HAL open science

Réduction du chaos hamiltonien

Cristel Chandre

To cite this version:

Cristel Chandre. Réduction du chaos hamiltonien. Images de la Physique, 2007, 2006, pp.54. hal-00142014

HAL Id: hal-00142014

https://hal.science/hal-00142014v1

Submitted on 10 Aug 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Rubrique

Réduction du chaos hamiltonien

Une goutte de colorant que l'on agite dans un verre d'eau illustre la diffusion chaotique des particules dans tout le volume disponible. Ce phénomène est aussi observé dans les accélérateurs de particules ou dans les plasmas de tokamak. Cependant il est possible de contrôler ce chaos en construisant des barrières de transport qui agissent comme des murs immatériels empêchant ou canalisant la diffusion des particules. Ce contrôle est réalisé par une action extérieure associée à un faible coût énergétique.

hal-00142064, version 1 - 10 Aug 2007

Les systèmes déterministes sont caractérisés par des équations du mouvement où, formellement, une trajectoire est entièrement déterminée par ses conditions initiales. Cependant, ils présentent en pratique des comportements apparemment erratiques, appelés chaotiques, qui se manifestent par une forte sensibilité aux conditions initiales (illustrée par le métaphorique battement d'ailes de papillon au Brésil pouvant provoquer une tornade au Texas). Par conséquent, ils font du déterminisme de Newton et Lagrange, plus un concept théorique qu'une réalité pratique, car, pour connaître les trajectoires et donc le comportement du système, il faudrait connaître avec une précision infinie les conditions initiales. Les manifestations du chaos déterministe sont nombreuses et variées. Pour les systèmes physiques impliquant un faible nombre de particules, comme c'est le cas en mécanique (celle de systèmes simples mais aussi celle du système solaire), cette sensibilité aux conditions initiales empêche de prévoir l'évolution globale dans l'espace des phases. Malgré la connaissance précise des équations qui modélisent le système permettant de connaître la dynamique aussi précisément qu'on le souhaite mais sur des temps courts, cette instabilité empêche de déterminer, même grossièrement, les comportements sur des temps longs. Pour des problèmes physiques mettant en jeu un grand nombre de particules (comme en météorologie, ou plus généralement en hydrodynamique ou en physique des plasmas), la connaissance et la prévision de la position dans l'espace des phases des différentes particules n'est pas un enjeu. Cependant, le chaos se manifeste aussi par l'imprévisibilité à grande échelle et des propriétés de transport radicalement nouvelles (diffusion des particules dans l'espace des phases), et c'est dans ce cas que le mot chaos prend une signification proche du sens commun, le désordre. Pour les systèmes hamiltoniens (voir encadré), ces propriétés nouvelles sont au coeur de la compréhension et du contrôle de nombreux systèmes physiques. Des exemples sont donnés par la physique des particules (collimatation du faisceau), l'hydrodynamique (mélange par advection chaotique) ou la physique des plasmas (confinement magnétique d'un plasma de fusion). L'importance du contrôle de ces systèmes réside dans l'amélioration des performances associées mais aussi dans la connaissance de la physique sous-jacente.

Le contrôle consiste en une modification du système physique. Il est réalisé, par exemple, par l'ajout d'un dispositif extérieur au système, et se traduit par une modification des équations qui déterminent son évolution. Si le système présente un comportement chaotique à grande échelle, le but de cette modification est de réduire ou de supprimer le chaos ou le transport qui lui est associé. La stratégie que l'on adopte est celle de la construction de barrières de transport dans l'espace des phases.

Encadré 1

SYSTÈMES HAMILTONIENS : DE L'INTÉGRABILITÉ AU CHAOS

Un système hamiltonien à N degrés de liberté est un système dynamique dont les équations d'évolution obéissent aux équations de Hamilton, c'est-à-dire qu'il existe une fonction scalaire *des positions* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ *et des moments* $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ *(comme par exemples les quantités de mouvement), notée H, telle que l'évolution des variables canoniques $\mathbf{x}$ et $\mathbf{p}$ vérifient*

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j},$$
$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j},$$

pour $j = 1, \ldots, N$. Les systèmes conservatifs de mécanique sont des exemples de ces systèmes, où H est l'énergie du système (somme de l'énergie cinétique $p^2/2m$ et de l'énergie potentielle $V(x)$). Un système hamiltonien est dit intégrable s'il a autant de quantités conservées (indépendantes et en involution) que de degrés de liberté N. Une quantité conservée F est une fonction scalaire des positions $\mathbf{x}$ et des moments $\mathbf{p}$ telle que $dF/dt = 0$. Dans ce cas, les solutions des équations du mouvement peuvent s'obtenir par quadrature. Avec des hypothèses plus fortes, on montre qu'il existe un changement de variables canoniques (c'est-à-dire tel que les équations de Hamilton sont préservées pour les nouvelles variables) $(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \mapsto (\mathbf{A}, \boldsymbol{\theta})$*, appelées variables actions-angles, tel que le Hamiltonien s'écrit comme une fonction uniquement des actions $\mathbf{A}$, c'est-à-dire,* $H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = H_0(\mathbf{A})$*. Dans ce cas, les équations de Hamilton montrent que les actions sont des quantités conservées et que les angles évoluent linéairement en fonction du temps. La dynamique se déroulent alors périodiquement ou quasi-périodiquement sur des tores, appelés tores invariants (car ils sont invariants par la dynamique). D'une manière plus globale, l'espace des phases est rempli de ces tores invariants dans le cas intégrable et les trajectoires s'obtiennent explicitement par intégration directe des équations de Hamilton. La question qu'il est naturel de se poser est la persistance des ces structures régulières lorsqu'on perturbe le système, c'est-à-dire lorsqu'on considère* $H = H_0(\mathbf{A}) + V(\mathbf{A}, \boldsymbol{\theta})$*. Le théorème KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) donne le cadre pour répondre à cette question. Sous certaines hypothèses sur la perturbation, et notamment pour des perturbations de faibles amplitudes, certains tores invariants sont préservés. Lorsque l'amplitude de la perturbation augmente, de plus en plus de tores sont détruits, laissant place à des trajectoires qui ne sont plus confinées sur des tores mais qui errent chaotiquement dans l'espace des phases.*

DES BARRIERES DE TRANSPORT

En suivant l'approche de Poincaré, il est plus important de penser la dynamique en terme de structures dans l'espace des phases plutôt qu'en terme de trajectoires individuelles. On pourra alors déterminer le comportement des trajectoires à partir des propriétés de ces structures. Des structures très importantes pour la dynamique sont les tores invariants (voir figure 1) qui peuvent être vus comme les restes de l'intégrabilité du système car ils remplissent l'espace des phases dans le cas intégrable et sont progressivement détruits à mesure que l'amplitude de la perturbation augmente (voir encadré 1). Ces structures régulières diminuent fortement la diffusion des particules, car pour deux degrés de liberté, les tores invariants agissent comme des barrières infranchissables par les particules, et à trois degrés de liberté, les phénomènes de collage sur les tores invariants diminuent significativement la diffusion.

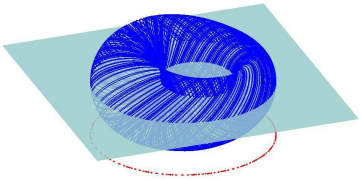

Figure 1 – *Un exemple de structure régulière importante pour la dynamique : un tore invariant sur lequel se déroulent des trajectoires (en bleu) et une section de Poincaré de ce tore en rouge (c'est-à-dire, une section plane de la trajectoire dans l'espace des phases).*

Des travaux récents effectués au Centre de Physique Théorique de Marseille ont permis de mettre en place une stratégie de contrôle fondée sur une petite modification des équations gouvernant la dynamique. Cette modification est effectuée en respectant la structure hamiltonienne du problème et traduit une perturbation du système par une action extérieure (réalisée à l'aide d'ondes électromagnétiques par exemple). D'une manière générique, si on introduit une perturbation du système, une augmentation du chaos est attendue. C'est le cas, par exemple, de la transition au chaos d'un système intégrable décrit par H_0 ayant un espace des phases feuilleté par des tores invariants (c'est-à-dire, composé d'un superposition de tores). En ajoutant une perturbation V,

c'est-à-dire, en considérant le système décrit par le hamiltonien $H = H_0 + V$, la plupart des tores invariants sont brisés et le système devient chaotique. On s'attend donc génériquement à ce qu'une perturbation additionnelle f (c'est-à-dire, un système décrit par le hamiltonien H_0+V+f) augmente encore plus le chaos. Cependant, il existe un ensemble de perturbations additionnelles f qui conduisent à une réduction ou même une suppression des comportements chaotiques. Dans de nombreux cas, il en existe une infinité même si, dans l'ensemble des perturbations possibles du système, elles sont peu nombreuses. Parmi les perturbations, appelées termes de contrôle, qui amènent une réduction du chaos, nous considérons celles associées à une petite modification du hamiltonien. Plus précisément, le hamiltonien contrôlé par le terme de contrôle, noté f, est $H_c = H_0 + \varepsilon V + \varepsilon^2 f$, où le Hamiltonien H_c est moins chaotique que $H = H_0 + \varepsilon V$, voire intégrable. A l'aide de transformations canoniques particulières (transformations de Lie proche de l'identité, qui sont des changements de coordonnées qui préservent les équations de Hamilton), on obtient des formes explicitement calculables de termes de contrôle (qui ne sont pas uniques) d'ordre ε^2, c'est-à-dire, beaucoup plus petits que la perturbation. On cherche ainsi à trouver un terme de contrôle f tel que $H_0+\varepsilon V+\varepsilon^2 f$, exprimé dans les nouvelles coordonnées soit un hamiltonien intégrable comme H_0. Ainsi l'ajout de $\varepsilon^2 f$ restaure globalement ou localement des quantités conservées qui rendent le hamiltonien intégrable (voir encadré). Ce problème à deux fonctions inconnues (fonction génératrice de la transformation canonique et terme de contrôle) contraintes par une seule équation a en général une infinité de solutions. Il est naturel de choisir la solution qui correspond le plus à la situation physique et aux contraintes associées.

Nous illustrons cette stratégie sur un premier exemple, un pendule forcé qui sert de paradigme à la transition au chaos hamiltonien. On montre, notamment à l'aide de sections de Poincaré, que la modification du potentiel permet de réduire le chaos par restauration d'un ensemble de tores invariants de la dynamique. La régularisation de son espace des phases est réalisé à faible coût énergétique.

Le pendule forcé que l'on considère a pour équation du mouvement

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = -\varepsilon \sin(x - t),$$

ou autrement dit, pour hamiltonien

$$h(p, x, t) = \frac{p^2}{2} - \omega_0^2 \cos x - \varepsilon \cos(x - t).$$

Dans le cas où $\varepsilon = 0$, on reconnaît le pendule où le portrait de phases (c'est-à-dire la représentation de trajectoires dans l'espace (x, p)) est représenté sur la figure 2.

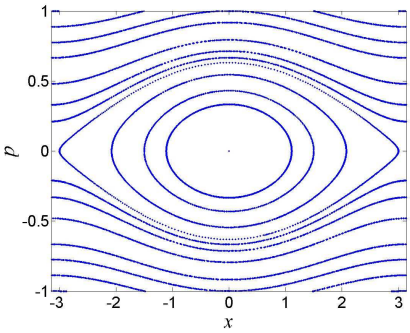

Figure 2 – *Portrait de phase du pendule $\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$. Les trajectoires se déroulent sur les courbes isoénergétiques $p^2/2 - \omega_0^2 \cos x = const$.*

Il est composé, outre d'un équilibre stable et d'un instable, de tores invariants de rotation (où les trajectoires ne sont pas piégées par la résonance, c'est le cas d'un rotateur) et de libration (où les trajectoires sont piégées, comme dans le cas d'une balançoire). Si on augmente ε, le système n'est plus intégrable et a un comportement chaotique par brisure des tores invariants. Une section de Poincaré du pendule forcé est représentée sur la figure 3.

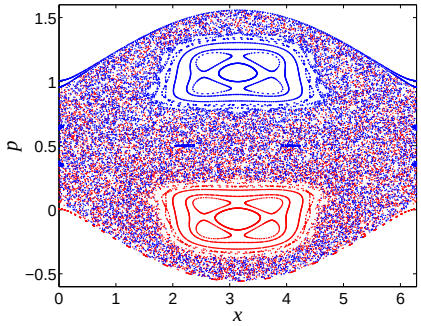

Figure 3 – *Section de Poincaré pour le pendule forcé. Elle est constituée par les points d'un ensemble de trajectoires représentés tous les temps multiples de la période du potentiel, c'est-à-dire 2π. Les points rouges (respectivement bleus) sont ceux de trajectoires issues de la partie basse (respectivement haute) de l'espace des phase.*

Elle montre des trajectoires de particules rouges et bleues qui se mélangent dans les zones chaotiques. On restaure un tore invariant dans la zone chaotique en modifiant le forçage, comme par exemple

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = \\ -\varepsilon \sin(x - t) - 2\varepsilon^2 \sin(2x - t).$$

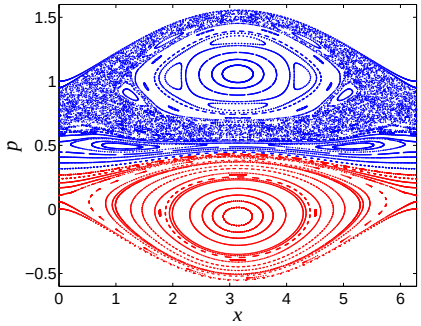

Figure 4 – *Section de Poincaré pour le pendule forcé contrôlé.*

La conséquence est que les trajectoires rouges ne se mélangent plus aux trajectoires bleues (voir la figure 4) ; on a restauré des barrières de transport (c'est-à-dire, des tores invariants) ainsi qu'un réduction significative du comportement chaotique du système.

Cette construction de barrières de transport a été réalisée expérimentalement sur un Tube à Ondes Progressives. Ce dispositif consiste à faire interagir un faisceau d'électrons sortant d'un canon à électrons avec un ensemble d'ondes électrostatiques lancées par un générateur d'ondes à travers une antenne le long d'une hélice en cuivre. Ce

tube fait environ quatre mètres et se termine par un analyseur trochoïdal qui analyse la distribution des vitesses des électrons en fin de tube (voir figure 5) par application d'un champ électrique et d'un champ magnétique perpendiculaire. L'interaction ondes-particules produit en général un élargissement en vitesse d'un faisceau initialement mono-cinétique lorsqu'il interagit avec au moins deux ondes. Il a été montré expérimentalement que le recouvrement des résonances associées aux ondes engendre un comportement chaotique à grande échelle. L'expérience consiste à faire interagir le faisceau avec deux ondes dont on connaît exactement les caractéristiques. Le hamiltonien décrivant l'expérience est très similaire au hamiltonien h précédent. Si on ajoute une troisième onde électrostatique générique, on s'attend à augmenter le chaos, et par conséquent une diffusion accrue des particules en vitesse. Cependant, on peut calculer a priori les caractéristiques d'une troisième onde de telle sorte que le chaos soit réduit de manière significative. Cette réduction entraîne du coup une forte réduction de la dispersion en vitesse des électrons (voir figure 6). Il est à noter que cette réduction a été réalisée avec un apport énergétique additionnel de 0.1% par rapport au système des deux ondes initiales.

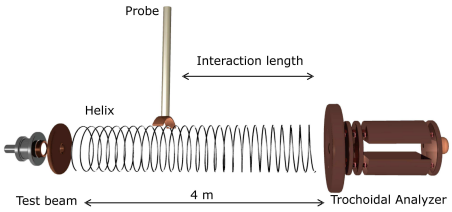

Figure 5 – *Schéma d'un Tube à Ondes Progressives (TOP) : un canon à électrons, une hélice où se propage un ensemble d'ondes électrostatiques, un analyseur trochoïdal pour analyser les vitesses des électrons au bout du tube.*

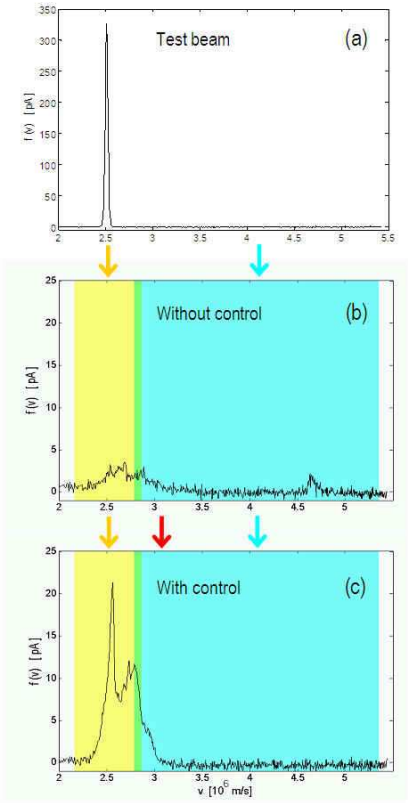

Figure 6 – *Distribution de vitesses des électrons à la sortie du TOP : le faisceau n'interagissant avec aucune ondes (en haut), le faisceau interagissant avec deux ondes (au milieu) et le faisceau interagissant avec trois ondes dont une de contrôle (en bas).*

Les simulations numériques ainsi que l'expérience décrite ci-dessus nous montrent qu'il est possible de réduire la diffusion par construction de barrières de transport à l'aide d'une petite modification du système. Ces barrières de transport sont particulièrement utiles en physique des plasmas où l'on cherche à confiner des particules chargées par des champs extérieurs. Cette application est envisagée dans la suite de cet article.

APPICATION AU CONFINEMENT MAGNETIQUE D'UN PLASMA

Les pertes d'énergie et de particules dues au transport anormal dans les appareils de confinement magnétique de type tokamak sont encore un sérieux obstacle pour la fusion thermonucléaire contrôlée. Au niveau d'ITER, des changements aussi modestes soient-ils dans les propriétés de confinement peuvent changer de manière drastique le facteur d'amplification d'énergie. Les états de meilleur confinement trouvés empiriquement et la possibilité de réduire et/ou supprimer le chaos avec les perturbations paramétriques (essentiellement développées pour les systèmes dissipatifs), suggèrent d'étudier la possibilité d'une stratégie de contrôle du transport chaotique par des perturbations appropriées agissant au niveau microscopique des mouvements des particules chargées.

Le transport anormal d'origine non collisionnelle (c'est-à-dire le déplacement non-diffusif d'un ensemble de particules chargées en l'absence de collisions) est aujourd'hui attribué à la présence de fluctuations turbulentes du champ électrostatique dans les plasmas de fusion. Il y a plusieurs années, il a été montré que la dérive $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ que subissent les particules tests chargées suivant le mouvement du centre guide donne une explication naturelle de la diffusion à travers le champ magnétique de confinement $\mathbf{B}$. Ces particules tests (de charge q et de masse m) qui peuvent être, par exemple, des électrons ou des impuretés (suffisamment diluées pour ne pas influencer le champ électrique), sont soumises à la force de Lorentz et l'équation du mouvement est

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}\right).$$

De cette équation, on montre que le composante transverse (au champ magnétique $\mathbf{B}$) de la vitesse $\mathbf{v}$ a pour expression

$$\mathbf{v}_d = \frac{c}{B^2}\mathbf{E}(x,y,t)\times\mathbf{B},$$

à des termes près qui sont négligeables dans le cas d'un fort champ magnétique (pression cinétique négligeable devant la pression magnétique, ce qui est le cas dans un tokamak en première approximation). Dans le cadre de cette approximation, appelée approximation du centre guide, les équations du mouvement des particules chargées en présence d'un champ magnétique

toroïdal intense $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ et d'un champ électrique non stationnaire $\mathbf{E}(x,y,t) = -\nabla V(x,y,t)$ sont donc

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{c}{B}\begin{pmatrix} -\partial_y V(x,y,t) \\ \partial_x V(x,y,t) \end{pmatrix}.$$

On reconnaît ici un système hamiltonien où les coordonnées spatiales x et y jouent le rôle de variables canoniquement conjuguées et le potentiel électrostatique $V(x,y,t)$, *spatialement turbulent*, est le hamiltonien du système.

Comme le potentiel dépend du temps, les particules chargées ne suivent plus les courbes isopotentielles. En fait, cette dépendance en temps introduit de la diffusion dans le système et ainsi déconfine les particules. L'idée est de trouver une modification du potentiel électrostatique V qui augmente significativement le confinement des particules chargées. De plus, cette modification doit répondre à plusieurs contraintes et notamment elle ne doit introduire qu'un faible coût énergétique pour être envisageable expérimentalement. Le potentiel électrostatique contrôlé est donc

$$V_c(x,y,t) = V(x,y,t) + f(x,y,t),$$

où $\|f\| \ll \|V\|$ et f est calculé à partir d'expressions explicites de termes de contrôle (par crochets de Poisson successifs).

Une prémière étape dans ce sens consiste à considérer une modélisation du potentiel électrostatique en considérant un ensemble de modes de la transformée de Fourier spatio-temporelle :

$$V(x,y,t) = \sum_{m,n} V_{mn} \times \sin[mx + ny + \varphi_{mn} - \omega_{mn} t], \quad (1)$$

où les V_{mn} décroissent en accord avec les données expérimentales, c'est-à-dire, $V_{m,n} = a\|(m,n)\|^{-3}$. Pour des petites valeurs de a, le hamiltonien autonome a la forme $H(x,y,E,t) = E + V(x,y,t)$, c'est-à-dire, un Hamiltonien intégrable $H_0 = E$ (pour lequel les particules sont immobiles) plus une perturbation V. Si on calcule le terme de contrôle f, on s'aperçoit qu'il ayant un spectre trop riche pour la mise en place expérimentale, il est envisagé une troncature de la série donnant f. Dans ce cas, on considère une approximation du terme de contrôle donné par une série infinie. Ce premier terme f_2, d'ordre $\|V\|^2$, est tel que le Hamiltonien donné par $H_c = H_0 + V + f_2$ est plus proche de l'intégrabilité que le Hamiltonien de départ $H_0 + V$, c'est-à-dire, tel que H_c est canoniquement conjugué à $H_0 + O(\|V\|^3)$. Il est donné par :

$$f_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

où, dans le cas considéré, la fonction ΓV est une primitive de V par rapport au temps. Les autres termes de la série donnant f se calculent explicitement par récurrence, avec des crochets de Poisson successifs avec ΓV. Il est à noter qu'avec le terme de contrôle f, les particules tests sont stoppées et il n'y a plus de transport vers les bords car $H_0 + V + f$ est intégrable et canoniquement conjugué à $H_0 = E$.

L'efficacité du terme de contrôle partiel f_2, qui est aussi un test de robustesse de la stratégie de contrôle envisagée, est vérifiée à l'aide de simulations numériques. Nous avons comparé les propriétés des trajectoires de particules obtenues avec le potentiel V et avec le potentiel contrôlé V_c avec le terme de contrôle f_2. La figure montre deux trajectoires issues des mêmes conditions initiales calculées avec et sans le terme de contrôle. La particule reste confinée dans une région étroite dans le cas contrôlé, indiquant une réduction du transport vers les bords.

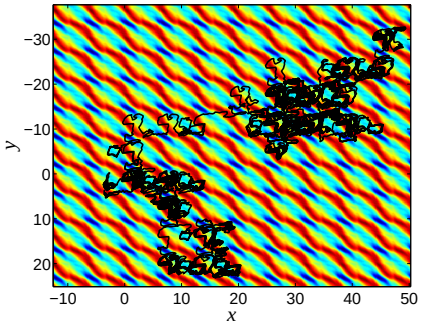

Figure 7 – *Exemple de trajectoire obtenue pour le potentiel V donné par l'équation (1). Le fond représente les lignes de niveaux du potentiel V à un instant donné ($t = 0$).*

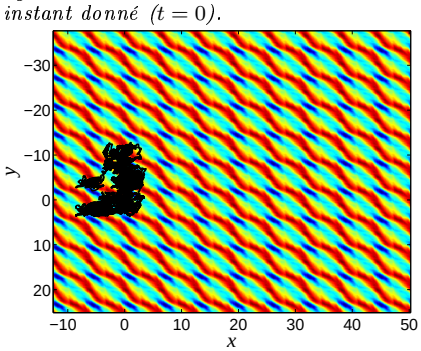

Figure 8 – *Exemple de trajectoire obtenue pour le potentiel contrôlé $V + f_2$. Le fond représente les lignes de niveaux du potentiel $V + f_2$ à un instant donné ($t = 0$).*

La mesure de l'amplitude relative du terme de contrôle f_2 par rapport au potentiel électrostatique montre que le terme de contrôle est une petite modification du potentiel électrostatique (de l'ordre de quelques pourcents). Il est à noter que la construction du terme de contrôle dépend de la connaissance du potentiel V. Il a été montré numériquement que même une connaissance grossière (par des mesures sur les points d'une grille spatiale, par exemple) permet de réduire significativement la diffusion. Une méthode d type rétro-action permettrait de mettre en place le contrôle pour un potentiel mesuré en temps réel.

Les principaux scénarios pour ITER sont fondés sur les barrières de transport. Ces barrières de transport sont souvent associées à un grand apport d'énergie. Cette stratégie de contrôle ouvre une voie d'investigation possible pour créer des barrières (ou réduire le transport turbulent) et améliorer le con-

finement magnétique à faible coût énergétique dans les appareils de fusion contrôlée tels que les tokamaks.

POUR EN SAVOIR PLUS

C. Chandre, G. Ciraolo, F. Doveil, R. Lima, A. Macor, M. Vittot, « Physical Review Letters », *94*, 2005, 074101.

C. Chandre, M. Vittot, G. Ciraolo, Ph. Ghendrih, R. Lima, « Nuclear Fusion », *46*, 2006, 33.

Article proposé par : C. Chandre, Centre de Physique Théorique UMR 6207 CNRS, chandre@cpt.univ-mrs.fr.
Ont également participé à ce travail : R. Lima et M. Vittot, Centre de Physique Théorique UMR 6207 CNRS (Marseille), G. Ciraolo et Ph. Ghendrih, Département de Recherche sur la Fusion Contrôlée, CEA Cadarache, F. Doveil et A. Macor, Physique des Interactions Ioniques et Moléculaires UMR 6633 CNRS (Marseille), M. Pettini, Istituto Nazionale di Astrofisica (Florence)