HAL open science

Démonstration géométrique du théorème de Lang-Néron

Bruno Kahn

To cite this version:

Bruno Kahn. Démonstration géométrique du théorème de Lang-Néron. 2007. hal-00134587

HAL Id: hal-00134587

https://hal.science/hal-00134587

Preprint submitted on 2 Mar 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

hal-00134587, version 1 - 2 Mar 2007

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE LANG-NÉRON

par

Bruno Kahn

Résumé. — On donne une démonstration “sans hauteurs" du théorème de Lang-Néron : si K/k est une extension de type fini régulière et A est une K-variété abélienne, le groupe $A(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} A(k)$ est de type fini, où $\operatorname{Tr}_{K/k} A$ désigne la K/k-trace de A au sens de Chow. La méthode fournit une expression du rang de ce groupe en fonction de ceux de certains groupes de Néron-Severi.

Abstract. — We give a proof without heights of the Lang-Néron theorem : if K/k is a regular extension of finite type and A is an abelian K-variety, the group $A(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} A(k)$ is finitely generated, where $\operatorname{Tr}_{K/k} A$ denotes the K/k-trace of A in the sense of Chow. Our method computes the rank of this group in terms of certain ranks of Néron-Severi groups.

Soient K/k une extension de type fini régulière et A une K-variété abélienne. On se propose de donner une démonstration “sans hauteurs" du théorème de Lang-Néron :

***Théorème 1* ([4])**. — *Le groupe $A(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} A(k)$ est de type fini, où $\operatorname{Tr}_{K/k} A$ désigne la K/k-trace de A au sens de Chow.*

(La démonstration de Lang et Néron est exposée dans le langage des schémas dans [**3**, App. B].)

On se ramène immédiatement au cas où k est algébriquement clos. Soit X un modèle lisse de K/k choisi de telle sorte que A se prolonge en un schéma abélien $p : \mathcal{A} \to X$.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11G10, 14C22, 14K30.

Lemme 1. — *La suite*

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Pic}(A) \to 0$$

est exacte, où j est l'inclusion de A dans $\mathcal{A}$.

Démonstration. — On a un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{x\in\mathcal{A}^{(1)}} \mathbf{Z} \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \arrow[r, "j^*"] & \mathrm{Pic}(A) \arrow[r] & 0 \\
\bigoplus_{x\in X^{(1)}} \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[u, "p^*"] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

d'où la suite exacte désirée, sauf l'exactitude en $\mathrm{Pic}(X)$. Celle-ci résulte du fait que p a une section. □

Lemme 2. — *Soit $A^1(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Pic}(\mathcal{A})$ le sous-groupe des cycles algébriquement équivalents à zéro. Alors $j^*A^1(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Tr}_{K/k}\,\hat{A}(k)$, où $\hat{A} = \mathrm{Pic}^0_{A/k}$ est la variété abélienne duale de A.*

Démonstration (cf. [**2**, Lect. 1, lemme 1.3]*)*. — Par définition, $A^1(X)$ est engendré via les correspondances algébriques par des jacobiennes de courbes, donc le lemme résulte de la définition de la K/k-trace. □

Lemme 3. — *On a $j^*A^1(\mathcal{A}) = \mathrm{Tr}_{K/k}\,\hat{A}(k)$, et une suite exacte scindée*

$$0 \to \mathrm{NS}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{NS}(\mathcal{A}) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Pic}(A)/\,\mathrm{Tr}_{K/k}\,\hat{A}(k) \to 0$$

où NS *désigne le groupe des cycles de codimension* 1 *modulo l'équivalence algébrique.*

Démonstration. — Le lemme du serpent appliqué au diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A^1(\mathcal{A}) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \arrow[r] & \mathrm{NS}(\mathcal{A}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^1(X) \arrow[r] \arrow[u, "p_A^*"] & \mathrm{Pic}(X) \arrow[r] \arrow[u, "p^*"] & \mathrm{NS}(X) \arrow[r] \arrow[u, "p_N^*"] & 0
\end{tikzcd}$$

fournit, via le lemme 1 et compte tenu du fait que p a une section, une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Coker}\, p_A^* \to \mathrm{Pic}\, A \to \mathrm{Coker}\, p_N^* \to 0.$$

Par le lemme 2, $\operatorname{Coker} p_A^* \subset \operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)$. D'après [**3**, th. 3], $\operatorname{Coker} p_N^*$ est de type fini. Le groupe $\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)/\operatorname{Coker} p_A^*$, divisible et de type fini, est donc nul. On obtient donc un isomorphisme $\operatorname{Pic}(A)/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(k) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Coker} p_N^*$, comme désiré. □

Le théorème 1 résulte du lemme 3 et de la génération finie de $\mathrm{NS}(\mathcal{A})$, déjà utilisée dans sa démonstration. □

On obtient aussi :

Corollaire 1. — $\operatorname{rg}(\hat{A}(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)) = \rho(\mathcal{A}) - \rho(X) - \rho(\hat{A})$, *où* $\rho(Y) := \operatorname{rg} \mathrm{NS}(Y)$ *pour une variété lisse* Y. *(Noter que* $\rho(\hat{A})$ *est calculé "sur* K*".)* □

Remarque 1. — Cette démonstration a une interprétation agréable en termes de 1-motifs, dans le cadre développé dans [**1**]. Supposons seulement k parfait ; soit $\mathcal{M}_1$ la catégorie des 1-motifs de Deligne sur k et soit $D^b(\mathcal{M}_1)$ sa catégorie dérivée au sens de [**1**, déf. 1.5.2]. Soient $\mathrm{LAlb}(X)$ et $\mathrm{LAlb}(\mathcal{A})$ les objets de $D^b(\mathcal{M}_1)$ associés à X et $\mathcal{A}$ par [**1**, déf. 8.1.1], et soit $\mathrm{LAlb}(\mathcal{A}/X)$ la fibre du morphisme $p_* : \mathrm{LAlb}(\mathcal{A}) \to \mathrm{LAlb}(X)$. D'après [**1**, cor. 10.2.3], on a, pour toute k-variété lisse Y :

$$\mathrm{L}_i\mathrm{Alb}(Y) = \begin{cases} [\mathbf{Z}[\pi_0(Y)] \to 0] & \text{si } i = 0 \\ [0 \to \mathcal{A}^0_{Y/k}] & \text{si } i = 1 \\ [0 \to \mathrm{NS}^*_{Y/k}] & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\pi_0(Y), \mathcal{A}^0_{Y/k}$ et $\mathrm{NS}^*_{Y/k}$ désignent respectivement l'ensemble des composantes connexes géométriques, la variété d'Albanese et le dual de Cartier du groupe de Néron-Severi (au sens ci-dessus) de Y ; les $\mathrm{L}_i\mathrm{Alb}(Y)$ sont calculés par rapport à une t-structure convenable sur $D^b(\mathcal{M}_1)$. Les résultats précédents et un calcul facile de suite exacte donnent alors

$$\mathrm{L}_i\mathrm{Alb}(\mathcal{A}/X) = \begin{cases} [0 \to \operatorname{Im}_{K/k} A] & \text{si } i = 1 \\ [0 \to M^*] & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\operatorname{Im}_{K/k} A$ est la K/k-image de A et $M(\bar{k}) := \operatorname{Pic}(A_{\bar{k}})/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(\bar{k})$ est une extension

$$0 \to \hat{A}(\bar{k}K)/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(\bar{k}) \to M(\bar{k}) \to \mathrm{NS}(A_{\bar{k}K}) \to 0$$

$\bar{k}$ étant une clôture algébrique de k.

Remarque 2. — Revenons au cas où k est algébriquement clos, et soit l un nombre premier différent de la caractéristique de k. En jouant avec la suite spectrale de Leray relative à p, on obtient facilement une injection

$$f : (\hat{A}(K)/\operatorname{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)) \otimes \mathbf{Z}_l \longhookrightarrow H^1_{\text{ét}}(X, j_* T_l(\hat{A})).$$

Si k est la clôture algébrique d'un corps k_0 de type fini sur son sous-corps premier, on a évidemment

$$\operatorname{Im} f \subset \bigcup_L H^1_{\text{ét}}(X, j_* T_l(\hat{A}))^{Gal(k/L)}$$

où L décrit les extensions finies de k_0.

Références

[1] L. Barbieri-Viale, B. Kahn *On the derived category of* 1*-motives*, prépublication, 2006.

[2] S. Bloch Lectures on algebraic cycles, Duke Univ. Math. Series IV, 1980.

[3] B. Kahn *Sur le groupe des classes d'un schéma arithmétique* (avec un appendice de Marc Hindry), Bull. SMF **134** (2006), 395–415.

[4] S. Lang, A. Néron. *Rational points of abelian varieties over function fields*, Amer. J. Math. **81** (1959), 95–118.

---

2 mars 2007

BRUNO KAHN, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France • *E-mail :* `kahn@math.jussieu.fr`