



**HAL**  
open science

# Sur une équation générale du type Duffing avec double puits de potentiel

Cyrine Fitouri, Sana Gasmi

► **To cite this version:**

Cyrine Fitouri, Sana Gasmi. Sur une équation générale du type Duffing avec double puits de potentiel. 2007. hal-00139611

**HAL Id: hal-00139611**

**<https://hal.science/hal-00139611>**

Preprint submitted on 2 Apr 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur une équation générale du type Duffing avec double puits de potentiel

C. Fitouri\* et S. Gasmi\*

**Résumé :** Sous une certaine condition de petitesse sur le terme  $f$  et pour  $c$  assez grand, nous prouvons l'existence d'exactly 3 solutions bornées asymptotes aux solutions quelconques de l'équation  $u'' + cu' + |u|^p u - u = f(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini. Pour  $c$  quelconque,  $f$   $T$ -périodique et vérifiant une certaine condition de petitesse, nous établissons l'existence d'exactly 3 solutions périodiques.

**Abstract :** Under a smallness condition on the bounded forcing term  $f$  and for  $c$  large enough, we prove the existence of exactly 3 different bounded solutions which asymptote any solution of the equation  $u'' + cu' + |u|^p u - u = f(t)$  as  $t$  tends to infinity. For any  $c > 0$ , we establish the existence of exactly 3 different  $T$ -periodic solutions when  $f$  is  $T$ -periodic and satisfies a smallness condition.

## 1 Introduction

L'équation de Duffing décrit le mouvement d'un système non linéaire représentant un oscillateur unidimensionnel.

On peut l'écrire sous la forme :

$$u'' + cu' + u^3 - u = f(t)$$

où  $c > 0$  et  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

A.Haroux [9] a prouvé que sous une certaine condition de petitesse sur  $f$  et pour  $c$  assez grand on pouvait avoir pour ce système un comportement moins chaotique que celui décrit dans [5, 6, 10, 12].

Dans ce travail nous déterminons une condition de petitesse sur  $f$  dépendant

---

\*Laboratoire J.-L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 05, FRANCE.

de  $p \geq 2$  qui donne des résultats analogues pour l'équation un peu plus générale

$$u'' + cu' + |u|^p u - u = f(t) \quad (1.1)$$

où  $c > 0$  et  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Les méthodes de démonstration sont celles de [9] avec des difficultés techniques supplémentaires surtout pour les résultats globaux (théorèmes 2.2 et 2.5).

Nous améliorons au passage le résultat du théorème 1.2 de [9].

## 2 Les résultats principaux

**Théorème 2.1.** *Sous la condition*

$$\|f\|_\infty < \frac{p}{(p+1)^{\frac{p+1}{p}}} \quad (2.1)$$

l'équation (1.1) admet une solution unique  $\omega_0 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  telle que

$$\|\omega_0\|_\infty < \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \quad (2.2)$$

Si de plus  $c \geq 2\sqrt{p}$  et

$$\|f\|_\infty < p\left(\left(\frac{2p+1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{p}} - 2\right) \quad (2.3)$$

(1.1) admet une solution unique  $\omega_+$  et une solution unique  $\omega_- \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  telles que

$$\|\omega_+ - 1\|_\infty < \left(\frac{2p+1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} - 1, \quad \|\omega_- + 1\|_\infty < \left(\frac{2p+1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} - 1 \quad (2.4)$$

Si  $c \leq 2\sqrt{p}$  et sous la condition supplémentaire

$$\|f\|_\infty \leq \left(\frac{c\sqrt{p}}{2} + p + 1\right) \left[\left(\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)} + 1\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right] - \left(\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)} + 1\right)^{\frac{p+1}{p}} := \eta(c) \quad (2.5)$$

(1.1) admet une solution unique  $\omega_+$  et une solution unique  $\omega_- \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  telles que

$$\|\omega_+ - 1\|_\infty < \left(1 + \frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} - 1, \quad \|\omega_- + 1\|_\infty < \left(1 + \frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} - 1 \quad (2.6)$$

Finalement si  $c \leq \sqrt{\frac{p}{2}}$ , en supposant que

$$\|f\|_\infty \leq \left(\frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}} + p + 1\right) \left(\frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}(p+1)} + 1\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}(p+1)}\right)^{\frac{p+1}{p}} - p - \frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}} := \eta_1(c) \quad (2.7)$$

(1.1) admet une solution unique  $\omega_+$  et une solution unique  $\omega_- \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$  telles que

$$\|\omega_+ - 1\|_\infty < \left(1 + \frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} - 1, \quad \|\omega_- + 1\|_\infty < \left(1 + \frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} - 1 \quad (2.8)$$

Dans certains cas le résultat local du théorème 2.1 peut être raffiné en donnant un résultat global sous une restriction additionnelle sur  $f$ .

**Théorème 2.2.** *Sous les conditions*

$$c \geq 2\sqrt{p}, \quad f \in C_b(\mathbb{R}), \quad \|f\|_\infty < \inf\left\{\frac{1}{6p\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \frac{\sqrt{3p-4}}{8\sqrt{3p}}\right\} \quad (2.9)$$

toute solution  $u$  de (1.1) sur un intervalle  $J = (t_0, +\infty)$  est asymptote à une des 3 solutions  $\omega_0, \omega_+, \omega_-$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

**Corollaire 2.3.** *Sous les hypothèses du théorème 2.2, si  $f$  est presque périodique, (1.1) admet exactement 3 solutions presque périodiques  $\omega_0, \omega_+, \omega_-$ . De plus si  $f$  est  $T$ -périodique alors  $\omega_0, \omega_+, \omega_-$  le sont aussi.*

**Corollaire 2.4.** *Sous les hypothèses du théorème 2.2, si  $f$  est  $T$ -périodique, alors (1.1) n'admet pas de solutions sous harmoniques.*

Le dernier résultat est restreint aux solutions  $T$ -périodiques mais valable pour tout  $c > 0$ .

**Théorème 2.5.** *Soit  $f$  bornée et  $T$ -périodique. Sous la condition*

$$\|f\|_\infty \left(1 + \frac{\sqrt{T}}{c} \sqrt{K\|f\|_\infty^p + \left(\frac{p^4(p+1)}{p^2-p-1} + 1\right)T}\right) < \left(\frac{p}{p+1}\right) \inf\left\{\left(1 + \frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} - 1, \left(\frac{2p+1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right\} \quad (2.10)$$

$$\text{Avec } K = 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)} \frac{p^{\frac{p}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}(p+1)T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p} + 2^{(p-3)^+} p^2(p^2-1) \frac{T^{p-1}}{c^p} + p^p(p+1)T$$

l'équation (1.1) admet au plus trois solutions  $T$ -périodiques.

**Corollaire 2.6.** *Soit  $f$  bornée et  $T$ -périodique satisfaisant les deux conditions du théorème 2.1 et 2.3, alors (1.1) admet exactement trois solutions  $T$ -périodiques.*

**Remarque 2.7.** Si  $p = 2$ , la condition (2.9) du théorème 2.2 améliore la condition (1.9) de [9] d'un facteur  $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

### 3 Existence de 3 solutions bornées pour $f$ petite

On établit d'abord l'existence de la "petite" solution. On introduit l'opérateur  $\Lambda$  défini sur

$$X := L^\infty(\mathbb{R})$$

par

$$D(\Lambda) = W^{2,\infty} = \{u \in C^1(\mathbb{R}), u, u', u'' \in L^\infty(\mathbb{R})\}$$

$$\forall u \in D(\Lambda), \quad \Lambda u = u'' + cu' - u$$

alors une solution bornée  $u$  de (1.1) est juste une solution de

$$\Lambda u = u'' + cu' - u = f - |u|^p u$$

Puisque  $-\Lambda$  est un opérateur elliptique, il est clairement inversible sur  $X$  et on a

$$\|\Lambda^{-1}\|_{L(X)} = 1$$

On écrit l'équation précédente comme

$$u = \Lambda^{-1}(f - |u|^p u)$$

L'application

$$\mathcal{T}(v) = \Lambda^{-1}(f - |v|^p v)$$

conserve la boule

$$B_r = \{v \in X, \|v\|_X \leq r\}$$

si

$$\|f\|_X + r^{p+1} \leq r.$$

ceci est satisfait pour un certain  $r$  positif si

$$\|f\|_X \leq \sup_{r>0} (r - r^{p+1}) = p \left( \frac{1}{p+1} \right)^{\frac{p+1}{p}}$$

puisque le maximum est atteint pour  $r = r_0 := (\frac{1}{p+1})^{\frac{1}{p}}$  et sous la condition (2.2) ci dessus il existe  $r < r_0$  tel que

$$\mathcal{T}B_r \subset B_r$$

Puisque  $r < (\frac{1}{p+1})^{\frac{1}{p}}$ , l'application  $v \rightarrow v^{p+1}$  est une contraction uniforme sur  $X$  et donc  $\mathcal{T}$  l'est aussi. Alors il existe un unique point fixe  $u$  de  $\mathcal{T}$  dans  $B_r$  qui est la solution de notre problème. De plus on a  $\|u\|_X < (\frac{1}{p+1})^{\frac{1}{p}}$ . Vu le caractère impair de la non linéarité, quitte à changer  $f$  en  $-f$ , pour les deux autres solutions il suffit d'étudier l'existence d'une deuxième solution bornée au voisinage de 1. Posant  $u = 1 + v$ , on est alors ramené à considérer l'équation

$$v'' + cv' + pv = f - \gamma(v) \text{ où } \gamma(v) = |1 + v|^p(1 + v) - (p + 1)v - 1$$

qui peut être écrite sous la forme :

$$v = \mathcal{L}^{-1}(f - \gamma(v))$$

où

$$\mathcal{L} = \partial^2 + c\partial + p\mathbf{I}$$

**1<sup>er</sup> cas** : Si  $c \geq 2\sqrt{p}$

alors, d'après le théorème 2.1 dans [9],  $\|\mathcal{L}^{-1}\| = \frac{1}{p}$  et

$$\mathcal{T}(v) = \mathcal{L}^{-1}(f - \gamma(v))$$

conserve la boule

$$B_r = \{v \in X, \|v\|_X \leq r\}$$

si

$$\frac{1}{p}(\|f\|_X + \gamma(r)) \leq r$$

Ceci est satisfait pour un certain  $r$  positif si

$$\|f\|_X \leq \sup_{r>0}(pr - \gamma(r))$$

Il suffit donc de prendre  $f$  telle que

$$\|f\|_X \leq \sup_{r>0}(2p + 1)r - (1 + r)^{p+1} + 1 := M$$

avec

$$M = (2p + 1)r_0 - (1 + r_0)^{p+1} + 1; \quad r_0 = \left(\frac{2p + 1}{p + 1}\right)^{\frac{1}{p}} - 1$$

De plus, puisque  $(p + 1)(1 + r_0)^p = 2p + 1$  on a

$$\forall v \in (-r_0, r_0), |((1 + v)^{p+1})'| = |(p + 1)(1 + v)^p| < 2p + 1$$

alors pour tout  $r \in (0, r_0)$  tel que :

$$\|f\|_X \leq (2p + 1)r - (1 + r)^{p+1} + 1$$

on a  $\mathcal{T}\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r$  et  $\mathcal{T} : \mathcal{B}_r \rightarrow \mathcal{B}_r$  est une application uniformément contractante. Le point fixe de  $\mathcal{T}$  correspond à la solution bornée positive qu'on cherche. Pour finir la démonstration dans ce cas, deux remarques sont nécessaires.

1) On a :

$$M = (2p + 1)r_0 - (1 + r_0)^{p+1} + 1 = p\left[\left(\frac{2p + 1}{p + 1}\right)^{\frac{p+1}{p}} - 2\right] < p\left(\frac{1}{p + 1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$$

2) La solution au voisinage de 0 et la solution au voisinage de 1 sont distinctes puisque la seconde est plus grande que  $1 - \left[\left(\frac{2p+1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right] > \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{p}}$ .

**2<sup>eme</sup> cas** : Si  $c \leq 2\sqrt{p}$

alors, d'après le théorème 2.1 [9],  $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{2}{c\sqrt{p}}$  et

$$\mathcal{T}(v) = \mathcal{L}^{-1}(f - \gamma(v))$$

conserve la boule

$$B_r = \{v \in X, \|v\|_X \leq r\}$$

si

$$\frac{2}{c\sqrt{p}}(\|f\|_X + \gamma(r)) \leq r$$

Ceci est satisfait pour un certain  $r$  positif dès que

$$\|f\|_X \leq \sup_{r>0} \left(\frac{c\sqrt{p}}{2}r - \gamma(r)\right)$$

Il suffit de prendre

$$\|f\|_X \leq \sup_{r>0} \left(p + \frac{c\sqrt{p}}{2} + 1\right)r - (1 + r)^{p+1} + 1 := M$$

avec

$$M = (p + \frac{c\sqrt{p}}{2} + 1)r_1 - (1 + r_1)^{p+1} + 1; r_1 = (\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)} + 1)^{\frac{1}{p}} - 1 \leq r_0$$

De plus  $\mathcal{T}$  est toujours contractante sur  $B_r$  pour  $r < r_1$  et la solution positive reste toujours plus grande que la solution proche de 0. La condition finale sur  $f$  dans ce cas est

$$\|f\|_X \leq (\frac{c\sqrt{p}}{2} + p + 1)[(\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)} + 1)^{\frac{1}{p}} - 1] - (\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)} + 1)^{\frac{p+1}{p}} := \eta(c)$$

3<sup>eme</sup> cas :  $c \leq \sqrt{\frac{p}{2}}$

En utilisant la formule exacte donnée dans le théorème 2.1 dans [9] :

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L(X)} = \frac{1}{\omega^2} \times \frac{1 + e^{\frac{-c\pi}{\sqrt{4\omega^2 - c^2}}}}{1 - e^{\frac{-c\pi}{\sqrt{4\omega^2 - c^2}}}} = \frac{1}{\omega^2} \coth\left\{\frac{c\pi}{\sqrt{4\omega^2 - c^2}}\right\}$$

on prouve que

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{p}}$$

En effet pour  $\omega$  fixé,  $c\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L(X)}$  est une fonction croissante de  $c$ , d'où pour  $c \leq \sqrt{\frac{p}{2}}$

$$c\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\sqrt{2p}} \times \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{7}}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\sqrt{7}}}} < \sqrt{\frac{2}{p}}$$

puisque  $\frac{\pi}{\sqrt{7}} > \ln 3$ . La conclusion est donc la même que dans le deuxième cas.

## 4 Borne ultime de la solution générale

Dans cette section on établit une estimation non optimale de la borne ultime de la solution générale de (1.1).

**Proposition 4.1.** *Pour toute solution  $u$  de (1.1) on a*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |u|^{p+2}(t) \leq \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{p+2}{2}} + (p+2)\left[\frac{c^2 + (p+2)^2}{2p^2c^2}\right]\|f\|_\infty^2 \quad (4.1)$$



**Démonstration :** On introduit l'énergie  $E(t) = \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{p+2}|u|^{p+2} - \frac{1}{2}u^2$ .

On a

$$E'(t) = fu' - cu'^2 \leq \left(\frac{p+2}{2pc}\right)f^2 - \frac{(p+4)}{2(p+2)}cu'^2$$

et

$$(uu')' = u'^2 + uu'' = u'^2 + u(f - cu' - |u|^p u + u)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(E + \frac{c}{p+2}uu'\right) &\leq \frac{c}{p+2}u'^2 - \frac{(p+4)}{2(p+2)}cu'^2 - \frac{c}{p+2}uu' - \frac{c}{p+2}|u|^{p+2} + \frac{c}{p+2}u^2 \\ &\quad + \frac{c}{p+2}uf + \frac{f^2}{c}\left(\frac{p+2}{2p}\right) \\ &= -c\left(E + \frac{c}{p+2}uu'\right) + \frac{c}{p+2}u^2 - \frac{c}{2}u^2 + \frac{c}{p+2}uf + \frac{f^2}{c}\left(\frac{p+2}{2p}\right) \\ &= -c\left(E + \frac{c}{p+2}uu'\right) - \frac{pc}{2(p+2)}u^2 + \frac{f^2}{c}\left(\frac{p+2}{2p}\right) + \frac{c}{p+2}uf \\ &\leq -c\left(E + \frac{c}{p+2}uu'\right) - \frac{pc}{2(p+2)}u^2 + \frac{pc}{2(p+2)}u^2 + \frac{c}{2p(p+2)}f^2 + \frac{f^2}{c}\left(\frac{p+2}{2p}\right) \\ &\leq -c\left(E + \frac{c}{p+2}uu'\right) + \frac{1}{2p}\left(\frac{c}{p+2} + \frac{p+2}{c}\right)f^2 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left(E(t) + \frac{c}{p+2}uu'\right) \leq \frac{c^2 + (p+2)^2}{2pc^2(p+2)} \|f\|_\infty^2$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$  on a pour  $t$  assez grand

$$\left(E(t) + \frac{c}{p+2}uu'\right) \leq \frac{c^2 + (p+2)^2}{2pc^2(p+2)} \|f\|_\infty^2 + \varepsilon$$

Finalement considérons une suite "asymptotiquement maximisante"  $t_n$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^2(t_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} u^2(t)$$

Supposons que cette limite soit positive, il est clair que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u'(t_n) = 0$  puisque  $u''$  est bornée pour  $t \geq 0$  et par conséquent pour  $n$  assez grand on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+2}|u|^{p+2}(t_n) - \frac{1}{2}u^2(t_n) &\leq E(t_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{c^2 + (p+2)^2}{2pc^2(p+2)} \|f\|_\infty^2 + 2\varepsilon \\ \Rightarrow |u|^{p+2}(t_n) - \frac{p+2}{2}u^2(t_n) &\leq \frac{c^2 + (p+2)^2}{2pc^2} \|f\|_\infty^2 + 2(p+2)\varepsilon \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Young on a

$$\frac{p+2}{2}|u|^2 \leq \frac{p}{p+2} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{p+2}{p}} + \frac{2}{p+2}|u|^{p+2}$$

d'où pour  $t = t_n$

$$|u|^{p+2} \leq \frac{p}{p+2} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{p+2}{p}} + \frac{2}{p+2}|u|^{p+2} + \frac{c^2 + (p+2)^2}{2pc^2} \|f\|_\infty^2 + 2(p+2)\varepsilon$$

ce qui donne

$$\frac{p}{p+2}|u|^{p+2} \leq \frac{p}{p+2} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{p+2}{p}} + \frac{c^2 + (p+2)^2}{2pc^2} \|f\|_\infty^2 + 2(p+2)\varepsilon$$

et par conséquent

$$|u|^{p+2}(t_n) \leq \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{p+2}{p}} + (p+2) \left[\frac{c^2 + (p+2)^2}{2p^2c^2}\right] \|f\|_\infty^2 + 2\frac{(p+2)^2}{p}\varepsilon$$

donc

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |u|^{p+2}(t) \leq \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{p+2}{p}} + (p+2) \left[\frac{c^2 + (p+2)^2}{2p^2c^2}\right] \|f\|_\infty^2 + 2\frac{(p+2)^2}{p}\varepsilon$$

et puisque  $\varepsilon$  est arbitraire on obtient (4.1).

## 5 Une estimation précise pour $c$ grand

Quand  $c \geq 2\sqrt{p}$ , l'inégalité (4.1) et la propriété de conservation de la positivité permettent une estimation plus précise de  $u$  pour  $t$  grand.

**Proposition 5.1.** *Pour tout  $c \geq 2\sqrt{p}$ , on a*

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |u(t)| \leq 1 + \frac{1}{p} \|f\|_\infty \quad (5.1)$$

vrai pour  $\|f\|_\infty \leq 1$ .

**Démonstration** Quand  $c \geq 2\sqrt{p}$ , l'opérateur  $\mathcal{L} = \partial^2 + c\partial + pI$  a un inverse positif sur  $L^\infty$ . En plus l'estimation (4.1) donne dans ce cas

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |u|^{p+2}(t) \leq \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{p+2}{p}} + (p+2) \left[\frac{4p + (p+2)^2}{8p^3}\right] \|f\|_\infty^2$$

En particulier si on suppose

$$\|f\|_\infty \leq 1$$

alors on trouve

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |u|^{p+2}(t) \leq \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{p+2}{p}} + (p+2) \left[\frac{4p + (p+2)^2}{8p^3}\right]$$

or pour  $p \geq 2$  on a  $\frac{4p + (p+2)^2}{8p^3} \leq \frac{1}{2}$

donc

$$\begin{aligned} |u|^{p+2} &\leq \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{p+2}{p}} + \frac{p+2}{2} \\ &\leq 2 \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{p+2}{p}} \end{aligned}$$

d'où

$$|u| \leq 2^{\frac{1}{p+2}} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si  $u$  une solution de (1.1) on pose  $u = 1 + v$  on a

$$v'' + cv' + pv + [|v+1|^p(v+1) - ((p+1)v+1)] = f$$

$h(u) = |v+1|^p(v+1) - ((p+1)v+1) = |u|^p u - (p+1)u + p \geq 0$  pour  $u \geq -2^{\frac{1}{p+2}} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$ ; en effet

$$h'(u) = (p+1)(|u|^p - 1)$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$h'$	$+$	$0$	$-$	$0$
	$1 + 3p$			
$h$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$
			$0$	

D'après le tableau de variation  $h(u) \geq 0 \forall u \in [-1, +\infty[$ .

Sur  $]-\infty, -1]$ ;  $h$  est croissante alors  $h(u) \geq h(-2^{\frac{1}{p+2}} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{1}{p}}) \forall u \geq -2^{\frac{1}{p+2}} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$  puisque  $-2^{\frac{1}{p+2}} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \in ]-\infty, -1]$

D'autre part  $2^{\frac{1}{p+2}} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \leq (p+2)^{\frac{1}{p}}$  donc

$$h(-(p+2)^{\frac{1}{p}}) \leq h(-2^{\frac{1}{p+2}} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{1}{p}})$$

or

$$h(-(p+2)^{\frac{1}{p}}) = -(p+2)^{\frac{1}{p}} + p \geq 0$$

puisque  $p^p \geq p + 2 \forall p \geq 2$   
donc

$$h(u) \geq 0 \quad \forall u \geq -2^{\frac{1}{p+2}} \left(\frac{p+2}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

En particulier on a

$$v'' + cv' + pv \leq f$$

On veut montrer d'abord que

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq 1 + \frac{1}{p} \|f\|_{\infty}$$

supposons que cette inégalité est fautive, on peut choisir  $\delta > 0$  et  $t_n$  une suite tendant vers  $\infty$  telle que

$$u(t_n) \geq 1 + \frac{1}{p} \|f\|_{\infty} + \delta$$

remplaçons  $v$  par  $v(t + t_n)$  et  $f$  par  $f(t + t_n)$ . On peut passer à la limite par une sous suite pour laquelle la suite de translatés de  $f$  converge faiblement dans  $L^2$ . On peut aussi supposer que les translatés de  $v$  convergent dans  $C^1$ , d'où les fonctions limites vérifient l'équation limite. Finalement il suffit de considérer le cas où  $v$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas, puisque

$$v'' + cv' + pv \leq \|f\|_{\infty}$$

on obtient

$$v \leq \frac{1}{p} \|f\|_{\infty}$$

en contradiction avec

$$v(t_n) \geq \frac{1}{p} \|f\|_{\infty} + \delta$$

On a donc

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq 1 + \frac{1}{p} \|f\|_{\infty}$$

Finalement on obtient une inégalité analogue en changeant  $u$  en  $-u$ , et le résultat en découle.

**Remarque :** Le résultat de la proposition 5.1 n'est pas vrai pour les petites valeurs de  $c$  même pour  $p = 2$ , cf.[9].

## 6 Démonstration du Théorème 2.2 et de ses corollaires

L'un des principaux outils de la démonstration est une formulation précise de la stabilité asymptotique des solutions bornées  $\omega_+$ ,  $\omega_-$ . Il suffit de considérer  $\omega_+$  puisque pour  $\omega_-$  on peut changer  $u$  et  $f$  en leurs opposées. Dans ce cas on a

**Lemme 6.1.** *Soit*

$$\|f\|_\infty < \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \frac{\sqrt{3p-4}}{8\sqrt{3p}} \quad (6.1)$$

Alors pour tout  $\delta < \frac{1}{2\sqrt{6p}}$ , il existe  $\eta > 0$  tel que les conditions

$$|u(t_0) - 1| \leq \delta \text{ et } |u'(t_0)| \leq \eta$$

impliquent que

$$\forall t \geq t_0, |u(t) - 1| \leq \frac{1}{2p} \quad (6.2)$$

et

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |u(t) - 1| \leq \frac{\sqrt{1+c^2}}{c} \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3p-4}} \|f\|_\infty \quad (6.3)$$

de plus si  $c \geq 2\sqrt{p}$ , sous les mêmes hypothèses on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|u(t) - \omega_+(t)| + |u'(t) - \omega'_+(t)|) = 0 \quad (6.4)$$

**Démonstration :** En posant  $u = 1 + v$  on obtient l'équation en  $v$

$$v'' + cv' + |1+v|^p(1+v) - (v+1) = f$$

On pose

$$P(v) = \frac{(v+1)^{p+2}}{p+2} - \frac{1}{2}(v+1)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p+2}$$

Il existe  $\theta \in ]0, 1[$  tel que

$$P(v) = \frac{p}{2}v^2 + \frac{p(p+1)}{6}(1+\theta v)^{p-1}v^3$$

On remarque que

$$|v| \leq \frac{1}{2p} \implies \frac{5p}{16}v^2 \leq P(v) \leq \frac{11p}{16}v^2$$

En effet

$$|P(v) - \frac{p}{2}v^2| \leq \frac{p+1}{12}(1+\theta v)^{p-1}v^2 \quad \text{si } |v| \leq \frac{1}{2p}$$

Or

$$\begin{aligned} (p+1)(1+\theta v)^{p-1} &\leq (p+1)\left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{p-1} = p\left(1 + \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{2p}\right)^{p-1} \\ &\leq \sqrt{e}p\left(1 + \frac{1}{2p}\right) \leq \frac{9}{5}p\left(1 + \frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$|P(v) - \frac{p}{2}v^2| \leq \frac{3p}{16}v^2$$

Soit

$$F(t) = \frac{1}{2}v'^2(t) + P(v)(t)$$

et

$$\Phi(t) = F(t) + \alpha vv'(t)$$

où  $\alpha$  une constante  $> 0$  qui sera choisie plus tard. On remarque d'abord que si  $\alpha < \frac{1}{4}$ , on a

$$|\alpha vv'| \leq \frac{1}{8}v'^2 + \frac{p}{16}v^2$$

alors

$$\frac{1}{4}(pv^2 + v'^2) \leq \Phi(t) \leq \frac{3}{4}(pv^2 + v'^2)$$

tant que la condition

$$|v| \leq \frac{1}{2p}$$

est satisfaite.

Soit

$$T = \sup\{t \geq t_0, |v(t)| \leq \frac{1}{2p}\} \quad \text{et } J := [t_0, T).$$

On donne une suite d'estimations valables pour  $t \in J$ . On a

$$F'(t) = -cv'^2 + fv' \leq -\frac{c}{2}v'^2 + \frac{f^2}{2c}$$

$$(vv')' = v'^2 + vv'' = v'^2 - cvv' - vg(v) + fv$$

Avec  $g(v) = |1+v|^p(1+v) - (1+v) = pv + \frac{p(p+1)}{2}(1+\theta v)^{p-1}v^2$

- Si  $v \geq 0$  alors  $g(v)v \geq pv^2$ .
- Si  $v \leq 0$ , on a  $(1 + \theta v)^{p-1} \leq 1$  alors  $g(v)v \geq v^2(\frac{3p}{4} - \frac{1}{4})$ .

D'où

$$(vv')' \leq v'^2 - cvv' - v^2(\frac{3p}{4} - \frac{1}{2}) + f^2$$

et en utilisant

$$-cvv' \leq \frac{1}{2}v^2 + \frac{c^2}{2}v'^2$$

on en déduit que

$$\Phi' \leq (\alpha(1 + \frac{c^2}{2}) - \frac{c}{2})v'^2 - \alpha(\frac{3p}{4} - 1)v^2 + (\alpha + \frac{1}{2c})f^2$$

On prend

$$\alpha = \frac{c}{4(1 + \frac{c^2}{2})}$$

alors  $\alpha(1 + \frac{c^2}{2}) = \frac{c}{4}$  et

$$\begin{aligned} \Phi' &\leq \frac{c}{4}v'^2 - \alpha(\frac{3p}{4} - 1)v^2 + (\alpha + \frac{1}{2c})f^2 \\ &\leq -\frac{\alpha(\frac{3p}{4} - 1)}{p}(pv^2 + v'^2) + (\alpha + \frac{1}{2c})f^2 \end{aligned}$$

donc on trouve

$$\Phi' \leq \frac{-4\alpha(\frac{3p}{4} - 1)}{3p}\Phi + (\alpha + \frac{1}{2c})f^2$$

d'où

$$\forall t \in J, \Phi(t) \leq \exp[-4\alpha(\frac{3p}{4} - 1)(t - t_0)]\Phi(t_0) + (\frac{6p}{3p - 4})(\frac{1 + c^2}{c^2})\|f\|_\infty^2$$

Pour avoir  $T = \infty$ , on doit avoir  $|v| < \frac{1}{2p}$  sur  $J$  qui est satisfaite dès que

$$\Phi(t_0) + (\frac{6p}{3p - 4})(\frac{1 + c^2}{c^2})\|f\|_\infty^2 \leq \frac{p}{4}(\frac{1}{2p})^2 = \frac{1}{16p}$$

Pour avoir cette condition il est suffisant de prendre

$$\Phi(t_0) \leq \frac{1}{32p} \quad \text{et} \quad (\frac{6p}{3p - 4})(\frac{1 + c^2}{c^2})\|f\|_\infty^2 \leq \frac{1}{32p}$$

La première condition est vérifiée dès que  $\frac{3}{4}pv^2(t_0) < \frac{1}{32p}$  et  $\frac{3}{4}v'^2(t_0) \leq \frac{1}{32p} - \frac{3}{4}v^2(t)$  ce qui correspond à nos hypothèses. La deuxième condition est équivalente à

$$\|f\|_\infty < \frac{c}{\sqrt{1 + c^2}} \frac{\sqrt{3p - 4}}{8\sqrt{3p}}$$

Pour  $p=2$  elle se réduit à

$$\|f\|_\infty \leq \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \frac{\sqrt{2}}{16\sqrt{3}}$$

Sous ces conditions on a  $T = \infty$  et

$$\forall t \geq t_0, \Phi(t) \leq \exp[-4\alpha(\frac{3p-1}{4}t)]\Phi(t_0) + (\frac{6p}{3p-4})(\frac{1+c^2}{c^2})\|f\|_\infty^2$$

et l'inégalité

$$|u(t) - 1| \leq \frac{2}{\sqrt{p}}\Phi(t)^{\frac{1}{2}}$$

nous donne

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |u(t) - 1| \leq \frac{\sqrt{1+c^2}}{c} \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3p-4}} \|f\|_X$$

Pour prouver la deuxième partie, on remarque que la distance asymptotique entre  $u$  et 1 est plus petite que

$$\frac{1}{2p} < (\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{1}{p}} - 1 = r_0$$

en effet  $\frac{2p+1}{p+1} = 1 + \frac{p}{p+1} \geq \frac{5}{3}$  et  $(1 + \frac{1}{2p})^p < \sqrt{e} < \frac{5}{3}$ .

On veut alors montrer que  $u \rightarrow \omega_+$  quand  $t \rightarrow +\infty$  et puisque  $u''$  est bornée dans  $S^2$  on aura  $u' \rightarrow \omega'_+$ . Pour prouver cela on va utiliser la méthode de "translation-compacité" de Amerio-Biroli [2, 3]. Supposons qu'il existe  $\alpha_n$  tendant vers l'infini avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u(\alpha_n) - \omega_+(\alpha_n)| = \eta > 0$$

on peut remplacer  $\alpha_n$  par une sous-suite qu'on note aussi  $\alpha_n$  telle que

$$u(\alpha_n + t), \omega_+(\alpha_n + t), f(\alpha_n + t)$$

convergent respectivement vers  $v, \omega$  et  $g$  dans  $\mathbb{R}$  uniformément sur tout compact pour les deux premières fonctions, localement faible sur  $L^2$  pour la troisième. Alors  $v$  et  $\omega$  sont deux solutions bornées de

$$z'' + cz' + |z|^p z - z = g$$

avec

$$\text{Max}\{\|v - 1\|_\infty, \|\omega - 1\|_\infty\} < r_0$$

En particulier  $v = \omega$  et pour  $t = 0$  on obtient une contradiction avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u(\alpha_n) - \omega_+(\alpha_n)| = \eta > 0$$

Cette contradiction complète la démonstration du lemme 6.1.



**Lemme 6.2.** ([9], lemma 6.2) Soit  $J = (a, +\infty)$  et  $u \in C^2(J)$  tel que  $u \leq M$  sur  $J$ . Soit

$$U := \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} u(t)$$

Alors il existe une suite de réels  $t_n \in J$  telle que  $t_n \rightarrow +\infty$  et

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u''(t_n) \leq 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u(t_n) = U$$

**Lemme 6.3.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'inégalité  $u - |u|^p u \leq \varepsilon$  implique :  $u \leq \frac{p+1}{p}\varepsilon$  ou  $u \geq 1 - \sqrt{3}\varepsilon$ .

**Démonstration :** Si  $u \leq 0$  il n'y a rien à prouver.

Si  $u > 0$  on distingue deux cas

i) Si  $u \leq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$ , alors  $1 - |u|^p \geq \frac{p}{p+1}$  et donc

$$u - |u|^p u = u(1 - |u|^p) \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{p}{p+1}u \leq \varepsilon \Rightarrow u \leq \frac{p+1}{p}\varepsilon$$

ii) Si  $u \geq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$ , alors  $u(1 - u^p) = u(1 - u) \left[ \frac{1-u^p}{1-u} \right] \geq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}(1 - u)$  et donc puisque  $(p+1)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt{3}$  on trouve

$$u \geq 1 - \sqrt{3}\varepsilon$$

### Démonstration du théorème 2.2.

Soit  $u$  une solution de (1.1) sur  $\mathbb{R}$  et introduisons

$$M = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} u(t), \quad m = \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} u(t), \quad \varepsilon = \|f\|_\infty$$

Comme conséquence du lemme 6.2, il existe une suite de réels  $t_n$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u''(t_n) \leq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n) = M$$

Puisque  $u''$  est bornée  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u'(t_n) = 0$  On a

$$(u - |u|^p u)(t_n) = -f(t_n) + u''(t_n) + cu'(t_n)$$

donc

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (u - |u|^p u)(t_n) \leq \varepsilon$$

Comme conséquence du lemme 6.3, pour  $n$  suffisamment grand on a soit

$$u(t_n) \leq \frac{p+1}{p}\varepsilon < 2\varepsilon$$

soit

$$u(t_n) \geq 1 - \sqrt{3}\varepsilon$$

Dans le premier cas on conclut que

$$M \leq 2\varepsilon$$

Dans le deuxième cas, d'après la section 5, on a

$$1 - \sqrt{3}\varepsilon \leq u(t_n) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{p}$$

Comme conséquence du lemme 6.1, puisque (2.9) entraîne

$$\sqrt{3}\varepsilon \leq \frac{1}{2p\sqrt{6}} \text{ et de plus } \lim_{n \rightarrow \infty} u'(t_n) = 0$$

on conclut que  $u$  est asymptote à  $\omega_+$  en  $+\infty$ . Dans ce cas la démonstration est terminée. Revenant au premier cas, on considère une suite  $s_n$  telle que

$$u''(s_n) \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u(s_n) = m$$

et par le même argument on conclut que  $u$  est soit asymptote à  $\omega_-$  en  $+\infty$ , soit

$$m \geq -2\varepsilon$$

Dans ce second et dernier cas on a

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |u(t)| \leq 2\varepsilon$$

et par les hypothèses faites sur  $f$  ceci implique que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - \omega_0(t)| = 0$$

On prouve cette dernière propriété en utilisant à nouveau la méthode de translation.

En effet supposant, au contraire, l'existence de  $\alpha_n$  tendant vers l'infini avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u(\alpha_n) - \omega_0(\alpha_n)| = \eta > 0$$

on peut remplacer  $\alpha_n$  par une sous-suite, notée  $\alpha_n$ , telle que

$$u(\alpha_n + t), \quad \omega_0(\alpha_n + t), \quad f(\alpha_n + t)$$

convergent respectivement vers  $v$ ,  $\omega$  et  $g$  sur  $\mathbb{R}$ , uniformément sur tout compact pour les premières fonctions, localement faiblement dans  $L^2$  pour la troisième. Alors  $v$ ,  $\omega$  sont deux solutions bornées de

$$z'' + cz' + |z|^p z - z = g$$

avec

$$\text{Max}\{\|v\|_\infty, \|\omega\|_\infty\} \leq 2\varepsilon$$

En particulier  $v = \omega$  et pour  $t = 0$  on obtient une contradiction avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u(\alpha_n) - \omega_0(\alpha_n)| = \eta > 0$$

Cette contradiction termine la démonstration du théorème 2.2

## 7 Démonstration du théorème 2.5.

On commence par montrer que pour  $T$  fixé, les solutions  $u$   $T$ -périodiques sont telles que  $\| |u|^p u - u \|_\infty$  tend vers 0 avec  $\|f\|_\infty$ .

**Proposition 7.1.** *Soit  $f$  bornée,  $T$ -périodique et soit  $u \in C^2(\mathbb{R})$  une solution  $T$ -périodique de (1.1). Alors on a l'estimation suivante :*

$$\| |u|^p u - u \|_\infty \leq \|f\|_\infty \left( 1 + \frac{\sqrt{T}}{c} \sqrt{K \|f\|_\infty^p + \left( \frac{p^4(p+1)}{(p^2-p-1)} + 1 \right) T} \right)$$

$$\text{avec } K = 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)} \frac{p^{\frac{p}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}(p+1)T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}} c^p} + 2^{(p-3)^+} p^2 (p^2 - 1) \frac{T^{p-1}}{c^p} + p^p (p+1)T$$

**Démonstration :** En intégrant (1.1) sur  $J = (0, T)$  on trouve :

$$\int_J (|u|^p u - u) dt = \int_J f dt$$

En particulier

$$\left| \frac{1}{T} \int_J (|u|^p u - u) dt \right| = \|f\|_\infty$$

Ensuite en multipliant (1.1) par  $u'$  et en intégrant sur  $J$  on trouve :

$$c \int_J u'^2 dt = \int_J f u' dt \Rightarrow c \int_J u'^2 dt \leq \left( \int_J f^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_J u'^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors

$$\|u'\|_2 \leq \frac{\sqrt{T}}{c} \|f\|_\infty \quad (7.1)$$

Puis en multipliant (1.1) par  $u|u|^{p-2}$  et en intégrant sur  $J$  on obtient :

$$\begin{aligned} \int_J (|u|^{2p} - |u|^p) dt &= \int_J f u |u|^{p-2} dt + (p-1) \int_J u'^2 |u|^{p-2} dt \\ \implies \int_J (|u|^{2p} - |u|^p) dt &\leq \|f\|_\infty \int_J |u|^{p-1} dt + (p-1) \|u\|_\infty^{p-2} \int_J u'^2 dt \end{aligned} \quad (7.2)$$

D'une part, d'après l'inégalité de Young on a :

$$\|f\|_\infty |u|^{p-1} \leq \frac{p-1}{p^2} |u|^p + p^{p-2} \|f\|_\infty^p$$

donc

$$\|f\|_\infty \int_J |u|^{p-1} dt \leq \frac{p-1}{p^2} \int_J |u|^p dt + p^{p-2} \|f\|_\infty^p T \quad (7.3)$$

D'autre part :

$$\|u\|_\infty^{p-2} \leq 2^{(p-3)^+} T^{\frac{2-p}{p}} \|u\|_p^{p-2} + 2^{(p-3)^+} T^{\frac{p-2}{2}} \|u'\|_2^{p-2} \quad (7.4)$$

où

$$(p-3)^+ = \begin{cases} p-3 & \text{si } p \geq 3 \\ 0 & \text{si } 2 \leq p < 3 \end{cases}$$

en effet

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{T} \|u\|_1 + \|u'\|_1$$

en appliquant l'inégalité de Hölder à  $\|u\|_1$  et à  $\|u'\|_1$  on a

$$\|u\|_1 \leq T^{\frac{p-1}{p}} \|u\|_p \quad \text{et} \quad \|u'\|_1 \leq T^{\frac{1}{2}} \|u'\|_2$$

enfin si  $2 \leq p < 3$

$$\|u\|_\infty^{p-2} \leq T^{\frac{2-p}{p}} \|u\|_p^{p-2} + T^{\frac{p-2}{2}} \|u'\|_2^{p-2}$$

et si  $p \geq 3$  la fonction  $x^{p-2}$  est convexe donc

$$\|u\|_\infty^{p-2} \leq 2^{p-3} T^{\frac{2-p}{p}} \|u\|_p^{p-2} + 2^{p-3} T^{\frac{p-2}{2}} \|u'\|_2^{p-2}.$$

En appliquant l'inégalité de Young on a

$$\|u\|_p^{p-2} \leq \frac{(p^2 - p + 3)c^2}{2^{(p-3)^+} p^2 (p-1) T^{\frac{2}{p}} \|f\|_\infty^2} \int_J |u|^p dt$$

$$+2^{(\frac{(p-2)(p-3)^+}{2}+1)} \left[ \frac{p(p-1)(p-2)}{p^2-p+3} \right]^{\frac{p-2}{2}} \frac{T^{\frac{p-2}{p}}}{pc^{p-2}} \|f\|_\infty^{p-2} \quad (7.5)$$

en effet il suffit d'écrire

$$\forall \lambda > 0, \quad \lambda \|u\|_p^{p-2} \times \frac{1}{\lambda} \leq \frac{\lambda^r}{r} \|u\|_p^{(p-2)r} + \frac{1}{r'\lambda^{r'}}$$

avec

$$r = \frac{p}{p-2} ; \quad r' = \frac{p}{2}$$

et de choisir  $\lambda > 0$  défini par

$$\frac{\lambda^r}{r} = \frac{(p^2-p+3)c^2}{2^{(p-3)^+} p^2 (p-1) T^{\frac{2}{p}} \|f\|_\infty^2}$$

Donc d'après (7.1), (7.4) et (7.5) on a

$$\begin{aligned} (p-1) \|u\|_\infty^{p-2} \int_J u'^2 dt &\leq \frac{p^2-p+3}{p^2} \int_J |u|^p dt \\ &+ 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)} \frac{p^{\frac{p-4}{2}} (p-1)^{\frac{p}{2}} (p-2)^{\frac{p-2}{2}} T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}} c^p} \|f\|_\infty^p \\ &+ 2^{(p-3)^+} (p-1) \frac{T^{p-1}}{c^p} \|f\|_\infty^p \end{aligned} \quad (7.6)$$

d'où en remplaçant (7.3) et (7.6) dans (7.2) on a

$$\begin{aligned} \int_J (|u|^{2p} - |u|^p) dt &\leq \frac{p^2+2}{p^2} \int_J |u|^p dt + p^{p-2} T \|f\|_\infty^p \\ &+ 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)} \frac{p^{\frac{p-4}{2}} (p-1)^{\frac{p}{2}} (p-2)^{\frac{p-2}{2}} T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}} c^p} \|f\|_\infty^p \\ &+ 2^{(p-3)^+} (p-1) \frac{T^{p-1}}{c^p} \|f\|_\infty^p \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_J (|u|^{2p} - \frac{2}{p^2} |u|^p) dt &\leq 2 \int_J |u|^p dt + p^{p-2} T \|f\|_\infty^p + 2^{(p-3)^+} (p-1) \frac{T^{p-1}}{c^p} \|f\|_\infty^p \\ &+ 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)} \frac{p^{\frac{p-4}{2}} (p-1)^{\frac{p}{2}} (p-2)^{\frac{p-2}{2}} T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}} c^p} \|f\|_\infty^p \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Young on a

$$|u|^p \leq \frac{p^2-p-1}{2p^2} |u|^{2p} + \frac{p^2}{2(p^2-p-1)}$$

en effet

$$|u|^p \leq \frac{\lambda_1^r}{r} |u|^{pr} + \frac{1}{r' \lambda_1^{r'}}$$

avec

$$r = r' = 2$$

et

$$\frac{\lambda_1^r}{r} = \frac{p^2 - p - 1}{2p^2}$$

par conséquent on a

$$\begin{aligned} \int_J (|u|^{2p} - \frac{2}{p^2} |u|^p) dt &\leq \frac{p^2 - p - 1}{p^2} \int_J |u|^{2p} dt + \frac{p^2}{(p^2 - p - 1)} T \\ &\quad + p^{p-2} T \|f\|_\infty^p + 2^{(p-3)^+} (p-1) \frac{T^{p-1}}{c^p} \|f\|_\infty^p \\ &\quad + 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)} \frac{p^{\frac{p-4}{2}} (p-1)^{\frac{p}{2}} (p-2)^{\frac{p-2}{2}} T}{(p^2 - p + 3)^{\frac{p-2}{2}} c^p} \|f\|_\infty^p \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_J (\frac{(p+1)}{p^2} |u|^{2p} - \frac{2}{p^2} |u|^p) dt &\leq \frac{p^2}{(p^2 - p - 1)} T + 2^{(p-3)^+} (p-1) \frac{T^{p-1}}{c^p} \|f\|_\infty^p \\ &\quad + 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)} \frac{p^{\frac{p-4}{2}} (p-1)^{\frac{p}{2}} (p-2)^{\frac{p-2}{2}} T}{(p^2 - p + 3)^{\frac{p-2}{2}} c^p} \|f\|_\infty^p \\ &\quad + p^{p-2} T \|f\|_\infty^p \end{aligned}$$

en multipliant cette inégalité par  $(p+1)p^2$  on a

$$\begin{aligned} (p+1)^2 \int_J |u|^{2p} dt - 2(p+1) \int_J |u|^p dt \\ \leq 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)} \frac{p^{\frac{p}{2}} (p-1)^{\frac{p}{2}} (p-2)^{\frac{p-2}{2}} (p+1) T}{(p^2 - p + 3)^{\frac{p-2}{2}} c^p} \|f\|_\infty^p \\ + 2^{(p-3)^+} p^2 (p-1) (p+1) \frac{T^{p-1}}{c^p} \|f\|_\infty^p + p^p (p+1) T \|f\|_\infty^p \\ + \frac{p^4 (p+1)}{(p^2 - p - 1)} T \end{aligned}$$

en ajoutant  $T$  on obtient

$$\begin{aligned} \|(p+1)|u|^p - 1\|_2^2 &\leq 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)} \frac{p^{\frac{p}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}(p+1)T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p} \|f\|_\infty^p \\ &\quad + 2^{(p-3)^+} p^2(p^2-1) \frac{T^{p-1}}{c^p} \|f\|_\infty^p + p^p(p+1)T \|f\|_\infty^p \\ &\quad + \left( \frac{p^4(p+1)}{(p^2-p-1)} + 1 \right) T \end{aligned}$$

Finalement on trouve

$$\begin{aligned} \||u|^p u - u\|_\infty &\leq \|f\|_\infty + \|( |u|^p u - u )'\|_1 \\ &\leq \|f\|_\infty + \|(p+1)|u|^p - 1\|_2 \|u'\|_2 \\ &\leq \|f\|_\infty \left( 1 + \frac{\sqrt{T}}{c} \sqrt{K \|f\|_\infty^p + \left( \frac{p^4(p+1)}{(p^2-p-1)} + 1 \right) T} \right) \end{aligned}$$

avec  $K = 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)} \frac{p^{\frac{p}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}(p+1)T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p} + 2^{(p-3)^+} p^2(p^2-1) \frac{T^{p-1}}{c^p} + p^p(p+1)T$

Pour prouver le théorème 2.5, on a besoin du lemme suivant.

**Lemme 7.2.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'inégalité  $\||u|^p u - u\| \leq \varepsilon$  implique*

$$\inf\{|u|, |1-u|, |1+u|\} \leq \left( \frac{p+1}{p} \right) \varepsilon$$

**Démonstration :** i) Si  $|u| < \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$  alors  $1 - |u|^p > \frac{p}{p+1}$  donc

$$\||u|^p - u\| = |u| |1 - |u|^p| \leq \varepsilon \implies \frac{p}{p+1} |u| \leq \varepsilon \implies |u| \leq \frac{p+1}{p} \varepsilon$$

ii) Si  $|u| \geq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$ , alors  $|u| |1 - |u|^p| = |u(1-u)| \left| \frac{1-|u|^p}{1-u} \right| \geq \frac{p|1-u|}{(p+1)[(p+1)^{\frac{1}{p}}-1]}$  et donc

$$\begin{aligned} u &\geq 1 - \varepsilon \frac{(p+1)}{p} [(p+1)^{\frac{1}{p}} - 1] \\ &\implies |1-u| \leq \varepsilon \left( \frac{p+1}{p} \right) \end{aligned}$$

d'où le résultat puisque

$$|1-|u|| = \inf\{|1-u|, |1+u|\}$$

**Démonstration du théorème 2.5.**

Sous l'hypothèse (2.10), D'après la proposition 7.1 et le lemme 7.2, toute solution  $T$ -périodique  $u$  de (1.1) satisfait, pour tout  $t$ ,

$$\inf\{|u(t)|, |1-u(t)|, |1+u(t)|\} \leq \inf\left\{ \left( 1 + \frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} - 1, \left( \frac{2p+1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} - 1 \right\}$$

Puisque  $u$  est continue et les 3 intervalles fermés centrés en  $0, 1, -1$  de rayon

$$\rho = \inf\left\{\left(1 + \frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} - 1, \left(\frac{2p+1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right\}$$

sont disjoints, on a soit

$$\|u - 1\|_{\infty} \leq \inf\left\{\left(1 + \frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} - 1, \left(\frac{2p+1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right\}$$

auquel cas  $u = \omega_+$ , soit

$$\|u + 1\|_{\infty} \leq \inf\left\{\left(1 + \frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} - 1, \left(\frac{2p+1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right\}$$

auquel cas  $u = \omega_-$ , soit

$$\|u\|_{\infty} \leq \inf\left\{\left(1 + \frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} - 1, \left(\frac{2p+1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} - 1\right\} < \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

auquel cas  $u = \omega_0$ .

◇



## Références

- [1] J.M. Alonso, J. Mawhin, R. Ortega, Bounded solutions of second order semilinear evolution equations and applications to the telegraph equation, *J. Math. Pures Appl.* 78 (1999), 49-63.
- [2] L. Amerio, soluzioni quasi periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi periodici, o limitati, *Ann. Mat. Pura. Appl.* 39 (1955), 97-119.
- [3] M. Biroli, sur les solutions bornées et presque périodiques des équations et inéquations d'évolution, *Ann. Mat. Pura Appl.* 93 (1972), 1-79.
- [4] M.L. Cartwright & J.E. Littlewood, On non-linear differential equations of the second order, *Ann. Math.* 48 (1947), 472-494.
- [5] S.N. Chow, J.K. Hale & J. Mallet-Paret, An example of bifurcation to homoclinic orbits, *J.D.E.* 37 (1980), 351-373.
- [6] J.K. Hale & P.Z. Taboas, Interaction of damping and forcing in a second order evolution equation, *Nonlinear analysis, T.M.A.* 2, 1 (1978), 77-84.
- [7] A. Haraux, *Nonlinear evolution equations : Global behavior of solutions*, Lecture Notes in Math. 841, Springer (1981)
- [8] A. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, R.M.A.17, P.G. Ciarlet et J.L. Lions (eds.), Masson, Paris, 1991.
- [9] A. Haraux, On the double well Duffing equation with a small bounded forcing term, *Rc. Accad. Naz. Sci. dei* 40 (Memorie di Matematica) 122, 28, fasc.1 (2006).
- [10] W. S. Loud, Periodic solutions of  $x''+cx' +g(x) = f(t)$ , *Mem. Amer. Math. Soc.*, 31, 1959, 1-57.
- [11] J. Mawhin, R. Ortega and A.M. Robles-Perez, A maximum principle for bounded solutions of the telegraph equations and applications to nonlinear forcings, *J. Math. Anal. Appl.* 251 (2000), 695-709.
- [12] F. C. Moon and P. J. Holmes, A magnetoelastic strange attractor, *Journal of Sound and Vibration* 65, 2 (1979), 275-296.