



**HAL**  
open science

## Questions de corps de définition pour les variétés abéliennes en caractéristique positive

Franck Benoist, Françoise Delon

► **To cite this version:**

Franck Benoist, Françoise Delon. Questions de corps de définition pour les variétés abéliennes en caractéristique positive. 2008. hal-00137362v2

**HAL Id: hal-00137362**

**<https://hal.science/hal-00137362v2>**

Preprint submitted on 8 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Questions de corps de définition pour les variétés abéliennes en caractéristique positive

Franck Benoist \*   Françoise Delon

5 décembre 2007

## Résumé

Dichotomies in various conjectures from algebraic geometry are in fact occurrences of the dichotomy among Zariski structures. This is what Hrushovski showed and which enabled him to solve, positively, the geometric Mordell Lang conjecture in positive characteristic. Are we able now to avoid this use of Zariski structures? Pillay and Ziegler have given a direct proof that works for semi-abelian varieties they called “very thin”, which include the ordinary abelian varieties. But it does not apply in all generality : We describe here an abelian variety which is not very thin. More generally, we consider from a model-theoretical point of view several questions about the fields of definition of semi-abelian varieties.

## Résumé

La dichotomie apparaissant dans plusieurs conjectures géométriques est une occurrence de la dichotomie des structures de Zariski, introduites par Hrushovski et Zilber en théorie des modèles. C'est ce qu'a compris Hrushovski et qui lui a permis de résoudre, par l'affirmative, la conjecture géométrique de Mordell-Lang en caractéristique positive. Ce recours aux structures de Zariski peut-il être évité? Pillay et Ziegler ont donné une preuve directe qui s'applique aux variétés semi-abéliennes qu'ils appellent « très minces », en particulier aux variétés ordinaires. Mais elle ne s'applique pas en toute généralité : il y a des variétés qui ne sont pas très minces, nous en donnons ici un exemple. Le présent article traite plus généralement de questions de corps de définition des variétés semi-abéliennes en caractéristique positive, dont les questions de descente, considérées sous l'angle de la théorie des modèles.

## 1 Introduction

Dans [Hr96], Hrushovski a donné une démonstration d'une conjecture de géométrie algébrique, dite conjecture de Mordell-Lang. On peut donner plusieurs énoncés de ce résultat (voir [Bo98] par exemple) ; en voici un énoncé très général en caractéristique positive :

**Théorème 1 (Hrushovski)** *Soit  $K$  une extension d'un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique  $p$  ;  $A$  une variété semi-abélienne, et  $X$  une sous-variété*

---

\*Financé par une bourse post-doctorale Modnet

algébrique de  $A$ , toutes deux définies sur  $K$  ;  $\Gamma$  un sous-groupe de  $A(K)$  de  $p$ -rang fini, c'est-à-dire tel que  $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{Z}_{(p)}$  soit finiment engendré en tant que  $\mathbb{Z}_{(p)}$ -module. On suppose que  $\Gamma \cap X(K)$  est Zariski-dense dans  $X$ , que le stabilisateur de  $X$  est réduit à l'unité et que la sous-variété semi-abélienne engendrée par  $X$  est  $A$ . Alors il existe une variété semi-abélienne  $B$  et une sous-variété algébrique  $Y$  de  $B$ , définies sur  $k$ , et une isogénie de  $B$  dans  $A$  qui envoie  $Y$  sur un translaté de  $X$ .

En voici un énoncé un peu différent où une certaine dichotomie apparaît plus clairement :

**Théorème 2** *Soit  $k$  et  $K$  comme précédemment,  $A$  une variété abélienne et  $X$  une sous-variété de  $A$  définies sur  $K$ , et  $\Gamma$  un sous-groupe de  $A(K)$  de  $p$ -rang fini. Alors, ou bien il existe une image non nulle de  $A$  qui soit définie sur  $k$ , ou bien il existe un nombre fini de sous-variétés abéliennes  $B_i$  de  $A$  telles que  $X(K) \cap \Gamma$  soit union finie de translatés de  $B_i(K) \cap \Gamma$ .*

La preuve de Hrushovski utilise de façon centrale les géométries de Zariski et leur dichotomie « modularité locale/définition d'un corps » (voir [HrZi96]). Un de nos buts est d'aborder ces questions de descente pour une extension de corps  $K/k$  par des moyens beaucoup plus légers de théorie des modèles des corps différentiels.

L'extension de corps  $K/k$  est étudiée au moyen d'un langage dans lequel  $k$  est infiniment définissable, et où l'on pourra réduire l'énoncé pour le groupe  $\Gamma$  au même énoncé pour le groupe infiniment définissable  $p^\infty A(K) := \bigcap_{n \geq 0} p^n A(K)$  (auquel on s'intéressera dans la suite). La théorie utilisée dans la preuve de Hrushovski est celle des corps séparablement clos de degré d'imperfection fini et non nul, dans le langage décrit dans [De98]. Nous adopterons ici principalement le langage d'une dérivation de Hasse, introduit sous cette forme par Ziegler dans [Zi03].

La partie 2 sera consacrée aux préliminaires sur les dérivations de Hasse et sur les corps séparablement clos. Dans la partie 3, nous donnerons une description du sous-groupe  $p^\infty A(K)$  qui utilise les « foncteurs lambda » de [BoDe01], que l'on caractérisera au moyen des restrictions de Weil pour les extensions de corps  $K/K^{p^n}$ . On s'intéressera ensuite aux propriétés de *minceur* de  $p^\infty A(K)$ , que l'on peut voir comme des notions plus ou moins fortes de dimension finie, dans un contexte où chaque point vient avec la suite infinie de ses dérivées successives. Dans la partie 4, on montre qu'une variété abélienne  $A$  est isogène à une variété abélienne définie sur  $K^{p^\infty} := \bigcap_{n \geq 0} K^{p^n}$  si et seulement si  $p^\infty A(K)$  est *rationnellement mince*. Dans la partie 5, on répond par la négative à la question de savoir si, pour toute variété abélienne simple  $A$ ,  $p^\infty A(K)$  est *séparablement mince* ; une telle propriété aurait fourni une preuve « directe », c'est-à-dire algébrique, de la conjecture de Mordell-Lang, d'après des résultats de Pillay et Ziegler dans [PiZi03]. La construction de ce contre-exemple utilise la description détaillée que Frans Oort a faite de la stratification des espaces de modules des variétés principalement polarisées. Un exemple de même nature a été construit dans le groupe additif, voir [BIKr05].

Que François Mestre, Richard Pink, et surtout Frans Oort, soient ici remerciés de nous avoir aidés à comprendre certaines subtilités des variétés abéliennes.

## 2 Préliminaires

**Définition 1** Une dérivation de Hasse sur un anneau  $A$  (commutatif avec unité) est une suite d'applications  $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$  additives de  $A$  dans  $A$ , qui vérifient :

- $D_0 = id$
- une règle de Leibniz généralisée :  $D_i(xy) = \sum_{m+n=i} D_m(x)D_n(y)$
- une règle d'itération :  $D_i \circ D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}$

On s'intéressera désormais aux corps de caractéristique  $p > 0$  munis d'une dérivation de Hasse, dans le langage du premier ordre  $\mathcal{L} := (0, 1, +, -, \cdot, (D_i)_{i \in \mathbb{N}})$ ; leur théorie sera notée  $HF_p$ .

Donnons quelques notions utiles dans un tel corps  $K$ .

- L'ensemble

$$C_K := \{x \in K; D_1(x) = 0\}$$

est un sous-corps définissable de  $K$ , appelé *corps des constantes de  $K$* .

- L'ensemble

$$C_K^\infty := \{x \in K; \forall i \geq 1, D_i(x) = 0\}$$

est un sous-corps infiniment définissable de  $K$ , appelé *corps des constantes absolues de  $K$* .

- Le sous-corps des puissances  $p$ -ièmes dans  $K$ , noté  $K^p$ , est toujours contenu dans  $C_K$ . On dira que  $K$  est *strict* si  $C_K = K^p$ . Dans ce cas, on aura aussi

$$\{x \in K; \forall i < p^n, D_i(x) = 0\} = K^{p^n}$$

$$\text{et } C_K^\infty = \bigcap_{n \geq 0} K^{p^n} =: K^{p^\infty}.$$

- Pour  $X = (X_1, \dots, X_m)$  un  $m$ -uplet de variables, on note  $K\{X\}$  l'*algèbre des  $D$ -polynômes en  $X$* , c'est-à-dire :

$$K\{X\} := K[d_i X]_{i \in \mathbb{N}},$$

où  $d_i X := (d_i X_1, \dots, d_i X_m)$  et où les  $d_i X_j$ , pour  $i \in \mathbb{N}$  et  $j = 1, \dots, m$ , sont des indéterminées indépendantes. On la munit d'une extension de la dérivation de Hasse sur  $K$  en posant

$$D_j(d_i X) = \binom{i+j}{i} d_{i+j} X.$$

La théorie que l'on utilisera a été exhibée par Ziegler (et précédemment par Messmer et Wood, dans un langage un peu différent, voir [MeWo95]) :

**Théorème 3 ([Zi03])** La classe des corps de caractéristique  $p$ , munis d'une dérivation de Hasse et existentiellement clos, est axiomatisable par une théorie notée  $CHF_p$ .

Une liste d'axiomes est donnée par :

- les axiomes  $HF_p$  pour un corps commutatif de caractéristique  $p$  muni d'une dérivation de Hasse
- un axiome exprimant que la dérivation de Hasse est non triviale (c'est-à-dire  $\exists x D_1(x) \neq 0$ )
- un axiome exprimant que le corps est strict :  $\forall x \exists y (D_1(x) = 0 \rightarrow x = y^p)$
- un schéma d'axiomes exprimant que le corps est séparablement clos.

La théorie  $CHF_p$  est complète et admet l'élimination des quantificateurs ; par conséquent, pour un ensemble de paramètres  $k \models HF_p$ , il y a une bijection entre l'ensemble des  $n$ -types sur  $k$  et les  $D$ -idéaux premiers de  $k\{X\}$ , donnée par :

$$tp(a/k) \mapsto \{P \in k\{X\}; P(a) = 0\}.$$

## Exemples

1. Considérons  $\mathbb{F}_p(t)$ , que l'on munit d'une dérivation de Hasse en posant  $D_1(t) = 1$ ,  $D_i(t) = 0$  pour  $i > 1$  (et d'autre part la dérivation de Hasse est nécessairement triviale sur  $\mathbb{F}_p$ ). Cette dérivation de Hasse s'étend de manière unique à la clôture séparable  $\mathbb{F}_p(t)^{sep}$  (voir [HaSc37]). Alors  $K := (\mathbb{F}_p(t)^{sep}, D)$  est un modèle de  $CHF_p$ , avec  $C_K^\infty = \mathbb{F}_p^{alg}$  : plus généralement, il est bien connu que  $C(t)$  est strict dès que  $C$  est un corps parfait et que la dérivation de Hasse est définie comme précédemment sur  $t$ , ainsi que  $C(t)^{sep}$ . Et on obtient alors que  $C_K^\infty = K^{p^\infty} = \mathbb{F}_p^{alg}$ .
2. Pour un corps algébriquement clos  $k$ , il existe une extension  $K$  de  $k(t_1, \dots, t_n)^{sep}$  et une dérivation de Hasse sur  $K$  telles que  $C_K^\infty = k$ .

**Preuve** L'exemple précédent permet de construire une dérivation de Hasse sur  $k(t_1)^{sep}$ , de corps de constantes absolues  $k$ . Puis, en ajoutant  $(t_2, \dots, t_n)$  une réalisation du  $(n-1)$ -type générique au-dessus de  $k(t_1)^{sep}$  (ce type correspondant à l'idéal nul de  $k(t_1)^{sep}\{T_2, \dots, T_n\}$ ), on construit un modèle de  $CHF_p$  qui contient  $k(t_1, \dots, t_n)$  et dont le corps des constantes absolues reste inchangé égal à  $k$  (car le type générique est orthogonal aux constantes absolues, voir la proposition 50 de [De88] pour une preuve dans un langage différent, exposé ci-dessous).  $\square$

## Le langage des $p$ -composantes

Après avoir remarqué (lemme 2.1 de [Zi03]) qu'un modèle de  $CHF_p$  est un corps séparablement clos de degré d'imperfection 1, on utilisera parfois le langage donné dans [De98] :

pour  $K \models CHF_p$ , on fixe une  $p$ -base  $\{b\}$  de  $K$ . Par définition, pour tout  $n$ ,  $\{1, b, \dots, b^{p^n-1}\}$  est une base de  $K$  en tant que  $K^{p^n}$ -espace vectoriel. On notera  $\lambda_n = (\lambda_{n,i})_{0 \leq i < p^n}$  la suite de fonctions de  $K$  dans  $K$ , définissables dans le pur langage des corps avec paramètre  $b$ , telles que tout  $x \in K$  s'écrive

$$x = \sum_{i=0}^{p^n-1} \lambda_{n,i}(x) b^i.$$

Il suit du fait que les applications  $D_i$  sont nulles sur  $K^{p^n}$  pour  $0 < i < p^n$  que

$$\begin{pmatrix} D_0(x) \\ D_1(x) \\ \vdots \\ D_{p^n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_0(1) & D_0(b) & \dots & D_0(b^{p^n-1}) \\ D_1(1) & D_1(b) & \dots & D_1(b^{p^n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{p^n-1}(1) & D_{p^n-1}(b) & \dots & D_{p^n-1}(b^{p^n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{n,0}(x)^{p^n} \\ \lambda_{n,1}(x)^{p^n} \\ \vdots \\ \lambda_{n,p^n-1}(x)^{p^n} \end{pmatrix}.$$

Or la matrice  $(D_i(b^j))_{0 \leq i, j < p^n}$  est inversible, du fait du lemme suivant (voir le théorème 1 de [GaVo87]).

**Lemme 1** *Des éléments  $x_0, \dots, x_{p^n-1}$  de  $K$  sont linéairement indépendants au-dessus de  $K^{p^n}$  si et seulement si le Wronskien*

$$\begin{vmatrix} D_0(x_0) & \dots & D_0(x_{p^n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{p^n-1}(x_0) & \dots & D_{p^n-1}(x_{p^n-1}) \end{vmatrix}$$

*est non-nul.*

En d'autres termes, les  $p^n$ -uplets  $(D_i(x))_{i < p^n}$  et  $\lambda_n(x)^{p^n}$  sont birationnellement équivalents au-dessus de  $\mathbb{F}_p(\{b\}) := \mathbb{F}_p(D_i(b))_{i \in \mathbb{N}}$ .

### 3 Points rationnels des variétés semi-abéliennes

Etant donnée une variété algébrique  $V$  définie sur un corps  $K$ , l'ensemble des points  $K$ -rationnels de  $V$  s'écrit naturellement comme un ensemble définissable dans  $(K, 0, 1, +, -, \cdot)$  : si  $V$  est une variété affine, dont l'idéal dans  $K[X]$  est engendré par  $P_1, \dots, P_r$ , on a simplement

$$V(K) = \{x \in K^n; \forall i, P_i(x) = 0\}.$$

Dans le cas d'une variété algébrique générale, il suffit par exemple de recouvrir  $V$  par des ouverts affines  $V_1, \dots, V_m$ , et d'identifier  $V(K)$  avec l'union

$$V_1(K) \cup (V_2 \setminus V_1)(K) \cup \dots \cup (V_m \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_{m-1}))(K).$$

Pour un modèle  $(K, D)$  de  $CHF_p$ , notons que  $V(K)$  est Zariski-dense dans  $V$ , puisque  $K$  est séparablement clos. Les sous-ensembles (infiniment) définissables de  $V(K)$  ne proviennent pas simplement de combinaisons booléennes de sous-variétés algébriques de  $V$ .

On appellera dans la suite *sous-variété D-algébrique de  $V$*  un sous-ensemble de  $V(K)$  qui s'écrit, dans chaque ouvert affine, comme la collection des zéros d'une famille de D-polynômes de  $K\{X\}$  (c'est-à-dire fermé pour la *D-topologie*).

On se place désormais dans un modèle  $K$  de  $CHF_p$ , avec une  $p$ -base  $\{b\}$  de  $K$  fixée et les fonctions  $\lambda_n$  correspondantes (voir la section 2).

Il est classique de décrire les sous-variétés D-algébriques de  $V$  par l'intermédiaire d'objets purement algébriques. Dans le cas d'une caractéristique  $p > 0$ , on peut utiliser pour cela un système projectif de variétés algébriques

$$(\rho_{m,n} : \Lambda_m V \longrightarrow \Lambda_n V)_{m \geq n \geq 0}$$

construit dans [BoDe01], avec  $\Lambda_0 V = V$  et  $\rho_{0,0} = id_V$ , et des applications définissables  $\lambda_n : V(K) \rightarrow (\Lambda_n V)(K)$ , bijectives, de réciproque  $\rho_{n,0}|_{(\Lambda_n V)(K)}$ . Ces applications  $\lambda_n$  coïncident localement avec les fonctions  $\lambda_n$  déjà définies sur l'espace affine.

Il est montré (voir [BoDe01], Proposition 1.4) que  $\Lambda_n$  est un foncteur de la catégorie des variétés algébriques définies sur  $K$  dans elle-même; ce foncteur induit un foncteur sur la catégorie des groupes algébriques définis sur  $K$ , et les applications  $\rho_{m,n}$ ,  $\lambda_n$  sont alors des homomorphismes.

Une sous-variété D-algébrique  $W$  de  $V$  est alors déterminée par la suite

$$W_n(K) := \{x \in (\Lambda_n V)(K); \rho_{n,0}(x) \in W(K)\}, n \geq 0,$$

avec la caractérisation

$$W(K) = \{x \in V(K) \mid \forall n \geq 0, \lambda_n(x) \in W_n(K)\}.$$

On peut également caractériser ces foncteurs  $\Lambda_n$  en utilisant la notion de restriction de Weil :

**Définition 2** Soit  $V$  une variété algébrique définie sur  $K$ . On appelle  $\tilde{\rho}_n : \Pi_n V \rightarrow V$  une restriction de Weil pour  $V$  de  $K$  à  $K^{p^n}$  si :

- $\Pi_n V$  est définie sur  $K^{p^n}$  et  $\tilde{\rho}_n$  est un morphisme surjectif défini sur  $K$
- pour toute variété algébrique  $W$  définie sur  $K^{p^n}$  et tout morphisme  $f : W \rightarrow V$  défini sur  $K$ , il existe un unique morphisme  $g$  défini sur  $K^{p^n}$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & V \\ g \searrow & & \nearrow \tilde{\rho}_n \\ & \Pi_n V & \end{array} .$$

Nous noterons, pour tout entier  $n$ ,  $Fr^n : A \rightarrow Fr^n A$  l'isogénie Frobenius à la puissance  $n$ .

**Proposition 1 ([Be05], Proposition III.8)** Soit  $V$  une variété algébrique définie sur  $K$ . Alors  $((Fr^n \circ \Lambda_n)V, \rho_{n,0} \circ Fr^{-n})$  est une restriction de Weil pour  $V$  de  $K$  à  $K^{p^n}$ .

**Preuve** Tout d'abord,  $\Pi_n V := (Fr^n \circ \Lambda_n)V$  est bien définie sur  $K^{p^n}$  puisque  $\Lambda_n V$  est définie sur  $K$ , et nous devons aussi montrer que l'application  $\tilde{\rho}_n := \rho_{n,0} \circ Fr^{-n}$  est rationnelle, surjective et définie sur  $K$ . Rappelons pour cela (voir [BoDe01]) que cette application est donnée localement par

$$\left(x_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 0 \leq j < p^n}} \mapsto \left(\sum_{j=0}^{p^n-1} x_{i,j} b^j\right)_{1 \leq i \leq d} .$$

Elle est clairement définie sur  $K$ , et génériquement surjective puisque  $\tilde{\rho}_n$  réalise une bijection entre  $(\Pi_n V)(K^{p^n})$  et  $V(K)$ ,  $K$  étant séparablement clos.

On doit encore montrer que  $\tilde{\rho}_n$  est séparable. Considérons une composante irréductible  $F$  d'un ouvert affine de  $\Pi_n V$ , et  $G$  son image par  $\tilde{\rho}_n$ . Soit  $I(G)$

l'idéal premier séparable de  $G$  dans  $K[X_1, \dots, X_d]$ . D'après le lemme 2.1 de [BoDe01], il existe un idéal de type  $Q$  de  $K[X_{1\infty}, \dots, X_{d\infty}]$  (l'algèbre de polynômes décrivant les relations algébriques entre les  $\lambda$ -composantes), minimal tel que  $Q \cap K[X_1, \dots, X_d] = I(G)$ . Considérons, pour une extension élémentaire assez saturée  $L$  de  $K$ , un point  $y \in G(L)$  réalisant le type associé à  $Q$ . D'autre part, puisque  $\lambda_n^{p^n}(V(K))$  est Zariski dense dans  $\Pi_n V$ , on peut considérer  $x \in G(L)$  tel que  $\lambda_n^{p^n}(x)$  soit générique dans  $F$  au-dessus de  $K$ . L'idéal  $I_{x/K}$  (correspondant au type de  $x$  sur  $K$  dans  $K[X_{1\infty}, \dots, X_{d\infty}]$ ) a alors  $I(G)$  pour intersection avec  $K[X_1, \dots, X_d]$ , il contient donc  $Q$ . En particulier, on a, dans  $K[X_{i,j}; 1 \leq i \leq d, 0 \leq j < p^n]$ ,  $I(\lambda_n(y)/K) \subseteq I(\lambda_n(x)/K)$ , et ainsi  $I(\lambda_n^{p^n}(y)) = I(F)$ , l'idéal de la composante irréductible  $F$ . Or, d'après la construction de  $Q$  (voir la preuve du lemme 2.1 de [BoDe01]), si  $y_1, \dots, y_r$  désigne une base de transcendance séparante de  $y = (y_1, \dots, y_n)$  sur  $K$ , alors les  $\lambda_n(y_i)$  sont algébriquement indépendants au-dessus de  $K(y)$ , pour  $i = 1, \dots, r$ ; et pour  $i = r+1, \dots, n$ ,  $\lambda_n^{p^n}(y_i) \in K(\lambda_n^{p^n}(y_1), \dots, \lambda_n^{p^n}(y_r), y_{r+1}, \dots, y_n)$ . On a donc que  $K(\lambda_n^{p^n}(y))$  est une extension purement transcendante, donc séparable, de  $K(y)$ ; comme  $\lambda_n^{p^n}(y)$  est générique dans  $F$  et que  $\tilde{\rho}_n(\lambda_n^{p^n}(y)) = y$ , cela signifie que  $\tilde{\rho}_n$  est séparable, donc surjective.

Montrons finalement que  $(\Pi_n V, \tilde{\rho}_n)$  satisfait la propriété universelle considérée. On se donne pour cela un morphisme  $f : W \rightarrow V$ , défini sur  $K$ , pour une variété algébrique  $W$  définie sur  $K^{p^n}$ . Puisque  $K^{p^n}$  est séparablement clos, il suffira, pour déterminer le morphisme  $g$  recherché, de le considérer sur les points  $K^{p^n}$ -rationnels. Or, puisque  $\tilde{\rho}_n|_{(\Pi_n V)(K^{p^n})}$  est bijective,  $g$  est nécessairement donné par  $g = \lambda^{p^n} \circ f : W(K^{p^n}) \rightarrow (\Pi_n V)(K^{p^n})$ .

Il reste à montrer que l'on définit ainsi un morphisme de variétés algébriques, défini sur  $K^{p^n}$ . Considérons un ouvert affine  $U$  de  $W$  sur lequel  $f$  est donné par une fraction rationnelle  $P/Q$  à coefficients dans  $K$ . Ecrivons  $P(x)/Q(x) = N(x)/Q(x)^{p^n}$  et notons  $\lambda_{n,i}^{p^n}(N)$  le polynôme à coefficients dans  $K^{p^n}$  obtenu en appliquant  $\lambda_{n,i}^{p^n}$  aux coefficients de  $N$ . On a alors, pour  $x \in U(K^{p^n})$ ,

$$\lambda_{n,i}^{p^n}(f(x)) = \frac{\lambda_{n,i}^{p^n}(N)(x)}{Q(x)^{p^n}},$$

c'est-à-dire que  $g$  est donné localement par une fraction rationnelle à coefficients dans  $K^{p^n}$ .  $\square$

On notera désormais  $(\Pi_n V, \tilde{\rho}_n)$  pour  $((Fr^n \circ \Lambda_n)V, \rho_{n,0} \circ Fr^{-n})$ .

Le cas particulier important auquel on s'intéressera désormais est celui d'une variété semi-abélienne  $A$  définie au dessus d'un modèle  $K$  de  $CHF_p$ . Dans ce cas, on sait que  $A(K)$  est un groupe  $n$ -divisible pour tout  $n$  premier à  $p$  (car  $K$  est séparablement clos), mais qu'il n'est pas  $p$ -divisible (car  $K$  n'est pas parfait). On pose :

$$p^\infty A(K) := \bigcap_{n \geq 0} p^n A(K).$$

C'est le plus grand sous-groupe divisible de  $A(K)$ . C'est un sous-groupe infiniment définissable, fermé pour la D-topologie, de  $A(K)$ , c'est-à-dire un sous-groupe D-algébrique de  $A(K)$ . Il est aussi connexe et Zariski-dense dans  $A$  (voir



[BoDe02]). Décrivons-le par l'intermédiaire du système projectif des  $\Pi_n A$ .

Pour tout  $n$ , l'isogénie Frobenius à la puissance  $n$ ,  $Fr^n : A \rightarrow Fr^n A$ , admet une isogénie duale, appelée *Verschiebung*, et notée  $V_n : Fr^n A \rightarrow A$ . Elle vérifie  $V_n \circ Fr^n = [p^n]_A$  et  $Fr^n \circ V_n = [p^n]_{Fr^n A}$  (où, pour un entier  $m$ ,  $[m]$  désigne la multiplication par  $m$  dans le groupe algébrique considéré). Puisque  $Fr^n A$  est définie sur  $K^{p^n}$ , on déduit de la propriété universelle des restrictions de Weil un morphisme  $\alpha_n$ , défini sur  $K^{p^n}$ , tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} Fr^n A & \xrightarrow{V_n} & A \\ \alpha_n \searrow & & \nearrow \tilde{\rho}_n \\ & \Pi_n A & \end{array} .$$

Par functorialité du Frobenius et de la restriction de Weil,  $\alpha_n$  est un homomorphisme de groupes algébriques. Notons  $A_n$  l'image de l'homomorphisme  $\alpha_n$ . C'est un sous-groupe algébrique de  $\Pi_n A$ , défini sur  $K^{p^n}$ . Les  $A_n$  décrivent alors  $p^\infty A(K)$ , plus précisément :

**Lemme 2**

$$p^\infty A(K) = \bigcap_{n \geq 0} \tilde{\rho}_n(A_n(K^{p^n})) = \{x \in A(K); \forall n \geq 0, \lambda_n(x)^{p^n} \in A_n(K)\}.$$

**Preuve** Tout d'abord, la deuxième égalité est une conséquence du fait que  $\tilde{\rho}_n$  et  $\lambda_n^{p^n}$  sont des bijections réciproques l'une de l'autre entre  $(\Pi_n A)(K^{p^n})$  et  $A(K)$ . Ensuite, si  $x \in p^\infty A(K)$ , on trouve pour tout  $n$  un élément  $x_n$  dans  $A(K)$  tel que

$$x = [p^n]x_n = V_n(Fr^n(x_n)) = \tilde{\rho}_n(\alpha_n(Fr^n(x_n))).$$

Comme  $\alpha_n(Fr^n(x_n)) \in A_n(K^{p^n})$ , on a bien  $x \in \tilde{\rho}_n(A_n(K^{p^n}))$ . Réciproquement, si  $x \in A(K)$  vérifie  $\lambda_n(x)^{p^n} \in A_n(K) \cap (\Pi_n A)(K^{p^n}) = A_n(K^{p^n})$ , il existe  $y_n \in (Fr^n A)(K^{p^n})$  tel que  $\alpha_n(y_n) = \lambda_n(x)^{p^n}$  (car  $\alpha_n : Fr^n A \rightarrow A_n$  est par définition un homomorphisme de groupes algébriques, dominant et défini sur  $K^{p^n}$ , donc surjectif au niveau des points  $K^{p^n}$ -rationnels). Par suite  $x_n := Fr^{-n}(y_n)$  vérifie  $x_n \in A(K)$  et  $[p^n](x_n) = V_n \circ Fr^n(x_n) = \tilde{\rho}_n \circ \alpha_n(y_n) = \tilde{\rho}_n(\lambda_n(x)^{p^n}) = x$ , donc  $x \in p^n A(K)$ .  $\square$

**Définition 3** On dit que le type de  $a$  au-dessus d'un modèle  $k$  de  $CHF_p$  est mince si le  $D$ -corps engendré par  $a$  au-dessus de  $k$ ,  $k(\{a\}) := k(D_i(a))_{i \in \mathbb{N}}$ , est de degré de transcendance fini au-dessus de  $k$ .

La caractérisation précédente de  $p^\infty A(K)$  permet de montrer facilement le lemme suivant (qui est le lemme 2.15 de [Hr96]).

**Lemme 3** Soit  $k$  un  $D$ -corps de définition de  $A$  contenant la  $p$ -base fixée pour  $K$ . Alors, pour tout  $a \in p^\infty A(K)$ , le type de  $a$  au-dessus de  $k$  est mince.

**Preuve** Tout d'abord, on a vu que  $k(\{a\}) = k(\lambda_n(a)^{p^n})_{n \geq 0}$ . Ensuite, pour tout  $n \geq 0$ , on trouve  $a_n \in A(K)$  tel que  $a = [p^n]a_n = V_n \circ Fr^n(a_n)$ . Comme  $V_n$  est une isogénie,  $k(Fr^n(a_n))$  est une extension algébrique de  $k(a)$ . Or,  $\alpha_n(Fr^n(a_n)) \in k(Fr^n(a_n))$ , et on a vu que  $\tilde{\rho}_n \circ \alpha_n \circ Fr^n(a_n) = [p^n]a_n = a$  implique que  $\alpha_n \circ Fr^n(a_n) = \lambda_n(a)^{p^n}$  : on a donc que  $\lambda_n(a)^{p^n}$  est algébrique sur  $k(a)$ .  $\square$

Dans la suite, on s'intéressera à des conditions, portant sur les isogénies  $V_n$ , qui permettent de renforcer cette propriété de minceur, ainsi qu'à leur rapport avec la conjecture de Mordell-Lang.

## 4 La minceur rationnelle

On considère une notion de minceur plus forte que la notion précédente, la minceur rationnelle.

**Définition 4** *On dit que le type de  $a$  au-dessus d'un modèle  $k$  de  $CHF_p$  est rationnellement mince si le  $D$ -corps engendré par  $a$  au-dessus de  $k$  est finiment engendré en tant que corps au-dessus de  $k$ .*

*On dit qu'un groupe infiniment définissable connexe, défini au-dessus de  $k$ , est rationnellement mince si son type générique l'est.*

Dans [Bu92], Alexandru Buium étudie la notion de  $D$ -structure sur une variété algébrique en caractéristique nulle, c'est-à-dire d'extension de la dérivation au faisceau des fonctions régulières, et montre l'équivalence entre la catégorie des groupes algébriques munis d'une  $D$ -structure et celle des groupes «  $\delta$ -algébriques » de dimension finie. Dans [Be05], il est montré comment généraliser cette notion à la caractéristique positive, et l'équivalence entre la catégorie des groupes algébriques connexes munis d'une  $D$ -structure et celle des groupes infiniment définissables connexes rationnellement minces est établie. Nous allons ici reprouver la partie de ce résultat qui nous intéresse.

Dans la suite,  $A$  désigne une variété semi-abélienne définie sur un modèle  $k$  de  $CHF_p$ , et  $K$  un modèle  $|k|^+$ -saturé contenant  $k$ .

**Proposition 2** *Si  $p^\infty A(K)$  est rationnellement mince, il existe une isogénie de variétés semi-abéliennes au-dessus de  $k$ ,  $B \rightarrow A$ , telle que, si  $b$  désigne un point générique de  $p^\infty B(K)$ , alors  $k(\{b\}) = k(b)$ .*

**Preuve** Considérons un point générique  $a$  de  $p^\infty A(K)$  au-dessus de  $k$  ; par définition, il existe un entier  $i$  tel que  $k(\{a\}) = k(D_0(a), \dots, D_i(a))$ , nous avons aussi montré, dans le lemme 3, que ce corps est une extension algébrique de  $k(a)$ . Nous noterons  $\delta_i := (D_0, \dots, D_i)$ , et  $\Gamma$  l'image par  $\delta_i$  de  $p^\infty A(K)$ , munie de la structure de groupe induite par celle de  $p^\infty A(K)$ .

Si  $a$  et  $a'$  sont des points génériques de  $p^\infty A(K)$  indépendants au-dessus de  $k$ , il vient d'après les axiomes d'une dérivation de Hasse que  $k(\delta_i(a * a')) \subseteq k(\delta_i(a), \delta_i(a'))$  et  $k(\delta_i(a^{-1})) \subseteq k(\delta_i(a))$  (où  $*$  et  $^{-1}$  représentent les opérations de groupe de  $A(K)$ ). Les lois de groupe sur  $\Gamma$  sont donc génériquement rationnelles, ce qui nous permet de définir un groupe algébrique  $B$ , défini sur  $k$ , dans lequel  $\Gamma$  est un sous-groupe dense (on utilise pour cela un théorème classique de Weil, voir [We55]). D'autre part, l'homomorphisme (rationnel) « restriction »,

$(x_0, \dots, x_i) \mapsto x_0$ , de  $\Gamma$  dans  $p^\infty A(K)$ , s'étend en un homomorphisme de groupes algébriques de  $B$  dans  $A$  (voir le théorème 3 de [Ro56]), qui est une isogénie car  $k(\delta_i(a))$  est algébrique au-dessus de  $k(a)$ , pour  $\delta_i(a)$  un point générique dans  $\Gamma$ , et donc dans  $B$ . On en déduit que  $B$  est, comme  $A$ , une variété semi-abélienne. On déduit du fait que  $\delta_i$  est un isomorphisme (définissable) de  $p^\infty A(K)$  sur  $\Gamma$ , que  $\Gamma = p^\infty B(K)$ , et, par construction, pour un point générique  $b = \delta_i(a)$  de  $\Gamma$ , on a  $k(\{b\}) = k(\{a\}) = k(b)$ .  $\square$

**Proposition 3** *Supposons que le point générique  $a$  de  $p^\infty A(K)$  vérifie  $k(\{a\}) = k(a)$ . Alors, pour tout  $n \geq 0$ , il existe une section  $s_n$  à la projection  $\tilde{\rho}_n : \Pi_n A \rightarrow A$ , qui coïncide avec  $\lambda_n^{p^n}$  sur  $p^\infty A(K)$ .*

**Preuve** Soit  $a$  le point générique de  $p^\infty A(K)$ . Par hypothèse, et en utilisant les résultats de la section 2, il existe une fraction rationnelle  $s_n$ , à coefficients dans  $k$ , telle que

$$\lambda_n^{p^n}(a) = s_n(a).$$

Les fonctions  $s_n$  sont donc des fonctions rationnelles partielles, de  $p^\infty A(K)$  dans  $\Pi_n A(K)$ , qui sont des homomorphismes par définition de la loi de groupe de  $\Pi_n A$ , et qui vérifient  $\tilde{\rho}_n \circ s_n = id$  sur  $p^\infty A(K)$ . En prolongeant les fonctions  $s_n$  en des homomorphismes de groupes algébriques de  $A$  dans  $\Pi_n A$  (par le même argument de densité que précédemment), on obtient les sections recherchées.  $\square$

On peut maintenant prouver le résultat de descente suivant. L'argument pour le passage des différents  $k^{p^n}$  au corps des constantes absolues  $k^{p^\infty}$  nous a été donné lors de discussions avec Jean-Benoît Bost, Elisabeth Bouscaren, Anand Pillay, Damien Roessler et Thomas Scanlon. Il utilise une paramétrisation des variétés abéliennes polarisées avec une structure de niveau  $m$  par un espace de modules approprié; on pourra trouver les propriétés de cet objet dans [MuFo82].

**Théorème 4** *Supposons que  $A$  est une variété abélienne définie au-dessus de  $k$ , telle que  $p^\infty A(K)$  soit rationnellement mince. Alors  $A$  est isogène à une variété abélienne  $B$  définie sur  $C_k^\infty$ .*

**Preuve** En utilisant la proposition 2, on trouve tout d'abord une variété abélienne  $B$ , isogène à  $A$ , telle que  $k(\{b\}) = k(b)$  pour tout point générique  $b$  de  $p^\infty B(K)$  au-dessus de  $k$ . La proposition 3 nous donne alors, pour tout  $n$ , une section  $s_n : B \rightarrow \Pi_n B$ , que l'on va utiliser pour montrer que  $B$  est isomorphe à une variété abélienne définie sur  $k^{p^n}$ .

Dans la partie 3, on a donné la caractérisation suivante :

$$p^\infty B(K) = \{x \in B(K); \forall n \geq 0, \lambda_n(x)^{p^n} \in B_n(K^{p^n})\},$$

où, pour tout  $n$ ,  $B_n$  est un sous-groupe algébrique de  $\Pi_n B$  défini sur  $K^{p^n}$ . On montre alors que  $B$  est isomorphe à  $B_n$  : on sait déjà que  $\tilde{\rho}_n \circ s_n = id_B$ , et, pour  $x \in p^\infty B(K)$ ,  $s_n \circ \tilde{\rho}_n(s_n(x)) = s_n \circ \tilde{\rho}_n(\lambda_n(x)^{p^n}) = s_n(x)$ , donc  $s_n \circ \tilde{\rho}_n = id$  sur l'image de  $p^\infty B(K)$  par  $s_n$ , et donc sur  $s_n(B)$  par densité. Or  $s_n(B) = B_n$  (car pour  $x \in p^\infty B(K)$  et  $x_n \in B(K)$  tels que  $[p^n]x_n = x$ , on a vu dans la preuve de la proposition 3 que  $s_n(x) = \lambda_n(x)^{p^n} = \alpha_n(Fr^n(x_n))$ , et donc  $s_n(p^\infty B(K))$  est dense dans l'image de  $Fr^n B$  par  $\alpha_n$ , c'est-à-dire  $B_n$ ), et on a donc obtenu

un isomorphisme de  $B$  sur  $B_n$ .

Pour en déduire que  $B$  est isomorphe à une variété abélienne définie sur  $k^{p^\infty}$ , on utilise l'espace de modules  $\mathcal{A}_{g,d,m}$  des variétés abéliennes de dimension  $g = \dim(B)$ , munie d'une polarisation de degré  $d^2$  et d'une structure de niveau  $m$ , pour un  $m$  premier à  $p$  et suffisamment grand pour que cet espace de modules existe (voir [MuFo82]).

Fixons une polarisation  $\omega$  sur  $B$  et notons  $d^2$  son degré. Fixons aussi dans  $B(k)$  une structure de niveau  $m$ , c'est-à-dire une base  $(x_1, \dots, x_{2g})$  de la  $m$ -torsion dans  $G(k)$  (ce qui est possible car  $m$  est premier à  $p$  et  $k$  est séparablement clos, de sorte que la  $m$ -torsion dans  $B(k)$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{2g}$ ). Alors, pour tout  $n \geq 0$ , l'isomorphisme  $s_n$  transporte cette polarisation sur une polarisation de  $B_n$ , de même degré et définie sur  $k^{p^n}$ , et la structure de niveau  $m$  sur une structure de niveau  $m$  dans  $B_n(k^{p^n})$ . On a donc que la variété abélienne  $(B, \omega, (x_1, \dots, x_{2g}))$  correspond à un point dans  $\mathcal{A}_{g,d,m}(k^{p^n})$ , pour tout  $n \geq 0$ , et donc à un point dans l'intersection  $\mathcal{A}_{g,d,m}(k^{p^\infty})$ .

On en déduit que  $B$  est isomorphe à une variété abélienne définie sur  $C_k^\infty$ , or  $A$  est isogène à  $B$ .  $\square$

**Remarque** La réciproque du théorème précédent est vraie. En effet, si  $B$  est définie sur  $C_k^\infty$ , alors  $p^\infty B(K) = B(C_K^\infty)$  (voir par exemple [BoDe02]), qui est rationnellement mince puisque tous les points ont leurs dérivées nulles. Et l'image d'un point rationnellement mince est rationnellement mince, puisqu'un sous-corps d'un corps finiment engendré au-dessus de  $k$  est finiment engendré au-dessus de  $k$ .

Ce théorème permet de reformuler la conclusion de la conjecture de Mordell-Lang pour les variétés abéliennes : sous les hypothèses du théorème 1, on doit essentiellement montrer que  $p^\infty A(K)$  est rationnellement mince. Malheureusement, on ne sait pas encore exploiter ce fait pour donner une preuve différentielle algébrique de la conjecture.

## 5 La minceur séparable

Une notion intermédiaire entre la minceur et la minceur rationnelle a été dégagée dans [PiZi03] ; il s'agit de la notion de point très mince. Nous utiliserons ici l'expression "séparablement mince", qui est plus explicite et qui a un meilleur comportement grammatical.

**Définition 5** *On dit que le type de  $a$  au-dessus d'un modèle  $k$  de  $CHF_p$  est séparablement mince si le  $D$ -corps engendré par  $a$  au-dessus de  $k$  est une extension algébrique séparable d'un corps finiment engendré au-dessus de  $k$ .*

*On dit qu'un groupe infiniment définissable connexe, défini au-dessus de  $k$ , est séparablement mince si son type générique l'est.*

Dans [PiZi03], Pillay et Ziegler donnent une preuve directe de la conjecture de Mordell-Lang dans le cas où  $p^\infty A(K)$  est séparablement mince. On connaît des conditions suffisantes pour que  $p^\infty A(K)$  soit séparablement mince, par exemple que  $A$  soit une variété abélienne *ordinaire* ; mais on ne savait pas jusqu'à présent si  $p^\infty A(K)$  pouvait ne pas être séparablement mince. Avant d'exhiber un contre-exemple, donnons la caractérisation suivante.

**Lemme 4 ([Be05], Proposition IV.16)** *Soit  $A$  une variété semi-abélienne définie sur  $k$ . Avec les notations de la section 3, on considère, pour  $m \geq n$ , l'homomorphisme  $\tilde{\rho}_{m,n} := Fr^n \circ \rho_{m,n} \circ Fr^{-m}$  de  $\Pi_m A$  dans  $\Pi_n A$ . Alors  $\tilde{\rho}_{m,n}|_{A_m}$  est une isogénie de  $A_m$  dans  $A_n$ .*

**Preuve** Comme dans les sections 3 et 4,  $\alpha_n$  désigne l'homomorphisme obtenu dans la factorisation de  $V_n$ . On a alors la situation suivante

$$\begin{array}{ccccc} Fr^m A & \xrightarrow{V'_{m-n}} & Fr^n A & \xrightarrow{V_n} & A \\ & & \alpha_n \searrow & \nearrow \tilde{\rho}_n & \\ & & & & \Pi_n A \end{array} ,$$

où  $V'_{m-n}$  désigne l'isogénie duale de  $Fr^{m-n} : Fr^n A \rightarrow Fr^m A$ . On sait (voir [La59] par exemple) que  $V_m = V_n \circ V'_{m-n}$ , et d'autre part  $V_m = \tilde{\rho}_m \circ \alpha_m = \tilde{\rho}_n \circ \tilde{\rho}_{m,n} \circ \alpha_m$ . Cela donne deux écritures de l'homomorphisme  $V_m \circ Fr^{m-n} : Fr^n A \rightarrow A$  :

$$\tilde{\rho}_n \circ \tilde{\rho}_{m,n} \circ \alpha_m \circ Fr^{m-n} = \tilde{\rho}_n \circ \alpha_n \circ [p^{m-n}]|_{Fr^n A}.$$

Puisque les homomorphismes  $\tilde{\rho}_{m,n} \circ \alpha_m \circ Fr^{m-n}$  et  $\alpha_n \circ [p^{m-n}]|_{Fr^n A}$  sont définis sur  $k^{p^n}$ , ils sont égaux d'après l'unicité de la factorisation via  $\Pi_n A$ . Et puisque l'image de  $[p^{m-n}]|_{Fr^n A}$  est dense, on obtient que  $\tilde{\rho}_{m,n} \circ \alpha_m \circ Fr^{m-n}(Fr^n A) = \alpha_n(Fr^n A)$ , c'est-à-dire  $\tilde{\rho}_{m,n}(A_m) = A_n$ .

Il suffit donc maintenant de prouver que  $A_m$  et  $A_n$  ont même dimension pour prouver que  $\tilde{\rho}_{m,n}$  réalise une isogénie. Or on sait que  $\alpha_n$ , comme  $V_n$ , a un noyau fini et donc  $\dim(A_n) = \dim(Fr^n A) = \dim(A)$ , et de même pour  $A_m$ .  $\square$

**Proposition 4** *Le groupe  $p^\infty A(K)$  est séparablement mince si et seulement s'il existe  $n \geq 0$  tel que  $\tilde{\rho}_{m,n}|_{A_m}$  est séparable pour tout  $m \geq n$ .*

**Preuve** Tout d'abord, comme dans les sections 3 et 4, pour  $a$  générique dans  $p^\infty A(K)$ , et  $a_m$ , lui aussi générique dans  $p^\infty A(K)$ , tel que  $[p^m]a_m = a$ , on a  $b_m := \lambda_m(a)^{p^m} = \alpha_m \circ Fr^m(a_m)$  qui est générique dans  $A_m$ , et  $\tilde{\rho}_{m,n}|_{A_m}(b_m) = b_n$  pour  $m \geq n$ .

Supposons que  $p^\infty A(K)$  est séparablement mince, et considérons l'entier  $n$  tel que  $k(\{a\}) = k(\lambda_m(a)^{p^m})_{m \geq 0}$  est algébrique séparable sur  $k(\lambda_n(a)^{p^n})$ . On a alors que pour tout  $m \geq n$ ,  $k(b_m)$  est algébrique séparable sur  $k(b_n)$ , donc  $\tilde{\rho}_{m,n}|_{A_m}$  est séparable.

Réciproquement, supposons qu'il existe  $n \geq 0$  tel que  $\tilde{\rho}_{m,n}|_{A_m}$  est séparable pour tout  $m \geq n$ . Pour  $a, b_m$  et  $b_n$  comme précédemment, on a que  $k(b_m)$  est algébrique séparable sur  $k(b_n)$  pour  $m \geq n$ , ce qui implique que  $k(\{a\}) = k(b_m)_{m \geq 0}$  est algébrique séparable sur  $k(\lambda_n(a)^{p^n})$ .  $\square$

Nous cherchons maintenant à construire une variété abélienne simple  $A$  au-dessus de  $K$  qui ne soit pas séparablement mince, ce qui signifie pour nous par définition que  $p^\infty A(K)$  n'est pas séparablement mince. Le principe du paramétrage des courbes elliptiques par leur  $j$ -invariant (deux courbes sont isomorphes si et seulement si elles ont même invariant) ne s'étend pas directement en dimension supérieure, au sens où il n'y a pas de structure de variété raisonnable

sur l'ensemble des paramètres décrivant les variétés abéliennes « nues » de dimension fixée, quotienté par la relation d'équivalence correspondant à l'isomorphisme entre variétés, voir [MuFo82], Chapitre 5, §1. On sait, d'après [MuFo82], Chapitre 7, qu'il s'étend si l'on considère les variétés abéliennes (de dimension fixée  $g$ ), munie d'une structure additionnelle, polarisation de degré fixée  $d^2$  et structure de niveau fixé  $n$ . Dans la preuve du théorème 4, nous avons utilisé l'existence de l'espace de modules correspondant,  $\mathcal{A}_{g,d,n}$  et son uniformité par rapport aux corps  $k, k^p, k^{p^2}, \dots$  lorsque  $n$  est assez grand ([MuFo82], 7.9). Nous allons maintenant utiliser l'espace de modules  $\mathcal{A}_{g,1} := \mathcal{A}_{g,1,1}$  des variétés principalement polarisées, c'est à dire munies d'un isomorphisme vers leur variété duale. Cette paramétrisation n'existe qu'au-dessus d'un corps algébriquement clos ([MuFo82], 7.10) mais cela nous suffira car il s'agit ici de construire un exemple particulier. Nous identifions par la suite une variété abélienne principalement polarisée de dimension  $g$  et le point de  $\mathcal{A}_{g,1}$  qui la représente.

Pour une variété abélienne  $A$  définie sur un corps quelconque  $k$  et un entier  $m$ , soit  $A[m] := \{x \in k^{alg} \mid m \cdot x = 0\}$ , et pour un nombre premier  $q$ , la limite projective  $t_q(A)$  des  $A[q^r]$ , qui porte naturellement une structure de  $\mathbb{Z}_q$ -module, c'est le *module de Tate  $q$ -adique* de la variété. Pour  $q$  différent de  $p$ , si  $g$  est la dimension de  $A$ ,  $t_q(A)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}_q^{2g}$ . Il est bien connu que la situation est plus compliquée pour  $q = p$  : la torsion d'ordre  $p$  est de la forme  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$  pour un certain entier  $n \leq g$ , appelé le  $p$ -rang de la variété. Lorsqu'il est strictement inférieur à  $g$ , cet entier  $n$  peut être raffiné de la façon suivante. D'une part l'action du Frobenius permet d'enrichir la structure de  $\mathbb{Z}_p$ -module de  $t_p(A)$  en un module sur un anneau plus gros. D'autre part on considère au lieu de la torsion naïve la torsion schématique, en particulier la  $p$ -torsion redevient ainsi un objet de rang  $2g$ . Cela permet d'associer à la variété un « module de Dieudonné », de rang  $2g$ , qui, à isogénie près, se décompose en une somme directe de modules indécomposables ([Ma], chapitre II). Ou encore, graphiquement, est associé à  $A$  un « polygone de Newton », ayant les propriétés suivantes ([Oo00]) :

- dans le plan cartésien réel, c'est une ligne convexe de segments de droite à sommets entiers, commençant en  $(0, 0)$  et finissant en  $(2g, g)$ ,
  - à pentes positives ou nulles, au plus égales à 1,
  - avec une dualité imposant que si on a la pente  $c$ , on a également la pente  $1 - c$ .
- L'ensemble des polygones de Newton est partiellement ordonné par leurs positions dans le plan :  $P \geq Q$  si tout point de  $P$  est au-dessus de  $Q$ , au sens large,  $P$  et  $Q$  peuvent avoir des sommets ou des segments communs.

Il y a pour cet ordre un polygone maximal, composé d'un segment de pente  $1/2$ . C'est le polygone de Newton des variétés abéliennes dites *supersingulières*, c'est à dire isogènes sur  $k^{alg}$  à un produit de courbes elliptiques supersingulières. Une courbe elliptique supersingulière est elle-même par définition une courbe sur laquelle la multiplication  $[p]$  est de degré d'inséparabilité maximal,  $p^2$ . Une courbe supersingulière est définie sur  $\mathbb{F}_p^{alg}$ , un produit de telles courbes également (à isomorphisme près) et est donc rationnellement mince.

Il y a un polygone minimal, composé d'un segment  $(g, 0)$  et d'un segment  $(g, g)$ , qui correspond à des variétés *ordinaires*, c'est à dire de  $p$ -rang maximal,  $g$ . Dans ce cas la multiplication par  $[p]$  est de degré d'inséparabilité minimal  $p^g$ , la Verschiebung  $V_1$  est séparable, ainsi que toutes les  $V_n$ , et la proposition 4 s'applique : une variété ordinaire est toujours séparablement mince ([PiZi03],

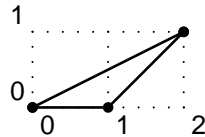
6.4).

Vont nous intéresser particulièrement les variétés dont le polygone de Newton ne contient aucun segment horizontal, ce sont les variétés de  $p$ -rang nul, ou encore celles où  $[p]$  est de degré d'inséparabilité maximal  $p^{2g}$ , c'est à dire purement inséparable.

Dans l'espace des modules  $\mathcal{A}_{g,1}$  des variétés abéliennes principalement polarisées, la situation est particulièrement simple, voir [Oo01]. Chaque polygone de Newton  $P$  définit un fermé dans l'espace des modules, au sens suivant : les variétés ayant un polygone de Newton situé au-dessus de  $P$ , forment un fermé  $V_P(\mathcal{A}_{g,1})$ . Ce fermé n'est pas nécessairement irréductible mais toutes ses composantes irréductibles ont même dimension, calculable par un moyen combinatoire simple. L'ensemble des variétés ayant exactement  $P$  pour polygone de Newton sera désigné par  $V_P^o(\mathcal{A}_{g,1})$ .

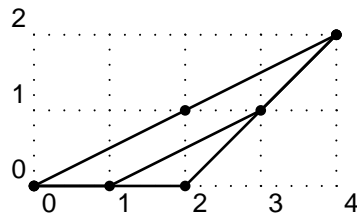
Notre but est de trouver une variété abélienne simple, de  $p$ -rang nul, qui n'est pas isogène à une variété abélienne définie sur  $\mathbb{F}_p^{alg}$ .

Regardons le cas des courbes elliptiques :



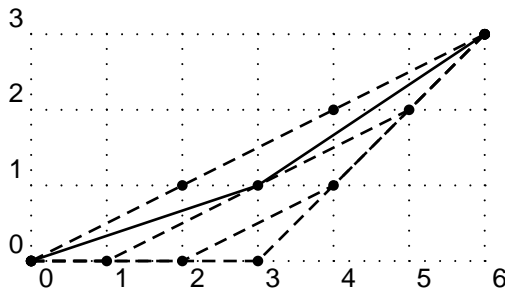
On trouve deux polygones de Newton possibles, celui du bas correspond à des courbes ordinaires, l'autre à des courbes supersingulières définies sur  $\mathbb{F}_p^{alg}$ .

En dimension 2, nous trouvons trois dessins possibles :



Les deux polygones de Newton du bas correspondent à des variétés ayant une torsion  $p$  non nulle (présence d'un segment horizontal), et le troisième à des variétés définies sur  $\mathbb{F}_p^{alg}$ , à isogénie près .

En dimension 3, on trouve 5 dessins possibles (par convexité et dualité) :



Le polygone de Newton  $P_0$ , marqué en trait plein, est le seul qui corresponde à des variétés de  $p$ -rang nul et non supersingulières, il pourrait donc éventuellement nous convenir. Nous convient-il vraiment ? C'est-à-dire  $P_0$  est-il le polygone de Newton d'une variété non séparablement mince, simple de surcroît ?

Prenons un point  $a$  de dimension maximale (c'est ici 3) dans le fermé de l'espace de modules associé à ce polygone. Il a exactement  $P_0$  pour polygone de Newton, qui n'est lui-même pas décomposable :  $P_0$  ne contient que deux segments à sommets entiers, qui ne sont pas dissociables à cause du principe de dualité. Les variétés abéliennes principalement polarisées correspondantes sont donc simples. Par construction une variété abélienne principalement polarisée  $A$  paramétrée par  $a$  n'est pas isomorphe à une variété définie sur un corps fini (son corps de définition est de degré de transcendance 3 au-dessus de  $\mathbb{F}_p$ ). Elle n'est pas non plus isogène à une telle variété. En effet, si une variété définie sur un corps fini contient dans sa « feuille d'isogénie » un point générique d'une composante irréductible de  $V_P^g(\mathcal{A}_{g,1})$ , elle les contient tous, ce qui impose à cette feuille une dimension  $\geq 3$ . Or la dimension d'une feuille d'isogénie de  $V_Q^g(\mathcal{A}_{g,1})$  est inférieure à la dimension de  $V_Q(\mathcal{A}_{g,1})$  dès que  $Q$  n'est pas le polygone de pente constante  $1/2$  ([Oo04], 5.7 et 5.12).

Fixons maintenant un modèle  $k$  de  $CHF_p$  contenant  $a$ , muni d'une dérivation de Hasse telle que  $C_k^\infty = \mathbb{F}_p^{alg}$  (voir l'exemple 2 de la partie 2) ; de sorte que « être défini sur un corps fini » est équivalent à « être défini sur  $k^{p^\infty}$  ».

**Proposition 5** *Pour tout point  $a$  de dimension maximale dans  $V_{P_0}^g(\mathcal{A}_{3,1})(k)$ , la variété abélienne  $A$  sur  $k$  paramétrée par  $a$  n'est pas séparablement mince.*

**Preuve** Puisque le  $p$ -rang de  $A$  est nul, la multiplication par  $p^n$  dans  $A$ ,  $[p^n] = V_n \circ Fr^n$ , est purement inséparable pour tout  $n$  (son noyau est trivial dans  $A(k^{alg})$ ). Les isogénies  $V_n$  sont donc elles aussi purement inséparables.

Supposons  $A$  séparablement mince. D'après la caractérisation de la proposition 4, il existe alors  $n \geq 0$  tel que l'isogénie  $\tilde{\rho}_{m,n|A_m}$  soit séparable pour tout  $m \geq n$ . Or, pour  $m \geq n$ , on peut décomposer l'isogénie purement inséparable  $V_m$  en les isogénies suivantes :

$$Fr^m A \xrightarrow{\alpha_m} A_m \xrightarrow{\tilde{\rho}_{m,n|A_m}} A_n \xrightarrow{\rho_n|A_n} A.$$

Il en résulte que  $\tilde{\rho}_{m,n|A_m}$  est également purement inséparable, c'est donc un isomorphisme. Cela prouve que, pour tout  $m \geq n$ ,  $A_n$  est isomorphe à  $A_m$ , qui est définie au-dessus de  $k^{p^m}$  ; on en déduit de la même façon que dans la preuve du théorème 4 que  $A_n$  est isomorphe à une variété abélienne définie sur  $k^{p^\infty}$ . Comme  $\rho_n|A_n$  est une isogénie de  $A_n$  sur  $A$ ,  $A$  est isogène à une variété abélienne définie sur un corps fini, ce qui est impossible.  $\square$

## Références

- [Be05] Franck Benoist. *Théorie des modèles des corps munis d'une dérivation de Hasse*. Thèse, Paris, 2005.



- [BlKr05] Thomas Blossier and Krzysztof Krupiński. A special thin type. *Illinois Journal of Mathematics* 49, 281–290, 2005.
- [Bo98] Elisabeth Bouscaren (editor). *Model theory and algebraic geometry : An introduction to E. Hrushovski's proof of the geometric Mordell-Lang conjecture*. Lecture Notes in Mathematics 1696, Springer, Berlin, 1998.
- [BoDe01] Elisabeth Bouscaren and Françoise Delon. Groups definable in separably closed fields. *Transactions of the American Mathematical Society* 354, 945-966, 2001.
- [BoDe02] Elisabeth Bouscaren and Françoise Delon. Minimal groups in separably closed fields. *Journal of Symbolic Logic*, 67, 239-259, 2002.
- [Bu92] Alexandru Buium. *Algebraic differential groups of finite dimension*. Lecture Notes in Mathematics 1506, Springer, Berlin, 1992.
- [De88] Françoise Delon. *Idéaux et types sur les corps séparablement clos*. Supplément au bulletin de la Société Mathématique de France, Tome 116, Mémoire 33, 1988.
- [De98] Françoise Delon. Separably closed fields. In *Model theory and algebraic geometry : An introduction to E. Hrushovski's proof of the geometric Mordell-Lang conjecture*, Bouscaren (editor), Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, 1998.
- [GaVo87] Arnaldo García and Jose Felipe Voloch. Wronskians and linear independence in fields of prime characteristic. *Manuscripta Mathematica* 59, 457-469, 1987.
- [HaSc37] Helmut Hasse and F.K. Schmidt. Noch eine Begründung der Theorie der höheren Differentialquotienten in einem algebraischen Funktionkörper mit einer Unbestimmten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 177, 215-237, 1937.
- [Hr96] Ehud Hrushovski. The Mordell-Lang conjecture for function fields. *Journal of the American Mathematical Society* 9, 667-690, 1996.
- [HrZi96] Ehud Hrushovski and Boris Zil'ber. Zariski geometries. *Journal of the American Mathematical Society* 9, 1-56, 1996.
- [La59] Serge Lang. *Abelian varieties*. Interscience Publishers, New York, 1959.
- [Ma] Yuri I. Manin. The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic. *Russian Mathematical Surveys* 18, 1-83, 1963.
- [MeWo95] Margit Messmer and Carol Wood. Separably closed fields with higher derivations. *Journal of Symbolic Logic* 60, 898-910, 1995.
- [MuFo82] David Mumford and John Fogarty. *Geometric Invariant Theory*. Second enlarged edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1982.
- [Oo00] Frans Oort. Newton polygons and formal groups : Conjectures by Manin and Grotendieck. *Annals of Mathematics* 152, 183-206, 2000.
- [Oo01] Frans Oort. Newton polygon strata in the moduli space of abelian varieties. In *Moduli of abelian varieties*. Editors C. Faber, G. van der Geer, F. Oort. Progress Mathematics 195, Birkhäuser Verlag, 2001.
- [Oo04] Frans Oort. Foliations in moduli spaces of abelian varieties. *Journal of American Mathematical Society* 17, 267-296, 2004.

- [PiZi03] Anand Pillay and Martin Ziegler. Jet spaces of varieties over differential and difference fields. *Selecta Mathematica, New Series*, 9, 579-599, 2003.
- [Ro56] Maxwell Rosenlicht. Some basic theorems on algebraic groups. *American Journal of Mathematics* 78, 401-443, 1956.
- [We55] André Weil. On algebraic groups of transformations. *American Journal of Mathematics* 77, 355-391, 1955.
- [Zi03] Martin Ziegler. Separably closed fields with Hasse derivations. *Journal of Symbolic Logic* 68, 311-318, 2003.

Franck Benoist  
Abteilung für mathematische Logik  
Universität Freiburg  
Eckerstrasse 1  
Freiburg D-79104  
Germany

*Adresse actuelle :*  
School of Mathematics  
University of Leeds  
Leeds, LS2 9JT  
United Kingdom

*E-mail : benoist@logique.jussieu.fr*

Françoise Delon  
Equipe de Logique  
UFR de Mathématiques - Case 7012  
Université Paris 7 - Denis Diderot  
2, place Jussieu  
75251 Paris cedex 05  
France

*E-mail : delon@logique.jussieu.fr*