

# Contrôle d'une interaction onde-particules par une onde-test

Romain Bachelard<sup>1</sup>, Cristel Chandre<sup>1</sup>, Duccio Fanelli<sup>2</sup> & Xavier Leoncini<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Centre de Physique Théorique<sup>†</sup>, CNRS Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France

<sup>2</sup> Theoretical Physics Group, School of Physics and Astronomy The University of Manchester, Manchester, M13 9PL, U.K.

<sup>3</sup> Physique des Interactions Ioniques et Moléculaires, CNRS-Université de Provence, Centre de St Jérôme, F-13397 Marseille, France

bachelard@cpt.univ-mrs.fr

**Résumé.** L'intensité d'une onde électromagnétique en interaction auto-consistante avec un faisceau de particules chargées, comme dans un Laser Electron Libre par exemple, présente des oscillations importantes dues à un agrégat de particules, appelé macro-particule. Dans cet article, nous proposons une stratégie pour stabiliser l'intensité en détruisant la macro-particule. Cette stratégie repose sur une analyse de la stabilité linéaire (à l'aide de la méthode des résidus) d'orbites périodiques spécifiques d'une modélisation champ moyen du système. La modulation d'un paramètre de contrôle fait apparaître dans le système des bifurcations qui provoquent des changements drastiques dans la dynamique auto-consistante, en particulier sur la macro-particule. Nous montrons comment il est ainsi possible de stabiliser l'intensité de l'onde grâce à l'introduction d'une onde-test, qui joue le rôle de paramètre de contrôle.

**Abstract.** The intensity of an electromagnetic wave in self-consistent interaction with a beam of charged particles, such as in a Free Electron Laser, shows some large oscillations due to an aggregate of particles called macro-particle. In this paper, we propose a strategy to stabilize the intensity of the wave by breaking up the macro-particle. This strategy relies on an analysis of linear stability (with the residue method) of specific periodic orbits of a mean-field model. By appropriately tuning a control parameter, some bifurcations appear in the system which lead to drastic changes in the self-consistent dynamics, in particular on the macro-particle. We show how it is then possible to stabilize the intensity of the wave by introducing a test-wave in the system.

## 1 Introduction

L'interaction auto-consistante entre une onde électromagnétique et un faisceau de particules chargées est omniprésente dans de nombreux domaines de la physique, telles que les accélérateurs ou les plasmas. Par exemple, elle joue un rôle crucial dans le Laser Electron Libre, qui est utilisé pour générer une lumière modulable, puissante et cohérente. Ce type de dispositifs diffère des lasers conventionnels par son faisceau d'électrons ultra-relativistes qui joue le rôle de milieu amplificateur. Le mécanisme physique responsable de cette émission et de l'amplification de la lumière est l'interaction entre le faisceau et l'onde, sous l'effet d'un champ magnétostatique généré par un onduleur. Du fait du champ magnétique, les électrons suivent des trajectoires sinusoïdales, d'où une émission synchrotron. Le germe initial - dit *émission spontanée* - va piéger les électrons qui, à leur tour, émettront de manière cohérente, jusqu'à ce que l'effet laser soit atteint.

L'évolution couplée d'un champ radiatif et de  $N$  particules peut être décrit dans un contexte Hamiltonien [1]. Ce Hamiltonien à  $N + 1$  degrés de liberté est composé d'une partie cinétique associée aux particules, et d'un terme couplé traduisant l'interaction réciproque entre les particules et le champ. Les interactions entre particules sont donc négligées, bien qu'elles interagissent par le biais de l'onde.

La théorie linéaire prédit initialement [1] une croissance exponentielle pour l'onde, jusqu'à une saturation caractérisée par de fortes fluctuations. L'espace de phase asymptotique permet d'observer qu'une

---

<sup>†</sup> *Present address* : Unité Mixte de Recherche (UMR 6207) du CNRS, et des universités Aix-Marseille I, Aix-Marseille II et du Sud Toulon-Var. Laboratoire affilié à la FRUMAM (FR 2291). Laboratoire de Recherche Conventiénné du CEA (DSM-06-35).

partie des particules est piégée dans la résonance et forme une structure cohérente spatialement et temporellement, nommée *macro-particule*. Les particules non piégées sont distribuées à peu près uniformément entre les deux frontières oscillantes, et remplissent la *mer chaotique*.

De plus, la macro-particule gravite autour d'un point de l'espace des phase bien défini, et cette dynamique est responsable des oscillations macroscopique observées pour l'intensité [2,3]. L'application d'un champ électrique [5,6] constant permet d'accroître la puissance moyenne de l'onde : tandis que les particules chaotiques subissent une simple accélération, les particules piégées transmettent l'énergie du champ électrique à l'onde. Par ailleurs, l'expérience de Dimonte et Malmberg [4] semble suggérer qu'une stratégie de contrôle destinée à détruire la macro-particule aurait pour effet de réduire les oscillations de l'intensité de l'onde. Précisons que la taille de la macro-particule est liée au facteur de "bunching", une quantité cruciale dans le cadre du Laser Electron Libre [3].

La dynamique peut aussi être étudiée d'un point de vue topologique, en s'intéressant aux structures de l'espace de phase. En effet, dans le cadre d'une description champ moyen, i.e. en étudiant la trajectoire de particules-test subissant passivement l'action du champ, les trajectoires des particules piégées s'enroulent sur des tores invariants, les autres trajectoires peuplant un domaine chaotique de l'espace des phases. On peut alors utiliser des techniques de contrôle Hamiltonian afin de reconstruire des tores invariants autour de la macro-particule afin d'accentuer le piégeage [7]. Une perturbation propre au système est calculée, qui permet de reconstruire un tore à une fréquence choisie.

Dans cet article, nous proposons une méthode pour stabiliser l'intensité de l'onde en rendant chaotique le domaine de l'espace des phases parcouru par la macro-particule. A cette fin, une onde-test est introduite dans le modèle champ moyen, dont l'amplitude joue le rôle de paramètre de contrôle afin de modifier la topologie de l'espace des phases. La méthode des résidus [8,9,10] est utilisée afin de détecter les bifurcations dans le système, en fonction du paramètre de contrôle, grâce à une analyse de stabilité linéaire d'orbites périodiques particulières. Bien que développée dans le cadre champ moyen, les résultats de cette méthode reste valable lorsque l'on considère une interaction auto-consistante.

La structure de l'article est la suivante : dans la Sec. 2, nous introduisons le modèle champ moyen, ainsi que l'analyse des structures du système en termes de tores invariants qui en découle. Dans la Sec. 3, nous présentons la méthode des résidus et montrons comment certaines bifurcations permettent de prédire l'apparition ou la disparition des structures régulières. Dans la Sec. 4, la méthode est appliquée au modèle champ moyen de l'interaction afin de détruire la macro-particule.

## 2 Le modèle champ moyen

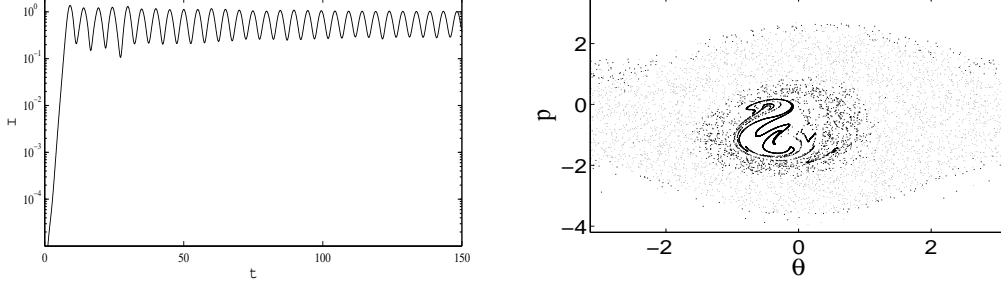
La dynamique de l'interaction onde-particule, telle qu'on la rencontre dans un Laser Electron Libre par exemple, peut être décrite [1] par le Hamiltonien à  $N$  corps et une onde :

$$H_N(\{\theta_j, p_j\}, \phi, I) = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2} - 2\sqrt{\frac{I}{N}} \sum_{j=1}^N \cos(\phi + \theta_j). \quad (1)$$

Ce Hamiltonien est composé d'une partie cinétique et d'un terme d'interaction entre les particules et le champ radiatif : les  $(\theta_j, p_j)$  correspondent aux couple conjugué phase/moment de la particule  $j$ , tandis que  $(\phi, I)$  représentent respectivement l'intensité et la phase de l'onde.

Etant donné que  $\phi$  est une phase,  $(\phi, I)$  appartient à  $T \times R^+$  où  $T$  est le tore à une dimension. Ici,  $(\theta_j, p_j)$  est dans  $T \times R$ . L'espace de phases du système est alors  $T^{N+1} \times R^N \times R^+$ . De plus, la dynamique possède deux quantités conservées : l'énergie  $H_N$  et le moment total  $P_N = I + \sum_j p_j$ . La dynamique du Hamiltonien (1) peut donc être considérée sur une variété de dimension  $2N$  (définie par  $H_N = 0$  et  $P_N = \varepsilon$  où  $\varepsilon$  est infinitésimal).

Si le système est initialisé avec une intensité  $I \ll N$  et un faisceau parfaitement monocinétique  $p_j = 0$ , l'intensité va croître exponentiellement avant d'atteindre un régime saturé caractérisé par de fortes oscillations, telles qu'on peut les voir sur la Fig. 1. Quant aux particules, plus de la moitié sont piégées par l'onde et forment la macro-particule (voir Fig. 1), tandis que les autres voyagent chaotiquement dans un "waterbag" aux frontières oscillantes, nommé mer chaotique.



**Fig.1.** Gauche : Intensité normalisée  $I/N$  de la dynamique (1), pour  $N = 10000$  particules,  $H_N = 0$ ,  $p_j = 0$ ,  $P_N = 10^{-7}$ . Droite : Espace des phases des  $N$  particules at  $t = 800$ . Les points gris correspondent aux trajectoires chaotiques, les noirs aux trajectoires régulières.

Afin de discriminer les trajectoires régulières et chaotiques, nous calculons l'exposant de Lyapounov de chaque particule en considérant qu'elle a un statut de particule-test soumise à un champ extérieur  $(\phi(t), I(t))$ . Nous évaluons donc à l'évolution des valeurs propres du flot tangent de la dynamique dans l'espace  $(\theta_j, p_j, t)$ , pour chaque particule  $j$ . Notons que ce calcul a lieu dans le cadre de l'intégration de la dynamique auto-consistante à  $N$  particules, bien qu'il fournisse  $N$  exposants de Lyapounov associés à des particules-test. Ces exposants de Lyapounov sont calculés sur un temps fini  $T = 300$  (une fois le régime saturé atteint), et la trajectoire d'une particule est considérée régulière si son exposant de Lyapounov est plus petit que  $\delta = 0.025$  (il est typiquement de l'ordre de 1 dans la mer chaotique).

Par ailleurs, afin de mieux comprendre la dynamique particulaire, nous nous intéressons au mouvement d'une seule particule : pour un grand nombre  $N$  de particules, on peut considérer que son influence sur l'onde sera négligeable, ce qui nous amène à considérer la dynamique d'une particule passive dans un champ oscillant. Cette dynamique peut être décrite par le Hamiltonien à un degré et demi de liberté suivant :

$$H_{1p}(\theta, p, t) = \frac{p^2}{2} - 2\sqrt{\frac{I(t)}{N}} \cos(\theta + \phi(t)) \quad (2)$$

$$= \frac{p^2}{2} - \text{Re}(h(t)e^{i\theta}), \quad (3)$$

où le terme d'interaction  $h(t)$  est déduit de simulations de la dynamique originale auto-consistante à  $N$  corps (1). Dans le régime saturé,  $h(t)$  est à peu près périodique, ainsi qu'en témoigne la Fig. 2. Une analyse de Fourier nous permet de déduire qu'elle peut s'écrire :

$$h(t) = 2\sqrt{\frac{I(t)}{N}} e^{i\phi(t)} \approx [F + \alpha e^{i\omega_1 t} + \beta e^{-i\omega_1 t}] e^{i\Omega t}, \quad (4)$$

où  $\Omega = -0.685$  correspond à la vitesse de l'onde dans le référentiel considéré, et  $\omega_1 = 1.291$  à la fréquence des oscillations de l'intensité. En ce qui concerne les coefficients d'amplitude, on trouve  $F = 1.5382 - 0.0156i$ ,  $\alpha = 0.2696 - 0.0734i$  et  $\beta = 0.1206 + 0.0306i$ .

Le Hamiltonien (2) peut donc être vu comme une perturbation périodique du pendule décrit par le Hamiltonien intégrable  $H_0$

$$H_0 = \frac{p^2}{2} - |F| \cos(\theta + \Omega t + \phi_F),$$

avec  $F = |F|e^{i\phi_F}$ . La fréquence linéaire de ce pendule est  $\sqrt{|F|} \approx 1.240$  qui est donc très proche de la fréquence du forçage  $\omega_1$ . On s'attend donc à un comportement chaotique pour des amplitudes de la perturbation ( $\alpha$  et  $\beta$ ) faibles.

La section de Poincaré (tracé stroboscopique effectué à la fréquence  $\omega_1$ ) d'une particule-test (voir Fig. 2) nous apprend que la macro-particule est composée d'un ensemble de tores invariants dans ce modèle

champ moyen. A l’opposé, la mer chaotique correspond à un ensemble de trajectoires chaotiques, confinées entre les frontières supérieures et inférieures, au-delà desquelles les trajectoires deviennent similaires aux trajectoires de révolution du pendule non perturbé. La rotation de la macro-particule peut être visualisée en translatant dans le temps le paramètre  $t_0$ , où le tracé stroboscopique est effectué au temps  $t_0 + (2\pi/\omega_1)\mathbb{N}$ .

La macro-particule s’organise autour du point périodique central de période  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ , qui correspond à la période des oscillations de l’intensité : ceci témoigne du rôle crucial de la macro-particule pour le contrôle de l’intensité.

### 3 La méthode des résidus

La topologie de l’espace des phases peut être étudiée grâce à une simple analyse de la stabilité linéaire de ses orbites périodiques. Les informations sur la nature de ces orbites (elliptique, hyperbolique ou parabolique) peuvent être déduites d’indicateurs tels que le résidu de Greene [8], une quantité qui permet de contrôler des changements de stabilité locaux dans un système soumis à une perturbation externe [9,10].

Prenons un flot Hamiltonien autonome à deux degrés de liberté, dépendant d’un paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  (cette approche est naturellement valable pour des familles de paramètres) :

$$\dot{z} = J\nabla H(z; \lambda),$$

où  $z = (p, E, \theta, t) \in \mathbb{R}^4$  et  $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_2$  correspondant à la matrice identité en dimension 2. Afin de déterminer les propriétés de stabilité linéaire des orbites périodiques du flot, nous calculons aussi le flot tangent :

$$\frac{d}{dt}J^t(z) = J\nabla^2 H(z; \lambda)J^t,$$

où  $J^0 = I_4$  et  $\nabla^2 H$  est la matrice Hessienne (composée des dérivées secondes de  $H$  par rapport à ses variables canoniques). La stabilité linéaire d’une orbite périodique de période  $T$  est donnée par le spectre de la matrice de monodromie  $J^T$ . Ces propriétés sont contenues de manière synthétique dans le résidu de Greene défini par :

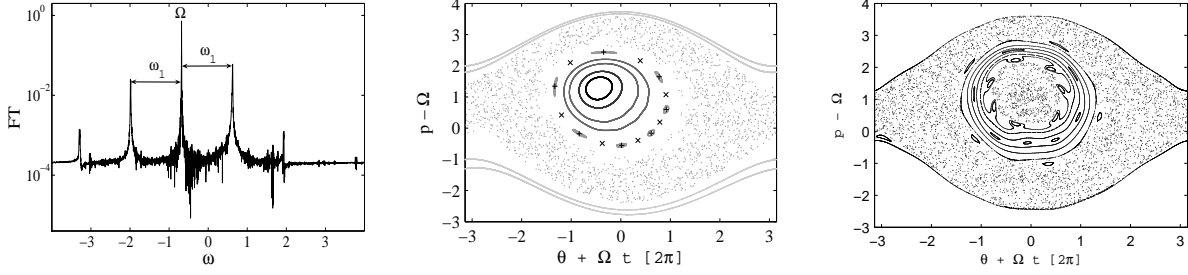
$$R = \frac{4 - \text{tr}J^T}{4}.$$

En particulier, si  $R \in ]0, 1[$ , l’orbite périodique est elliptique (et est en général stable) ; si  $R < 0$  ou  $R > 1$ , elle est hyperbolique ; et en cas d’égalité, i.e.  $R = 0$  and  $R = 1$ , elle est parabolique et un développement à l’ordre supérieur est nécessaire pour connaître la stabilité d’une telle orbite.

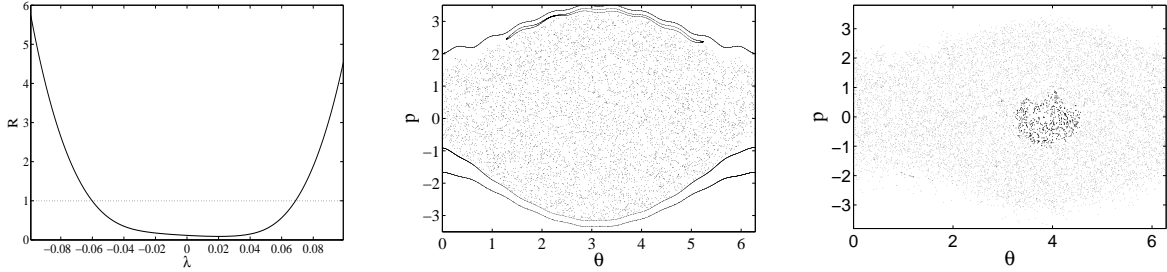
Puisque l’orbite périodique et sa stabilité dépend d’un paramètre  $\lambda$ , les propriétés de la dynamique changeront avec  $\lambda$ . De manière générique, les orbites périodiques et leurs propriétés de stabilité linéaire sont robustes aux petits changements de paramètre, sauf à des valeurs spécifiques, où des bifurcations apparaissent. La méthode des résidus [9,10] s’intéresse à ces rares événements où la stabilité linéaire d’une orbite périodique change, afin de prédire les valeurs optimales de paramètre pour avoir une certaine dynamique. En particulier, si les résidus d’un couple d’orbites de Birkhoff (initialement elliptique et hyperbolique) atteignent tous deux 0, alors on a création d’un tore invariant, alors que s’ils sont tous deux au-delà de 0 ou 1, on a destruction de structures régulières. Cette méthode permet donc d’obtenir une régularisation ou une chaotisation de la dynamique.

### 4 Destruction de la macro-particule

La méthode des résidus peut être utilisée pour reconstruire des tores invariants dans la mer chaotique ou bien pour chaotiser le coeur de l’agrégat [11], tout en gardant des tores invariants périphériques (voir Fig.2). Ce contrôle, effectué à l’aide d’ondes auto-consistentes additionnelles, et grâce à l’étude des résidus



**Fig.2.** Gauche : Spectre de Fourier du terme d'interaction  $h(t)$ , telle qu'il est obtenu des simulations du Hamiltonien (1), dans le régime saturé. Centre : Section de Poincaré d'une particule-test de Hamiltonien (2). Les orbites périodiques de période  $7\frac{2\pi}{\omega_1}$  sont indiqués par des plus (orbite elliptique) et des croix (orbite hyperbolique). Droite : Section de Poincaré d'un Hamiltonien de particule-test contrôlé avec des ondes auto-consistentes



**Fig.3.** Gauche : Résidu de l'orbite  $\mathcal{O}_1$  du Hamiltonien (5), en fonction du paramètre  $\lambda$ . Centre : Section de Poincaré du Hamiltonien (5), pour  $\lambda = \lambda_c$ . Droite : Etat de l'espace des phases pour les particules du Hamiltonien (6), avec  $N = 10000$  particules et  $\lambda = 0.07$  (même conditions initiales que pour la Fig.1).

des orbites centrale et périphériques (telle que celle de période  $7(2\pi/\omega_1)$  présente sur la Fig.2) a permis la stabilisation de la macro-particule et par conséquent celle de l'intensité de l'onde.

Cependant, la méthode des résidus peut aussi bien être utilisée pour détruire la macro-particule, i.e. chaotiser complètement le “waterbag” de l'espace des phases. Afin d'illustrer la flexibilité de la méthode, nous nous proposons d'introduire dans le système une onde-test, dont l'amplitude jouera le rôle de paramètre de contrôle :

$$H_{1p}^c(\theta, p, t; \lambda) = H_{1p}(\theta, p, t) - 2\lambda \cos(k(\theta - \omega_1 t)), \quad (5)$$

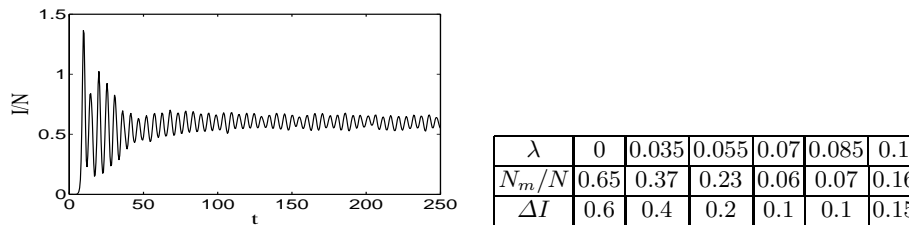
où  $\omega_1$  correspond à la fréquence résonante de l'orbite centrale de la macro-particule, et  $k = 10$ .

Alors, pour  $\lambda = 0$  (ce qui correspond au Hamiltonien de la particule-test original  $H_{1p}$ ), nous faisons varier le paramètre  $\lambda$  et étudions l'évolution du résidu de l'orbite centrale  $\mathcal{O}_1$  (voir Fig.3) : lorsque ce dernier devient plus grand que 1, cela signifie que l'orbite centrale est devenue hyperbolique. Ceci advient pour des valeurs de  $|\lambda|$  plus grande que  $\lambda_c \approx 0.07$ . Cette prédiction est validée par la section de Poincaré effectuée pour  $\lambda = 0.07$ , sur laquelle nul îlot dont l'orbite centrale serait de période  $2\pi/\omega_1$  n'apparaît (voir Fig.3). En fait, aucun îlot elliptique n'est plus visible, à part aux frontières du “waterbag”. Ainsi, bien que l'hyperbolicité d'une telle orbite ne garantisse qu'un chaos local, la résonance est en fait devenue complètement chaotique, ce qui souligne le fait que la stabilité de quelques orbites périodiques peuvent suffire à décrire globalement la dynamique.

La stratégie de contrôle décrite ci-dessus peut être généralisée à l'interaction auto-consistente, en introduisant une onde-test similaire à celle de (5) dans le Hamiltonien original à  $N$  particules (1) :

$$H_N^c(\{\theta_j, p_j\}, \phi, I; \lambda) = H_N(\{\theta_j, p_j\}, \phi, I) - 0.07 \sum_j \cos(k(\theta_j - \omega_1 t)), \quad (6)$$

Alors, bien que le modèle champ moyen ait perdu sa pertinence, du fait de l'auto-consistance de l'interaction, la dynamique des particules est qualitativement similaire à celle obtenue dans le contexte



**Fig.4.** Gauche : Intensité normalisée de l’onde  $I/N$  pour la même dynamique (6). Droite : Taux  $N_m/N$  de particules dont la trajectoire est régulière, pour le Hamiltonien (6), en fonction de  $\lambda$ .  $\Delta I$  correspond au niveau moyen des fluctuations de l’intensité.

champ moyen. Après une phase de croissance de l’onde, les particules s’organisent à nouveau dans un “waterbag”, mais très peu ont maintenant une trajectoire régulière : de 65% dans le régime non contrôlé, elles ne sont plus que 6% lorsque  $\lambda = 0.07$  (cf Fig.3). Quant à l’onde, son intensité tend à se stabiliser très rapidement (typiquement 7 oscillations), ce qui confirme la pertinence d’un contrôle basé sur la destruction de la macro-particule, en accord avec les résultats expérimentaux de Dimonte [4].

Notons enfin que l’introduction d’une onde-test d’amplitude plus faible a pour effet de chaotiser partiellement la mer chaotique, mais pas totalement, et les fluctuations de l’intensité de l’onde reste alors importante (cf Fig.4). De même, si l’amplitude de l’onde introduite est plus importante, de nouveaux îlots de résonance apparaîtront dans l’espace de phase de la particule-test, ce qui se traduit à nouveau par une stabilisation moindre de l’onde.

## 5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une méthode de stabilisation de l’intensité d’une onde grâce à la destruction de structures cohérentes de la dynamique. Par le biais d’un modèle champ moyen et d’une analyse de stabilité linéaire, et grâce à l’introduction dans le système d’une onde-test de contrôle, il a été possible de déstabiliser la partie régulière de dynamique : cette analyse de bifurcations effectuée sur une orbite périodique particulière a permis de rendre le système plus chaotique. L’effet sur la dynamique auto-consistante à  $N$  corps a permis de vérifier la robustesse de cette approche pour la dynamique particulière et de stabiliser l’intensité de l’onde.

## Références

1. R. Bonifacio, *et al.*, Rivista del Nuovo Cimento **3**, 1 (1990)
2. J.L. Tennyson, J.D. Meiss, and P.J. Morrison, Physica D **71**, 1 (1994)
3. A. Antoniazzi, Y. Elskens, D. Fanelli and S. Ruffo, Europ. Phys. J. B **50**, 603 (2006)
4. G. Dimonte, and J.H. Malmberg, Phys. Rev. Lett. **38**, 401 (1977)
5. S.I. Tsunoda, J.H. Malmberg, Phys. Rev. Lett. **49**, 546 (1982)
6. G.J. Morales, Phys. Fluids **23** (1980)
7. R. Bachelard, A. Antoniazzi, C. Chandre, D. Fanelli, M. Vittot, Comm. Nonlinear Sci. Num. Simu. *in press* (2006)
8. J.M. Greene, J. Math. Phys. **20**, 1183 (1979)
9. J. Cary, J.D. Hanson, Phys. Fluids **29**, 2464 (1986)
10. R. Bachelard, C. Chandre, X. Leoncini, Chaos **16**, 023104 (2006)
11. R. Bachelard, A. Antoniazzi, C. Chandre, D. Fanelli, X. Leoncini, M. Vittot, European Physical Journal D, *to appear* (2007)