z)\in\mathbf{U}\times\mathbf{C}, u\bar{z}=z\}.$$

On le munit de la topologie induite par celle de $\mathbf{U}\times\mathbf{C}$. On utilisera constamment la

Remarque-clé 1.1.1. *Si $v\in\mathbf{U}$, alors la relation $v^2\bar{z}=z$ équivaut à $z=\mu v$, avec $\mu\in\mathbf{R}$.*

En effet, la relation en question s'écrit aussi $\overline{(z/v)}=z/v$.□

La première projection $\mathbf{U}\times\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{U}$ induit une application continue

$$p:\mathbf{M} \quad\longrightarrow\quad \mathbf{U}, \qquad (u,z)\mapsto u.$$

Pour tout $u\in\mathbf{U}$, la fibre $\mathbf{M}_u = p^{-1}(u)$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 1. En effet, $\mathbf{C}$ étant algébriquement clos, tout nombre complexe admet une racine carrée, et si on choisit une racine carrée de u, soit un élément $v\in\mathbf{U}$ tel que $v^2=u$, alors, d'après 1.1.1, on a

$$\mathbf{M}_u \;=\; \mathbf{R}v\subset\mathbf{C}.$$

La droite $\mathbf{M}_u$ est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{(1,u)}$. Ainsi, l'application $p:\mathbf{M}\longrightarrow\mathbf{U}$ conduit à voir $\mathbf{M}$ comme une famille de droites vectorielles dans le plan, paramétrées par le cercle unité, et qui « tournent deux fois

moins vite » que le paramètre.

Avant de faire le lien entre cette définition et la bande de Möbius « concrète », il faut indiquer comment on obtient le ruban de Möbius comme quotient du cylindre $\mathbf{U} \times \mathbf{R}$ par l'action d'un groupe d'ordre 2.

Lemme 1.1.2. *Le carré suivant est cartésien, i.e il permet d'identifier* $\mathbf{U} \times \mathbf{R}$ *au sous-ensemble de* $\mathbf{U} \times \mathbf{M}$ *formé des couples* (v, m) *tels que* $v^2 = p(m)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U} \times \mathbf{R} & \xrightarrow{(v,\mu)\mapsto(v^2,\mu v)} & \mathbf{M} \\ {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbf{U} & \xrightarrow[v\mapsto v^2]{} & \mathbf{U} \end{array}$$

De plus, l'application indiquée $\mathbf{U} \times \mathbf{R} \to \mathbf{M}$, $(v, \mu) \mapsto (v^2, \mu v)$ *permet d'identifier* $\mathbf{M}$ *avec le quotient de* $\mathbf{U} \times \mathbf{R}$ *sous l'involution* $(v, \mu) \mapsto (-v, -\mu)$.

(En termes savants on énoncerait que le ruban de Möbius est un fibré en droites sur $\mathbf{U}$, trivialisé par le revêtement $v \mapsto v^2$; « trivialisé » veut dire : rendu isomorphe au cylindre $\mathbf{U} \times \mathbf{R}$.)

La première assertion du lemme répète la remarque-clé. Pour vérifier la seconde, considérons des éléments (v, μ) et (v', μ') de $\mathbf{U} \times \mathbf{R}$ ayant la même image dans $\mathbf{M}$; on a donc $v^2 = v'^2$, d'où $v' = \varepsilon v$, avec $\varepsilon = \pm 1$, et $\mu v = \mu' v' = \mu' \varepsilon v$; d'où $(v', \mu') = \varepsilon(v, \mu)$.

1.2. Reconnaître la bande de Möbius

Rappelons la définition classique du ruban de Möbius comme quotient du plan $\mathbf{R}^2$ par l'action d'un groupe Γ (Godbillon, p.43 ; Stillwell p.25, où la *bande* de Möbius et nommée "Möbius strip", tandis que son *ruban* est nommé "twisted cylinder", ce qui est très évocateur).

On considère la « symétrie glissée » ("glide reflection") $\gamma : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $\gamma(\lambda, \mu) = (\lambda + 1, -\mu)$, et le groupe Γ (isomorphe à $\mathbf{Z}$) engendré par γ.

On remarque que $\gamma^2(\lambda, \mu) = (\lambda + 2, \mu)$; il est donc naturel de passer d'abord au quotient par le sous-groupe engendré par γ^2 puisqu'il n'agit que par translation sur le premier facteur ; l'application exponentielle donne alors un homéomorphisme

$$\mathbf{R}^2 / < \gamma^2 > \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathbf{U} \times \mathbf{R}, \qquad (\lambda, \mu) \mapsto (e^{i\pi\lambda}, \mu).$$

Comme $e^{i\pi} = -1$, la symétrie glissée γ induit sur le quotient l'application $(u, \mu) \mapsto (-u, -\mu)$; c'est précisement l'involution considérée dans le lemme précédent, et ce lemme implique donc qu'on a un homéomorphisme

$$\mathbf{R}^2/\Gamma \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathbf{M}.$$

Pour remonter du *ruban* (surface non compacte, sans bord, non immergeable dans l'espace) à la *bande* (surface compacte, à bord, mais qu'on peut fabriquer et voir), on se restreint au rectangle $D = [0, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbf{R}^2$; les seuls points de D que γ envoie dans D sont les points du bord $(0, \mu)$, et $\gamma(0, \mu) = (1, -\mu)$; en identifiant pour chaque $\mu \in [-1, 1]$, les points $(0, \mu)$ et $(1, -\mu)$ on trouve la fameuse bande.

1.3. Les sections

Une *section* de p est, par définition, une application continue $s : \mathbf{U} \to \mathbf{M}$ telle que $p \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbf{U}}$. Il est habituel d'écrire ces applications verticalement :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{M} & \\ & {\scriptstyle s}\uparrow \quad \downarrow{\scriptstyle p} & \\ & \mathbf{U} & \end{array}$$

La *section nulle* est l'application $s_0 : \mathbf{U} \to \mathbf{M}$ définie par $s_0(u) = (u, 0)$.

Une section peut être vue comme la donnée, pour chaque u, d'un point sur la droite $\mathbf{M}_u$, point qui varie continûment avec u.

Soit s une section ; notons $f : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{C}$ l'application composée

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{M} & \longrightarrow & \mathbf{U} \times \mathbf{C} & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & \mathbf{C} \\ {\scriptstyle s}\uparrow & & & \nearrow{\scriptstyle f} & \\ \mathbf{U} & & & & \end{array}$$

L'application f est continue, tout comme s, et la condition $p \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbf{U}}$ montre que pour tout $u \in \mathbf{U}$, on a

$$s(u) = (u, f(u)).$$

Comme $(u, f(u))$ est dans $\mathbf{M}$, on a

$$(\star) \qquad u\overline{f(u)} = f(u).$$

Proposition 1.3.1. *Toute section rencontre la section nulle.*

Il s'agit de voir qu'une application continue $f : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant la propriété (*) prend la valeur 0. En faisant le produit membres à membres de la relation (*) pour u et pour son conjugué $\bar{u}$, on trouve, puisque $u\bar{u} = 1$,

$$\overline{f(u)f(\bar{u})} = f(u)f(\bar{u}).$$

Autrement dit, en posant $g(u) = f(u)f(\bar{u})$, on définit une application continue $g : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbf{R}$, et il faut vérifier que l'ensemble $g(\mathbf{U}) \subset \mathbf{R}$ contient l'origine. Comme $\mathbf{U}$ est un espace connexe et compact, $g(\mathbf{U})$ est un intervalle fermé de $\mathbf{R}$. La relation (*), avec $u = 1$ montre que $f(1)$ est réel, donc que $g(1) \geq 0$; pour $u = -1$, on déduit de cette même relation que $\overline{f(-1)} = -f(-1)$, donc que $f(-1)$ est imaginaire pur ; cela montre que $g(-1) \leq 0$. D'où le résultat. □

Conclusion 1.3.2. *Le ruban de Möbius n'est pas isomorphe à un cylindre.*

Le sens à donner à l'adjectif *isomorphe* est précisé dans la démonstration ; elle se fait par l'absurde en supposant qu'il existe un homéomorphisme $h : \mathbf{U} \times \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}$ compatible avec les projections

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U} \times \mathbf{R} & \xrightarrow{\quad h \quad} & \mathbf{M} \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_1}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & \mathbf{U} & \end{array}$$

et induisant sur chaque fibre un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels $\mathbf{R} \xrightarrow{\sim} \mathbf{M}_u$. Comme, pour u fixé, l'isomorhisme $\lambda \mapsto h(u,\lambda)$ est supposé linéaire, on a $h(u,\lambda) = \lambda h(u,1)$, donc $h(u,1) \neq 0$. L'application $s : \mathbf{U} \to \mathbf{M}$ définie par $s(u) = h(u,1)$ serait donc une section (continue) de p partout non nulle ; on a vu que c'est impossible.

2. Traduction en termes algébriques

2.1. L'espace $\mathbf{M}$ a été défini comme l'ensemble des points de $\mathbf{U} \times \mathbf{C}$ qui sont fixes sous l'involution

$$\mathbf{U} \times \mathbf{C} \to \mathbf{U} \times \mathbf{C}, \quad (u,z) \mapsto (u, u\bar{z}).$$

Il est plus commode de travailler avec un objet « paramétré », c'est-à-dire un objet défini plutôt comme *l'image* d'une application. Pour passer d'un point de vue à l'autre, on introduit le projecteur associé, soit, ici, l'application

$$q(u,z) = (u, \frac{1}{2}(u\bar{z} + z)).$$

Une vérification immédiate montre que $q \circ q = q$, et que $\mathrm{Im}(q) = \mathbf{M}$.

L'application $z \mapsto \frac{1}{2}(u\bar{z} + z)$ est donc un projecteur ($\mathbf{R}$-linéaire) du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{C}$, dépendant du paramètre u. Donnons-en sa matrice.

Si on écrit $u = x + iy$, avec la contrainte $x^2 + y^2 = 1$, et $z = a + ib$, on trouve $\frac{1}{2}(u\bar{z} + z) = \frac{1}{2}[((1+x)a + yb) + i(ya + (1-x)b)]$. Dans l'espace fibre ($= \mathbf{C}$) au dessus de $u = x + iy$, la matrice de q est donc

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x & y \\ y & 1-x \end{pmatrix}}$$

2.2. Posons $A = \mathbf{R}[X,Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$.

Il faut voir A comme l'anneau des fonctions continues $a : \mathbf{U} \to \mathbf{R}$ qui sont polynomiales au sens suivant : il existe un polynôme $F(X,Y) \in \mathbf{R}[X,Y]$ tel que, pour $u = \xi + i\eta \in \mathbf{U}$, on ait $a(u) = F(\xi,\eta)$. Bien évidemment F n'est défini par a qu'à un multiple près de $X^2 + Y^2 - 1$, et c'est pourquoi l'on passe au quotient.

Désignons désormais par x et y les classes de X et de Y dans l'anneau quotient A, et considérons la matrice à coefficients dans A

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+x & y \\ y & 1-x \end{pmatrix}$$

Le théorème de Hamilton-Cayley s'écrit

$$Q^2 - \mathrm{Tr}(Q)Q + \det(Q) = 0.$$

Comme $\mathrm{Tr}(Q) = 1$ et $\det(Q) = 0$, on a

$$Q^2 = Q.$$

Cette matrice définit une application A-linéaire $Q : A^2 \to A^2$. On pose

$$M = \mathrm{Im}(Q) = \mathrm{Ker}(1 - Q).$$

Ce module M est l'analogue algébrique du ruban de Möbius.

C'est, en fait, bien plus qu'une analogie : suivant une idée due à GELFAND et maintenant classique, on établit une correspondance rigoureuse entre les points de vue algébrique et géométrique : on reconstitue d'abord $\mathbf{U}$ à partir de la $\mathbf{R}$-algèbre A grâce à une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}-Alg}(A, \mathbf{R}) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathbf{U}.$$

Cette application associe à un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres $A \to \mathbf{R}$ le couple $(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^2$ formé des images par ce morphisme des éléments $x, y \in A$; l'égalité $x^2 + y^2 = 1$ dans A se propage en la relation $\xi^2 + \eta^2 = 1$ entre ces nombres réels ; ils définissent donc un élément $u = \xi + i\eta \in \mathbf{U}$ (On peut aussi reconstituer la topologie de $\mathbf{U}$ à partir de A). Ainsi l'ensemble, et même l'espace topologique, $\mathbf{U}$ est-il déterminé par l'algèbre A des applications polynomiales de $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{R}$.

Montrons ensuite comment associer à un élément de M une section (polynomiale) de l'application $p : \mathbf{M} \to \mathbf{U}$.

À un élément $\binom{a}{b} \in A^2$, c'est-à-dire à un couple d'éléments de A, vus comme applications polynomiales de $\mathbf{U}$ dans $\mathbf{R}$, on associe l'application $a + ib : \mathbf{U} \to \mathbf{C}$; en particulier, les éléments x et y de A doivent être vus commes les fonctions coordonnées, si bien que l'application $x + iy : \mathbf{U} \to \mathbf{C}$ n'est autre que l'injection $\mathbf{U} \subset \mathbf{C}$.

Si $\binom{a}{b}$ est dans $M = \mathrm{Ker}(1 - Q)$, alors $Q\binom{a}{b} = \binom{a}{b}$, ce qui s'écrit aussi, comme on le vérifie immédiatement,

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Si on utilise l'écriture complexe, cela donne

2.2.1. $$(x + iy)(a - ib) = a + ib.$$

Cette relation sera réinterprétée au §10.7 comme un cocycle, mais il s'agit seulement ici de définir, à partir d'elle, une section polynomiale de p. Or, si on pose $f = a + ib$, la relation 2.2.1 s'écrit aussi :

$$\text{pour tout } u \in \mathbf{U}, \text{ on a} \quad u.\overline{f(u)} = f(u).$$

Bref, on a $(u, f(u)) \in \mathbf{M}$, et l'application $u \mapsto (u, f(u))$ est la section annoncée.

2.3. Montrons que le A-module M n'est pas isomorphe à A, contrairement à ce que tout laisse penser (Au §4, ce module sera qualifié d'inversible).

Si on pose $M' = \mathrm{Im}(1 - Q)$, on obtient une décomposition en somme directe de A-modules

$$M \,\oplus\, M' \;=\; A^2.$$

La vérification de cela, classique pour les espaces vectoriels, est exactement la même pour les modules ; elle utilise seulement le fait que l'endomorphisme Q est idempotent. Je ne la recopie pas.

Soit K le corps des fractions de A (on verra plus bas que A est intègre). Notons Q_K l'endomorphisme du K-espace vectoriel K^2 de matrice Q, et posons $V = \mathrm{Im}(Q_K)$ et $V' = \mathrm{Im}(1 - Q_K)$. Ces K-espaces vectoriels donnent la décomposition

$$V \oplus V' = K^2.$$

Comme les matrices Q et $1 - Q$ sont non nulles, on a $\dim_K(V) = \dim_K(V') = 1$; V et V' sont, par suite, isomorphes à K et ne peuvent donc pas contenir de partie libre sur A ayant 2 éléments. Enfin, l'inclusion $A^2 \subset K^2$ entraîne les suivantes : $M = Q(A^2) \subset Q(K^2) = V$, et $M' \subset V'$.

Le module $M = \mathrm{Im}(Q)$ contient les éléments $Q\binom{1}{0} = \binom{1+x}{y}$ et $Q\binom{0}{1} = \binom{y}{1-x}$. Si M admettait une base, elle serait réduite à un élément puisque M est un sous-module de V ; notons $\binom{a}{b}$ ce générateur libre supposé ; il existerait des éléments $c, d \in A$ tels que $\binom{1+x}{y} = c\binom{a}{b}$, et $\binom{y}{1-x} = d\binom{a}{b}$; en particulier, on aurait $1 + x = ca$ et $1 - x = db$, donc $2 = ca + db$. Mais alors les applications a et b ne pourraient s'annuler simultanément, et la section $u \mapsto (u, f(u))$ associée, comme ci-dessus, à $\binom{a}{b}$ serait partout non nulle. On a vu que c'est impossible (1.3.1).

Si l'anneau A était principal, M et M' seraient libres (comme sous-modules du module libre A^2), donc libres de rang 1 comme sous-modules de V et V', et on pourrait encore conclure que M est isomorphe à A. Cela montre géométriquement que A n'est pas principal.

3. Algèbre : l'anneau $A = \mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$

Ce paragraphe aborde plusieurs aspects de la non factorialité de A (on explique en 3.6 pourquoi A serait principal s'il était factoriel). On montre, en particulier, que l'idéal $(1 + x, y)$ n'est pas principal. Ces digressions peuvent être lues comme des commentaires, anticipés, au §7.

3.1 Le morphisme $\mathbf{R}[X] \to A$.

Pour établir certaines propriétés de l'anneau $A = \mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$ on utilise ici le morphisme d'inclusion $\mathbf{R}[X] \longrightarrow A$ qui est l'analogue algébrique de la projection du cercle unité $\mathbf{U}$ sur l'axe des X. Toute fonction polynomiale sur cet axe, i.e. tout polynôme $F(X)$, fournit, en la composant avec la projection (la partie réelle), une application polynomiale définie sur $\mathbf{U}$, à savoir $u \mapsto F(\Re u)$.

Notons, comme plus haut, par x et y les classes dans A de X et de Y. En écrivant

$$A = \mathbf{R}[X][Y]/(Y^2 - (1 - X^2)),$$

on fait apparaître A comme l'anneau obtenu en adjoignant à $\mathbf{R}[X]$ un élément y qui est une racine carrée de $1 - X^2$; cela montre déja que *tout élément de A s'écrit de façon unique sous la forme $p(x) + yq(x)$.*

Par ailleurs, le critère d'Eisenstein, appliqué avec l'élément premier $X - 1$ de $\mathbf{R}[X]$ entraîne que $Y^2 - (1 - X^2)$ est irréductible, donc que A est *intègre.*

Il y a ici une petite difficulté typographique : la variable X de $\mathbf{R}[X]$ est écrite x dans A, bien qu'elle reste trancendante sur $\mathbf{R}$ puisque le morphisme $\mathbf{R}[X] \to A$ est injectif ; il serait peut-être logique - mais certainement disgracieux - d'écrire $p(X) + yq(X)$.

On introduit l'application norme (déja utilisée implicitement dans la démonstration de 1.3.1.)

$$\mathbf{R}[X] \xrightarrow{N} A$$

Soit $\sigma : A \to A$ l'automorphisme de $\mathbf{R}[X]$-algèbres défini par $\sigma(y) = -y$ (C'est bien un automorphisme puisque $-y$ est une racine de $Y^2 - (1 - X^2)$). Si on pense à un élément $a \in A$ comme à une application polynomiale $a : \mathbf{U} \to \mathbf{R}$, $u \mapsto a(u)$, alors $\sigma(a)$ est l'application $u \mapsto a(\bar{u})$. Posons, pour $a \in A$,

$$N(a) = a\sigma(a).$$

Comme σ respecte la multiplication, il en est de même de N ; on a donc $N(ab) = N(a)N(b)$, et, si a ne dépend pas de y il est invariant par σ et $N(a) = a^2$.

En utilisant la base $\{1, y\}$ du $\mathbf{R}[X]$-module A, on peut écrire $a = p(x) + yq(x)$, et

$$N(p(x) + yq(x)) = p(x)^2 - y^2q(x)^2 = p(x)^2 + (x^2 - 1)q(x)^2.$$

C'est un polynôme en X, dont on peut considérer le degré.

Lemme 3.1.1 *Pour tout* $a \in A$, $\deg N(a) \neq 1$.

En effet, le polynôme à coefficients réels $p(X)^2 + (X^2 - 1)q(X)^2$ prend des valeurs ≥ 0 sur l'ouvert $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\subset \mathbf{R}$, ce qu'un polynôme de degré 1 ne peut faire.

3.2. Un élément de A irréductible et non premier

Le lemme précédent implique immédiatement que y est un élément irréductible dans A : en effet, une égalité $y = ab$, avec $a, b \in A$, entraîne que $X^2 - 1 = N(y) = N(a)N(b)$; comme $N(a)$ et $N(b)$ sont des polynômes en X de degré $\neq 1$, l'un des deux est constant, donc a ou b est inversible.

L'irréductibilité de y dans A est liée à la topologie de $\mathbf{R}$: cet élément y n'est plus irréductible dans l'anneau $\mathbf{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$, car on peut le décomposer en $y = \frac{1}{2i}(1 - x + iy)(1 + x + iy)$. (voir 3.5)

On constate ensuite que l'idéal yA n'est pas premier, puisque l'anneau quotient

$$A/yA = \mathbf{R}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1, Y) \simeq \mathbf{R}[X]/(X^2 - 1)$$

n'est pas intègre (la classe $\bar{x}$ de X est distincte de ± 1 et vérifie la relation $(\bar{x} - 1)(\bar{x} + 1) = 0$).

Cela montre que l'anneau A n'est pas factoriel, et a fortiori qu'il n'est pas principal.

3.3. L'idéal $(1 + x)A + yA$.

Notons I cet idéal de A.

3.3.1. On va montrer que *le module M introduit en 2.2 est isomorphe à I*, ce qui justifie de considérer ici cet idéal. Plus précisément, on va montrer que la projection

$$\mathrm{pr}_1 : A^2 \to A$$

induit un isomorphisme de M sur I. En effet, l'idéal I est engendré par la première ligne de la matrice Q, c'est-à-dire par les premières coordonnées de $Q\binom{1}{0}$ et $Q\binom{0}{1}$. Or, $\mathrm{Im}(Q) = M$; par suite,

$$I \;=\; \mathrm{pr}_1(M).$$

Il reste à montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_1) \cap M = 0$, c'est-à-dire, puisque $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_1) = 0 \times A$, que l'on a $M \cap 0 \times A = 0$. Or, si $\binom{0}{a} \in M$, alors $Q\binom{0}{a} = \binom{0}{a}$, ce qui équivaut à : $ya = 0$, et $(1-x)a = a$, d'où $xa = 0$; mais alors $a = (x^2+y^2)a = 0$.

On a montré en 2.3, par voie géométrique, que le A-module M n'est pas libre, cela entraîne donc que l'idéal I n'est pas principal.

On va retrouver ce résultat presqu'algébriquement, c'est-à-dire en réduisant les inévitables arguments topologiques au seul lemme 3.1.1 ci-dessus.

3.3.2. Montrons d'abord que l'idéal I^2 est principal, engendré par $1 + x$.

L'idéal I^2 est engendré par les éléments $(1+x)^2, (1+x)y$, et $y^2 = (1+x)(1-x)$; mettant $1+x$ en facteur, il suffit de voir que l'idéal engendré par $1+x$, y et $1-x$ est égal à A ; or, il contient $(1+x)+(1-x) = 2$, qui est un élément inversible.

3.3.3. L'idéal I n'est pas principal.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $I = aA$. On a alors $(1+x)A = I^2 = a^2A$; en particulier, il existe des éléments b et c dans A tels que $a^2 = (1+x)b$ et $1+x = a^2c$. Ces éléments b et c sont inverses l'un de l'autre puisque $1+x = (1+x)bc$, et que A est intègre.

Prenant les normes des deux membres de l'égalité $a^2 = (1+x)b$, on trouve

$$N(a)^2 = (1+x)^2 N(b).$$

Comme b est inversible, $N(b)$ est un élément inversible de $\mathbf{R}[X]$, c'est-à-dire une constante non nulle ; par suite, $N(a)$ est un polynôme de degré 1. C'est impossible.

3.4. L'analogue algébrique du revêtement $v \mapsto v^2$

Dans ce paragraphe et le suivant on indique comment rendre l'idéal I principal — et le module M libre — en passant de A à un sur-anneau un peu plus gros.

Une première méthode consiste à algébriser le lemme 1.1.2 qui montre que l'application $v \mapsto v^2$ transforme le ruban de Möbius en un cylindre. En termes des coordonnées réelles (x, y) (de sorte que $v = x + iy$), cette application s'écrit

$$(x, y) \longmapsto (x^2 - y^2, 2xy).$$

Cela indique ce qu'il faut faire.

Pour définir le morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres $\alpha : A \to A$ correspondant à $v \mapsto v^2$, il est plus clair d'écrire, dans le second anneau, l'anneau « but », ξ et η, à la place de x et de y. On pose alors

$$\alpha(x) = \xi^2 - \eta^2, \qquad \alpha(y) = 2\xi\eta.$$

Cela définit bien un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres puisque l'image de $x^2 + y^2 - 1$ est $(\xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2 - 1 = (\xi^2 + \eta^2)^2 - 1 = 0$. L'idéal engendré par $\alpha(I)$ est engendré par $\alpha(1+x) = 1 + \xi^2 - \eta^2 = 2\xi^2$ et $\alpha(y) = 2\xi\eta$; comme l'idéal engendré par ξ et η est égal à A (puisqu'il contient $1 = \xi^2 + \eta^2$), on voit que

$$\alpha(I)A = \xi A.$$

On aurait pu aussi remarquer que la matrice $\alpha(Q)$ est

$$\begin{pmatrix} \xi^2 & \xi\eta \\ \xi\eta & \eta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} . (\xi \quad \eta)$$

Par suite, $\mathrm{Im}(\alpha(Q))$ est visiblement le module libre engendré par $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in A^2$.

3.5. Complexifier A

3.5.1. Considérons l'anneau A comme un sous-anneau de $B = \mathbf{C}[X, Y]/(X^2 + Y^2 - 1)$.

L'anneau B est principal. En effet, l'isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres

$$\mathbf{C}[X, Y] \longrightarrow \mathbf{C}[Z, Z'], \qquad X \mapsto \frac{1}{2}(Z + Z'),\ Y \mapsto \frac{1}{2i}(Z - Z'),$$

donne par passage aux quotients un isomorphisme

$$\mathbf{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \quad \widetilde{\longrightarrow} \quad \mathbf{C}[Z,Z']/(ZZ'-1).$$

Ainsi B est isomorphe à l'anneau de fractions $\mathbf{C}[Z]_Z$, lequel est principal.

D'ailleurs, il est clair que l'élément $b = 1 + x + iy \in IB$ engendre cet idéal puisque

$$1 + x = \frac{1}{2}(1 + x - iy)(1 + x + iy), \qquad et \qquad y = \frac{1}{2i}(1 - x + iy)(1 + x + iy).$$

3.5.2. On va préciser les relations entre A et B. Notons que $B = A[i]$ (ce qui justifie le titre du paragraphe) : en effet, chaque élément de B s'écrit de façon unique sous la forme $p(x) + yq(x)$, où p et q sont des polynômes à coefficients complexes ; on peut donc les décomposer en $p = p' + ip''$, et $q = q' + iq''$, où les quatres polynômes écrits sont à coefficients réels ; mais alors, $p + yq = (p' + yq') + i(p'' + yq'')$.

On peut donc définir un automorphisme de conjugaison $b \mapsto \bar{b}$: il ne porte que sur les coefficients des divers polynômes, et qui laisse invariants x et y ; avec cette notation, on a pour tout $b \in B$, l'équivalence $b \in A \Leftrightarrow b = \bar{b}$.

Introduisons les corps des fractions K et L, respectivement de A et de B ; on a le diagramme commutatif de morphismes d'inclusion :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & L \end{array}$$

Montrons l'égalité $K \cap B = A$.

Il est - ou devrait être - clair que $K[i] = L$, donc que K est le sous-corps de L formé des éléments invariants sous la conjugaison invoquée ci-dessus ; si un tel élément est aussi dans B, alors il est dans A.

Cela implique, en particulier, que A est *intégralement clos*, autrement dit qu'un élément de K qui est racine d'un polynôme unitaire $F(T) \in A[T]$ est dans A : en effet, un tel élément, vu dans L est dans B puisque B est principal, donc intégralement clos. On n'utilisera pas cette propriété.

Appendice 3.6. Sur certains anneaux factoriels

Un anneau principal est factoriel, et il existe des anneaux factoriels qui ne sont pas principaux, par exemple $\mathbf{Z}[X]$.

Pour clarifier le §3, on montre que, dans la situation rencontrée, un anneau factoriel est nécessairement principal.

Proposition 3.6.1. *Soient R un anneau principal contenu dans un anneau A ; on suppose que A est un R-module libre de rang fini. Alors, si A est factoriel, il est principal.*

Un idéal I de A est, en particulier, un sous-R-module du R-module libre de type fini A ; c'est donc un R-module (libre et) de type fini ; en particulier I est un idéal de A de type fini. Pour montrer qu'il est principal, on peut donc se ramener, par récurrence, au cas où il est engendré par deux éléments a et b ; soit d un plus grand diviseur commun (A est supposé factoriel) ; écrivons $a = da'$ et $b = db'$, de sorte que a' et b' n'ont pas de diviseur commun non inversible ; on a $aA + bA = d(a'A + b'A)$.

On est donc ramené à démontrer que si deux éléments a et b de A n'ont pas de diviseur commun non inversible, alors la relation de Bézout est vérifiée : $aA + bA = A$; elle équivaut à l'inversibilité de a modulo b (c'est-à-dire à l'inversibilité de l'image de a dans l'anneau A/bA).

Si a est inversible dans A, on a fini ; sinon, a est un produit d'éléments irréductibles de A. Or, si l'on peut décomposer a en un produit $a = a'a''$ de deux éléments a' et a'', inversibles modulo b, alors a est lui-même inversible modulo b. Par récurrence sur le nombre de facteurs irréductibles de a, il suffit donc de traiter le cas où a est irréductible ; l'hypothèse sur a et b signifie alors que a ne divise pas b, c'est-à-dire que $b \notin aA$, et il faut conclure que $aA + bA = A$; autrement dit, il faut montrer que l'idéal aA est *maximal*. En changeant la notation, et en utilisant le fait que dans un anneau factoriel, un élément irréductible est premier, on est ramené à démontrer ceci : *sous les hypothèses de la proposition, si p engendre un idéal premier non nul de A, alors cet idéal pA est maximal, i.e A/pA est un corps.*

On remarquera que la factorialité de A n'est plus utilisée dans la suite ; par contre le fait que A soit fini et libre sur le sous-anneau principal R est essentiel.

Montrons d'abord que l'idéal $pA \cap R$ est non nul. L'application $u : A \to A,\ a \mapsto pa$ est un endomorphisme R-linéaire du R-module libre A. Le théorème de Hamilton-Cayley montre qu'il existe un polynôme unitaire $F(T) \in R[T]$ tel que $F(p) = 0$. Choisissons un polynôme unitaire $F \in R[T]$, annulant p et de degré minimum d, soit

$$F(T) \ = \ X^d + r_{d-1}X^{d-1} + \cdots + r_0$$

Le terme constant r_0 est non nul, sinon $F(T) = TF_1(T)$, et l'intégrité de A montre que $F_1(p) = 0$, contrairement à la minimalité du degré. Il est clair que $0 \neq r_0 \in R \cap pA$.

En passant aux quotients, on obtient un homomorphisme *injectif* d'anneaux

$$R/pA \cap R \ \longrightarrow \ A/pA.$$

Comme pA est premier, l'anneau A/pA est intègre, donc son sous-anneau $R/pA \cap R$ l'est aussi ; l'idéal $pA \cap R$ est donc premier, et par suite maximal puisqu'il est non nul et que R est principal ; bref, $R/pA \cap R$ est un corps, et l'anneau intègre A/pA apparaît comme un espace vectoriel de dimension finie sur ce corps ; on en déduit que A/pA est un corps, en invoquant le lemme classique suivant.

Lemme 3.6.2. *Un anneau intègre S qui est un espace vectoriel de dimension finie sur un sous-corps K, est lui-même un corps.*

En effet, si $s \in S$ est un élément non nul, la multiplication par s est un endomorphisme injectif de S, puisque S est intègre, donc bijectif car S est un vectoriel de dimension finie sur le sous-corps K ; l'élément unité 1 est donc dans l'image de cet endomorphisme ; ainsi s admet un inverse.

4. Modules inversibles

Il y a, au moins, trois définitions possibles pour la notion de module inversible. On donne d'abord ici la plus concrète et qui demande le moins de préliminaires. Les deux autres seront introduites dans les §§5 et 8, ainsi que leur équivalence.

4.1. Un module inversible est un module projectif de rang 1

4.1.1 Un A-module L est dit *projectif* (de type fini) s'il est facteur direct d'un A-module libre de type fini, autrement dit, s'il existe un A-module L' et un isomorphisme $L \oplus L' \simeq A^n$. Il revient au même de dire qu'il existe une application A-linéaire $f : A^n \to A^n$ qui est un projecteur ($f^2 = f$), et un isomorphisme

$$\mathrm{Im}(f) \ \simeq \ L.$$

L'endomorphisme f se factorise en $f = u \circ v$, où $u : L \to A^n$ est l'injection canonique, et $v : A^n \to L$ est la surjection déduite de f. Comme $f^2 = f$, on a $uvuv = uv$, mais v est surjectif et u est injectif ; on a donc deux applications

$$L \ \xrightarrow{u} \ A^n \ \xrightarrow{v} \ L \quad \text{telles que} \quad vu = \mathrm{Id}_L.$$

4.1.2 Pour un espace vectoriel (de dimension finie), le mot *rang* est synonyme de *dimension*, et on emploie indifféremment l'un ou l'autre.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, de sorte que l'anneau quotient $A/\mathfrak{p}$ est intègre, et admet donc un corps des fractions que l'on note $\kappa(\mathfrak{p})$.

Soit L un A-module de type fini, et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier ; le quotient $L/\mathfrak{p}L$ est un module sur l'anneau intègre $A/\mathfrak{p}$, et son localisé $(L/\mathfrak{p}L)_\mathfrak{p}$ est un $\kappa(\mathfrak{p})$-espace vectoriel de dimension finie ; on pose

$$\mathrm{rang}_\mathfrak{p}(L) \;=\; \dim_{\kappa(\mathfrak{p})}((L/\mathfrak{p}L)_\mathfrak{p}).$$

Un A-module de type fini L est dit *de rang n* si l'application $\mathfrak{p} \mapsto \mathrm{rang}_\mathfrak{p}(L)$ est constante de valeur n.

Le rang d'un module projectif de type fini se trouve être égal au rang d'un projecteur associé ; plus précisement :

Lemme 4.1.3. *Soit $f = f^2$ un projecteur de A^n, et soit $L = \mathrm{Im}(f)$ son image. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ; notons $k = \kappa(\mathfrak{p})$ le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$, et affectons d'une barre les k-endomorphismes obtenus par réduction modulo $\mathfrak{p}$ et passage au corps des fractions. Alors, le k-espace vectoriel $(L/\mathfrak{p}L)_\mathfrak{p}$ est canoniquement isomorphe à l'image de l'endomorphisme $\bar{f} : k^n \to k^n$; en particulier, la dimension de $(L/\mathfrak{p}L)_\mathfrak{p}$, soit $\mathrm{rang}_\mathfrak{p}(L)$, est égale au rang de l'endomorphisme $\bar{f}$.*

Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
A^n & \xrightarrow{v} & L & \xrightarrow{u} & A^n & \xrightarrow{v} & L \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
k^n & \xrightarrow[\bar{v}]{} & (L/\mathfrak{p}L)_\mathfrak{p} & \xrightarrow[\bar{u}]{} & k^n & \xrightarrow[\bar{v}]{} & (L/\mathfrak{p}L)_\mathfrak{p}
\end{array}$$

On va voir que $\bar{u}$ établit un isomorphisme de $(L/\mathfrak{p}L)_\mathfrak{p}$ sur $\mathrm{Im}(\bar{f})$. Les deux carrés de gauche montrent ceci : comme v est surjectif, $\bar{v}$ l'est aussi ; donc $\mathrm{Im}(\bar{f}) = \mathrm{Im}(\bar{u}\bar{v}) = \mathrm{Im}(\bar{u})$; il reste donc à vérifier que $\bar{u}$ est injectif. Mais, en regardant les deux carrés de droite, on voit que $\bar{v}\bar{u} = \mathrm{Id}$, donc que $\bar{u}$ est injectif.□

Définition 4.1.4 *Un A-module est dit* inversible *s'il est projectif, de type fini et de rang* 1.

L'anneau A est lui-même un A-module inversible ; un module inversible et libre est isomorphe à A ; on dit alors volontiers qu'un tel module inversible est *trivial*. En général, montrer qu'un module inversible *n'est pas* libre est chose malaisée.

Proposition 4.1.5. *Pour un endomorphisme f de A^2, la condition : être un projecteur dont l'image est de rang 1, équivaut à*

$$(\star) \qquad \mathrm{Tr}(f) = 1, \quad \textit{et} \quad \det(f) = 0.$$

La démonstration de la proposition utilise le théorème de Hamilton-Cayley, qui s'écrit ici

$$f^2 - \mathrm{Tr}(f)f + \det(f) = 0.$$

Si les conditions $(\star)$ sont vérifiées, alors $f^2 = f$. Posons $L = \mathrm{Im}(f)$; il s'agit de montrer que L est de rang 1. Considérons donc un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A ; d'après le lemme 4.1.3, dont nous gardons les notations, il faut voir que le rang du projecteur $\bar{f}$ du k-espace vectoriel k^2, est égal à 1. Or, $\bar{f}$ est non nul - donc de rang ≥ 1 - puisque sa trace est 1, et il n'est pas un isomorphisme puisque son déterminant est nul.

Avant de démontrer la réciproque, rappelons le

Lemme 4.1.6 *Soit $e = e^2$ un idempotent d'un anneau (commutatif) A. Si e n'est contenu dans aucun idéal premier de A (resp. s'il est contenu dans tous), alors $e = 1$ (resp. $e = 0$).*

Si e n'est contenu dans aucun idéal premier, il est inversible ; mais $e(1-e) = 0$, donc $1 - e = 0$; l'assertion parallèle se déduit de la première en remplaçant e par $1 - e$. □

Pour achever la démonstration de la proposition, montrons qu'un projecteur f de A^2 dont l'image est un module de rang 1 vérifie les relations $(\star)$. D'après le lemme 4.1.3, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, le rang de l'endomorphisme $\bar{f}$ est égal à 1 ; en particulier, son déterminant est nul ; bref, $\det(f)$ est contenu dans tous les idéaux premiers de A ; mais, par ailleurs, c'est un idempotent, tout comme f ; donc $\det(f) = 0$, d'après 4.1.6.

Le théorème de Hamilton-Cayley, et la relation $f^2 = f$ entraînent alors que

$$(\star\star) \qquad (1 - \mathrm{Tr}(f))f = 0.$$

En prenant la trace, qui est A-linéaire, on en déduit que $\mathrm{Tr}(f)$ est un idempotent de A ; s'il était contenu dans un idéal premier $\mathfrak{p}$, la relation $(\star\star)$ montre qu'on aurait $\bar{f} = 0$, ce qui est impossible d'après le lemme 4.1.3. puisque L est supposé de rang 1. Ainsi, l'idempotent $\mathrm{Tr}(f)$ n'est contenu dans aucun idéal premier ; il est donc égal à 1 d'après 4.1.7, et la proposition est démontrée. □

Le résultat suivant sera utilisé plus bas.

Lemme 4.1.7. *Soit L un module inversible et $\alpha : L \to A$ une application linéaire surjective. Alors α est un isomorphisme*

Tout $x \in L$ tel que $\alpha(x) = 1$ engendre un supplémentaire dans L de $M = \mathrm{Ker}(\alpha)$; pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, l'application entre espaces vectoriels de rang 1, $\bar{\alpha} : (L/\mathfrak{p}L)_\mathfrak{p} \to (A/\mathfrak{p})_\mathfrak{p} = \kappa(\mathfrak{p})$ est surjective, donc bijective ; par suite, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, on a $(M/\mathfrak{p}M)_\mathfrak{p} = 0$, et il faut en conclure que $M = 0$. Or, comme M est facteur direct de L, c'est aussi un module projectif ; il existe donc un projecteur $g : A^m \to A^m$ d'image isomorphe à M. Le lemme 4.1.3 montre que pour tout $\mathfrak{p}$, le rang de $\bar{g} : \kappa(\mathfrak{p})^m \to \kappa(\mathfrak{p})^m$ est nul, donc que $1 - \bar{g} = 1$; on déduit de 4.1.6, que l'on a $\det(1-g) = 1$, donc que $1 - g$ est un isomorphisme ; mais $g(1-g) = 0$; donc $g = 0$.□

On aura remarqué que la matrice Q de 2.2 définit un projecteur de rang 1, dont l'image est le module M que l'on montre en 2.3 être inversible et non libre. C'est un cas particulier de la construction qui suit.

4.2 Un exemple très général de module inversible et non libre

On pose $A = \mathbf{Z}[X, Y, Z]/(X^2 - X + YZ)$, et on désigne par x, y et z les classes de X, Y et Z. On considère l'endomorphisme de A^2 défini par

$$f = \begin{pmatrix} x & z \\ y & 1-x \end{pmatrix}.$$

D'après 4.1.5, $L = \mathrm{Im}(f)$ est un A-module inversible.

Montrons qu'il n'est pas libre.

Notons $R = \mathbf{Z}[y, z]$ le sous-anneau de A engendré par y et z ; ces éléments sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{Z}$; par suite R est un anneau factoriel, ce que n'est pas A. On se ramène dans R en utilisant une norme que l'on définit comme suit : le R-module A est libre de base $\{1, x\}$; tenant compte de la relation $x^2 = x - yz$, on voit que la mutiplication dans A par l'élément $\alpha + \beta x$, avec $\alpha, \beta \in R$, a pour matrice, sur la base $\{1, x\}$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta yz \\ \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

On définit l'application norme comme le déterminant de cette matrice, soit

$$\mathsf{N} : A \longrightarrow R, \quad \alpha + \beta x \longmapsto \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 yz.$$

On a, en particulier, $\mathsf{N}(x) = \mathsf{N}(1-x) = yz$. La norme est une application multiplicative.

On utilisera la remarque suivante :

Une égalité de la forme $\mathsf{N}(\alpha + \beta x) = ny$, *est impossible si* n *est un entier non nul.*

Elle impliquerait, en effet, l'égalité suivante entre polynômes de $\mathbf{Z}[y, z]$:

$$4\mathsf{N}(\alpha + \beta x) = (2\alpha + \beta)^2 + \beta^2(4yz - 1) = 4ny.$$

On en déduirait que pour tout couple de réels y, z tels que $4yz - 1 \geq 0$, on devrait avoir $4ny \geq 0$; or, si (y, z) est un tel couple, on a aussi $4(-y)(-z) - 1 \geq 0$, ce qui conduit à une contradiction. □

Supposons que le module $L = \mathrm{Im}(f)$ soit libre ; cela permet de l'identifier à A, et d'écrire les applications associées à f, comme en 4.1.1, $v : A^2 \to L$, et $u : L \to A^2$, sous forme de matrices à coefficients dans A, soit $v = (v_1\, v_2)$, et $u = \binom{u_1}{u_2}$; la relation $f = uv$ s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & 1-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}.$$

On a donc les égalités suivantes entre éléments de A

$$\begin{aligned} x &= u_1 v_1 \\ y &= u_2 v_1 \\ z &= u_1 v_2 \\ 1 - x &= u_2 v_2 \end{aligned}$$

Prenant les normes, on trouve les égalités suivantes entre polynômes de $R = \mathbf{Z}[y, z]$:

$$\begin{aligned} yz &= \mathsf{N}(u_1)\mathsf{N}(v_1) \\ y^2 &= \mathsf{N}(u_2)\mathsf{N}(v_1) \\ z^2 &= \mathsf{N}(u_1)\mathsf{N}(v_2) \\ yz &= \mathsf{N}(u_2)\mathsf{N}(v_2). \end{aligned}$$

Étant factoriel, l'anneau R possède des pgcd, et $\mathrm{pgcd}(y, z) = 1$. La deuxième et la quatrième égalité donnent

$$y = \mathrm{pgcd}(y^2, yz) = \mathsf{N}(u_2)\mathrm{pgcd}(\mathsf{N}(v_1), \mathsf{N}(v_2)).$$

La première et la troisième

$$z = \mathrm{pgcd}(yz, z^2) = \mathsf{N}(u_1)\mathrm{pgcd}(\mathsf{N}(v_1), \mathsf{N}(v_2)).$$

Ces deux relations montrent que l'élément $\epsilon = \mathrm{pgcd}(\mathsf{N}(u_1), \mathsf{N}(u_2))$ doit diviser y et z ; il est donc inversible dans $R = \mathbf{Z}[y, z]$, soit $\epsilon = \pm 1$. En utilisant maintenant les deux premières égalités, on obtient

$$y = \mathrm{pgcd}(yz, y^2) = \mathsf{N}(v_1)\mathrm{pgcd}(\mathsf{N}(u_1), \mathsf{N}(u_2)) = \epsilon\mathsf{N}(v_1).$$

Mais on a montré au début qu'une relation de la forme $\mathsf{N}(v_1) = \epsilon y$ était impossible. Cette contradiction montre que L n'est pas libre.

Exercice 4.2.1. Montrer que la matrice de $1 - f$ est semblable à la transposée de celle de f. En déduire que dans la décomposition $L \oplus L' = A^2$ associée à f, le facteur L' est isomorphe au dual de L.

Montrer que si $y = z$ (dans un quotient de A !), alors L et L' sont isomorphes.

Explication 4.2.2. *La qualification de *très général* attribuée à cet exemple peut être précisée de la façon suivante : pour tout anneau B et tout B-module inversible M, *engendré par deux éléments*, il existe un morphisme $A \to B$, et un isomorphisme de B-modules $B \otimes_A L \xrightarrow{\sim} M$.*

5. Modules localement isomorphes à A

On utilise librement dans ce paragraphe la notion d'anneau de fractions ; on note A_s l'anneau des fractions dont le dénominateur est une puissance de s.

5.1. Modules localement isomorphes à A

L'adverbe *localement* renvoie ici à l'ensemble $\mathrm{Spec}(A)$ des idéaux premiers de A, muni de la *topologie de Zariski* : rappelons que les ouverts pour cette topologie sont les réunions d'ensembles de la forme $\mathrm{D}(s)$, où, pour $s \in A$, on note $\mathrm{D}(s) = \mathrm{Spec}(A_s)$ l'ensemble des idéaux premiers qui ne contiennent pas s.

Une famille $(\mathrm{D}(s_i))_{i\in I}$ forme un recouvrement de $\mathrm{Spec}(A)$ si aucun idéal premier ne contient tous les s_i, c'est-à-dire si l'idéal $\sum As_i$ est égal à A ; on dit alors que ces éléments sont *étrangers* (dans leur ensemble ; ne pas confondre cette notion avec celle, plus forte, de famille d'éléments deux à deux étrangers). Mais, pour un idéal, être égal à A équivaut à contenir 1, et l'inclusion $1 \in \sum As_i$ ne fait intervenir qu'un nombre fini de s_i ; par suite une famille d'éléments étrangers contient une sous-famille finie qui est encore formée d'éléments étrangers ; autrement dit, $\mathrm{Spec}(A)$ est un espace quasi-compact.

Sans pouvoir développer les détails qui justifieraient une telle interprétation, disons que, pour un A-module M, un élément du module de fractions M_s peut être vu comme *une section*[1] *de M au dessus de l'ouvert* $\mathrm{D}(s)$; c'est pourquoi on nomme souvent M_s un *localisé* de M ; de même, le lemme suivant peut (devrait !) être lu ainsi : une section localement nulle est nulle.

Lemme 5.1.1. *Soit $(s_i)_i$ une famille finie d'éléments étrangers de A. Pour tout A-module M, l'application $M \to \prod_i M_{s_i}$ est injective.*

C'est une conséquence du fait que l'anneau $B = \prod A_{s_i}$ est fidèlement plat sur A (cf §9.2), mais on peut aussi le voir de façon élémentaire : l'annulateur $\mathrm{Ann}(x)$ d'un élément x du noyau contient donc une puissance de chaque s_i ; comme ces éléments sont étrangers, l'idéal $\mathrm{Ann}(x)$ ne peut être contenu dans aucun idéal maximal de A ; on a donc $\mathrm{Ann}(x) = A$; ainsi, 1 annule x ….

Ceci rappelé, le titre du paragraphe se précise en l'énoncé suivant.

Proposition 5.1.2. *Pour qu'un A-module L soit inversible, il faut et il suffit qu'il existe une famille (finie) (s_i) d'éléments étrangers et pour chaque i un isomorphisme de A_{s_i}-modules $A_{s_i} \simeq L_{s_i}$.*

Pour montrer que la condition est nécessaire, il faut trouver, pour chaque idéal maximal $\mathfrak{m}$, un élément $t \in A - \mathfrak{m}$ et un isomorphisme $L_t \to A_t$; il suffit même, en vertu de 4.1.7, de trouver une telle application qui soit surjective. Comme L est projectif, il existe deux applications A-linéaires $L \xrightarrow{u} A^n \xrightarrow{v} L$ telles que

[1] Le mot « section »peut sembler être employé ici dans un sens différent que dans 1.3 ; il n'en est rien. Comme il est expliqué, par exemple dans EGA I 1.3, à tout A-module est associé un faisceau $\widetilde{M}$ sur l'espace $\mathrm{Spec}(A)$ de telle sorte qu'on ait une bijection

$$M_s \simeq \Gamma(\mathrm{D}(s), \widetilde{M}).$$

Par ailleurs la notion de faisceau remplace celle, équivalente, d'espace étalé, ici au dessus de $\mathrm{Spec}(A)$, pour laquelle la notion de section est celle de 1.3..

$v \circ u = \mathrm{Id}_L$. Comme, par hypothèse, $L/\mathfrak{m}L$ est de rang 1, il existe un élément $x \in L$ tel que $x \notin \mathfrak{m}L$. Les coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ de $u(x)$ ne sont pas toutes dans $\mathfrak{m}$, sinon $x = v(u(x))$ serait dans $\mathfrak{m}L$; notons pour simplifier $t = a_i$ une coordonnée non dans $\mathfrak{m}$, et soit $\mathrm{pr}_i : A^n \to A$ la projection sur le facteur d'indice i ; l'image de x par l'application composée $L \xrightarrow{u} A^n \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} A$ est égale à t ; l'application $L_t \to A_t$, obtenue par passage aux anneaux de fractions est donc surjective.

Le fait que cette condition soit suffisante peut être démontré directement ; mais c'est un cas particulier du théorème de descente (cf 9.3), puisque, comme déjà dit, l'anneau $B = \prod A_{s_i}$ est fidèlement plat sur A, et que l'hypothèse sur L signifie exactement qu'il existe un isomorphisme de B-modules $B \otimes_A L \xrightarrow{\sim} B$. La démonstration directe suivrait pas à pas celle du théorème de descente, mais en beaucoup moins lisible parce qu'elle doit mettre en jeu des familles de multi-indices. Nous renvoyons donc au §9.□

Corollaire 5.1.3. *Soient L un A-module inversible, et $u : L \to A$ une application A-linéaire. Alors, pour tous $x, y \in L$, on a*

$$u(x)y \;=\; u(y)x.$$

Il s'agit de vérifier une égalité entre éléments de L ; compte-tenu de 5.1.1 et 5.1.2, il suffit de le faire dans les localisés L_s qui sont isomorphes à A_s ; mais si L est libre de rang 1, de base z, il existe des scalaires $a, b \in A$, tels que $x = az$ et $y = bz$; l'égalité résulte alors de la commutativité de A. □

Exemple 5.1.4. Reprenons l'exemple, donné en 4.2, du module L image du projecteur de A^2 de matrice

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & 1-x \end{pmatrix}$$

On va construire des isomorphismes $A_x \simeq L_x$, et $A_{1-x} \simeq L_{1-x}$, en utilisant la relation

$$x.(1-x) \;=\; yz.$$

Le module $L \subset A^2$ est engendré par les éléments $\binom{x}{y}$ et $\binom{z}{1-x}$. Dans l'anneau A_x, l'élément x est inversible ; on peut donc écrire

$$\binom{x}{y} \;=\; x\binom{1}{y/x}, \qquad \binom{z}{1-x} \;=\; z\binom{1}{y/x}.$$

Par suite le module $L_x \subset A_x^2$ est engendré par l'élément $\binom{1}{y/x}$ qui est visiblement libre. De même, dans A_{1-x}, on a

$$\binom{x}{y} \;=\; y\binom{z/(1-x)}{1}, \qquad \binom{z}{1-x} \;=\; (1-x)\binom{z/(1-x)}{1}.$$

Par suite le module $L_{1-x} \subset A_{1-x}^2$ est engendré par $\binom{z/(1-x)}{1}$.

5.2. Construction par recollement

Commençons par le cas où A est intègre, ce qui simplifie beaucoup les choses.

Exercice 5.2.1. Soient A un anneau intègre de corps des fractions K. Soient $s, t \in A$ deux éléments étrangers et non nuls ; on identifie A_s et A_t à des sous-anneaux de K.

i) Montrer que l'on a $A_s \cap A_t = A$.

ii) Soit M un sous-A-module (quelconque) de K. Montrer que $M_s \cap M_t = M$.

iii) On considère ici l'anneau A et le A-module inversible L introduits au §4.2. L'application composée

$$L \;\xrightarrow{v}\; A^2 \;\xrightarrow{\mathrm{pr}_1}\; A$$

est injective (cf 7.1.2), et induit un isomorphisme de L sur le sous-module $M = Ax + Az \subset K$. Montrer que $M_x = A_x$, et $M_{1-x} = \frac{x}{y}.A_{1-x}$. En déduire que L est isomorphe au sous-module $\frac{y}{x}.A_x \cap A_{1-x} \subset K$.

iv) Revenons au cas général. Soit ω un élement inversible de l'anneau A_{st}. Alors $L = \omega.A_s \cap A_t$ est un A module inversible.

Ce qui suit généralise la question *iv)*, lorsqu'on ne suppose plus que A est intègre.

Lemme 5.2.2 *Soit A un anneau et soient s, t deux éléments étrangers, de sorte que $sA + tA = A$. Considérons les morphismes canoniques*

$$A_s \xrightarrow{\alpha} A_{st} \xleftarrow{\beta} A_t.$$

Alors, la suite

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A_s \times A_t \xrightarrow{(x,y)\mapsto\alpha(x)-\beta(y)} A_{st}$$

est exacte.

Là encore, on peut invoquer le fait que le morphisme $A \to A_s \times A_t$ est fidèlement plat (cf §9.2), mais on peut aussi vérifier directement l'exactitude : considérons des éléments $a/s^n \in A_s$ et $b/t^m \in A_t$ dont les images dans A_{st} sont égales ; cela signifie qu'il existe un entier p tel que l'on ait, dans A,

$$at^m.s^pt^p = bs^n.s^pt^p.$$

Quitte à récrire a/s^n sous la forme as^p/s^{n+p}, et de même pour b/t^m, on peut supposer que l'on a

$$at^m = bs^n.$$

Comme s et t sont étrangers, s^n et t^m le sont aussi, et il existe dans A des éléments u et v tels que $s^nu+t^mv = 1$. Posons $c = bv + au$. On trouve, dans A_s,

$$a/s^n = (at^mv + as^nu)/s^n = (bv + au)/1 = c/1.$$

De même, dans A_t, on a $b/t^m = c/1$. D'où le résultat.

Proposition 5.2.3. *Soient s et t des éléments étrangers dans A, et ω un élément inversible de l'anneau A_{st}. Alors le A-module*

$$L = \{(\xi, \eta) \in A_s \times A_t,\ \omega\alpha(\xi) = \beta(\eta)\}$$

est inversible. Il est libre si et seulement si il existe des éléments inversibles *$u \in (A_s)^\times$ et $v \in (A_t)^\times$ tels que $(u, v) \in L$, c'est-à-dire tels que $\omega\alpha(u) = \beta(v)$.*

Par définition de L, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow A_s \times A_t \xrightarrow{(\xi,\eta)\mapsto\omega\alpha(\xi)-\beta(\eta)} A_{st}.$$

Elle reste exacte par localisation, et s'écrit

$$0 \longrightarrow L_s \longrightarrow A_s \times A_{st} \xrightarrow{(\xi,\eta)\mapsto\omega\alpha(\xi)-\eta} A_{st}$$

Il est alors clair que l'élément $(1, \omega) \in A_s \times A_{st}$ est dans L_s, et en constitue une base comme A_s-module. De même, l'élément $(\omega^{-1}, 1) \in A_{st} \times A_t$ est une base de L_t. Ainsi, d'après 5.1.2, L est inversible.

Supposons que L soit libre, engendré par $(u, v) \in A_s \times A_t$, et montrons que u est inversible dans A_s. Par localisation en s, l'élément $(u, \beta(v)) \in A_s \times A_{st}$ est une base du A_s-module L_s ; il existe donc un élément $a \in A_s$ tel que

$$(1, \omega) = a(u, \beta(v)).$$

Par suite, on a, dans l'anneau A_s, $1 = au$, et u est bien inversible ; on montrerait de même que v est inversible dans A_t.

Réciproquement, montrons qu'un élément $(u, v) \in (A_s)^\times \times (A_t)^\times$ tel que $\omega\alpha(u) = \beta(v)$ est une base de L. Or, pour tout $(\xi, \eta) \in L$, l'élément $(\xi.u^{-1}, \eta.v^{-1}) \in A_s \times A_t$ vérifie la relation $\alpha(\xi.u^{-1}) = \beta(\eta.v^{-1})$; il provient donc de A, comme il est rappelé au début (5.2.2), ce qui veut dire qu'il existe $a \in A$ tel que $\xi = au$ et $\eta = av$. □

On peut, bien entendu, construire un module inversible par recollement à partir d'un nombre fini quelconque d'éléments étrangers $s_1, \ldots, s_n$, et d'éléments inversibles $\omega_{ij} \in (A_{s_i s_j})^\times$, mais il faut alors imposer les conditions $\omega_{ij} = \omega_{ik}.\omega_{kj}$ dans les anneaux $A_{s_i s_j s_k}$. Le cas de deux éléments est nettement plus simple puisque ces conditions sont alors sans objet, et il met en scène déjà une partie de ce qui est en cause (pour le cas général, voir Waterhouse [9], 17.4).

6. Application : le module inversible associé à une forme quadratique binaire

Une forme quadratique binaire est une expression de la forme

$$(\star) \qquad F(X, Y) = aX^2 + 2bXY + cY^2.$$

On lui associe l'élément

$$D = b^2 - ac.$$

L'étude systématique de ces formes remonte à Le Gendre et surtout à Gauss ; lorsque les coefficients sont des entiers, et que l'on considère comme équivalentes deux formes qui se déduisent l'une de l'autre par un changement de variables linéaire à coefficients entiers de déterminant $+1$, alors Gauss a montré qu'il n'y a qu'un nombre fini de formes non équivalentes. Ensuite Dedekind, à qui l'on doit la notion d'idéaux d'un corps de nombres, a montré que la classification des formes quadratiques binaires était essentiellement équivalente à celle des classes d'idéaux de l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}[\sqrt{D}]$(voir Hecke, [4] §53, Thm 154).

Les remarques qui suivent établissent une correspondance très naturelle entre forme quadratique binaire et module inversible sur cet anneau d'entiers algébriques ; cela clarifie le résultat de Dedekind si on se souvient que le groupe des classes d'idéaux est isomorphe à celui des classes d'isomorphisme de modules inversibles.

6.1. L'idée de départ, dans sa désarmante simplicité, consiste à lire la forme quadratique comme un déterminant.

En effet, soit R un anneau commutatif, et soit $F(X, Y)$ une forme quadratique binaire à coefficients dans R. On a :

$$F(X, Y) = X(aX + bY) - Y(-bX - cY) = \det \begin{pmatrix} X & -bX - cY \\ Y & aX + bY \end{pmatrix}.$$

Introduisons l'endomorphisme f du R-module $L = R^2$ défini par sa matrice

$$f = \begin{pmatrix} -b & -c \\ a & b \end{pmatrix}.$$

On a $\det(f) = ac - b^2 = -D$, et $\mathrm{Tr}(f) = 0$; le théorème de Hamilton-Cayley montre que $f^2 = D$, et donc que L peut être muni d'une structure de module sur l'anneau

$$A = R[T]/(T^2 - D).$$

On notera $\sqrt{D}$ la classe de T dans A ; pour $z \in L$, on a donc $\sqrt{D}.z = f(z)$.

Pour $z = (x, y) \in R^2 = L$, l'application $A \to L$, $\alpha \mapsto \alpha z$ a pour matrice, relativement à la R-base $\{1, \sqrt{D}\}$ de A, et à la base canonique de L,

$$\begin{pmatrix} x & -bx - cy \\ y & ax + by \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$F(x, y) \ = \ \det_R(A \overset{\alpha \mapsto \alpha z}{\longrightarrow} L).$$

Par suite, un élément $z = (x, y) \in L$ est une base du A-module L si et seulement si $F(x, y)$ est inversible dans R.

Proposition 6.2. *Soient a, b et c des éléments d'un anneau R tels que $aR + 2bR + cR = R$. Alors le A-module L introduit ci-dessus est inversible.*

(Sous ces hypothèses sur a, b et c, Gauss nommait la forme *proprement primitive*).

Pour vérifier cette assertion, remarquons d'abord que si a, resp. c, est inversible dans R alors $(1, 0)$, resp. $(0, 1)$, est une base du A-module L ; enfin, si $a + 2b + c$ est inversible dans R alors $(1, 1)$ est une base de L. Mais l'hypothèse implique que $aR + (a + 2b + c)R + cR = R$; il suffit donc d'invoquer **5.1.2.** pour pouvoir conclure.

6.3. Montrons maintenant comment associer une forme quadratique binaire à un module inversible. Cette construction, qui utilise des rudiments d'algèbre extérieure, est un cas très particulier d'une construction générale développée ailleurs[2].

Soit $R \to A$ un morphisme d'anneaux faisant de A un R-module libre de rang deux, et soit L un A-module inversible ; alors, en considérant les carrés extérieurs des R-modules A et L, on voit que $\bigwedge^2 A$ est un R-module libre de rang 1, et que $\bigwedge^2 L$ est un R-module inversible, de sorte que

$$\mathsf{N}(L) = \mathrm{Hom}_R(\wedge^2 A, \wedge^2 L)$$

est un R-module inversible, d'ailleurs isomorphe, non canoniquement, à $\bigwedge^2 L$. Par ailleurs, pour $z \in L$, le carré extérieur de l'application $A \to L$, $\alpha \mapsto \alpha.z$, est un élément de $\mathrm{Hom}_R(\bigwedge^2 A, \bigwedge^2 L)$, que l'on note $\nu(z)$. Cela définit une application

$$(\star\star) \qquad \nu : L \longrightarrow \mathsf{N}(L).$$

C'est la forme quadratique binaire promise !

Avant de justifier cette affirmation péremptoire, il faut souligner que l'application ν n'est pas additive, tout comme F, et que son image n'est en général pas un R-module ; d'ailleurs, c'est un problème redoutable de déterminer l'ensemble $\mathrm{Im}(\nu)$, même dans les cas arithmétiques les plus simples, où il s'agit alors de caractériser les entiers que l'on peut écrire sous la forme $F(x, y)$ avec $x, y \in \mathbf{Z}$ (voir Landau [6], Part Four, ch. IV).

Plaçons-nous d'abord dans la situation de **6.2.**, où L est le module inversible associé à la forme F. La base canonique de $L = R^2$ conduit à un isomorphisme $\bigwedge^2 L \xrightarrow{\sim} R$, et la base $\{1, \sqrt{D}\}$ de A donne un isomorphisme $\bigwedge^2 A \xrightarrow{\sim} R$; ces isomorphismes permettent d'identifier $\mathsf{N}(L)$ et R. Il est alors clair que cela permet d'identifier les applications ν et F.

Pour ne pas imposer au lecteur l'élargissement de la notion de forme quadratique requis dans le cas général, on va supposer que L est libre sur R, donc de rang 2 ; le choix d'une base (e_1, e_2) de L permet, comme ci-dessus, d'identifier les R-modules $\mathsf{N}(L)$ et R ; soit $\{1, t\}$ une base de A comme R-module ; pour $z \in L$, l'élément $\nu(z) \in R$ est alors caractérisé par l'égalité

$$z \wedge t.z = \nu(z) e_1 \wedge e_2.$$

[2] D. Ferrand, *Un foncteur norme*, Bull. Soc. math. France, **126**, 1998, p. 1-49

Introduisons la matrice de l'endomorphisme $z \mapsto t.z$, soit $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{smallmatrix}\right)$; on trouve

$$\nu(Xe_1 + Ye_2) = \beta X^2 + (\delta - \alpha)XY - \gamma Y^2$$

Notons que si on peut choisir le générateur t de la R-algèbre A tel que $\mathrm{Tr}(t) = 0$, alors $\alpha + \delta = 0$, donc le coefficient $\delta - \alpha$ de XY est bien un multiple de 2.

6.4. Montrons, pour finir, comment déterminer, dans le langage des modules inversibles, les automorphismes d'une forme quadratique binaire (cf LANDAU [6], Thm 202, p. 181).

On suppose ici que 2 est simplifiable dans l'anneau R. Soit, comme ci-dessus, A une R-algèbre libre de rang 2, et L un A-module inversible ; on précisera ν en ν_L pour l'application $(\star\star)$, $L \to \mathsf{N}(L)$, introduite plus haut.

Remarquons d'abord que $\mathsf{N}(A)$ est canoniquement isomorphe à R, et que l'application $\nu_A : A \to \mathsf{N}(A) = R$ n'est autre que l'application norme usuelle ; de sorte que l'équation

$$\nu_A(\alpha) \;=\; 1$$

est habituellement nommée *équation de Pell-Fermat* (relative au discriminant de A/R).

On vérifie immédiatement que pour $u \in A$, on a

$$\nu_L(uz) = \nu_A(u)\nu_L(z).$$

Par suite, le produit dans L par un $u \in A$ de norme 1 induit un automorphisme de L qui laisse ν_L invariante. La réciproque est vraie :

Proposition 6.5. *Gardons les hypothèses et les notations de* **6.4.**. *Soit u un automorphisme R-linéaire de L, de déterminant* 1*, et tel que $\nu_L \circ u = \nu_L$. Alors u est une homothétie de rapport un élément de A de norme* 1.

Il suffit de montrer qu'un automorphisme vérifiant ces deux conditions est A-linéaire, puisque, L étant un A-module inversible, les endomorphismes A-linéaires de L sont les homothéties.

Soit $t \in A$ tel que $\{1, t\}$ soit une base sur R. Il faut vérifier que, pour $z \in L$, on a $u(tz) = tu(z)$. Or, $1 \wedge t$ est une base de $\bigwedge^2 A$, et, par définition, $\nu_L(z)$ est l'application $\bigwedge^2 A \to \bigwedge^2 L,\ 1 \wedge t \mapsto z \wedge t.z$; l'hypothèse se traduit donc en : pour tout $z \in L$, on a

$$z \wedge t.z \;=\; u(z) \wedge t.u(z).$$

Comme u est supposé de déterminant 1, soit $\wedge^2 u = \mathrm{Id} = \wedge^2 u^{-1}$, on a

$$z \wedge t.z = z \wedge u^{-1}(t.u(z)),$$

ce qui entraîne, pour tout $z \in L$,

$$z \wedge (tz - u^{-1}(t.u(z))) \;=\; 0.$$

Il reste à vérifier que le second facteur est nul.

Lemme 6.6. *Soit R un anneau et $f : L \to L$ un endomorphisme d'un R-module localement libre de rang* 2*. Si, pour tout $z \in L$, on a $z \wedge f(z) = 0$, alors f est une homothétie de rapport $\lambda \in R$.*

Donnons une démonstration lorsque L est libre, de base $\{e_1, e_2\}$; soit $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & \nu\\ \mu & \rho\end{smallmatrix}\right)$ la matrice de f sur cette base. Les relations $e_i \wedge f(e_i) = 0$ montrent que l'on a $\mu = \nu = 0$; en appliquant l'hypothèse avec $z = e_1 + e_2$, on obtient $e_1 \wedge f(e_2) + e_2 \wedge f(e_1) = 0$, soit $\lambda = \rho$. □

Terminons la démonstration de **6.5.** : d'après le lemme, il existe $\lambda \in R$ tel que $t.z - u^{-1}(t.u(z)) = \lambda z$; comme la trace des applications semblabes $z \mapsto u^{-1}(t.u(z))$ et $z \mapsto tz$ sont égales, on a $0 = \mathrm{Tr}(z \mapsto \lambda z) = 2\lambda$, d'où $\lambda = 0$ puisque 2 est supposé simplifiable dans R.□

7. Trivialité des modules inversibles sur un anneau factoriel

Lemme 7.1. *Soit A un anneau intègre, et L un A-module inversible. Alors :*
7.1.1. *Pour $a \in A$ et $x \in L$, la relation $ax = 0$ implique $a = 0$ ou $x = 0$.*
7.1.2. *Toute forme linéaire non nulle $\alpha : L \to A$ est injective.*

Pour vérifier ces propriétés, considérons de nouveau des applications

$$L \xrightarrow{u} A^n \xrightarrow{v} L \quad \text{telles que} \quad v \circ u = \mathrm{Id}_L.$$

La relation $ax = 0$ implique $au(x) = 0$, donc $a = 0$ ou $u(x) = 0$, puisque A est intègre. Mais $x = v(u(x))$, d'où (7.1.1).

Soit $\alpha : L \to A$ une forme linéaire, et $x \in L$ tels que $\alpha(x) \neq 0$. Pour tout élément non nul $y \in L$, on a, d'après ce qui précède et 5.1.3, $0 \neq \alpha(x)y = \alpha(y)x$; donc $\alpha(y) \neq 0$.

De la factorialité d'un anneau A, on n'utilisera que les propriétés suivantes :
- l'anneau A est intègre ;
- pour tous $a, b \in A$, l'idéal $aA \cap bA$ est principal.

En particulier, soit $\xi \in K$ un élément non nul du corps des fractions de A. Alors, l'idéal

$$\mathfrak{c} = \{x \in A, x\xi \in A\}$$

est principal. En effet, si on écrit $\xi = b/a$, on a $a.\mathfrak{c} = aA \cap bA$; un générateur de cet idéal principal est de la forme ac, avec $c \in \mathfrak{c}$; pour $x \in \mathfrak{c}$, il existe donc y tel que $ax = acy$, d'où $x = cy$; ainsi, $\mathfrak{c} = cA$.

Théorème 7.2. *Si A est un anneau factoriel, tout A-module inversible est isomorphe à A.*

Soit L un A-module inversible, et soit $\alpha : L \longrightarrow A$ une application linéaire non nulle. Comme α est injective (7.1.2), cette application établit un isomorphisme de L sur l'idéal $\alpha(L)$. Il s'agit donc de montrer qu'un idéal $I \subset A$ qui est un A-module inversible, est principal.

Soit $\alpha : I \to A$ une forme linéaire non nulle, et x un élément non nul de I. Pour tout $y \in I$, on a $\alpha(y)x = \alpha(yx) = y\alpha(x)$, soit

$$\alpha(y) \;=\; \frac{\alpha(x)}{x}.y \;=\; \xi.y,$$

où on a posé $\xi = \alpha(x)/x$. Ainsi, avec un $x \in I$ fixé non nul, les formes linéaires sur I correspondent biunivoquement aux éléments ξ du corps des fractions K de A tels que $\xi.I \subset A$.

Comme I est projectif de type fini, il existe des applications

$$I \xrightarrow{u} A^n \xrightarrow{v} I \quad \text{telles que} \quad v \circ u = \mathrm{Id}_I.$$

L'application u est donnée par n formes linéaires sur I ; à chacune d'elle est associée, comme on vient de le voir, un élément $\xi_i \in K$ tel que $\xi_i.I \subset A$. Posons $\mathfrak{c}_i = \{c \in A, c\xi_i \in A\}$. Il a été signalé plus haut que les $\mathfrak{c}_i$ sont des idéaux principaux, puisque A est factoriel ; pour la même raison, une intersection finie d'idéaux principaux est un idéal principal ; il suffit donc de vérifier que

$$I \;=\; \mathfrak{c}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{c}_n.$$

Il est clair que I est contenu dans cette intersection. Réciproquement, soit $a \in A$ tel que $a\xi_i \in A$ pour tout i. L'application $v : A^n \to I$ introduite plus haut, telle que $vu = \mathrm{Id}_I$, est définie par n éléments $x_1, \ldots, x_n$ de I, et on a $\sum_i \xi_i x_i = 1$; par suite, $a \;=\; \sum_i (a\xi_i)x_i \;\in \sum Ax_i \;\subset\; I$. Cela achève la démonstration.

8. Modules inversibles et produit tensoriel

L'adjectif *inversible* fait référence au produit tensoriel, et est justifié par la proposition suivante.

Proposition 8.1. *Soit L un A-module pour lequel il existe un module M et un isomorphisme*

$$f : L \otimes_A M \quad \xrightarrow{\sim} \quad A.$$

Alors L est inversible. Réciproquement, si L est inversible, son dual $\mathrm{Hom}_A(L, A)$ est inversible, et l'application canonique

$$L \otimes_A \mathrm{Hom}_A(L, A) \longrightarrow A, \quad x \otimes \alpha \longmapsto \alpha(x),$$

est un isomorphisme.

Notons g l'automorphisme de L défini par la commutativité du diagramme suivant, où on a désigné par $\pi : M \otimes_A L \to L \otimes_A M$ l'isomorphisme de permutation.

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_A M \otimes_A L & \xrightarrow{1\otimes\pi} & L \otimes_A L \otimes_A M \\ {\scriptstyle f\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes f} \\ L & \xrightarrow[g]{} & L \end{array}$$

Pour $x, y \in L$ et $z \in M$, en suivant les destins de $y \otimes z \otimes x \in L \otimes_A M \otimes_A L$, on voit que l'on a

$$f(y \otimes z)g(x) \;=\; yf(x \otimes z).$$

Par ailleurs,la surjectivité de f entraîne l'existence d'éléments $y_1, \ldots, y_n \in L$, et d'éléments $z_1, \ldots, z_n \in M$ tels que

$$\sum f(y_i \otimes z_i) \;=\; 1.$$

De ces deux égalités, on tire que, pour tout $x \in L$, on a

$$(\star) \qquad g(x) = (\sum f(y_i \otimes z_i))g(x) = \sum y_i f(x \otimes z_i).$$

Or, les n formes linéaires $x \mapsto f(x \otimes z_i)$ définissent une application $v : L \to A^n$, et les éléments y_i définissent une application $u : A^n \to L$. L'égalité $(\star)$ s'écrit alors

$$g \;=\; u \circ v.$$

Comme g est un isomorphisme, cela montre que L est facteur direct de A^n.

Enfin, comme la dimension d'un produit tensoriel d'espaces vectoriels est égale au produit des dimensions des facteurs, il est clair que L est de rang 1.

Réciproquement, soit L un module inversible ; notons $L^\vee$ son dual. Introduisons, comme en 4.1.1 des applications linéaires

$$L \xrightarrow{u} A^n \xrightarrow{v} L, \qquad \text{telles que } v \circ u = \mathrm{id}_L.$$

Passant aux duals, on trouve des applications linéaires

$$L^\vee \xleftarrow{u^\vee} (A^n)^\vee \xleftarrow{v^\vee} L^\vee$$

dont le composé est l'identité. Cela montre déjà que $L^\vee$ est projectif de type fini ; le rang de ce module est égal d'après 4.1.3 au rang, en chaque idéal premier, de l'application composée

$$(A^n)^\vee \xleftarrow{v^\vee} L^\vee \xleftarrow{u^\vee} (A^n)$$

Mais c'est la duale de l'application uv, laquelle est de rang 1. Donc $L^\vee$ est inversible.

Il en resulte que $L \otimes_A L^\vee$ est inversible, si bien qu'il suffit, d'après 4.1.7, de montrer la surjectivité de l'application $L \otimes_A L^\vee \to A$ pour pouvoir conclure que c'est un isomorphisme. Or, la relation $v \circ u = \mathrm{id}_L$ se traduit ainsi : il existe n formes linéaires $u_i : L \to A$ et n éléments $x_i \in L$ tels que, pour tout $x \in L$, on a

$$\sum_i u_i(x)x_i \;=\; x.$$

D'après 5.1.3, on a $u_i(x)x_i = u_i(x_i)x$, d'où

$$(\sum_i u_i(x_i)).x = x$$

On en tire que $\sum_i u_i(x_i) = 1$, donc que l'image de $\sum_i x_i \otimes u_i \in L \otimes_A L^\vee$ par l'application en cause est égale à 1. □

8.2. Les classes d'isomorphie de A-modules inversibles forment donc un groupe pour le produit tensoriel ; l'élément neutre en est la classe de A, et l'inverse de la classe de L est la classe de son dual.

Ce groupe est nommé le groupe de Picard de A, et noté

$$\mathrm{Pic}(A).$$

Il joue un rôle considérable, tant en géométrie algébrique qu'en théorie algébrique des nombres où il est plutôt vu comme groupe des classes d'idéaux.

9. Descente

La compréhension de ce paragraphe requiert très peu de connaissances sur les morphismes fidèlement plats ; pour en lire plus, on consultera le livre de Knus-Ojanguren [5], ou le ch. 17 de celui de Waterhouse [9].

On utilisera essentiellement la caractérisation suivante : pour qu'un morphisme d'anneaux $A \to B$ soit fidèlement plat, il faut et il suffit que la propriété suivante soit vérifiée :

9.1. *Pour qu'une application A-linéaire $E \to F$ soit injective (resp. surjective, resp. un isomorphisme), il faut et il suffit que l'application B-linéaire $B \otimes_A E \to B \otimes_A F$ soit injective (resp. ...).*

On en déduit l'important résultat suivant :

9.2. *Soit $u : A \to B$ un morphisme fidèlement plat. Alors, le morphisme u est injectif et $u(A)$ est égal à l'ensemble des éléments $b \in B$ tels que, dans $B \otimes_A B$, on ait $b \otimes 1 = 1 \otimes b$. Ce qu'on résume en disant que la suite de morphismes d'anneaux ci-dessous est exacte, où on a noté u_0 l'application $b \mapsto 1 \otimes b$, et u_1 l'application $b \mapsto b \otimes 1$:*

$$A \xrightarrow{u} B \underset{u_1}{\overset{u_0}{\rightrightarrows}} B \otimes_A B$$

Dans le contexte des A-modules on écrirait plutôt que la suite

$$0 \;\longrightarrow\; A \;\xrightarrow{u}\; B \;\xrightarrow{u_1-u_0}\; B \otimes_A B$$

est exacte ; mais cela risque de faire oublier que u, u_0 et u_1 sont des morphismes d'algèbres, ce que $u_1 - u_0$ n'est pas.

Indiquons la démonstration de ce résultat, dû à Grothendieck, et qui devrait figurer dans tous les manuels d'algèbre commutative depuis quarante ans (voir aussi Knus-Ojanguren [5], p.30).

D'après (9.1) il suffit de vérifier que cette suite de morphismes devient exacte après tensorisation à droite par B , soit l'exactitude de

$$B \xrightarrow{u\otimes 1} B\otimes_A B \underset{u_1\otimes 1}{\overset{u_0\otimes 1}{\rightrightarrows}} B\otimes_A B\otimes_A B$$

Dans ce diagramme, et dans les suivants, le symbole 1 désignera souvent l'application identique d'un module que le contexte désignera clairement ; précisons cependant que le facteur $A\otimes_A -$ est omis, si bien que $u\otimes 1$ désigne le morphisme composé

$$B \overset{b\mapsto 1\otimes b}{\longrightarrow} A\otimes_A B \overset{u\otimes 1}{\longrightarrow} B\otimes_A B.$$

On a donc $(u\otimes 1)(b) = 1\otimes b = u_0(b)$. Désignons par $s : B\otimes_A B \to B$ le morphisme donné par le produit : $x\otimes y \mapsto xy$, et désignons par $t = 1\otimes s : B\otimes_A B\otimes_A B \to B\otimes_A B$, celui donné par $x\otimes y\otimes z \mapsto x\otimes yz$. On constate que $s\circ(u\otimes 1) = \mathrm{Id}_B$, donc que les morphismes $u\otimes 1$, et par suite aussi u sont injectifs ; on constate aussi que

$$t\circ(u_0\otimes 1) = u_0\circ s, \qquad \text{et} \quad t\circ(u_1\otimes 1) = \mathrm{Id}_{B\otimes_A B}$$

Si, donc, un élément $\xi\in B\otimes_A B$ vérifie $(u_0\otimes 1)(\xi) = (u_1\otimes 1)(\xi)$, en composant avec t, on trouve

$$u_0(s(\xi)) = 1\otimes s(\xi) = \xi$$

C'est ce qu'on voulait vérifier.□

Théorème 9.3. *Soit $A\to B$ un morphisme fidèlement plat d'anneaux, et L un A-module. S'il existe un isomorphisme de B-modules $B\otimes_A L \xrightarrow{\sim} B$, alors L est un A-module inversible.*

La suite exacte de 9.2 conduit à la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_A(L,A) \;\to\; \mathrm{Hom}_A(L,B) \;\rightrightarrows\; \mathrm{Hom}_A(L,B\otimes_A B).$$

La propriété (9.1) implique visiblement que L est un A-module plat, si bien que, par tensorisation à droite par L, on obtient la suite exacte

$$\mathrm{Hom}_A(L,A)\otimes_A L \;\to\; \mathrm{Hom}_A(L,B)\otimes_A L \;\rightrightarrows\; \mathrm{Hom}_A(L,B\otimes_A B)\otimes_A L.$$

On va comparer cette suite à celle de 9.2, en utilisant le résultat suivant :

9.4. *Soit $A\to C$ une A-algèbre pour laquelle on dispose d'un isomorphisme de C-modules*

$$\omega : C\otimes_A L \xrightarrow{\sim} C.$$

Alors, l'application $w_C : \mathrm{Hom}_A(L,C)\otimes_A L \to C$, définie par $\alpha\otimes x\mapsto \alpha(x)$ est un isomorphisme.

Considérons, en effet, la suite d'isomorphismes

$$C \;\simeq\; \mathrm{Hom}_C(C,C) \xrightarrow{\circ\omega} \mathrm{Hom}_C(C\otimes_A L, C) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_A(L,C).$$

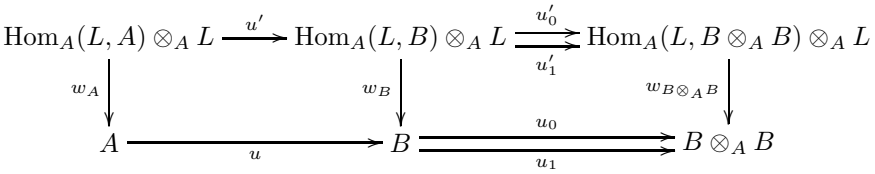
Le symbole $\circ\omega$ désigne la composition à droite par l'isomorphisme ω, et φ désigne l'isomorphisme canonique déduit de la composition avec l'application $L\to C\otimes_A L$. L'isomorphisme composé $\psi : C\to \mathrm{Hom}_A(L,C)$ est celui qui à $c\in C$ associe l'application A-linéaire définie par $x\mapsto \omega(c\otimes x)$.

Le carré suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C\otimes_A L & \xrightarrow{\omega} & C \\ {\scriptstyle \psi\otimes 1}\downarrow & & \| \\ \mathrm{Hom}_A(L,C)\otimes_A L & \xrightarrow[w_C]{} & C \end{array}$$

Par suite, l'application du bas est un isomorphisme.□

Considérons alors le diagramme commutatif suivant :



Les lignes sont exactes et w_B et $w_{B\otimes_A B}$ sont des isomorphismes d'après le résultat précédent appliqué avec $C = B$ et $C = B \otimes_A B$. Par suite, w_A est un isomorphisme, et L est un module inversible (8.1).

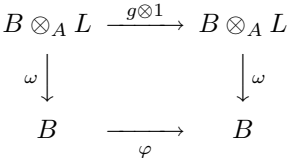
10. Constructions galoisiennes

10.1. Le théorème précédent peut être prolongé en un procédé de *construction* de modules inversibles, à partir d'un morphisme fidèlement plat $A \to B$, et de ce qu'on appelle une *donnée de descente* ; on n'abordera pas ici cette construction sous sa plus grande généralité (voir KNUS-OJANGUREN [5], p.36, ou WATERHOUSE [9], p.132) ; on se limitera à des morphisme très particuliers, les revêtements galoisiens, parce que la « donnée de descente » se réduit alors à un cocycle (voir aussi KNUS-OJANGUREN [5], p.44, ou WATERHOUSE [9], p.136).

Soit B un anneau (commutatif) muni d'un groupe fini G d'automorphismes, et soit $A = B^G$ le sous-anneau des éléments invariants. On cherche à construire des A-modules L munis d'un isomorphisme de B-modules

$$\omega : B \otimes_A L \xrightarrow{\sim} B.$$

Supposons donné un tel isomorphisme. Un automorphisme $g \in G$ est A-linéaire par définition de A ; il induit, par suite, un isomorphisme A-linéaire $g \otimes 1 : B \otimes_A L \longrightarrow B \otimes_A L$. On définit une application A-linéaire φ (qui dépend de g) par la commutativité du carré suivant :



Pour $b, c \in B$, on a $\varphi(bc) = g(b)\varphi(c)$, puisque cela est vrai pour l'application $g \otimes 1$, et que ω est un isomorphisme B-linéaire. Posons $\varphi(1) = \theta(g)$, de sorte que $\varphi(b) = \theta(g).g(b)$. On vérifie immédiatement la propriété suivante :

$$(\mathsf{C}) \qquad \theta(1) = 1, \text{ et pour tout } g, h \in G, \text{ on a } \quad \theta(gh) = \theta(g).g(\theta(h)).$$

Elle implique que les $\theta(g)$ sont inversibles dans B.

Une application $\theta : G \to B^\times$ satisfaisant les relations (C) est nommée un *cocycle* de G à valeurs dans B. Si θ est à valeurs dans A, c'est-à-dire si les $\theta(g)$ sont invariants sous G, la condition C signifie simplement que θ est un homomorphisme de groupes $G \to A^\times$. Notons aussi que, pour un élément inversible $u \in B^\times$, l'application définie par $\theta(g) = u/g(u)$ est un cocycle ; ces cocycles sont nommés des *cobords*.

Revenons au module L. L'application composée $L \xrightarrow{x \mapsto 1 \otimes x} B \otimes_A L \xrightarrow{\omega} B$ donne une application

$$L \longrightarrow \{b \in B, \forall g \in G \quad \theta(g).g(b) = b\}.$$

L'idée directrice du paragraphe est de définir/construire le module à partir d'un cocycle θ, en *posant*

10.1.1 $$L_\theta = \{b \in B, \forall g \in G \quad \theta(g).g(b) = b\},$$

et de dégager des conditions sur le morphisme $A \to B$ qui assureront que le A-module L_θ ainsi construit est inversible.

10.2. Pour un ensemble fini J, on note $\prod_J B$ l'anneau produit de copies de B indexées par les éléments de J ; un élément de cet anneau est donc une famille $(b_j)_{j\in J}$ d'éléments de B, qu'on décrira le plus souvent comme une application $J \to B$ (il est clair que la notation fréquente B^J entre en conflit avec les invariants).
À l'action d'un groupe fini G sur B, et en posant $A = B^G$, on associe le morphisme d'anneaux

$$\rho_{B,G} : B \otimes_A B \longrightarrow \prod_G B, \qquad x \otimes y \mapsto (g \mapsto xg(y)).$$

Définition 10.3. *Soit G un groupe fini. On dira qu'un morphisme $u : A \to B$ est* galoisien de groupe G *si ce groupe opère sur B de telle sorte que les conditions suivantes sont satisfaites*
1) *on a $B^G = A$;*
2) *le morphisme $\rho_{B,G}$ est un isomorphisme* ;
3) *le morphisme u fait de B un A-module projectif de type fini, nécessairement de rang $d = \mathrm{Card}(G)$.*

Pour tout groupe fini G, et tout anneau A, la A-algèbre $B = \prod_G A$ est donc un revêtement galoisien pour l'opération de G sur B donnée par : $(gb)(g') = b(g'g)$.

Exercices 10.4. a) Montrer qu'une extension finie galoisienne de corps $K \subset K'$, de groupe de Galois G, est un morphisme galoisien de groupe G (Pour montrer que le morphisme $\rho_{K',G}$ est un isomorphisme, on peut utiliser le théorème de l'élément primitif : $K' = K(t)$, et le fait que K'/K est une extension de décomposition du polynôme minimal de t).

b) Soit $u : A \to B$ un morphisme vérifiant les propriétés 2) et 3) de la définition. En reprenant les notations et résultats de 9.2, calculer $\rho \circ u_0$ et $\rho \circ u_1$. En déduire que la propriété 1) est une conséquence de 2) et 3).

c) Soit $u : A \to B$ un morphisme galoisien de groupe G. Montrer que pour tout $t \in A$, le morphisme $A/tA \to B/u(t)B$ est encore galoisien de groupe G. Plus généralement, pour toute A-algèbre $A \to A'$ le morphisme $A' \to A' \otimes_A B$ est galoisien de groupe G (On pourra utiliser la question précédente).

Proposition 10.5. *Soient $u : A \to B$ un morphisme galoisien de groupe G, et $\theta : G \to B^\times$ un cocycle. Posons :*

$$L_\theta = \{b \in B, \forall g \in G \quad \theta(g).g(b) = b\}.$$

Alors le A-module associé L_θ est inversible. Il est libre si et seulement si il contient un élément qui est inversible dans B, autrement dit si θ est un cobord.

Montrons d'abord que le morphisme canonique

$$\omega : B \otimes_A L_\theta \to B$$

est un isomorphisme ; d'après le théorème de descente (9.3), cela impliquera que ce module est inversible.

Posons $L = L_\theta$. Le module L s'insère dans la suite exacte suivante de A-modules, où on a noté ψ l'application définie par $\psi(b) = (g \mapsto \theta(g).g(b) - b)$

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{\iota} B \xrightarrow{\psi} \prod_G B$$

Considérons le diagramme suivant d'applications B-linéaires, où $\rho = \rho_{B,G}$ est un isomorphisme par hypothèse :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B \otimes_A L & \xrightarrow{1\otimes\iota} & B \otimes_A B & \xrightarrow{1\otimes\psi} & B \otimes_A \prod_G B \\ & & \omega\downarrow & & \downarrow\rho & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow[1\mapsto(g\mapsto\theta(g)^{-1})]{} & \prod_G B & & \end{array} \qquad 10.5.1$$

Le carré est construit pour être commutatif, et il l'est ! Comme B est un A-module libre de rang fini, la suite du haut est exacte. Cela montre déjà que ω est injectif puisque ρ et $1 \otimes \iota$ le sont. Mais ρ est aussi surjectif ; il existe donc un élément $z \in B \otimes_A B$ tel que $\rho(z) = (g \mapsto \theta(g)^{-1})$. On va vérifier que cet élément z est dans le noyau de $1 \otimes \psi$, donc qu'il est dans $B \otimes_A L$; la commutativité du carré impliquera que l'on a $\omega(z) = 1$, et cela démontrera que ω est un isomorphisme.

En explicitant $z = \sum x_i \otimes y_i$, la propriété $\rho(z) = (g \mapsto \theta(g)^{-1})$ se traduit en ceci : pour tout $g \in G$,

$$(\star) \qquad \sum_i x_i \theta(g) g(y_i) \;=\; 1.$$

Par définition, $(1 \otimes \psi)(\sum_i x_i \otimes y_i)$ est l'application de G dans $B \otimes_A B$ définie par

$$g \;\longmapsto\; \sum_i x_i \otimes (\theta(g)g(y_i) - y_i).$$

Notons $z(g)$ le membre de droite ; il s'agit de montrer que pour tout $g \in G$, cet élément $z(g) \in B \otimes_A B$ est nul. Fixons un élément $g \in G$. Comme ρ est injectif, il suffit de voir que $\rho(z(g))$ est nul. Or, on a

$$\rho(z(g)) \;=\; \rho[\sum_i x_i \otimes (\theta(g)g(y_i) - y_i)] \;= (h \longmapsto \sum_i x_i h[\theta(g)g(y_i) - y_i])$$

Compte-tenu de la propriété de cocyle (C), on constate que

$$\sum_i x_i h[\theta(g)g(y_i) - y_i] = \theta(h)^{-1}.\Big[\sum_i x_i \theta(hg) hg(y_i) \;-\; \sum_i x_i \theta(h).h(y_i)\Big]$$

La nullité de cet élément provient des relations $(\star)$.

On a donc démontré que l'application $\omega : B \otimes_A L_\theta \;\to\; B$ est un isomorphisme.

Supposons que L contienne un élément u inversible dans B. Pour tout $b \in L$, on a, pour tout $g \in G$, à la fois $\theta(g).g(b) = b$ et $\theta(g).g(u) = u$, d'où $g(b/u) = b/u$, c'est-à-dire $b \in Au$, puisque $B^G = A$; ainsi, $L = Au$.

Réciproquement, supposons que L soit libre, engendré par u. La surjectivité de ω implique qu'il existe des éléments $b_i \in B$ et des éléments $x_i \in L$, tels que $\sum_i b_i x_i = 1$; par hypothèse, chaque x_i est de la forme $a_i u$, avec $a_i \in A$; on a donc $(\sum_i b_i a_i).u = 1$, et u est inversible dans B.□

Exemple 10.6. Reprenons l'exemple d'une extension galoisienne finie de corps, $K \subset K'$, comme en 10.4. a), de sorte qu'ici $G = \mathrm{Gal}(K'/K)$. Un cocycle $\theta : G \to K'^{\times}$ détermine un K-module inversible L_θ, c'est-à-dire un espace vectoriel de dimension 1, lequel est libre ! La proposition 10.5 montre donc que pour tout cocycle θ, il existe un élément $u \in K'^{\times}$ tel que, pour tout $g \in G$,

$$\theta(g) \;=\; u/g(u).$$

Ce résultat : *pour une extension de corps, tout cocycle est un cobord*, se démontre facilement à l'aide d'une résolvante de Lagrange ; il est quelquefois nommé le « théorème 90 de Hilbert. »

Exemple 10.7. Revenons à la situation du début (2.2 et 3.5). L'anneau

$$A = \mathbf{R}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$$

est considéré comme sous-anneau de

$$B = \mathbf{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$$

Il est clair que $B = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} A$, si bien que le morphisme $A \to B$ est galoisien de groupe $G = \{\mathrm{Id}, \sigma\}$, où σ est la conjugaison complexe.

On définit un cocycle

$$\theta : G \longrightarrow B^\times$$

en posant $\theta(\mathrm{Id}) = 1, \quad \text{et} \quad \theta(\sigma) = x + iy.$

C'est effectivement un cocycle puisque $\theta(\sigma).\sigma(\theta(\sigma)) = (x+iy).(x-iy) = x^2+y^2 = 1$, et que $\theta(\mathrm{Id}) = \theta(\sigma^2)$. La relation (2.2.1) dit exactement que le module M associé au ruban de Möbius est formé des éléments $a+ib \in B$ tels que

$$(x+iy).(a-ib) = a+ib, \qquad \text{soit} \qquad \theta(\sigma).\sigma(a+ib) = a+ib.$$

C'est donc le module associé au cocycle θ.

(Pseudo) Exemple 10.8. (*Signature*) Posons $V(X_1,\dots,X_n) = \prod_{i<j}(X_j - X_i)$. Par définition de la signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$V(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}) \;=\; \varepsilon(\sigma).V(X_1,\dots,X_n).$$

Soit $P(X_1,\dots,X_n)$ un polynôme à coefficients dans un corps K de caractéristique $\neq 2$, tel que pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on ait

$$P(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)}) \;=\; \varepsilon(\sigma).P(X_1,\dots,X_n).$$

Rappelons comment on vérifie que cette propriété équivaut à : $P = V.Q$, où Q est un polynôme symétrique. Notons ${}^\sigma P$ le polynôme $P(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})$, et allègeons les notations en désignant par $F(X_i,X_j)$ le polynôme P vu comme polynôme en X_j et X_j à coefficients des polynômes en les autres indéterminées. Pour la transposition $\tau = (i\,j)$, on a ${}^\tau P = -P$, donc $F(X_j,X_i) = -F(X_i,X_j)$; faisant $X_j = X_i$, on obtient $2F(X_i,X_i) = 0$, soit $F(X_i,X_i) = 0$ puisque 2 est supposé inversible dans K ; cela montre que P est multiple de $X_j - X_i$. Comme, pour deux couples distincts (i,j) et (i',j') ces polynômes n'ont pas de diviseurs communs, on voit que V divise P, soit $P = V.Q$; il est clair que Q est symétrique.

Interprétons ce résultat fort classique dans le contexte du paragraphe. Posons $B = K[X_1,\dots,X_n]$, et $A = B^{\mathfrak{S}_n} = K[S_1,\dots,S_n]$, où les S_i sont les polynômes symétriques élémentaires en les X_j. Le morphisme $A \to B$ n'est pas galoisien car la proprieté 2) de la définition n'est pas vérifiée, mais la démarche garde un sens (on peut vérifier que le morphisme localisé $A_V \longrightarrow B_v$ est galoisien). La signature $\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ est un cocyle, auquel est associé le A-module

$$L_\varepsilon = \{P \in B, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon(\sigma).{}^\sigma P = P\}$$

On vient de rappeler que $L_\varepsilon = V.A$. Cela confirme que c'est un A-module inversible, et qu'il est libre comme il se doit, puisque A est factoriel.

11. Application : la théorie de Kummer

Elle décrit les revêtements galoisiens dont le groupe est abélien.

11.1. Avant d'énoncer le résultat en vue, donnons un exemple simple à mi-chemin entre la théorie de Kummer classique et ce qui va suivre.

Soit A un anneau et L un A-module inversible ; on suppose donnés un entier d et un isomorphisme

$$\pi : L^{\otimes d} \xrightarrow{\sim} A.$$

Pour un entier k tel que $0 \leq k \leq d-1$, on désigne par π_k l'isomorphisme composé

$$L^{\otimes d+k} \simeq L^{\otimes d} \otimes L^{\otimes k} \xrightarrow{\pi \otimes 1} L^{\otimes k}.$$

Le choix du facteur $L^{\otimes d}$ sur lequel on applique π est indifférent, cf 5.1.3.

Posons

$$B = A \oplus L \oplus L^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus L^{\otimes d-1}.$$

Ce A-module est muni d'un produit défini de la façon suivante : pour $x \in L^{\otimes i}$ et $y \in L^{\otimes j}$, on pose $x.y = x \otimes y \in L^{\otimes i+j}$, si $i+j < d$, et si $i+j \geq d$, on pose $x.y = \pi_{i+j-d}(x \otimes y)$. Le lecteur (ne) vérifiera (pas) que cela fait de B une A-algèbre commutative.

Lorsque L est libre, de générateur x, alors l'élément $t = \pi(x^{\otimes d})$ est inversible dans A puisque π est un isomorphisme, et B est visiblement isomorphe à $A[X]/(X^d - t)$, autrement dit, B est alors une extension de Kummer au sens habituel. On verra plus bas que sous des condition assez générales B est un revêtement galoisien de A.

11.2. Dégageons d'abord les hypothèses nécessaires à la validité de ce qui suit. Je remercie L. Moret-Bailly de m'avoir fait remarquer qu'une précédente version était beaucoup trop optimiste.

Soit N un entier > 0. Désignons par (P_N) la propriété suivante qui porte sur un anneau commutatif A :

(P_N) :*Le groupe mutiplicatif $A^\times$ contient un sous-groupe T qui est cyclique d'ordre N, et tel que pour tout $t \in T$, $t \neq 1$, l'élément $1-t$ soit inversible dans A.*

Un corps qui contient une racine primitive N-ième de l'unité possède cette propriété. Si un anneau la possède, tout sur-anneau la possède aussi.

Tirons les quelques conséquences de (P_N) qui seront utilisées plus bas.

11.2.1. *Dans $A[X]$, on a*

$$X^N - 1 = \prod_{t \in T} (X - t).$$

Cela se voit par récurrence à partir de la remarque suivante : soit $T' \subset T$ une partie telle que l'on ait une décomposition dans $A[X]$ en

$$X^N - 1 = P(X). \prod_{t' \in T'} (X - t').$$

Alors, pour $t \in T$, $t \notin T'$, on a $P(t) = 0$, puisque les facteurs $(t - t')$ sont inversibles.

11.2.2. *L'entier N est inversible dans A.*

Dériver l'égalité de 11.2.1, et faire $X = 1$.

11.2.3. *Soit $t \in T$ un élément $\neq 1$, et d'ordre divisant d. Alors $\sum_{j=0}^{d-1} t^j = 0$.*

Car cette somme est annulée par l'élément inversible $1-t$.

11.3. Soit A un anneau possédant la propriété (P_N). Pour un groupe abélien fini G, on pose

$$G' \;=\; \mathrm{Hom}(G,T).$$

Si G est d'ordre d divisant N, G' est un groupe abélien de même ordre d (N. Bourbaki [1], A V.93)

Soit $u : A \to B$ un morphisme galoisien de rang d divisant N, dont le groupe G est *abélien.*

Chaque homomorphisme $\theta \in G'$ est un cocycle, et définit donc le sous-A-module de B

$$L_\theta = \{b \in B, \forall g \in G \quad \theta(g).g(b) = b\}.$$

Il est inversible d'après (10.5).

On vérifie immédiatement les relations

$$L_1 = A, \qquad \text{et} \qquad L_\theta.L_{\theta'} \subset L_{\theta\theta'}.$$

Ces relations permettent de munir la somme directe $\bigoplus_{\theta\in G'} L_\theta$ d'une structure de A-algèbre pour laquelle l'application

$$f : \bigoplus_{\theta\in G'} L_\theta \;\longrightarrow\; B$$

est un morphisme de A-algèbres.

Théorème 11.4. *Soit A un anneau possédant la propriété (P_N), et soit $u : A \to B$ un morphisme galoisien de rang d divisant N, dont le groupe G est* abélien. *Alors, le morphisme*

$$f : \bigoplus_{\theta\in G'} L_\theta \;\longrightarrow\; B$$

est un isomorphisme.

Comme B est fidèlement plat sur A, il suffit, d'après (9.1), de montrer que le morphisme

$$1 \otimes f : B \otimes_A (\bigoplus_{\theta\in G'} L_\theta) \;\longrightarrow\; B \otimes_A B$$

est un isomorphisme.

Notons $\iota_\theta : L_\theta \longrightarrow B$ l'injection canonique, de sorte que l'on a $f(\sum_\theta x_\theta) = \sum_\theta \iota_\theta(x_\theta)$, ce qu'on peut condenser en $f = \sum \iota_\theta$. Utilisons les carrés commutatifs introduits en 10.5.1 :

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A L_\theta & \xrightarrow{1\otimes\iota_\theta} & B \otimes_A B \\ {\scriptstyle\omega_\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ B & \longrightarrow & \prod_G B \end{array}$$

Passant à la somme, et en posant $\omega = \bigoplus \omega_\theta$, on obtient le carré commutatif suivant où ω et ρ sont des isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A (\bigoplus L_\theta) & \xrightarrow{1\otimes f} & B \otimes_A B \\ {\scriptstyle\omega}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ \bigoplus_\theta B & \longrightarrow & \prod_G B \end{array}$$

Il faut voir le B-module $\bigoplus_\theta B$ comme la B-algèbre $B[G']$ du groupe G' à coefficients dans B ; autrement dit, la composante d'indice θ du produit de $\sum x_\theta$ par $\sum y_\theta$ est $\sum_{\theta'\theta''=\theta} x_{\theta'} y_{\theta''}$. Il est alors clair que ω est un isomorphisme de B-*algèbres*. L'application horizontale du bas envoie $\sum x_\theta \in \bigoplus_\theta B$ sur lélément $(g \mapsto \sum_\theta \theta(g)^{-1} x_\theta)$; en écrivant la chose, on constate que c'est aussi un morphisme de B-algèbres ; il faut montrer que c'est un isomorphisme ; le groupe G' étant commutatif, l'application $\theta \mapsto \theta^{-1}$ est un automorphisme. Bref, on est ramené à démontrer le

Corollaire 11.5. *Soit C un anneau possèdant la propriété (P_N). Soit G un groupe abélien d'ordre d divisant N ; posons $G' = \mathrm{Hom}(G, T)$. Alors le morphisme*

$$f : C[G'] \longrightarrow \prod_G C, \qquad \theta \longmapsto (g \mapsto \theta(g))$$

est un isomorphisme.

Traitons d'abord le cas où G est cyclique (d'ordre d). Le choix d'un générateur g de G et le choix d'un élément $\zeta \in T$, d'ordre d, déterminent un générateur θ de G', celui défini par $\theta(g) = \zeta$; on a donc $\theta^i(g^j) = \zeta^{ij}$. Les éléments $1 = \theta^0, \theta, \ldots, \theta^{d-1}$ forment une base de $C[G']$ comme C-module, et les applications $\delta_j : G \to C$, définies par $\delta_j(g^k) = \delta_{jk}$ forment une base de $\prod_G C$. La matrice de f relativement à ces bases est la matrice de Van der Monde (ζ^{ij}), dont le déterminant $V(1, \zeta, \ldots, \zeta^{d-1}) = \prod_{i<j}(\zeta^j - \zeta^i)$ est inversible d'après l'hypothèse (P_N).

La démonstration du cas général utilise une décomposition de G en produit de groupes cycliques pour se ramener au cas précédent. Si $G = G_0 \times G_1$, alors $G' = \mathrm{Hom}(G_0 \times G_1, T)$ est somme directe de ses sous-groupes G'_0 et G'_1, et l'application évidente

$$C[G'_0] \otimes_C C[G'_1] \longrightarrow C[G']$$

est un isomorphisme ; par suite, le morphisme f de l'énoncé se factorise en

$$C[G'] \simeq C[G'_0] \otimes_C C[G'_1] \xrightarrow{f_0 \otimes 1} \prod_{G_0} C \otimes_C C[G'_1] \simeq \prod_{G_0} C[G'_1] \xrightarrow{1 \otimes f_1} \prod_{G_0}(\prod_{G_1} C) \simeq \prod_G C.$$

Cela achève la démonstration du corollaire, et, par suite, celle du théorème.

Références

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Paris, Masson.
[2] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative, ch. I et II*, Paris, Masson,1961.
[3] C. GODBILLON. *Éléments de topologie algébrique*, Paris, Hermann, 1971.
[4] E. HECKE, *Lectures on the Theory of Algebraic Numbers*, New-York, Springer-Verlag, 1981(Traduction de *Vorlesung über die Theorie der algebraischen Zahlen*, 1923)
[5] M.-A. KNUS et M. OJANGUREN, *Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya*, Springer LNM 389, 1974
[6] E. LANDAU, *Elementary Number Theory*, New-York, Chelsea Pub. Comp., 1958 (Traduction de *Elementare Zahlentheorie*, 1927)
[7] J. STILLWELL. *Geometry of Surfaces*, New York, Springer-Verlag, 1992.
[8] R. SWAN. *Vector Bundles and Projective Modules*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 105, No 2 (Nov. 1962), 264-277.
[9] W. C.WATERHOUSE, *Introduction to Affine Group Schemes*, New-York, Springer-Verlag, 1979.

Daniel Ferrand

IRMAR
Université de Rennes 1,
Campus de Beaulieu
35042 RENNES Cedex
France
e-mail : daniel.ferrand[at]univ-rennes1.fr