



HAL
open science

L'indice de Maslov dans les JB^* -triples

Stephane Merigon

► **To cite this version:**

| Stephane Merigon. L'indice de Maslov dans les JB^* -triples. 2007. hal-00142166v2

HAL Id: hal-00142166

<https://hal.science/hal-00142166v2>

Preprint submitted on 16 Jun 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

L'INDICE DE MASLOV DANS LES JB^* -TRIPLES

STÉPHANE MERIGON

RÉSUMÉ. Soit E un JB^* -triple dont l'ensemble des tripotents inversibles Σ n'est pas vide. Nous construisons un indice invariant par homotopie sur les chemins dans Σ qui respectent une condition de type Fredholm par rapport à un tripotent fixe. Cet indice généralise l'indice de Maslov pour la Fredholm-Lagrangienne d'un espace de Hilbert symplectique de dimension infinie défini dans [BBF98]. Lorsque E est de dimension finie, nous relierons cet indice à l'indice triple généralisé de [CØ01, Cle04] et à l'indice de Souriau généralisé de [CK07].

ABSTRACT. Let E be a JB^* -triple whose set of invertible tripotents Σ is not empty. We construct a homotopy invariant index for paths in Σ that satisfies a Fredholm type condition with respect to a fixed invertible tripotent. This index generalises the Maslov index for the Fredholm-Lagrangian of an infinite dimensional symplectic Hilbert space defined in [BBF98]. When E is finite dimensional we make the connection with the generalised triple index of [CØ01, Cle04] and the generalised Souriau index of [CK07].

0. INTRODUCTION

Dans son traité *thorie des perturbations et méthodes asymptotiques*, V.P. Maslov introduit un indice pour les chemins dans la Lagrangienne d'un espace symplectique réel de dimension finie qui intervient dans le prolongement de solutions asymptotiques d'équations aux dérivées partielles. Dans [Arn67] (voir aussi [Arn85]), Arnold clarifie la définition de cet indice. Soit (H, ω) un espace symplectique réel de dimension $2n$ et notons $\Lambda(n)$ sa Lagrangienne. Pour tout $\lambda \in \Lambda(n)$ et tout $1 \leq k \leq n$ posons

$$\Lambda_\lambda^k(n) = \{\mu \in \Lambda(n) \mid \dim \mu \cap \lambda = k\}.$$

Alors

$$\overline{\Lambda_\lambda^1(n)} = \sum_{1 \leq k \leq n} \Lambda_\lambda^k(n)$$

est un cycle de lieu singulier $\sum_{2 \leq k \leq n} \Lambda_\lambda^k(n)$. Il existe sur H un produit scalaire (\cdot, \cdot) et une structure complexe J isométrique tels que

$$\forall \eta, \xi \in H, \quad \omega(\xi, \eta) = (J\xi, \eta).$$

Date: 16 juin 2009.

Key words and phrases. Indice de Maslov, Domaines bornés symétriques en dimension infinie, JB^* -triples.

On peut alors orienter $\overline{\Lambda_\lambda^1(n)}$ transversalement grce au champ

$$v(\mu) = \frac{d}{d\theta}|_{\theta=0} e^{J\theta}\mu,$$

le cot positif tant celui vers lequel $v(\mu)$ est dirig. L'indice (par rapport λ) d'un chemin γ dont les extrmits ne sont pas dans le cycle est par dfinition l'indice d'intersection de γ avec ce cycle : si l'ensemble des points d'intersection de γ avec le cycle est fini et contenu dans $\Lambda_\lambda^1(n)$ et si en chacun de ces points γ est continment diffrentiable alors l'indice de Maslov est le nombre de points o γ traverse le cycle dans le sens positif moins le nombre de points o γ traverse le cycle dans le sens ngatif. Lorsque l'on se restreint aux chemins fermes on obtient un lment du groupe de cohomologie entire $H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z})$ qui ne dpend pas de λ .

Remarquons que l'orthogonal (pour le produit scalaire) d'un lagrangien λ est $\lambda^\perp = J\lambda$. Fixons une base orthogonale de λ et identifions $H \simeq \mathbb{C}^n$ muni de la forme hermitienne $\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot, \cdot) - i\omega(\cdot, \cdot)$ par :

$$\begin{aligned} H &\simeq \lambda \oplus \lambda^\perp \simeq \mathbb{C}^n \\ \eta \oplus J\xi &\mapsto \eta + i\xi. \end{aligned}$$

Alors le groupe $U(n)$ des matrices complexes unitaires de taille n agit transitivement sur $\Lambda(n)$ et le stabilisateur de λ s'identifie au sous-groupe des matrices relles $O(n)$:

$$\Lambda(n) \simeq U(n)/O(n).$$

On peut donc dfnir une application $\text{Det}^2 : \Lambda(n) \rightarrow S^1$ et Arnold montre qu'elle induit un isomorphisme des groupes fondamentaux :

$$\pi_1(\Lambda(n)) \simeq \pi_1(S^1).$$

Ainsi on a

$$H_1(\Lambda(n), \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(\Lambda(n))$$

et il revient donc au mme de se donner un gnrateur de $H^1(\Lambda(n), \mathbb{Z})$ ou un isomorphisme $\pi_1(\Lambda(n)) \simeq \mathbb{Z}$. Arnold montre que l'indice de Maslov concide avec l'image rciproque par Det^2 du gnrateur standard de $\pi_1(S^1)$ (le nombre de tours sur S^1 orient dans le sens trigonomtrique).

Motiv par une justification rigoureuse de la mthode de Maslov, Leray donne une variante de la dfinition d'Arnold-Maslov (cf. [Ler77]). L'indice apparat comme une fonction sur le double produit du revtement universel de la Lagrangienne et ralise une primitive d'un cocycle dfini sur les triplets de lagrangiens appel indice d'inertie. Enfin Souriau, grce une construction explicite du revtement universel, donne une formule explicite pour la fonction de Maslov (cf. [Sou76]).

Dans [BBF98] Booss-Bavnbek et Furutani gnralisent l'indice de Maslov pour la Lagrangienne d'un espace de Hilbert symplectique de dimension infinie H . Soit λ un lagrangien de H . L'indice est dfini pour

les chemins dans la Fredholm-Lagrangienne \mathcal{FL}_λ , c'est--dire l'ensemble des lagrangiens μ tels que (λ, μ) est une paire de Fredholm :

$$\dim \lambda \cap \mu < \infty \quad \text{et} \quad \dim H/(\lambda + \mu) < \infty,$$

et il réalise un isomorphisme entre $\pi_1(\mathcal{FL}_\lambda)$ et \mathbb{Z} .

Dans une autre direction, Jean-Louis Clerc et Bent Ørsted ont montré (cf. [CØ01, CØ03, Cle04]) que l'indice triple se généralise naturellement la frontière de Shilov S d'un domaine borné symétrique de type tube \mathcal{D} , et qu'il permet de caractériser les orbites de triplets transverses de S sous l'action du groupe des automorphismes holomorphes de \mathcal{D} . Puis Clerc et Koufany (cf. [CK07]) ont construit de deux manières différentes une primitive de l'indice triple sur le revêtement universel de la frontière de Shilov, l'une généralisant la méthode de Souriau et l'autre celle d'Arnold-Maslov. À la fin des années 70, Kaup et Upmeyer ont développé la théorie des domaines bornés symétriques dans les espaces de Banach, le résultat principal étant que la catégorie des domaines bornés symétriques est équivalente à celle des JB^* -triples. Dans cet article nous construisons l'indice de Maslov pour l'ensemble des tripotents inversibles d'un JB^* -triple, en adaptant la construction de Booss-Bavnbek et Furutani.

Le paragraphe 2 présente la structure de JB^* -triple et son lien avec les domaines bornés symétriques. Dans le paragraphe 3, nous détaillons l'identification entre la Lagrangienne d'un espace de Hilbert symplectique réel $H_0 \oplus H_0$ et l'ensemble des tripotents inversibles du JB^* -triple $Sym(H_0 \oplus iH_0)$. Dans le paragraphe 4 nous introduisons la définition d'une paire de Fredholm pour deux unités d'un JB^* -triple, et l'indice de transversalité d'une telle paire (x, e) et nous étudions comment varie cet indice lorsque l'on perturbe x . Cette étude nous permet de construire dans le paragraphe 5 l'indice de Maslov d'un chemin $t \mapsto x(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) tel que $(x(t), e)$ soit une paire de Fredholm pour tout t . Enfin dans le paragraphe 6 on se restreint à la dimension finie pour montrer le lien entre cet indice et ceux de Clerc, Koufany et Ørsted.

Remerciements. Je tiens à remercier K.H. Neeb de m'avoir signalé une erreur dans la version précédente de cet article.

Notations. Si X est un espace topologique, on note $C(X)$ l'algèbre des fonctions complexes continues sur X . Si E et F sont deux espaces de Banach, on note $L(E, F)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de E dans F muni de la norme d'opérateur et on pose $L(E) = L(E, E)$. Si \mathcal{B} est une algèbre de Banach (associative) complexe et $x \in \mathcal{B}$, on note $sp(\mathcal{B}, x)$ le spectre de x dans \mathcal{B} . Lorsque $\mathcal{B} = L(E)$ on note simplement $sp(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

1. JB^* -TRIPLES ET DOMAINES BORNÉS SYMÉTRIQUES

Un JB^* -triple est la donnée d'un espace de Banach complexe $(E, |\cdot|)$ et d'une application (on note \overline{E} l'espace conjugué de E)

$$Q : E \rightarrow L(\overline{E}, E)$$

quadratique et continue, telle que si l'on note

$$\{x, y, z\} = L(x, y)z = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))z$$

le système triple associé on a l'*identité triple de Jordan* :

$$\{u, v, \{x, y, z\}\} = \{\{u, v, x\}, y, z\} - \{x, \{v, u, y\}, z\} + \{x, y, \{u, v, z\}\}$$

et les propriétés suivantes pour tout x de E :

- (1) $L(x, x)$ est un opérateur hermitien positif,
- (2) $|\{x, x, x\}| = |x|^3$.

Une algèbre de Jordan Banach est un espace de Banach $(E, |\cdot|)$ muni d'un produit commutatif $x \circ y$ tel que

- (1) $|x \circ y| \leq |x| |y|$,
- (2) $x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y)$, $\forall x, y \in E$.

Supposons E complexe et muni d'une involution antilinéaire $*$. Alors

$$\{x, y, z\} = x \circ (y^* \circ z) + z \circ (y^* \circ x) - (x \circ z) \circ y^*$$

vérifie l'identité triple de Jordan et E est appelée une JB^* -algèbre si l'on a

$$|\{x, x, x\}| = |x|^3, \quad \forall x \in E.$$

Si E possède un neutre, c'est alors un JB^* -triple. Une algèbre de Jordan Banach réelle A est appelée JB -algèbre si l'on a

- (1) $|x^2| = |x|^2$,
- (2) $|x^2| \leq |x^2 + y^2|$, $\forall x, y \in A$.

La partie réelle d'une JB^* -algèbre est une JB -algèbre et réciproquement, tant qu'on donne une JB -algèbre A , il existe sur $E = A \otimes \mathbb{C}$ une unique norme prolongeant celle de A et qui fait de E (muni du produit tendu par linéarité) une JB^* -algèbre (cf [Wri77]).

Si E est une C^* -algèbre de produit xy alors E muni du produit de Jordan

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

devient une JB^* -algèbre. Une JB^* -algèbre qui est isomorphe à une sous- JB^* -algèbre (ie. un sous-espace fermé stable par le produit de Jordan) d'une C^* -algèbre est dite *spéciale*.

Un ouvert connexe et borné \mathcal{D} d'un espace de Banach E est appelé domaine borné symétrique si chacun de ses points on peut associer un automorphisme holomorphe involutif de \mathcal{D} dont il est un point fixe isolé.

Un tel domaine est homogne sous son groupe d'automorphismes et bi-holomorphiquement quivalent un domaine born cercl (ie. contenant l'origine et invariant sous l'action des nombres complexes de module 1) et toil par rapport l'origine [Vig76]. Une telle ralisation est unique isomorphisme linare prs (car un biholomorphisme d'un domaine cercl conservant l'origine est linare). L'ensemble des champs de vecteurs complets sur \mathcal{D} est une algbre de Lie Banach et le groupe des biholomorphismes de \mathcal{D} peut tre muni d'une structure de groupe de Lie Banach relle dont l'algbre de Lie s'y identifie (cf. [Vig76, Upm76, Upm85]). Lorsque \mathcal{D} est ralis comme domaine cercl cette algbre de Lie que l'on notera \mathfrak{g} se dcompose suivant les espaces propres de l'action de la symtrie l'origine :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

de sorte que \mathfrak{k} est constitu de champs linaires et que l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &\rightarrow E \\ X &\mapsto X(0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de Banach. De plus il existe une application $Q : E \rightarrow L(\overline{E}, E)$ quadratique et continue telle que pour tout $v \in E$ l'unique champ X_v de \mathfrak{p} tel que $X_v(0) = v$ s'crive

$$X_v(z) = v - Q(z)v.$$

Cette application fait de E un JB^* -triple dont la boule unit concide avec \mathcal{D} . Rciproquement la boule unit d'un JB^* -triple est un domaine born symtrique (cf. [Kau77, Kau83]).

Un lment x d'un JB^* -triple E est dit inversible si $Q(x)$ l'est. On note

$$x^\# = Q(x)^{-1}x.$$

On appelle tripotent tout lment tel que $Q(x)x = x$ et on note Σ l'ensemble des tripotents inversibles de E . C'est une sous-varit banachique de E . Si $e \in \Sigma$ alors le produit

$$x \circ y := L(x)y := \{x, e, y\}$$

et l'involution $Q(e)$ font de E une JB^* -algbre de neutre e que l'on notera $E^{(e)}$ et le systme triple associ $E^{(e)}$ est bien celui de E . Pour cette raison on appelle parfois Σ l'ensemble des units de E . On notera $A(e)$ la partie relle de $E^{(e)}$ et

$$P(x) = Q(x)Q(e)$$

la representation quadratique. Un lment x dans E est donc inversible si et seulement si $P(x)$ l'est et on dfinit son inverse dans $E^{(e)}$ par

$$x^{-1} = P(x)^{-1}x = Q(e)x^\#.$$

Notons $x^* = Q(e)x$. Alors

$$\Sigma = \{x \in E \mid x^* = x^{-1}\}.$$

La notion d'inversibilité dans une algèbre de Jordan que nous avons introduite est due à N. Jacobson, qui a montré qu'elle est équivalente à la définition classique : x est inversible si et seulement si il existe un élément y tel que $x \circ y = e$ et $x^2 \circ y = x$, auquel cas y est unique et est appelé l'inverse de x (si E est une algèbre de Jordan spéciale, alors ces deux propriétés sont équivalentes $xy = yx = 1$, cf. [Jac68, p.51]).

L'opérateur de Bergman de E est par définition par

$$B(x, y) := Id - 2L(x, y) + Q(x)Q(y).$$

Le couple (x, y) est dit *transverse* lorsque $B(x, y)$ est inversible. Lorsque $y = e \in \Sigma$, on a $B(x, e) = Q(x - e)Q(e) = P(x - e)$. Donc le couple (x, e) est transverse si et seulement si il est inversible.

Le spectre de x dans $E^{(e)}$, noté $Sp(x, e)$, est l'ensemble des nombres complexes λ tels que $\lambda e - x$ n'est pas inversible. Alors d'après un théorème de J. Martinez Moreno (cf. [MM80] et [Kau83]) :

$$sp(L(x)) \subset \frac{1}{2}(Sp(x, e) + Sp(x, e)),$$

et

$$sp(P(x)) \subset Sp(x, e)Sp(x, e).$$

On appelle tripotent régulier un tripotent x tel que $\ker L(x, x) = 0$ et on note S leur ensemble. Lorsque la dimension de E est finie (la théorie devient celle des systèmes triples de Jordan hermitiens positifs cf. [Loo77]), si Σ est non vide alors $\Sigma = S$ (car S est homogène sous le groupe des automorphismes du système triple). En dimension infinie ce n'est plus le cas, mais S s'identifie toujours à la frontière extrême (au sens de la convexité) de \overline{D} , et Σ est une réunion de composantes connexes de S (cf. [KU77, BKU78]).

2. LA LAGRANGIENNE COMME FRONTIÈRE DE SHILOV DE $Sym(H)$

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert complexe (séparable). Le produit hilbertien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est antilinéaire par rapport à la seconde variable. Soit τ une involution (ie. une application \mathbb{C} -antilinéaire involutive) isométrique de H . On note $Sym(H)$ l'espace de Banach des opérateurs symétriques pour la forme bilinéaire symétrique

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \tau(\cdot) \rangle.$$

Pour $z \in L(H)$, on pose

$$\overline{z} = \tau \circ z \circ \tau.$$

L'espace de Banach $Sym(H)$ muni du produit triple

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(x\overline{y}z + z\overline{y}x)$$

est un JB^* -triple. En effet, c'est un sous-système triple de Jordan fermé de $L(H)$ et on peut donc appliquer [Upm85, 20.9].

Soit $z \in \text{Sym}(H)$. On voit facilement que la notion d'inversibilité coïncide avec celle des opérateurs (en effet, si x est inversible comme opérateur alors $Q(x)$ l'est, et si $Q(x)$ est inversible, alors $\text{id} = x(Q(x)^{-1} \text{id})x$ et donc x est inversible), et que, puisque,

$$\bar{x}x = \text{id} \Rightarrow x\bar{x} = \text{id},$$

les tripotents maximaux sont inversibles :

$$\Sigma = S = \{x \in \text{Sym}(H) \mid \bar{x}x = \text{id}\}.$$

L'opérateur de Bergman s'crit

$$\begin{aligned} B(x, y)z &= z - (x\bar{y}z + z\bar{y}x) + x\bar{y}z\bar{y}x \\ &= (1 - x\bar{y})z(1 - \bar{y}x), \end{aligned}$$

et lorsque x et y sont dans Σ on a

$$B(x, y)z = Q(y - x)Q(y)z = (1 - xy^{-1})z(1 - y^{-1}x),$$

et le couple (x, y) est transverse si et seulement si $y - x$ est inversible.

Considérons la structure de JB^* -algèbre sur $\text{Sym}(H)$ définie par le tripotent inversible id . Le produit s'crit

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$$

et l'involution

$$x^* = \bar{x}.$$

Soit $H_0 = \ker(\tau - \text{id})$ la forme réelle de H associée à τ . Alors la partie autoadjointe de la JB^* -algèbre $\text{Sym}(H)$ s'identifie à l'espace $\text{Sym}(H_0)$ des opérateurs symétriques de H_0 (qui est donc une JB -algèbre).

Introduisons maintenant un peu de vocabulaire et quelques notations. Soit $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert réel ou complexe. Une forme bilinéaire antisymétrique ω continue et fortement non-dégénérée (ie. telle que l'application $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, $\xi \mapsto \omega(\cdot, \xi)$ est bijective) est appelée *forme symplectique*. Supposons \mathcal{H} muni d'une telle forme. On dit alors que \mathcal{H} est un *espace de Hilbert symplectique*. Pour un sous-espace $F \subset \mathcal{H}$, on note F° l'orthogonal de F pour ω , alors que l'on note F^\perp l'orthogonal pour la structure Hilbertienne. Un *lagrangien* de \mathcal{H} est un sous-espace λ tel que $\lambda^\circ = \lambda$. Un lagrangien est automatiquement fermé (car $(F^\circ)^\circ = \overline{F}$ pour tout sous-espace F). On appelle *Lagrangienne* l'ensemble des lagrangiens de \mathcal{H} , et on la note $\Lambda(\mathcal{H})$.

On pose $\mathbb{H} = H \oplus H = \{\eta \oplus \xi \mid \xi, \eta \in H\}$. C'est un espace de Hilbert pour la forme hermitienne

$$\langle \eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi' \rangle = \langle \eta, \eta' \rangle + \langle \xi, \xi' \rangle,$$

et on muni \mathbb{H} d'une structure symplectique (complexe) en posant

$$\omega(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi') = (\eta, \xi') - (\xi, \eta').$$

L'involution τ s'étend à \mathbb{H} en posant

$$\tau(\eta \oplus \xi) = \tau(\eta) \oplus \tau(\xi).$$

Alors $\mathbb{H}_0 = H_0 \oplus H_0$ est la forme réelle de \mathbb{H} associée à τ , et puisque la forme symplectique vérifie

$$\omega(\tau(\eta \oplus \xi), \tau(\eta' \oplus \xi')) = \overline{\omega(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi')},$$

on peut la restreindre à \mathbb{H}_0 en une forme symplectique réelle. Nous allons montrer comment l'ensemble Σ s'identifie à la lagrangienne $\Lambda(\mathbb{H}_0)$ de \mathbb{H}_0 .

Commençons par envoyer $\text{Sym}(H)$ dans $\Lambda(\mathbb{H})$.

Notons $H_1 = H \oplus 0$ et $H_2 = 0 \oplus H$, π_1 et π_2 les projections sur H_1 (resp. H_2) parallèlement à H_2 (resp. H_1). Si $x \in L(H)$ alors

$$G(x) := \{x\xi \oplus \xi \mid \xi \in H\}$$

est un sous-espace fermé de \mathbb{H} . Il est de plus transverse à H_1 (ie. $G(x) \oplus H_1 = \mathbb{H}$) car $\xi \oplus \eta = \xi' \oplus (x\xi' + \eta')$, $\xi, \eta, \xi', \eta' \in H$ se résout de manière unique en $\xi = \xi'$, $\eta' = \eta - x\xi$. Réciproquement, soit F un sous-espace fermé et transverse à H_1 et $\pi : F \rightarrow H_2$ la restriction de π_2 à F . L'application π est bijective parce que F est transverse et comme H_1 est un supplémentaire fermé π est continue et donc d'après le théorème de Banach elle est bicontinue. Alors $\pi_1 \circ \pi^{-1} \in L(H)$ et $G(\pi_1 \circ \pi^{-1}) = F$. Remarquons que H_1 et H_2 sont dans $\Lambda(\mathbb{H})$. Si $x \in L(H)$ on note ${}^t x$ le transposé de x par rapport à (\cdot, \cdot) . Alors $G({}^t x) = G(x)^\circ$. En effet l'inclusion $G({}^t x) \subset G(x)^\circ$ est clair et si il n'y avait pas égalité on aurait $G(x)^\circ \cap H_2 \neq \{0\}$ ce qui impliquerait $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$. L'application G induit donc une bijection entre $\text{Sym}(H)$ et les lagrangiens transverses à H_1 .

Posons $J(\eta \oplus \xi) = (-\xi) \oplus \eta$. Alors $\omega(\cdot, \cdot) = (J\cdot, \cdot)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda(\mathbb{H})$, $\lambda^\perp = J\tau(\lambda)$.

Pour caractériser l'image de Σ par l'application G introduisons la forme hermitienne

$$h(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi') = \langle \xi, \xi' \rangle - \langle \eta, \eta' \rangle.$$

Proposition 2.1. *Soit λ un lagrangien sur lequel h est une forme positive. Alors λ est transverse à H_1 .*

Démonstration. Soit λ un lagrangien sur lequel h est une forme positive. Si $\eta \oplus 0 \in \lambda$ alors

$$h(\eta \oplus 0, \eta \oplus 0) = -\langle \eta, \eta \rangle \geq 0$$

donc $\eta = 0$ et $\lambda \cap H_1 = \{0\}$. Comme

$$(\lambda + H_1)^\perp = \lambda^\perp \cap H_1^\perp = J\tau(\lambda) \cap J\tau(H_1) = J\tau(\lambda \cap H_1) = \{0\},$$

il suffit de montrer que $\lambda + H_1$ est fermé. Soit $(\zeta_n)_\mathbb{N}$ une suite de $\lambda + H_1$ qui converge vers $\zeta \in \mathbb{H}$. Pour tout entier n , $\zeta_n = \xi_n + \eta_n + \eta'_n$ avec $\xi_n \in H_2$, $\eta_n, \eta'_n \in H_1$ et $\xi_n + \eta_n \in \lambda$. ξ_n est la projection orthogonale de ζ_n sur H_2 et converge donc vers la projection orthogonale ξ de η sur H_2 . D'autre part, $h(\xi_n + \eta_n, \xi_n + \eta_n) = \langle \xi_n, \xi_n \rangle - \langle \eta_n, \eta_n \rangle \geq 0$ donc $(\eta_n)_\mathbb{N}$ est bornée et on peut extraire une suite, toujours notée $(\eta_n)_\mathbb{N}$, qui

converge faiblement vers η . Mais H_1 est fermé pour la topologie forte et convexe donc fermé pour la topologie faible et donc $\eta \in H_1$. Comme $\xi_n + \eta_n$ converge faiblement vers $\xi + \eta$ et que η'_n converge faiblement vers $\eta' = \zeta - \xi - \eta$, on en déduit de même que $\xi + \eta \in \lambda$ et $\eta' \in H_1$. Par unicité de la limite on obtient la décomposition $\zeta = \xi + \eta + \eta'$ qui nous permet de conclure que $\zeta \in \lambda + H_1$. Finalement, λ est bien transverse à H_1 . \square

Alors h s'annule sur $\lambda = G(x)$ si et seulement si pour tout $\xi \in H$, $\langle x\xi, x\xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle$, ie. si et seulement si $\langle (1 - x^*x)\xi, \xi \rangle = 0$ ce qui équivaut par polarisation à $x^*x = 1$. En rsum,

$$\begin{aligned} \text{Sym}(H) &\xrightarrow{G} \Lambda(\mathbb{H}) \\ \Sigma &\simeq \{\lambda \in \Lambda(\mathbb{H}) \mid h|_{\lambda \times \lambda} = 0\}. \end{aligned}$$

On définit la transformée de Cayley sur \mathbb{H} par

$$C(\eta \oplus \xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}((\eta + i\xi) \oplus (i\eta + \xi)).$$

On a

$$\omega(C\cdot, C\cdot) = \omega(\cdot, \cdot) \quad \text{et} \quad ih(\cdot, \cdot) = \omega(C\cdot, \tau(C\cdot)).$$

Donc C conserve les lagrangiens de \mathbb{H} , et les lagrangiens sur lesquels h s'annule sont transformés en les lagrangiens stables par τ . Il ne reste plus qu'identifier l'ensemble des lagrangiens stables par τ et $\Lambda(\mathbb{H}_0)$.

Si F_0 est un sous-espace de \mathbb{H}_0 , alors $F_0 \oplus iF_0$ est un sous-espace complexe de \mathbb{H} stable par τ . Réciproquement, si F est un sous-espace de \mathbb{H} stable par τ , alors $F = F \cap \mathbb{H}_0 \oplus F \cap i\mathbb{H}_0 = F \cap \mathbb{H}_0 \oplus i(F \cap \mathbb{H}_0)$. De plus il est clair que si F_0 est un lagrangien rel, alors $F_0 \oplus iF_0$ est un lagrangien complexe et que si F est un lagrangien complexe, alors $F \cap \mathbb{H}_0$ est un lagrangien rel. On a donc une bijection entre la Lagrangienne réelle et l'ensemble $\Lambda(\mathbb{H})^\tau$ des lagrangiens complexes stables par τ . Finalement on a bien une bijection entre Σ et la Lagrangienne réelle :

$$\Sigma \xrightarrow{G} \{\lambda \in \Lambda(\mathbb{H}) \mid h|_{\lambda \times \lambda} = 0\} \xrightarrow{C} \Lambda(\mathbb{H})^\tau \simeq \Lambda(\mathbb{H}_0).$$

La Lagrangienne $\Lambda(\mathbb{H}_0)$ est munie d'une structure de varit banachique (cf. [Fur04]). La bijection que nous avons dcrite est alors un diffeomorphisme. Nous n'crivons pas les dtails.

Réciproquement, partons maintenant d'un espace de Hilbert symplectique rel $(\mathbb{H}_0, \omega, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On peut supposer, quitte remplacer le produit scalaire par un autre dfinissant une norme quivalente, que la forme symplectique et le produit scalaire sont *compatibles*, c'est-à-dire qu'ils sont liés par la relation

$$\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle$$

où J est à la fois un opérateur orthogonal et une structure complexe (cf. [Fur04, Appendix D]). Soit $H_0 \in \Lambda(\mathbb{H}_0)$. Alors H_0 est fermé et

$H_0^\perp = JH_0$. Suivant la décomposition $\mathbb{H}_0 = H_0 \oplus JH_0 \simeq H_0 \oplus H_0$,

$$\omega(\eta \oplus \xi, \eta' \oplus \xi') = \langle \eta, \xi' \rangle - \langle \xi, \eta' \rangle$$

et on peut étendre ω et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ à $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 \otimes \mathbb{C}$ et poser $H = H_0 \oplus iH_0$ pour se retrouver dans la situation du paragraphe précédent.

La notion de *paire de Fredholm* est essentielle dans la définition de l'indice de Maslov en dimension infinie. La paire de lagrangiens $(\lambda, \mu) \in \Lambda(\mathbb{H}_0)^2$ est appelée paire de Fredholm si

$$\dim \lambda \cap \mu < \infty \quad \text{et} \quad \dim \mathbb{H}_0 / (\lambda + \mu) < \infty.$$

La Fredholm-Lagrangienne relativement λ est alors

$$\mathcal{F}\Lambda_\lambda = \{ \mu \in \Lambda(\mathbb{H}_0) \mid (\mu, \lambda) \text{ est une paire de Fredholm} \}.$$

L'indice de Maslov relativement λ est défini pour les chemins (continus) dans la Fredholm-Lagrangienne relativement λ (cf. [BBF98, Fur04]). Nous voulons maintenant traduire cette notion dans la réalisation de la Lagrangienne comme ensemble des tripotents inversibles de $\text{Sym}(H)$. Soient x et y deux opérateurs de H , et $G(x)$ et $G(y)$ leurs graphes dans \mathbb{H} . Alors

$$\ker(y - x) = \pi_2(G(x) \cap G(y)),$$

et

$$H / \ker(y - x) \simeq G(x) / G(x) \cap G(y)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} G(x) + G(y) &= \{ x\xi \oplus \xi + y\xi' \oplus \xi' \mid \xi, \xi' \in H \} \\ &= \{ (x\xi + y\xi') \oplus (\xi + \xi') \mid \xi, \xi' \in H \} \\ &= \{ (x\zeta + (y - x)\xi') \oplus \zeta \mid \zeta, \xi' \in H \} \\ &= G(x) + ((y - x)H \oplus 0). \end{aligned}$$

En considérant l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\rightarrow H_1 \rightarrow H_1 / ((y - x)H \oplus 0) \\ \xi \oplus \eta &\mapsto (\eta - x\xi) \oplus 0 \mapsto ((\eta - x\xi) \oplus 0) + ((y - x)H \oplus 0) \end{aligned}$$

on obtient l'isomorphisme

$$\mathbb{H} / G(x) + G(y) \simeq H / (y - x)H.$$

Supposons maintenant que x et y sont dans Σ , et soient λ et μ les lagrangiens associés. Comme C et l'application qui à un lagrangien relatif associe le lagrangien complexe qu'il engendre, respectent l'intersection et la somme, on en déduit que λ et μ forment une paire transverse (ie. $\lambda \oplus \mu = \mathbb{H}_0$) si et seulement si $y - x$ est inversible, ie. si et seulement si (x, y) est transverse, et forment une paire de Fredholm si et seulement si $y - x$ est un opérateur de Fredholm sur H . De plus, π_2 tant injective sur $G(x) \cap G(y)$, on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(y - x) = \dim \lambda \cap \mu.$$

On peut considrer \mathbb{H}_0 comme un espace de Hilbert complexe grce la structure presque complexe J et au produit hilbertien

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_J = \langle \cdot, \cdot \rangle - i\omega(\cdot, \cdot).$$

On note alors $U(\mathbb{H}_0, J)$ le groupe des opérateurs unitaires. Puisque $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle$, on voit que $U(\mathbb{H}_0, J)$ agit sur $\Lambda(\mathbb{H}_0)$. Cette action est de plus transitive. En effet, soient λ et μ deux lagrangiens. Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne réelle de \mathbb{H}_0 . Alors comme $\mathbb{H}_0 = \lambda \oplus \lambda^\perp = \lambda \oplus J\lambda$, $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne complexe de \mathbb{H}_0 . De mme une base hilbertienne réelle $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de μ est une base hilbertienne complexe de \mathbb{H}_0 . On sait qu'il existe un opérateur unitaire envoyant la base $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur la base $(e'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et un tel opérateur envoie λ sur μ .

Nous voulons maintenant transporter l'action de $U(\mathbb{H}_0, J)$ en une action d'un groupe (caractriser) sur Σ . Soit $U \in U(\mathbb{H}_0, J)$. Notons $U_{\mathbb{C}}$ l'extension \mathbb{C} -linéaire de U sur \mathbb{H} . Alors $U_{\mathbb{C}}$ agit sur $\Lambda(\mathbb{H})$, et prserve $\Lambda(\mathbb{H})^\tau$. Pour tout $a, b, c, d \in H_0$, un calcul montre que

$$C^{-1}U_{\mathbb{C}}C((a + ib) \oplus (c + id)) = (a' - ib') \oplus (c'' + id''),$$

o $a', b', c'', d'' \in H_0$ sont définis par

$$a' \oplus b' = U(a \oplus (-b)) \quad \text{et} \quad c'' \oplus d'' = U(c \oplus d).$$

Remarquons que $C^{-1}U_{\mathbb{C}}C$ laisse $H_1 = H \oplus 0$ et $H_2 = 0 \oplus H$ stables et notons

$$u = (C^{-1}U_{\mathbb{C}}C)|_{H_1} \quad \text{et} \quad v = (C^{-1}U_{\mathbb{C}}C)|_{H_2}.$$

On considère u et v comme des opérateurs sur H . Ce sont des opérateurs unitaires de H car $C^{-1}U_{\mathbb{C}}C$ est unitaire. Soit $x \in \text{Sym}(H)$. Alors

$$C^{-1}U_{\mathbb{C}}C(G(x)) = G(uxv^{-1}).$$

Montrons que $v^{-1} = {}^t u$. Il suffit de montrer que pour tout $a, b \in H_0$,

$$(u(a + ib), v(a + ib)) = (a + ib, a + ib),$$

donc que

$$(a' - ib', a'' + ib'') = (a + ib, a + ib),$$

ou encore, en développant (le produit hermitien et la forme bilinéaire concidant sur H_0), que

$$\langle a', a'' \rangle + \langle b', b'' \rangle + i(\langle a', b'' \rangle - \langle b', a'' \rangle) = \langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle + 2i \langle a, b \rangle.$$

Mais comme $U \in U(\mathbb{H}_0, J)$,

$$\langle U(a \oplus (-b)), U(a \oplus b) \rangle_J = \langle a \oplus (-b), a \oplus b \rangle_J,$$

donc

$$\langle a' \oplus b', a'' \oplus b'' \rangle_J = \langle a \oplus (-b), a \oplus b \rangle_J,$$

ce qui donne la relation voulue. En rsum, l'action de $U(\mathbb{H}_0, J)$ sur $\Lambda(\mathbb{H}_0)$ se transporte en une action (transitive) du groupe unitaire $U(H)$ sur

Σ (on peut en effet montrer que l'on obtient bien tout $U(H)$), et cette action est la restriction de l'action de $U(H)$ sur $\text{Sym}(H)$ définie par

$$U(H) \times \text{Sym}(H) \rightarrow \text{Sym}(H), \quad (u, z) \mapsto uz^{\dagger}u.$$

Remarquons pour conclure que $U(H)$ agit par automorphismes du système triple de Jordan $\text{Sym}(H)$.

3. LES PAIRES DE FREDHOLM ET L'INDICE DE TRANSVERSALITÉ

Dans cette partie on considère un JB^* -triple E tel que Σ n'est pas vide. Soit $e \in \Sigma$. Les notations sont celles du paragraphe 2. Soit $x \in \Sigma$ et soit $C^*(x, e)$ la sous-algèbre fermée de $E^{(e)}$ engendrée par e , x et $x^* = Q(e)x$.

Proposition 3.1. *Soient $(x, e) \in \Sigma^2$. Alors*

- (i) $C^*(x, e)$ est associative et c'est donc une C^* -algèbre commutative.
- (ii) Le spectre $U_{x,e}$ de x dans $C^*(x, e)$ est contenu dans le cercle unité, et c'est aussi le spectre de x dans $E^{(e)}$.
- (iii) La paire (x, e) est transverse, ie. $B(x, e)$ est inversible, si et seulement si $1 \notin U_{x,e}$.

Démonstration. Dans $E^{(e)}$, $x^* = x^{-1}$. Or on a $[L(x), L(x^{-1})] = 0$ (cf. [Upm85, 19.26]) et donc $C^*(x, e)$ est fortement associative, en particulier associative. Le système triple $C^*(x, e)$ est donc lui aussi associatif et l'on a (cf. [Upm85, 20.32]), pour tout $u, v \in C^*(x, e)$, $|u \circ v| \leq |u| |v|$. On écrit alors comme dans [Upm85, 20.33], pour $z \in C^*(x, e)$,

$$|z|^3 = |\{z, z, z\}| = |z \circ (z^* \circ z)| \leq |z| |z^* \circ z| \leq |z|^2 |z^*| = |z|^3.$$

Donc $C^*(x, e)$ est une C^* -algèbre. Comme x est unitaire dans cette C^* -algèbre, son spectre est contenu dans le cercle unité. Or $C^*(x, e)$ est contenue dans une sous-algèbre fortement associative maximale (et fermée) de $E^{(e)}$, et le spectre de x dans cette sous-algèbre est égal au spectre de x dans $C^*(x, e)$, puisque celui-ci est égal à sa frontière. Mais cette sous-algèbre fortement associative maximale est pleine dans l'algèbre de Jordan $E^{(e)}$ (ie. ses éléments y sont inversibles si et seulement si ils sont inversibles dans $E^{(e)}$, cf. [Hes96, MM77]), et donc le spectre de x dans $C^*(x, e)$ est égal au spectre de x dans $E^{(e)}$. La dernière assertion découle immédiatement de la précédente et du fait que $B(x, e) = Q(x - e)Q(e) = P(x - e)$. \square

Puisque $C^*(x, e)$ est engendrée (comme C^* -algèbre) par x et e , on a l'isomorphisme de Gelf'and :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{x,e} : C^*(x, e) &\rightarrow C(U_{x,e}), \\ y &\mapsto \hat{y}, \end{aligned}$$

qui à l'élément x associe la fonction $\hat{x}(\mu) = \mu$.

Proposition 3.2. *Soit $(x, e) \in \Sigma^2$. On a*

$$U_{e,x} = \overline{U_{x,e}}.$$

Dmonstration. Cela rsulte du fait que $Q(e - \lambda x)$ est inversible si et seulement si $Q(x - \lambda^{-1}e)$ l'est. \square

Supposons maintenant que $1 \notin U_{x,e}$ ou bien que 1 est isol dans $U_{x,e}$. Alors la fonction caractéristique $\chi_{\{1\}}$ de $\{1\}$ est continue sur $U_{x,e}$. On note alors

$$p = p(x, e) = \mathcal{G}_{x,e}^{-1}(\chi_{\{1\}})$$

le projecteur associ 1, et

$$A_p(e) = \{p, A(e), p\}.$$

On dit que 1 est de multiplicit finie si $A_p(e)$ est une JB -algbre de rang finie, ie.

$$A_p(e) = A_1 \oplus \cdots \oplus A_q$$

o chaque A_j est une algbre de Jordan euclidienne simple (cf. [FK94]) ou un facteur spin (ie. la JB -algbre, de rang 2, $H \oplus \mathbb{R}$ o H est un espace de Hilbert), le rang de $A_p(e)$ tant alors par dfnition

$$\text{rang } A_p(e) = \text{rang}(A_1) + \cdots + \text{rang}(A_q).$$

Dfnition 3.3. *Soit $(x, e) \in \Sigma$. On dit que (x, e) est une paire de Fredholm lorsque (x, e) est transverse, ou lorsque 1 est isol dans $U_{x,e}$, et est de multiplicit finie.*

On dfnit alors l'indice de transversalit de la paire de Fredholm comme le rang de $A_p(e)$,

$$\mu(x, e) = \text{rang } A_p(e).$$

Lorsque 1 est isol mais que $A_p(e)$ n'est pas de rang fini, on pose $\mu(x, e) = \infty$.

Exemple 3.4. Considrons le JB^* -triple $E = \text{Sym}(H)$. Les notations sont celles du paragraphe prcdent. En particuliers τ dsigne l'involution de H et H_0 la forme relle associe. Soit $(x, e) \in \Sigma^2$. Alors xe^{-1} est unitaire, donc normal. Soit $C^*(xe^{-1})$ la sous-algbre ferme de $L(H)$ engendré par id, xe^{-1} , et $(xe^{-1})^* = ex^{-1}$. Alors la multiplication droite par e est un isomorphisme de $C^*(xe^{-1})$ sur $C^*(x, e)$ (qui envoie id sur e et xe^{-1} sur x). Supposons que 1 est isol dans $U_{x,e}$. Notons p le projecteur associ 1 dans $C^*(x, e)$ et $p' = pe^{-1}$ le projecteur associ 1 dans $C^*(xe^{-1})$. L'opérateur p' est une projection au sens usuel, et l'on a

$$\ker(\text{id} - xe^{-1}) = p'H.$$

Nous avons vu au chapitre prcdent que l'action du groupe unitaire $U(H)$ sur Σ par automorphismes du systme triple E (dfnie par $z \mapsto vz^{\dagger}v$) est transitive. En particuliers, il existe $u \in U(H)$ tel que $e = u^{\dagger}u$.

Alors $A(e)$ (la partie autoadjointe de E pour l'involution définie par e) est isomorphe $\text{Sym}(H_0)$:

$$A(e) = A(u \text{id} \, {}^t u) = uA(\text{id}) \, {}^t u \simeq A(\text{id}) \simeq \text{Sym}(H_0).$$

Soit $p'' = u^{-1}p \, {}^t u^{-1}$. C'est un projecteur de $\text{Sym}(H_0)$, ie. une projection de H laissant H_0 stable. De plus

$$A_{p''}(\text{id}) = p'' \text{Sym}(H_0) p'' \simeq \text{Sym}(p'' H_0),$$

comme on peut le voir en crivant la "matrice" d'un opérateur $z \in \text{Sym}(H_0)$ relativement à la décomposition $H_0 = p'' H_0 \oplus (1 - p'') H_0$, et donc

$$A_p(e) \simeq \text{Sym}(p'' H_0).$$

Ainsi $A_p(e)$ est de rang fini si et seulement si $p'' H_0$ est de dimension finie. De plus

$$\ker(\text{id} - x e^{-1}) = p e^{-1} H = p H = p \, {}^t u^{-1} H = u p'' H,$$

donc

$$\dim \ker(\text{id} - x e^{-1}) = \dim_{\mathbb{C}} p'' H = \dim_{\mathbb{R}} p'' H_0,$$

et lorsque l'un des deux membres est fini,

$$\dim \ker(e - x) = \text{rang } A_p(e).$$

Montrons que dans ce cas, $x - e$ est un opérateur de Fredholm. Puisque

$$(\text{id} - x e^{-1})^* = \text{id} - e x^{-1} = (x - e) x^{-1} = (x e^{-1} - \text{id}) e x^{-1},$$

on a

$$\text{codim } \overline{\text{im}(\text{id} - x e^{-1})} = \dim \ker(\text{id} - x e^{-1}),$$

et il reste à montrer que $\text{id} - x e^{-1}$ est d'image fermée. Grâce à l'isomorphisme de Gelf'and on voit que $(1 - (x e^{-1} - p'))$ est inversible, et l'on a

$$\text{id} - p' = (\text{id} - x e^{-1})(1 - (x e^{-1} - p'))^{-1}.$$

Donc

$$\text{im}(\text{id} - x e^{-1}) = \text{im}(\text{id} - p') = \ker p'$$

est bien fermé. Réciproquement, si $x - e$ est un opérateur de Fredholm, c'est aussi le cas de $\text{id} - x e^{-1}$. Mais lorsque 0 est isolé dans la frontière du spectre d'un opérateur de Fredholm, il est en fait isolé. Il en résulte que 1 est isolé dans $U_{x,e}$.

Revenons au cas général.

Proposition 3.5. *Soit $(x, e) \in \Sigma^2$. Alors 1 est isolé dans $U_{x,e}$ si et seulement si 0 est isolé dans $B(x, e)$.*

Démonstration. Posons $U = U_{x,e} = Sp(x, e)$. Dans l'algbre de Jordan unitaire $E^{(e)}$ on a $B(x, e) = P(x - e)$, et le thorme de J. Martinez Moreno,

$$sp(P(x - e)) \subset (1 - U)(1 - U).$$

Donc si 1 est isol dans U , alors 0 est isol dans $sp(B(x, e))$.

Pour tablir la rciproque, on montre que

$$\{(1 - \lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset sp(P(x - e)).$$

Commenons par monter que

$$\{(1 - \lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial_{ext}(1 - U)(1 - U),$$

o $\partial_{ext}K$ est la frontire de la composante connexe non borne du complmentaire du compact K . Tout lment $1 - \lambda \in 1 - \mathbb{U}$ s'crit de manire unique $2 \cos \frac{\Theta}{2} e^{i\frac{\Theta}{2}}$ avec $-\pi < \Theta \leq \pi$, et alors

$$(1 - \lambda)^2 = 4 \cos^2 \frac{\Theta}{2} e^{i\Theta}.$$

Soient $2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $2 \cos(\Theta - \frac{\theta}{2}) e^{i(\Theta - \frac{\theta}{2})}$ dans $1 - \mathbb{U}$: leur produit vaut

$$4 \cos \frac{\theta}{2} \cos(\Theta - \frac{\theta}{2}) e^{i\Theta} = 2(\cos \Theta + \cos(\Theta - \theta)) e^{i\Theta}.$$

Or la fonction $\theta \mapsto \cos \Theta + \cos(\Theta - \theta)$ est maximale pour $\Theta = \theta$. La demi-droite $]4 \cos^2 \frac{\Theta}{2}, +\infty[e^{i\Theta}$ est donc entirement contenue dans le complmentaire de $(1 - U)(1 - U)$, et cela implique notre assertion. Considrons

$$\mathcal{B} = \{T \in L(E) \mid TC^*(x, e) \subset C^*(x, e)\}.$$

C'est une sous-algbre ferme de $L(E)$ qui contient $P(x - e)$. Le spectre de $P(x - e)$ dans \mathcal{B} est constitu de $sp(P(x - e))$ et, ventuellement, de certains de ses trous (ie. les composantes connexes bornes de son complmentaire). De plus, en considrant le morphisme

$$\mathcal{B} \rightarrow L(C^*(x, e)), T \mapsto T|_{C^*(x, e)},$$

on a, puisque $sp(P(x - e)|_{C^*(x, e)}) = \{(1 - \lambda)^2 \mid \lambda \in U\}$, l'inclusion

$$\{(1 - \lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset sp(P(x - e), \mathcal{B}).$$

Il rsulte alors de

$$\{(1 - \lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial_{ext}(1 - U)(1 - U)$$

que

$$\{(1 - \lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial sp(P(x - e), \mathcal{B}).$$

Comme $\partial sp(P(x - e), \mathcal{B}) \subset \partial sp(P(x - e))$, il vient

$$\{(1 - \lambda)^2 \mid \lambda \in U\} \subset \partial sp(P(x - e)).$$

Et donc si $1 \in U$ n'est pas isol, alors $0 \in sp(P(x - e))$ n'est pas isol. \square

On note Σ_e la composante connexe de Σ contenant e , et $\mathcal{F}\Sigma_e$ l'ensemble des $x \in \Sigma$ tels que (x, e) est une paire de Fredholm.

Proposition 3.6. *Soit Σ_e la composante connexe de Σ contenant e . Alors*

$$\mathcal{F}\Sigma_e \subset \Sigma_e.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathcal{F}\Sigma_e$. Alors $U_{x,e}$ n'est pas \mathbb{U} tout entier, puisque soit 1 n'y est pas, soit 1 y est mais est isol, et on peut donc définir $\log x \in C^*(x, e)$, \log étant une détermination adéquate du logarithme. Alors $P(\exp(\frac{1}{2}\log x))e = x$ et donc on a bien $x \in \Sigma_e$. \square

Considrons $(x, e) \in \Sigma^2$ et soit $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. On a $U_{x,e^{i\theta}e} = e^{-i\theta}U_{x,e}$, et donc si $e^{i\theta}$ est isol dans $U_{x,e}$, alors 1 est isol dans $U_{x,e^{i\theta}e}$, et on peut définir $p(x, e^{i\theta}e)$ et $\mu(x, e^{i\theta}e)$.

Un sous-ensemble σ de $U_{x,e}$ est dit spectral lorsque il est la fois ouvert et ferm. Cela revient à dire que la fonction caractéristique χ_σ est continue.

Lemme 3.7. *Soient $(x, e) \in \Sigma^2$ et σ un sous-ensemble spectral de $U_{x,e}$. Si $p = \mathcal{G}_{(x,e)}^{-1}(\chi_\sigma)$ alors $P(p)x$ et p sont deux unités de $P(p)E$ et on a les propriétés suivantes :*

- (i) $P(p)C^*(x, e) = C^*(P(p)x, p) \subset C^*(x, e)$,
- (ii) $U_{P(p)x,p} = \sigma$.

Démonstration. Comme $P(p)E$ est un sous système triple de E , il est clair que p et $P(p)$ sont des tripotents de $P(p)E$. Pour voir que $P(p)x$ y est inversible, on montre que $P(p)x^{-1}$ est l'inverse de $P(p)x$ dans l'algèbre de Jordan $P(p)E^{(e)}$. Mais en calculant dans $C(U_{x,e})$ on voit facilement que $\{P(p)x, p, P(p)x^{-1}\} = p$ et que $\{(P(p)x)^2, p, P(p)x^{-1}\} = P(p)x$.

(1) Puisque $p \in C^*(x, e)$, on a

$$P(p)x^2 = pxxp = pxp^2 = pxpxp = pxppxp = (P(p)x)^2.$$

(2) Si $\lambda \notin U_{P(p)x,p}$ alors il existe $z \in C^*(P(p)x, p)$ tel que

$$(\lambda p - P(p)x)z = p.$$

Soit $g(\mu) = (1 - \chi_\sigma(\mu))(\lambda - \mu)^{-1}$ pour $\mu \in U_{P(p)x,p}$. Alors

$$g(x)(\lambda e - x) = e - p.$$

Grâce à (1), $(\lambda e - x)z = (\lambda e - x)P(p)z = (\lambda e - x)pzp = (\lambda p - P(p)x)z = p$ et

$$(g(x) + z)(\lambda e - x) = e - p + p = e.$$

Donc $\lambda \notin U_{x,e}$. Réciproquement, si $\lambda \notin \sigma$ soit $h(\mu) = \chi_\sigma(\mu)(\lambda - \mu)^{-1}$ pour $\mu \in U_{x,e}$. Alors $h(x)(\lambda e - x) = p$ donc

$$P(p)h(x)(\lambda p - P(p)x) = ph(x)p((\lambda p - pxp) = ph(x)(\lambda e - x)p = p.$$

\square

Pour $0 < \varepsilon < \pi$ on note

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{e^{i\theta} \mid 0 < |\theta| \leq \varepsilon\}.$$

Lemme 3.8 (Perturbation de l'indice de transversalite). *Soit (x, e) une paire de Fredholm. Il existe $0 < \varepsilon < \pi$ tel que 1 est la seule valeur spectrale de x dans \mathcal{A}_ε . Il existe un voisinage \mathcal{V} de x tel que pour tout tripotent inversible $y \in \mathcal{V}$, le spectre de y dans \mathcal{A}_ε est fini et ne contient pas $e^{\pm i\varepsilon}$, et*

$$\mu(x, e) = \sum_{|\theta| \leq \varepsilon} \mu(y, e^{i\theta} e).$$

Démonstration. Puisque 1 est isolé (ou n'est pas) dans $U_{x,e}$, soit $0 < \varepsilon < \pi$ tel que $U_{x,e} \cap \mathcal{A}_\varepsilon = \emptyset$. Dans une algèbre de Jordan Banach, l'ensemble des éléments inversibles est ouvert, donc il existe un voisinage \mathcal{V} de x tel que

$$\forall y \in \mathcal{V} \quad y - e^{\pm i\varepsilon} e \text{ est inversible.}$$

Alors si y est une unité dans \mathcal{V} , $\sigma_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon \cap U_{y,e}$ est un sous-ensemble spectral et on peut donc définir $q(y, e, \sigma_\varepsilon) = \mathcal{G}_{y,e}^{-1}(\chi_{\sigma_\varepsilon})$. Alors (cf. par exemple [DS88, IX, lemma 13])

$$p(x, e) = \int_{|\lambda-1|=\varepsilon} \frac{1}{2i\pi} (\lambda e - x)^{-1} d\lambda,$$

et

$$q(y, e, \sigma_\varepsilon) = \int_{|\lambda-1|=\varepsilon} \frac{1}{2i\pi} (\lambda e - y)^{-1} d\lambda,$$

ce qui montre, l'inversion étant continue, que si y est suffisamment proche de x , alors $q(y, e, \sigma_\varepsilon)$ l'est suffisamment de $p(x, e)$. Or si p est un idempotent d'une JB -algèbre A , tout idempotent q dans un voisinage de p peut s'écrire

$$q = \exp k_v(p)$$

où $v \in A_{\frac{1}{2}}(p)$ et $\exp k_v$ est un automorphisme de A (cf. [CI00]). Quitte à restreindre \mathcal{V} , on a donc, en faisant $p = p(x, e)$ et $q = q(y, e, \sigma_\varepsilon)$: pour tout y dans \mathcal{V} , $A_q(e)$ est isomorphe à $A_p(e)$. En particulier, si $A_p(e)$ est de rang fini alors $A_q(e)$ aussi et les rangs sont égaux. De plus, dans ce cas, d'après le lemme précédent, l'ensemble σ_ε est fini. Supposons $\sigma_\varepsilon = \{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_l}\}$ et soit $q_j = \mathcal{G}_{y,e}^{-1}(e^{i\theta_j})$, alors en faisant le calcul dans $C(U_{y,e})$, on voit que les q_j sont des idempotents deux deux orthogonaux tels que

$$q = q_1 + \dots + q_l,$$

et donc $\text{rang}(q) = \text{rang}(q_1) + \dots + \text{rang}(q_l)$. □

4. L'INDICE DE MASLOV

On considère dans cette partie un chemin continu $x : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ tel que pour tout $t \in [0, 1]$, $(x(t), e)$ soit une paire de Fredholm. En particulier, pour tout t , 1 est une valeur propre isolée de multiplicité finie de $x(t)$ par rapport à e . Les résultats suivants généralisent ceux de [Fur04] et grâce à la partie précédente les démonstrations sont semblables et parfois laissées au lecteur.

Lemme 4.1. *Il existe une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ et des reles $\varepsilon_j \in]0, \pi[$, $j = 1 \dots N$ tels que $\forall t \in [t_{j-1}, t_j]$*

$$\mu(x(t), e, \pm\varepsilon_j) = 0,$$

et

$Sp(x(t), e) \cap \mathcal{A}_{\varepsilon_j}$ consiste en un nombre fini de valeurs propres isolées de multiplicités finies.

Démonstration. La démonstration se copie sur celle de [Fur04, lemma 3.1] en utilisant le lemme 3.8. On l'applique à chaque $(x(t), e)$ pour $t \in [0, 1]$ et on obtient des voisinages \mathcal{V}_t et des ε_t . On extrait un recouvrement fini de $[0, 1]$:

$$[0 = s_0, s_0 + \delta_0^+ [, \dots,] s_i - \delta_i^-, s_i + \delta_i^+ [, \dots,] s_{N-1} - \delta_{N-1}^-, s_{N-1} = 1]$$

et on pose

$$t_0 = s_0 = 0, t_1 = s_0 + \delta_0^+, \dots, t_{N-1} = s_{N-2} + \delta_{N-2}^+, t_N = s_{N-1} = 1$$

et

$$\varepsilon_j = \varepsilon_{s_{j-1}}.$$

□

On dira qu'une telle subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ est admissible pour les ε_j , $j = 1, \dots, N$. Posons

$$k(t, \varepsilon_j) = \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon_j} \mu(x(t), e, \theta) \quad \text{pour } t_{j-1} \leq t \leq t_j.$$

Lemme 4.2. *Soit $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ une subdivision admissible pour les ε_j , $j = 1, \dots, N$ et les $\tilde{\varepsilon}_j$, $j = 1, \dots, N$. Alors pour tout $1 \leq j \leq N$,*

$$k(t_j, \varepsilon_j) - k(t_{j-1}, \varepsilon_j) = k(t_j, \tilde{\varepsilon}_j) - k(t_{j-1}, \tilde{\varepsilon}_j)$$

Démonstration. Supposons que $\varepsilon_j \geq \tilde{\varepsilon}_j$. Alors

$$k(t, \varepsilon_j) - k(t, \tilde{\varepsilon}_j) = \sum_{\tilde{\varepsilon}_j \leq \theta \leq \varepsilon_j} \mu(x(t), e, \theta).$$

Mais si γ est le cercle de diamètre $[e^{i\varepsilon_j}, e^{i\tilde{\varepsilon}_j}]$, et $p_t = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (\lambda e - x(t))^{-1} d\lambda$ alors $\sum_{\tilde{\varepsilon}_j \leq \theta \leq \varepsilon_j} \mu(x(t), e^{i\theta} e) = \text{rang}(p_t)$. Mais $t \mapsto p_t$ est continue donc le rang de p_t est constant. □

Proposition-Dfinition 4.3. *La quantit*

$$Mas(x(t), e) = \sum_{j=1}^N (k(t_j, \varepsilon_j) - k(t_{j-1}, \varepsilon_j))$$

ne depend ni des t_j , ni des ε_j , pourvu que la subdivision t_0, \dots, t_N soit admissible pour les ε_j . On l'appelle l'indice de Maslov du chemin $x(t)$ par rapport au point e .

Dmonstration. La dmonstration utilise le lemme prcdent comme dans [Fur04, Proposition 3.3]. \square

Thorme 4.4. *L'indice de Maslov (par rapport un point fix) est additif pour la concatnation des chemins et invariant par homotopie.*

Le Lemme 3.8 permet encore une fois d'adapter la dmonstration de [Fur04, Theorem 3.6].

5. LA DIMENSION FINIE

Dans cette partie on suppose E de dimension finie. Soient x et e dans Σ . Il existe d'uniques nombres complexes u_1, \dots, u_k , de module 1 et tous distincts, et un unique systme complet d'idempotents orthogonaux c_1, \dots, c_k de l'algre de Jordan $A(e)$ tels que (cf. [FK94, Proposition X.2.3 et Theorem III.1.1])

$$x = u_1 c_1 + \dots + u_k c_k.$$

L'indice de transversalit est simplement

$$\mu(x, e, \theta) = \mu(x, e^{i\theta} e) = \sum_{j \text{ tq } u_j = e^{i\theta}} \text{rang}(c_j).$$

Exemple 5.1. On calcule l'indice de Maslov dans le cas du cercle pour les chemins suivants :

(i) $x(t) = e^{it\varphi} e$, o $\varphi \in [0, \pi[$.

On choisit $\varphi < \varepsilon < \pi$ et alors

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon} e) = 0 \text{ pour } t \in [0, 1]$$

et donc

$$Mas(x(t), e) = \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e^{i\varphi} e, e^{i\theta} e) - \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e, e^{i\theta} e) = 1 - 1 = 0$$

(ii) $x(t) = e^{i(t\varphi + \psi)} e$, o $\psi \in]0, 2\pi[$ et $0 < \varphi < 2\pi - \psi$.

On choisit $0 < \varepsilon < \min\{\psi, 2\pi - (\varphi + \psi)\}$ et alors

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon} e) = 0 \text{ pour } t \in [0, 1]$$

et donc

$$Mas(x(t), e) = \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e^{i(\varphi + \psi)} e, e^{i\theta} e) - \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e^{i\psi} e, e^{i\theta} e) = 0 - 0 = 0$$

(iii) $x(t) = e^{-it\varphi}e$, o $\varphi \in [0, \pi[$.

On choisit $\varphi < \varepsilon < \pi$ et alors

$$\mu(x(t), e^{\pm i\varepsilon}e) = 0 \text{ pour } t \in [0, 1]$$

et donc

$$Mas(x(t), e) = \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e^{i\varphi}e, e^{i\theta}e) - \sum_{0 \leq \theta \leq \varepsilon} \mu(e, e^{i\theta}e) = 0 - 1 = -1.$$

On peut alors construire un indice pour les couples de points dans le revêtement universel $\tilde{\Sigma}$ de Σ (dont une construction se trouve dans [CK07]). Si $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ ont pour projections respectives σ et τ alors on pose $Mas(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, e) = Mas(x(t), e)$ o x est n'importe quel chemin d'extrmits σ et τ dont le relvement d'origine $\tilde{\sigma}$ se termine en $\tilde{\tau}$. On note $m(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ l'indice de Souriau gnralis¹ construit dans [CK07] et $\iota(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ l'indice triple de [Cle04].

On suppose dsormais que E est simple, autrement dit que $A(e)$ est simple (ie. ne contient pas d'idéal non trivial). Alors la composante connexe $K^{(e)}$ du groupe des automorphismes de $A(e)$ agit de manire transitive sur l'ensembles des repres de Jordan de $A(e)$ (systemes complets d'idempotents primitifs, cf. [FK94]).

Thorme 5.2. *Soient $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\tau}$ dans $\tilde{\Sigma}$, de projections respectives σ et τ , et soit e dans Σ . Alors*

$$(E) \quad Mas(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, e) = \frac{1}{2}(m(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) + \iota(e, \tau, \sigma) + \mu(\tau, e) - \mu(\sigma, e)).$$

Dmonstration. Soient

$$\tilde{\sigma} = (\sigma = \sum e^{i\varphi_j}c_j, r\varphi) \quad \text{et} \quad \tilde{\tau} = (\tau = \sum e^{i\phi_j}d_j, r\phi)$$

deux points de $\tilde{\Sigma}$, (c_j) et (d_j) tant deux repres de Jordan de $A(e)$. Posons $\tilde{\tau}' = (\tau' = \sum e^{i\phi_j}c_j, r\phi)$. Il existe $k \in K^{(e)}$ tel que $kd_j = c_j$, $j = 1 \dots r$, et soit $t \mapsto k_t$ un chemin dans $K^{(e)}$ tel que $k_0 = id$ et $k_1 = k$. Alors $t \mapsto (\sum e^{i\phi_j}k_t d_j, r\phi)$ est un chemin dans $\tilde{\Sigma}$ et on note $t \mapsto x(t)$ sa projection. Alors $Mas(\{x(t)\}, e)$ est nul car $\mu(x(t), e)$ est constant. Soit \tilde{e} un point de $\tilde{\Sigma}$ au dessus de e . Alors d'après la formule de Leray (cf. [CK07])

$$m(\tilde{\tau}, \tilde{\tau}') + \iota(e, \tau', \tau) + \mu(\tau', e) - \mu(\tau, e) = m(\tilde{e}, \tilde{\tau}') - m(\tilde{e}, \tilde{\tau}).$$

Comme le second membre de (E) est aussi additif pour la concatnation des chemins, il suffit de dmontrer (E) en remplaant $\tilde{\tau}$ par $\tilde{\tau}'$. Supposons que $\varphi_j \in [0, 2\pi[$ et que $r\varphi = \sum \varphi_j$, ce qui est possible sans perte de gnralit. On considre le chemin

$$t \mapsto \sum e^{i(1-t)\varphi_j}c_j$$

¹Dans le cas de la Lagrangienne, cet indice est en fait le double de l'indice de Souriau.

Son relev d'origine $\tilde{\sigma}$ se termine en $(e, 0)$, et son indice de Maslov est nul puisqu'il se decompose en une succession de chemins unidimensionnels d'indices de Maslov nuls. D'autre part, si on pose $l = \#\{j \mid \varphi_j = 0 \ [2\pi]\}$ alors

$$m(\tilde{\sigma}, (e, 0)) + \iota(e, e, \sigma) + \mu(e, e) - \mu(\sigma, e) = -(r - l) + 0 + r - l = 0,$$

et donc il reste montrer que la formule est vraie si $\tilde{\sigma} = (e, 0)$. Supposons que $\phi_j \in [0, 2\pi[$ et que $r\phi = \sum \phi_j + 2k\pi$. L'indice de Maslov du chemin

$$t \mapsto \sum e^{it\phi_j}$$

est nul, et si $l = \#\{j \mid \phi_j = 0 \ [2\pi]\}$ alors

$$m((e, 0), (\tau, \sum \phi_j)) + \iota(e, \tau, e) + \mu(\tau, e) - \mu(e, e) = r - l + 0 + l - r = 0.$$

Considrons enfin le chemin

$$t \mapsto e^{i\phi_1 + 2kt\pi} + \sum_{j=2}^r e^{i\phi_j},$$

dont le relev d'origine $(\tau, \sum \phi_j)$ se termine en $\tilde{\tau}$. Son indice de Maslov vaut k , tout comme le membre de droite de (E). \square

Remarque 5.3. En faisant $\sigma = \tau$ dans l'equation (E) on voit que l'indice d'un lacet ne depend pas du point par rapport auquel on le calcule.

Remarque 5.4. En faisant $\sigma = e$, on obtient

$$Mas(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, \sigma) = \frac{1}{2}(m(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}) + \mu(\tau, \sigma) - r)$$

et donc on peut retrouver l'indice de Souriau, puis l'indice triple par la formule de Leray, grce ce nouvel indice.

Un indice triple a t construit en dimension infinie par Neeb et Ørsted (cf. [NØ06]), mais il est valeur dans le groupe fondamental du groupe structural de E .

Problme 5.5. Associer une quantit numrique cet indice, et pouvoir retrouver cet indice triple numrique grce l'indice pour les chemins.

RÉFÉRENCES

- [Arn67] V. I. Arnol'd, *On a characteristic class entering into conditions of quantization*, Funkcional. Anal. i Priložen. **1** (1967), 1–14.
- [Arn85] ———, *Sturm theorems and symplectic geometry*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **19** (1985), no. 4, 1–10, 95.
- [BBF98] Bernhard Booss-Bavnbek and Kenro Furutani, *The Maslov index : a functional analytical definition and the spectral flow formula*, Tokyo J. Math. **21** (1998), no. 1, 1–34.
- [BKU78] Robert Braun, Wilhelm Kaup, and Harald Upmeyer, *A holomorphic characterization of Jordan C^* -algebras*, Math. Z. **161** (1978), no. 3, 277–290.

- [CI00] C.-H. Chu and J. M. Isidro, *Manifolds of tripotents in JB^* -triples*, Math. Z. **233** (2000), no. 4, 741–754.
- [CK07] Jean-Louis Clerc and Khalid Koufany, *Primitive du cocycle de Maslov généralisé*, Math. Ann. **337** (2007), no. 1, 91–138.
- [Cle04] Jean-Louis Clerc, *L'indice de Maslov généralisé*, J. Math. Pures Appl. (9) **83** (2004), no. 1, 99–114.
- [CØ01] Jean-Louis Clerc and Bent Ørsted, *The Maslov index revisited*, Transform. Groups **6** (2001), no. 4, 303–320.
- [CØ03] ———, *The Gromov norm of the Kaehler class and the Maslov index*, Asian J. Math. **7** (2003), no. 2, 269–295.
- [DS88] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear operators. Part II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988, Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [FK94] Jacques Faraut and Adam Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994, , Oxford Science Publications.
- [Fur04] Kenro Furutani, *Fredholm-Lagrangian-Grassmannian and the Maslov index*, J. Geom. Phys. **51** (2004), no. 3, 269–331.
- [Hes96] Gerald Hessenberger, *On operator-commutative subalgebras of Jordan algebras*, Jordan Theory Preprint Archives (1996).
- [Jac68] Nathan Jacobson, *Structure and representation of Jordan algebras*, American Mathematical Society, 1968.
- [Kau77] Wilhelm Kaup, *Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds*, Math. Ann. **228** (1977), no. 1, 39–64.
- [Kau83] ———, *A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces*, Math. Z. (1983), no. 4, 503–529.
- [KU77] Wilhelm Kaup and Harald Upmeyer, *Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces*, Math. Z. **157** (1977), no. 2, 179–200.
- [Ler77] Jean Leray, *Analyse lagrangienne et mécanique quantique*, Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles (1976–1977), I, Collège de France, Paris, 1977, pp. Exp. No. 1, 303.
- [Loo77] Ottmar Loos, *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*, Lectures Note, Irvine, 1977.
- [MM77] J. Martínez Moreno, *"sobre algebras de Jordan normadas"*, Tesis doctorales de la Universidad de Granada, vol. 149, 1977.
- [MM80] J. Martínez Moreno, *JV-algebras*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **87** (1980), no. 1, 47–50.
- [NØ06] Karl-Hermann Neeb and Bent Ørsted, *A topological Maslov index for 3-graded Lie groups*, J. Funct. Anal. **233** (2006), no. 2, 426–477.
- [Sou76] Jean-Marie Souriau, *Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications*, Group theoretical methods in physics (Fourth Internat. Colloq., Nijmegen, 1975), Springer, Berlin, 1976, pp. 117–148. Lecture Notes in Phys., Vol. 50.
- [Upm76] Harald Upmeyer, *Über die Automorphismengruppen von Banach-Mannigfaltigkeiten mit invarianter Metrik*, Math. Ann. **223** (1976), no. 3, 279–288.

- [Upm85] ———, *Symmetric Banach manifolds and Jordan C^* -algebras*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 104, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 96.
- [Vig76] Jean-Pierre Vigué, *Le groupe des automorphismes analytiques d'un domaine borné d'un espace de Banach complexe. Application aux domaines bornés symétriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **9** (1976), no. 2, 203–281.
- [Wri77] J. D. Maitland Wright, *Jordan C^* -algebras*, Michigan Math. J. **24** (1977), no. 3, 291–302.

FACHBEREICH MATHEMATIK, AG AGF, TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT,
SCHLOSSGARTENSTRASSE 7, 64289 DARMSTADT
E-mail address: merigon@mathematik.tu-darmstadt.de