



HAL
open science

Homologie cyclique et homologie simpliciale aux racines de l'unité

Marc Wambst

► **To cite this version:**

Marc Wambst. Homologie cyclique et homologie simpliciale aux racines de l'unité. 2001. hal-00129672

HAL Id: hal-00129672

<https://hal.science/hal-00129672>

Preprint submitted on 8 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Homologie cyclique et homologie simpliciale aux racines de l'unité

Marc WAMBST

Institut de Recherche Mathématique Avancée
 U.M.R. 7501 de l'Université Louis Pasteur et du C.R.N.S.
 7, rue René Descartes
 F-67084 Strasbourg Cedex, France
 Marc.Wambst@math.u-strasbg.fr
<http://www-irma.u-strasbg.fr/~wambst/>

Résumé. — Nous définissons une version de l'homologie cyclique «aux racines de l'unité» d'un module cyclique et montrons son isomorphisme avec l'homologie cyclique usuelle. Nos démonstrations utilisent l'algèbre homologique des N -complexes et les foncteurs Tor dans les catégories des modules simpliciaux et cycliques. Par ce biais, nous donnons également des démonstrations simplifiées de résultats connus pour l'homologie «aux racines de l'unité» de modules simpliciaux.

Abstract. — We define a version “at roots of unity” of the cyclic homology of a cyclic module and prove that it is isomorphic to its usual cyclic homology. Our proofs use the homological algebra of N -complexes and the Tor functors in the categories of simplicial and cyclic modules. We also give simplified proofs of known results about the homology of simplicial modules “at roots of unity”.

Mots clés : Homologie simpliciale, homologie cyclique, N -complexes.

Classification A.M.S. 2000 : 18 G60, 16 E40, 18 G35, 19 D55.

Introduction

Dans [Kp], M. M. Kapranov a défini la notion de N -*complexe* qui généralise celle de complexe aux objets munis d'une « différentielle » d ne vérifiant plus la relation $d^2 = 0$, mais la relation $d^N = 0$ où N est un entier naturel ≥ 3 . Ces complexes donnent lieu à une théorie homologique ébauchée dans [Kp] et développée dans [KsW]. Par ailleurs, à tout module simplicial, on associe naturellement un N -complexe (cf. §1), la différentielle s'exprimant à l'aide d'une racine de l'unité. Il a été démontré par M. Dubois-Violette [D2] que les groupes d'homologie de ces N -complexes se calculent en termes des groupes d'homologie simpliciale standards.

Le but de cet article est de présenter une déformation similaire de l'homologie cyclique d'un module cyclique. Nous construisons un bicomplexe qui est le pendant «aux racines de l'unité» du bicomplexe cyclique usuel. De plus, nous contruisons un analogue du complexe de Connes et retrouvons la longue suite exacte de Connes dans ce contexte.

Bien que les bicomplexes «aux racines de l'unité» soient plus «compliqués» que les bicomplexes usuels, ils calculent la même homologie que ces derniers, à savoir l'homologie cyclique du module cyclique.

Nos démonstrations reposent principalement sur la présentation de l'homologie cyclique comme foncteur Tor dans la catégorie des modules cycliques ainsi que sur des résultats d'algèbre homologique des N -complexes démontrés dans [KsW].

La puissance de ces outils permet de simplifier des démonstrations de résultats connus pour l'homologie « aux racines de l'unité » des modules simpliciaux. En particulier, nous démontrons ainsi le théorème de Dubois-Violette qui calcule les groupes d'homologie « aux racines de l'unité » d'un module simplicial en fonction de son homologie usuelle et exprimons de manière synthétique un quasi-isomorphisme entre les complexes simpliciaux « aux racines de l'unité » et le complexe simplicial standard.

De plus, les auteurs de [D1] et [KsW] ont remarqué que différentes déformations « aux racines de l'unité » de l'homologie d'un module simplicial étaient possibles. Toujours à l'aide de l'algèbre homologique des N -complexes, nous explicitons une relation entre deux d'entre elles.

L'article est composé de quatre parties. La première est consacrée à la définition de l'homologie cyclique « aux racines de l'unité » à l'aide d'un bicomplexe à la Tsygan et à la description d'un complexe de Connes qui lui est associé. Dans la deuxième, on énonce le théorème principal qui stipule que le bicomplexe « aux racines de l'unité » associé à un module cyclique calcule encore l'homologie cyclique du module. Nous y donnons également une démonstration du théorème de Dubois-Violette sur l'homologie simpliciale « aux racines de l'unité ». La troisième partie est dévolue à la description d'un quasi-isomorphisme entre les complexes « aux racines de l'unité » d'un module simplicial et son complexe standard. Enfin, la courte quatrième partie traite du rapport entre deux déformations « aux racines de l'unité » de l'homologie d'un module simplicial.

Conventions. — Dans tout cet article, nous convenons que k est un anneau commutatif unifié et que q est un élément de k . Pour tout entier $\ell \in \mathbf{Z}$, nous posons

$$[\ell] = \begin{cases} \frac{q^\ell - 1}{q - 1} & \text{si } q \neq 1 \\ \ell & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Pour tout $r \in \mathbf{N}$, nous posons $[r]! = 1$ si $r = 0$ et $[r] = [1][2] \cdots [r]$ si $r > 1$.

Nous fixons un entier N supérieur à 2. Nous supposons que l'une des deux assertions suivantes est vérifiée :

- L'élément $q \in k$ est une racine primitive N -ième de l'unité.
 - Si $q = 1$, l'entier N est premier et k est un $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ -espace vectoriel.
- Cette dernière hypothèse équivaut à $[\ell] = 0 \iff \ell \equiv 0 \pmod{N}$.

Remerciements. — L'auteur remercie chaleureusement Michel Dubois-Violette et Christian Kassel pour l'avoir encouragé à rédiger ce travail.

1. Homologie cyclique aux racines de l'unité

Dans cette première partie, nous définissons l'homologie cyclique « aux racines de l'unité » d'un module cyclique. Cette définition est donnée en termes d'un bicomplexe cyclique à la Tsygan. Nous montrons qu'elle s'exprime de manière équivalente à l'aide d'un (B, b) -bicomplexe de Connes « aux racines de l'unités » et donne lieu à une longue suite exacte de Connes.

Nous commençons par faire quelques rappels sur l'homologie d'un module simplicial aux racines de l'unité. Soit k un anneau commutatif. Un k -module simplicial est un objet gradué $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dans la catégorie des k -modules, muni de deux familles de morphismes $d_i : C_n \rightarrow C_{n-1}$ et $s_i : C_n \rightarrow C_{n+1}$ où $0 \leq i \leq n$ qui satisfont aux relations de commutation

$$\begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{si } i < j, \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & \text{si } i \leq j \end{cases} \quad \text{et} \quad d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ \text{id}_{C_n} & \text{si } i = j, j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{si } i > j+1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Un tel objet est noté $C = (C_*, d_*, s_*)$. Nous lui associons le morphisme d de degré 1 tel que $d = \sum_{i=0}^n q^i d_i$ où $q \in k$. Pour $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a $d^N = 0$ lorsque q est une racine N -ième de l'unité ou lorsque $q = 1$ et N est nul dans k (cf. [Kp, lemme 0.3] ou [KsW, proposition 0.2]). Notons $C_* = (C_*, d)$ le N -complexe ainsi défini. Il est alors possible de considérer, pour tout $p = 1, \dots, N-1$, les groupes d'homologie ${}_p H_*(C)$ du N -complexe de C_* définis comme les quotients

$${}_p H_n(C) = \frac{\text{Ker}(d^p : C_n \rightarrow C_{n-p})}{\text{Im}(d^{N-p} : C_{n+N-p} \rightarrow C_n)}.$$

En particulier, lorsque $N = 2$ et $q = -1$, le complexe $C_* = (C_*, d)$ est le complexe standard $C_*^s = (C_*, b = \sum_{i=1}^* (-1)^i d_i)$ dont l'homologie $H_*(C)$ est l'homologie simpliciale usuelle.

Considérons encore le morphisme $d : C_n \rightarrow C_{n-1}$ défini par $d' = \sum_{i=0}^{n-1} q^i d_i$. D'après [Ks, Proposition 0.2] et [D1, lemme 3], on a également $d'^N = 0$. On peut ainsi considérer le N -complexe $C'_* = (C_*, d')$. Ce N -complexe C'_* est acyclique au sens de Kapranov (cf. [KsW, Proposition 5.2]).

Dans la suite, nous aurons également besoin de considérer des « contractions » des complexes C_* et C'_* . Pour tout $p = 1, \dots, N-1$, nous désignons par $(\Delta_p C)_*$, respectivement $(\Delta_p C')_*$, les complexes

$$\cdots \xrightarrow{d^{N-p}} C_{kN+p-1} \xrightarrow{d^p} C_{kN-1} \xrightarrow{d^{N-p}} \cdots \xrightarrow{d^{N-p}} C_{N+p-1} \xrightarrow{d^p} C_{N-1} \xrightarrow{d^{N-p}} C_{p-1}$$

respectivement

$$\cdots \xrightarrow{d'^{N-p}} C_{kN+p-1} \xrightarrow{d'^p} C_{kN-1} \xrightarrow{d'^{N-p}} \cdots \xrightarrow{d'^{N-p}} C_{N+p-1} \xrightarrow{d'^p} C_{N-1} \xrightarrow{d'^{N-p}} C_{p-1}.$$

Remarquons que, par définition de l'homologie simpliciale aux racines de l'unité, pour tout module simplicial C , on a :

$${}_p H_{kN+p-1}(C) = H_{2k}(\Delta_p C) \quad \text{et} \quad {}_{N-p} H_{kN-1}(C) = H_{2k-1}(\Delta_p C)$$

pour tout $k \geq 1$.

De plus, l'acyclicité au sens de Kapranov implique l'acyclicité au sens usuel du complexe $\Delta_p C'$ pour tout $p = 1, \dots, N-1$ (cf. [KsW]).

Nous rappelons qu'un k -module simplicial (C_*, d_*, s_*) est un k -module cyclique s'il est, de plus, muni de morphismes $t : C_n \rightarrow C_n$ tels qu'on ait les relations

$$\begin{cases} t^{n+1} = \text{id}_{C_n} \\ d_i t = t d_{i-1} \\ s_i t = t s_{i+1} \end{cases} \quad \text{lorsque } i \geq 1 \text{ et} \quad \begin{cases} d_0 t = d_n : C_n \rightarrow C_{n-1} \\ s_0 t = t^2 s_n : C_n \rightarrow C_{n+1}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Fixons un entier p tel que $1 \leq p \leq N-1$. Nous allons définir quatre morphismes en termes de l'opérateur cyclique t . Pour tout entier $k \geq 1$, on définit $R, T : C_{kN-p-1} \rightarrow C_{kN-p-1}$ en posant

$$T = \text{id} - t \quad \text{et} \quad R = \sum_{i=0}^{kN-p-1} t^i.$$

et $T', R' : C_{kN-1} \rightarrow C_{kN-1}$ en posant

$$T' = \text{id} - q^{N-p} t \quad \text{et} \quad R' = \sum_{i=0}^{kN-1} (q^{N-p} t)^i.$$

Il résulte immédiatement des relations $t^{n+1} = \text{id}_{C_n}$ et $q^N = 1$ que $R'T' = T'R' = 0$ et $RT = TR = 0$. Nous construisons un bicomplexe dont les colonnes sont les complexes $(\Delta_{N-p} C)_*$ et $(\Delta_{N-p} C')_*$ et dont les lignes sont données à l'aide des applications T, T', R et R' .

PROPOSITION 1.1. — *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & d^{N-p} \downarrow & & -d'^{N-p} \downarrow & & d^{N-p} \downarrow & \\ 0 & \leftarrow C_{kN-1} & \xleftarrow{T'} & C_{kN-1} & \xleftarrow{R'} & C_{kN-1} & \xleftarrow{T'} \dots \\ & d^p \downarrow & & -d'^p \downarrow & & d^p \downarrow & \\ 0 & \leftarrow C_{kN-p-1} & \xleftarrow{T} & C_{kN-p-1} & \xleftarrow{R} & C_{kN-p-1} & \xleftarrow{T} \dots \\ & d^{N-p} \downarrow & & -d'^{N-p} \downarrow & & d^{N-p} \downarrow & \\ 0 & \leftarrow C_{(k-1)N-1} & \xleftarrow{T'} & C_{(k-1)N-1} & \xleftarrow{R'} & C_{(k-1)N-1} & \xleftarrow{T'} \dots \quad (1.3) \\ & d^p \downarrow & & -d'^p \downarrow & & d^p \downarrow & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & d^p \downarrow & & -d'^p \downarrow & & d^p \downarrow & \\ 0 & \leftarrow C_{N-p-1} & \xleftarrow{T} & C_{N-p-1} & \xleftarrow{R} & C_{N-p-1} & \xleftarrow{T} \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

est un bicomplexe pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq N - 1$.

Nous désignons par ${}_pCC$ le bicomplexe décrit dans la proposition. Pour tout entier p tels que $1 \leq p \leq N - 1$, on pose

$${}_pHC_*(C) = H_*(\text{Tot}({}_pCC))$$

où $\text{Tot}({}_pCC)$ désigne le complexe total associé au bicomplexe ${}_pCC$. Nous appelons les modules ${}_pHC_*(C)$ *groupes d'homologie cyclique aux racines de l'unité du module cyclique C* .

Lorsque $N = 2$ et $q = -1$, le bicomplexe ${}_1CC$ n'est autre que le bicomplexe cyclique de Tsygan et l'homologie ${}_1HC_*(C)$ est l'homologie cyclique usuelle $HC_*(C)$ du module cyclique (C_*, d_i, s_j, t) .

Démonstration de la proposition 1.1. — Il faut montrer que les morphismes

$$\begin{aligned} d^p T' - T d'^p, R d^p - d'^p R' &: C_{kN-1} \rightarrow C_{kN-p-1} \\ d^{N-p} T - T' d'^{N-p}, R' d'^{N-p} - d'^{N-p} R &: C_{(k+1)N-p-1} \rightarrow C_{kN-1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

sont identiquement nuls pour tout entier $k \geq 1$.

Pour tous les entiers positifs i, ℓ, n , posons

$$\partial_i^\ell = [\ell]! \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_\ell \leq n - \ell - i + 1}} q^{i_1 + \dots + i_\ell} d_{i_\ell} d_{i_{\ell-1}} \dots d_{i_1}$$

lorsque $n + 1 \geq \ell + i$ et $\partial_i^\ell = 0$ sinon. D'après le lemme 0.3 de [Kp], on a

$$d^\ell = \partial_0^\ell : C_n \rightarrow C_{n-\ell} \quad \text{et} \quad d'^\ell = \partial_1^\ell : C_n \rightarrow C_{n-\ell}.$$

Calculons

$$\begin{aligned} \partial_i^\ell t &= [\ell]! \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq \dots \\ \leq i_\ell \leq n - \ell - i + 1}} q^{i_1 + \dots + i_\ell} d_{i_\ell} d_{i_{\ell-1}} \dots d_{i_1} t \\ &= [\ell]! \sum_{\substack{0 \leq i_2 \leq \dots \\ \leq i_\ell \leq n - \ell - i + 1}} q^{i_2 + \dots + i_\ell} d_{i_\ell} \dots d_{i_2} d_n + [\ell]! t \sum_{\substack{0 < i_1 \leq \dots \\ \leq i_\ell \leq n - \ell - i + 1}} q^{i_1 + \dots + i_\ell} d_{i_\ell - 1} d_{i_{\ell-1} - 1} \dots d_{i_1 - 1} \end{aligned}$$

où l'on a dissocié les termes de la somme pour lesquels $i_1 = 0$ et ceux pour lesquels $i_1 > 0$ et utilisé les relations $d_0 t = \text{id}$ et $d_i t = t d_{i-1}$ pour $i > 0$. En appliquant les relations simpliciales de commutation et en réarrangeant les indices, on trouve

$$\partial_i^\ell t = [\ell]! d_{n-\ell+1} \sum_{\substack{0 \leq i_1 \leq \dots \\ \leq i_{\ell-1} \leq n - \ell - i}} q^{i_1 + \dots + i_{\ell-1}} d_{i_{\ell-1}} \dots d_{i_1} + q^\ell [\ell]! t \sum_{\substack{0 < i_1 \leq \dots \\ \leq i_\ell \leq n - \ell - i + 1}} q^{i_1 + \dots + i_\ell} d_{i_\ell} \dots d_{i_1},$$

d'où la relation

$$\partial_i^\ell t = q^\ell t \partial_{i+1}^\ell + [\ell] d_{n-\ell+1} \partial_{i+1}^{\ell-1}. \quad (1.5)$$

En particulier, pour $i = 0$, on a $\partial_0^\ell t = q^\ell t \partial_1^\ell + [\ell] d_{n-\ell+1} \partial_1^{\ell-1}$. Comme par ailleurs, on a $[\ell] d_{n-\ell+1} \partial_1^{\ell-1} = q^{-(n-\ell+1)} (\partial_0^\ell - \partial_1^\ell)$ ainsi que $\partial_0^\ell = d^\ell$ et $\partial_1^\ell = d'^\ell$, la relation (1.5) implique la relation

$$d^\ell (\text{id} - q^{n-\ell+1} t) = (\text{id} - q^{n+1} t) d'^\ell.$$

Lorsque $n \equiv -1 \pmod N$ et $\ell = p$, cette dernière relation n'est autre que $d^p T' = T d'^p$. Lorsque $n \equiv -p - 1 \pmod N$ et $\ell = N - p$, il s'agit de la relation $d^{N-p} T = T' d'^{N-p}$. Nous venons de montrer la nullité des applications de (1.4) impliquant les opérateurs T et T' .

Montrons maintenant la nullité des morphismes impliquant R et R' . Nous laissons au lecteur le soin d'établir la relation

$$\partial_1^\ell t^j = \sum_{i=0}^j q^{(j-i)\ell - i(n-\ell+1)} [\ell][\ell-1] \cdots [\ell-i+1] t^{i-j} \sum_{\substack{n-\ell-j+i+1 \leq u_1 \leq \dots \\ \leq u_i \leq n-\ell+1}} q^{u_1 + \dots + u_i} d_{u_i} \dots d_{u_1} \partial_{j+1}^{\ell-i}. \quad (1.6)$$

Cette formule se démontre par récurrence sur j à partir de la relation (1.5). A présent calculons le produit $\partial_1^\ell (\sum_{j=1}^n (q^{n-\ell+1} t)^j)$. D'après (1.6), il vaut

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n q^{(j-i)(n-\ell+1) + (j-i)\ell} [\ell] \cdots [\ell-i+1] t^{j-i} \sum_{\substack{n-\ell-j+i+1 \leq u_1 \leq \dots \\ \leq u_i \leq n-\ell+1}} q^{u_1 + \dots + u_i} d_{u_i} \dots d_{u_1} \partial_{j+1}^{\ell-i},$$

ou encore en réarrangeant les indices

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} q^{j(n-\ell+1) + j\ell} [\ell] \cdots [\ell-i+1] t^j \sum_{\substack{n-\ell-j+1 \leq u_1 \leq \dots \\ \leq u_i \leq n-\ell+1}} q^{u_1 + \dots + u_i} d_{u_i} \dots d_{u_1} \partial_{j+i+1}^{\ell-i},$$

ce qui vaut encore

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} q^{j(n+1)} [\ell] \cdots [\ell-i+1] t^j \sum_{\substack{n-\ell-j+1 \leq u_1 \leq \dots \\ \leq u_i \leq n-\ell+1}} q^{u_1 + \dots + u_i} d_{u_i} \dots d_{u_1} \partial_{j+i+1}^{\ell-i}.$$

Comme $\partial_{j+i+1}^{\ell-i} = 0$ lorsque $j > n - \ell$ et $[\ell] \cdots [\ell - i + 1] = 0$ lorsque $i > \ell$, il reste à évaluer

$$\sum_{j=0}^{n-\ell} q^{j(n+1)} t^j \sum_{i=0}^{\ell} [\ell] \cdots [\ell - i + 1] \sum_{\substack{n-\ell-j+1 \leq u_1 \leq \dots \\ \leq u_i \leq n-\ell+1}} q^{u_1 + \dots + u_i} d_{u_i} \dots d_{u_1} \partial_{j+i+1}^{\ell-i}.$$

Par définition de $\partial_{j+i+1}^{\ell-i}$, cette dernière expression est égale à

$$\sum_{j=0}^{n-\ell} q^{j(n+1)} t^j \sum_{i=0}^{\ell} [\ell]! \sum_{\substack{n-\ell-j+1 \leq u_1 \leq \dots \leq u_i \leq n-\ell+1 \\ 0 \leq u_{i+1} \leq \dots \leq u_\ell \leq n-\ell-j}} q^{u_1 + \dots + u_\ell} d_{u_\ell} \dots d_{u_1} = \sum_{j=0}^{n-\ell} q^{j(n+1)} t^j \partial_0^\ell.$$

Par conséquent, lorsque $n \equiv -1 \pmod N$ et $\ell = p$, respectivement $n \equiv -p - 1 \pmod N$ et $\ell = N - p$, on a

$$\partial_1^p \sum_{j=1}^n q^{j(N-p)} t^j = \sum_{j=0}^{n-\ell} t^j \partial_0^p, \quad \text{resp.} \quad \partial_1^{N-p} \sum_{j=1}^n t^j = \sum_{j=0}^{n-\ell} q^{j(N-p)} t^j \partial_0^{N-p},$$

c'est-à-dire $d'^p R' = R d^p$, respectivement $d'^{N-p} R = R' d^{N-p}$. Ceci démontre la nullité des morphismes (1.4) impliquant R et R' . \square

De même que pour l'homologie cyclique usuelle, il est possible de construire un analogue du (B, b) -bicomplexe de Connes à partir du bicomplexe de la proposition 1.1. C'est ce que nous faisons maintenant.

Pour tout entier naturel n , définissons le morphisme $\sigma : C_n \rightarrow C_{n+1}$ en posant $\sigma = q^{-n} s_n$. De plus, pour tout entier $p = 1, \dots, N - 1$, posons

$$\sigma^{(N-p)} = \frac{1}{(-q)^{N-1} [N-1]!} \sum_{i=0}^{p-1} d'^i \sigma^{N-1} d'^{p-i-1}$$

et

$$\sigma^{(p)} = \frac{1}{(-q)^{N-1} [N-1]!} \sum_{i=0}^{N-p-1} d'^i \sigma^{N-1} d'^{N-p-i-1}.$$

On a le lemme suivant.

LEMME 1.2. — *Le morphisme $\sigma_*^{(\cdot)}$ défini par*

$$C_{N-p-1} \xrightarrow{\sigma^{(N-p)}} C_{N-1} \xrightarrow{\sigma^{(p)}} C_{2N-p-1} \xrightarrow{\sigma^{(N-p)}} C_{2N-1} \xrightarrow{\sigma^{(N-p)}} \dots$$

est une homotopie contractante du complexe $\Delta_{N-p}(C')_$.*

Démonstration. — D'après [KsW, §5.6], on a la relation $d' \sigma - q^{-1} \sigma d' = \text{id}$ qui implique

$$\sum_{i=0}^{N-1} d'^{N-i-1} \sigma^{N-1} d'^i = (-q)^{N-1} [N-1]! \text{id}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} (-q)^{N-1} [N-1]! \text{id} &= \left(\sum_{i=0}^{p-1} d'^i \sigma^{N-1} d'^{p-i-1} \right) d'^{N-p} + d'^p \left(\sum_{i=0}^{N-p-1} d'^i \sigma^{N-1} d'^{N-p-i-1} \right) \\ &= (-q)^{N-1} [N-1]! (\sigma^{(N-p)} d'^p + d'^{N-p} \sigma^{(p)}) \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. \square

Nous définissons à présent l'analogue de l'opérateur B de Connes. Posons

$$B^{(p)} = T' \sigma^{(p)} R : C_{kN-p-1} \rightarrow C_{kN-1}$$

et

$$B^{(N-p)} = T \sigma^{(N-p)} R' : C_{(k-1)N-1} \rightarrow C_{kN-p-1}$$

pour tout entier $k \geq 1$ et tout entier $1 \leq p \leq N-1$.

LEMME 1.3. — *On a les relations*

$$\begin{aligned} B^{(N-p)} B^{(p)} &= 0, & B^{(p)} B^{(N-p)} &= 0, \\ B^{(N-p)} d^{N-p} + d^p B^{(p)} &= 0 & \text{et} & & B^{(p)} d^p + d^{N-p} B^{(N-p)} &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration. — Les deux premières égalités sont de simples conséquences de $RT = 0$ et $R'T' = 0$. Les deux autres se déduisent de la proposition 1.1 et du lemme 1.2. \square

Des lemmes 1.2 et 1.3 et du lemme 2.1.6 de [L], on déduit que le bicomplexe suivant calcule la même homologie que le bicomplexe (1.3).

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & d^p \downarrow & & d^{N-p} \downarrow & & d^p \downarrow & \\ 0 & \longleftarrow C_{kN-p-1} & \xleftarrow{B^{(N-p)}} & C_{(k-1)N-1} & \xleftarrow{B^{(p)}} & C_{(k-1)N-p-1} & \longleftarrow \\ & d^{N-p} \downarrow & & d^p \downarrow & & d^{N-p} \downarrow & \\ 0 & \longleftarrow C_{(k-1)N-1} & \xleftarrow{B^{(p)}} & C_{(k-1)N-p-1} & \xleftarrow{B^{(N-p)}} & C_{(k-2)N-1} & \longleftarrow \\ & d^p \downarrow & & d^{N-p} \downarrow & & d^p \downarrow & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longleftarrow C_{2N-p-1} & \xleftarrow{B^{(N-p)}} & C_{N-1} & \xleftarrow{B^{(p)}} & C_{N-p-1} & \longleftarrow \\ & d^{N-p} \downarrow & & d^p \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longleftarrow C_{N-1} & \xleftarrow{B^{(p)}} & C_{N-p-1} & \longleftarrow & 0 & \\ & d^p \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 & \longleftarrow C_{N-p-1} & \longleftarrow & 0 & & & \\ & \downarrow & & & & & \\ & 0 & & & & & \end{array} \quad (1.7)$$

Nous notons ${}_p\mathcal{B}$ le bicomplexe (1.7) et $\text{Tot}({}_p\mathcal{B})_*$ le complexe total associé. Considérons la suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow (\Delta_{N-p} C)_* \xrightarrow{I} \text{Tot}({}_p\mathcal{B}')_* \xrightarrow{S} \text{Tot}({}_p\mathcal{B}')_*[2]_* \rightarrow 0$$

où I est l'inclusion de la première colonne dans le bicomplexe et S la projection canonique de la diagonale $C_{kN-p-1} \oplus C_{(k-1)N-p-1} \cdots \oplus C_{N-p-1}$ dans $C_{(k-1)N-p-1} \cdots \oplus C_{N-p-1}$ ou la projection canonique de la diagonale $C_{kN-1} \oplus C_{(k-1)N-1} \cdots \oplus C_{N-1}$ dans la diagonale $C_{(k-1)N-1} \cdots \oplus C_{N-1}$. Cette suite donne lieu à une longue suite exacte en homologie :

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{S} {}_p HC_{2(k-1)}(C) \xrightarrow{B^{(N-p)}} {}_{N-p} H_{(k+1)N-p-1}(C) \xrightarrow{I} {}_p HC_{2k}(C) \\ &\xrightarrow{S} {}_p HC_{2(k-1)}(C) \xrightarrow{B^{(p)}} {}_{N-p} H_{kN-1}(C) \xrightarrow{I} {}_p HC_{2(k-1)}(C) \\ &\xrightarrow{S} {}_p HC_{2(k-1)-1}(C) \xrightarrow{B^{(N-p)}} {}_{N-p} H_{kN-p-1}(C) \xrightarrow{I} {}_p HC_{2(k-2)}(C) \xrightarrow{S} \cdots \end{aligned} \quad (1.8)$$

2. — Les théorèmes principaux

Dans cette partie, nous démontrons que l'homologie cyclique aux racine de l'unité est isomorphe à l'homologie cyclique usuelle. De plus, à l'aide des foncteurs Tor, nous donnons une démonstration nouvelle du théorème de Dubois-Violette qui calcule l'homologie « aux racines de l'unité » d'un module simplicial en fonction de son homologie simpliciale usuelle.

Tout d'abord, rappelons le théorème de Dubois-Violette.

THÉORÈME 2.1. — *Soit $C = (C_*, d_i, s_j)$ un k -module simplicial. Pour tout entier naturel n , et tout p tel que $1 \leq p \leq N-1$, on a*

$${}_p H_n(C) = \begin{cases} H_{2(n-p+1)/N}(C) & \text{si } n+1 \equiv p \text{ modulo } N \\ H_{(2n+2-N)/N}(C) & \text{si } n+1 \equiv 0 \text{ modulo } N \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Ce théorème est démontré dans [KsW] lorsque le module simplicial est celui associé à une k -algèbre associative et dans [D2] pour le cas général. Nous en donnons une démonstration alternative dans cette partie.

Enonçons à présent notre théorème principal.

THÉORÈME 2.2. — *Soit $C = (C_*, d_i, s_j, t)$ un module cyclique. Pour tout entier $p = 1, \dots, N-1$, on a l'isomorphisme*

$${}_p HC_*(C) \cong HC_*(C).$$

Remarquons que, si les cycles représentant des éléments de $HC_k(C)$ sont des éléments de $C_k \oplus C_{k-1} \oplus C_{k-2} \oplus \cdots \oplus C_0$, ceux de $HC_{2k}(C)$ et $HC_{2k+1}(C)$ sont respectivement des éléments de

$$C_{(k+1)N-p+1} \oplus C_{kN-1} \oplus C_{(k-1)N-p+1} \oplus \cdots \oplus C_{N-p+1}$$

et de

$$C_{(k+1)N-1} \oplus C_{kN-p+1} \oplus C_{(k-1)N-p+1} \oplus \cdots \oplus C_{N-p+1}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Afin de démontrer les théorèmes 2.1 et 2.2, nous rappelons brièvement la présentation de l'homologie d'un module simplicial comme foncteur Tor pour la généraliser aux N -complexes.

Considérons la catégorie simpliciale Δ et la catégorie cyclique ΔC décrites par exemple dans [L]. Rappelons que les objets de Δ et de ΔC sont les ensembles $\langle n \rangle = \{0, \dots, n\}$ où $n \in \mathbb{N}$. Les morphismes de Δ sont les applications $\langle m \rangle \rightarrow \langle n \rangle$ croissantes au sens large pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Parmi eux, pour tout $i = 0, \dots, n$, on distingue les injections $\delta_i : \langle n-1 \rangle \rightarrow \langle n \rangle$ déterminées par $i \notin \delta_i(\langle n-1 \rangle)$ et les surjections $\sigma_i : \langle n+1 \rangle \rightarrow \langle n \rangle$ déterminées par $\sigma_i(i) = \sigma_i(i+1)$. Les morphismes de ΔC sont engendrés par ceux de Δ et un morphisme $\tau : \langle n \rangle \rightarrow \langle n \rangle$ d'ordre $n+1$. Tout morphisme $\varphi \in \text{Hom}_{\Delta C}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ se décompose de manière unique en un produit $\varphi = \alpha \tau^k$ où $\alpha \in \text{Hom}_{\Delta}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ et $k = 0, \dots, m$.

On note Δ^{op} (resp. ΔC^{op}) la catégorie opposée de Δ (resp. de ΔC) et $k\text{-Mod}$ la catégorie des modules sur k . La donnée d'un k -module simplicial (M_*, d_*, s_*) est équivalente à la donnée d'un foncteur $M : \Delta^{\text{op}} \rightarrow k\text{-Mod}$ tel que $M(\langle n \rangle) = M_n$, que $M(\delta_i) = d_i$ et $M(\sigma_i) = s_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leq i \leq n$. De même, la donnée d'un module cyclique (M_*, d_*, s_*, t) est équivalente à la donnée d'un foncteur $M : \Delta C^{\text{op}} \rightarrow k\text{-Mod}$ qui vérifie de plus $M(\tau_n) = t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On appelle *module cosimplicial* un foncteur $\Delta \rightarrow k\text{-Mod}$ et *module cocyclique* un foncteur $\Delta C \rightarrow k\text{-Mod}$. On note respectivement $\Delta(k)$ et $\Delta^{\text{op}}(k)$ les catégories des modules cosimpliciaux et simpliciaux et respectivement $\Delta C(k)$ et $\Delta C^{\text{op}}(k)$ celles des modules cocycliques et cycliques. Soit E un module cosimplicial et F un module simplicial. Le produit tensoriel $E \otimes_{\Delta} F$ est le foncteur $\Delta^{\text{op}}(k) \times \Delta(k) \rightarrow k\text{-Mod}$ défini par

$$E \otimes_{\Delta} F = \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} E_n \otimes_k F_n \right) / V$$

où V est le sous- k -module engendré par les éléments $E(\alpha)(e) \otimes f - e \otimes F(\alpha)(f)$ où $e \in E_m$, $f \in F_n$ et $\alpha : \langle m \rangle \rightarrow \langle n \rangle$ est un morphisme de Δ . Le produit tensoriel d'un module cocyclique par un module cyclique est donné par la même formule où l'on remplace Δ par ΔC . Pour plus de détails, nous référons à [Ks] ou [L].

D'après [Ks] et [C] le foncteur $- \otimes_{\Delta} -$ (resp. le foncteur $- \otimes_{\Delta C} -$) se dérive en le foncteur $\text{Tor}_*^{\Delta(k)}(-, -)$ (resp. le foncteur $\text{Tor}_*^{\Delta C(k)}(-, -)$) qui peut se calculer à l'aide de résolutions de l'une ou l'autre des deux variables.

En particulier, pour tout k -module simplicial C (resp. tout k -module cyclique C), on a

$$H_*(C) \cong \text{Tor}_*^{\Delta(k)}(C, \underline{k}) \quad (2.1)$$

respectivement

$$HC_*(C) \cong \text{Tor}_*^{\Delta C(k)}(C, \underline{k}) \quad (2.2)$$

où \underline{k} est le k -module cosimplicial (resp. le k -module cocyclique) trivial défini par $\underline{k}(\langle n \rangle) = k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\underline{k}(\alpha) = \text{id}$ pour tout morphisme α de Δ (resp. tout morphisme α de $\Delta\mathbb{C}$).

Les isomorphismes (2.1) et (2.2) peuvent être démontrés à l'aide de la théorie des modèles acycliques d'Eilenberg-Mac Lane (cf. [M] ou [L, §6]). C'est une version «aux racines de l'unité» de celui-ci que nous introduisons maintenant qui permet de démontrer les théorèmes 2.1 et 2.2.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, considérons le foncteur $M_m : \Delta \rightarrow k\text{-Mod}$ tel que $M_m(\langle n \rangle)$ soit le k -module engendré par les éléments de $\text{Hom}_\Delta(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ et tel que si $\alpha \in \text{Hom}_\Delta(\langle n \rangle, \langle n' \rangle)$ alors $M_m(\alpha)$ est le morphisme associant $\gamma \in \text{Hom}_\Delta(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ à $\alpha \circ \gamma \in \text{Hom}_\Delta(\langle m \rangle, \langle n' \rangle)$. De plus, à tout morphisme $\beta \in \text{Hom}_\Delta(\langle m' \rangle, \langle m \rangle)$ on associe la transformation naturelle $M_{m'} \rightarrow M_m$ qui à $\gamma \in \text{Hom}_\Delta(\langle m' \rangle, \langle n \rangle)$ associe $\gamma \circ \beta \in \text{Hom}_\Delta(\langle m' \rangle, \langle n \rangle)$. En particulier, pour tout $m \in \mathbb{N}$ on considère les transformations naturelles $d_i : M_m \rightarrow M_{m-1}$ et $s_i : M_m \rightarrow M_{m+1}$ respectivement associées aux morphismes δ_i et σ_i de Δ . Par définition de δ_i et σ_i , les transformations d_i et s_i vérifient les relations de commutation simpliciales (1.1). Par conséquent, nous pouvons considérer le N -complexe de k -modules cosimpliciaux $M_* = (M_*, d = \sum_{i=0}^* q^i d_i)$. On a alors la proposition suivante.

PROPOSITION 2.3. — *Le N -complexe M_* est une N -résolution de \underline{k} par des k -modules cosimpliciaux projectifs.*

Démonstration. — D'après l'appendice de [Ks], les k -modules cosimpliciaux M_m sont projectifs. Il suffit donc de montrer que le complexe est acyclique. C'est ce que nous faisons en exhibant une homotopie contractante. Considérons le N -complexe augmenté $\widetilde{M}_* : M_* \xrightarrow{d_0} \underline{k}$ où $d_0 : M_0 \rightarrow \underline{k}$ est la transformation naturelle qui à tout élément $\gamma \in \text{Hom}_\Delta(\langle 0 \rangle, \langle n \rangle)$ associe $1 \in k$.

Soit l'application linéaire $s : \widetilde{M}_m \rightarrow \widetilde{M}_{m+1}$ définie comme suit. Pour tout $\alpha \in \text{Hom}_\Delta(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$, on définit $s(\alpha) : \text{Hom}_\Delta(\langle m+1 \rangle, \langle n \rangle)$ en posant $s(\alpha)(i) = \alpha(i-1)$ pour tout $i = 0, \dots, m+1$ et $s(\alpha)(0) = 0$. De plus, on définit $s : \underline{k} \rightarrow k(\text{Hom}_\Delta(\langle 0 \rangle, \langle n \rangle))$ en posant $s(1)(0) = 0$. L'application s vérifie les relations $d_0 s = \text{id}$ et $d_i s = s d_{i-1}$. Ces dernières impliquent $ds - qsd = \text{id}$. Ce qui, d'après le lemme 5.5 de [KsW], implique que le N -complexe \widetilde{M}_* est acyclique. \square

A présent, pour tout $m \in \mathbb{N}$, considérons le foncteur $MC_m : \Delta \rightarrow k\text{-Mod}$ tel que $MC_m(\langle n \rangle)$ soit le k -module engendré par les éléments de $\text{Hom}_{\Delta\mathbb{C}}(\langle m \rangle, \langle n \rangle)$ et pour lequel, l'image d'un morphisme est définie comme pour le foncteur $M : \Delta \rightarrow k\text{-Mod}$ décrit ci-dessus. De même que pour M , on considère les transformations naturelles $d_i : MC_m \rightarrow MC_{m-1}$, $s_i : MC_m \rightarrow MC_{m+1}$ et $t : MC_m \rightarrow MC_m$ respectivement associées aux morphismes δ_i , σ_i et τ de $\Delta\mathbb{C}$. Elles vérifient les relations de commutation cycliques (1.2). Nous pouvons considérer le bicomplexe de k -modules cocyclique ${}_p M M$ construit sur le

Ce dernier complexe est isomorphe au complexe $\Delta_{N-p}M_*$. Remarquons que le complexe augmenté $\Delta_{N-p}M_* \xrightarrow{d_0 d^{p-1}} \underline{k}$ est la contraction du N -complexe \widetilde{M}_* où d_0 et \widetilde{M}_* sont décrits dans la démonstration de la proposition 2.3. Le N -complexe \widetilde{M}_* étant acyclique au sens de Kapranov, toutes ses contractions sont acycliques au sens usuel. Il vient que $\Delta_{N-p}M_* \xrightarrow{d_0 d^{p-1}} \underline{k}$ est acyclique. Par conséquent, l'homologie du bicomplexe (2.3) est concentrée en degré 0 où elle vaut \underline{k} . Ceci termine la démonstration de cette proposition. \square

Nous pouvons maintenant démontrer les théorèmes 2.1 et 2.2. La première démonstration utilise le foncteur ${}_p\mathrm{Tor}$ défini dans [KsW].

Démonstration du théorème 2.1. — D'après la proposition 2.3 et la proposition 3.1 de [KsW], pour tout $p = 1, \dots, N - 1$, on a

$${}_p H_*(C \otimes_{\Delta} M_*) \cong {}_p \mathrm{Tor}_*^{\Delta(k)}(C, \underline{k}) \cong \begin{cases} \mathrm{Tor}_{2(n-p+1)/N}^{\Delta(k)}(C, \underline{k}) & \text{si } n+1 \equiv p \text{ modulo } N \\ \mathrm{Tor}_{(2n+2-N)/N}^{\Delta(k)}(C, \underline{k}) & \text{si } n+1 \equiv 0 \text{ modulo } N \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Par ailleurs, un simple calcul nous donne $C \otimes_{\Delta}(M_*, d) \cong (C_*, d)$. On en déduit que ${}_p H_*(C)$ est isomorphe à ${}_p H_*(C \otimes_{\Delta} M_*)$ et donc le théorème 2.1. \square

Démonstration du théorème 2.2. — Nous utilisons l'isomorphisme (2.2). Puisque, d'après la proposition 2.4, le complexe $\mathrm{Tot}({}_p MM)$ est une résolution de \underline{k} par des k -modules cycliques, on a

$$\mathrm{Tor}^{\Delta C(k)}(C, \underline{k}) \cong H_*(C \otimes_{\Delta C} \mathrm{Tot}({}_p MM)).$$

Comme de plus $C \otimes_{\Delta C} \mathrm{Tot}({}_p MM) \cong \mathrm{Tot}({}_p CC)$, il en résulte l'isomorphisme

$${}_p HC_*(C) \cong \mathrm{Tor}^{\Delta C(k)}(C, \underline{k}) \cong HC_*(C).$$

\square

3. — Des quasi-isomorphismes de complexes aux racines de l'unité

Dans [D2], M. Dubois-Violette démontre le théorème 2.1 à l'aide d'un quasi-isomorphisme explicite entre le complexe standard d'un module simplicial et le complexe du même module aux racines de l'unité. Sa construction repose sur une cascade de complexes et de quasi-isomorphismes intermédiaires. Dans cette partie, nous donnons une présentation plus synthétique de son quasi-isomorphisme. De plus, nous simplifions sa démonstration de la quasi-isomorphie à l'aide des outils de l'algèbre homologique.

Soit (C_*, d_*, s_*) un k -module simplicial. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous allons construire des morphismes

$$(\Delta_{N-1}C)_n \xrightarrow{\alpha_n^{N-1}} (\Delta_{N-2}C)_n \xrightarrow{\alpha_n^{N-2}} \cdots \xrightarrow{\alpha_n^2} (\Delta_1C)_n \xrightarrow{\alpha_n^1} C_n^s.$$

Pour $p = 2, \dots, N-1$, posons $\alpha_n^p = d$ lorsque n est pair et $\alpha_n^p = \text{id}$ lorsque n est impair.

Avant de définir α_*^1 , introduisons la notation $b_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i d_i$. Cela définit un morphisme $b_k : C_n \rightarrow C_{n-1}$ pour tout $n \geq k$. Le morphisme $b = b_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ n'est autre que la différentielle du complexe simplicial standard. Posons maintenant $\alpha_0 = \text{id}$ et

$$\alpha_k = (b_{2k-1} + [N-1]d_{2k-1})(b_{2k-1} + [N-2]d_{2k-1}) \cdots (b_{2k-1} + [2]d_{2k-1})\alpha_{k-1}$$

pour tout $k \geq 1$. Posons encore $\alpha_0^1 = \text{id}_{C_0}$ et $\alpha_{2k}^1 = \alpha_{2k-1}^1 = \alpha_k$ pour tout entier $k \geq 1$.

PROPOSITION 3.1. — *Les morphismes*

$$(\Delta_{N-1}C)_* \xrightarrow{\alpha_*^{N-1}} (\Delta_{N-2}C)_* \xrightarrow{\alpha_*^{N-2}} \cdots \xrightarrow{\alpha_*^2} (\Delta_1C)_* \xrightarrow{\alpha_*^1} C_*^s$$

sont des morphismes de complexes.

Nous démontrons cette proposition après le théorème suivant.

THÉORÈME 3.2. — *Les morphismes de complexes α_*^p , où $p = 1, \dots, N-1$, sont des quasi-isomorphismes réalisant les isomorphismes de groupes d'homologie du théorème 2.1.*

Démonstration. — Pour $p = 1, \dots, N-1$, considérons les complexes

$$(\Delta_p M)_* : \cdots \xrightarrow{d^p} M_{2N-1} \xrightarrow{d^{N-p}} M_{N+p-1} \xrightarrow{d^p} M_{N-1} \xrightarrow{d^{N-p}} M_{p-1} \rightarrow 0$$

et le complexe standard

$$M_*^s : \cdots \xrightarrow{b} M_n \xrightarrow{b} M_{n-1} \xrightarrow{b} \cdots \xrightarrow{b} M_1 \xrightarrow{b} M_0 \rightarrow 0$$

où M et \underline{k} sont les k -modules cosimpliciaux définis dans la partie 2. D'après la proposition 2.3, $(\Delta_p M)_*$ et M_*^s sont des résolutions

$$(\Delta_p \widetilde{M})_* : (\Delta_p M)_* \xrightarrow{d_0 d^{p-1}} \underline{k} \quad \text{et} \quad \widetilde{M}_*^s : M_*^s \xrightarrow{d_0} \underline{k},$$

de \underline{k} par des k -modules cosimpliciaux projectifs. On étend naturellement la définition des morphismes α^i en des morphismes de complexes $\tilde{\alpha}^p : (\Delta_p \widetilde{M})_* \rightarrow (\Delta_{p-1} \widetilde{M})_*$ pour $p = 2, \dots, N-1$ et $\tilde{\alpha}^1 : (\Delta_1 \widetilde{M})_* \rightarrow \widetilde{M}_*$ relevant l'identité de \underline{k} et de telle sorte que $\tilde{\alpha}^p \otimes_{\Delta} \text{id} = \alpha^p$ pour tout $p = 1, \dots, N-1$. D'après le théorème de comparaison des résolutions projectives, on en déduit que pour tout $1 \leq p \leq N-1$, les morphismes α^p sont des quasi-isomorphismes de complexes. \square

La fin de cette partie est consacrée à la démonstration de la proposition 3.1. Nous définissons deux morphismes $\beta_p^n, \gamma_p^n : C_k \rightarrow C_{k-p-1}$, pour tout $1 \leq p \leq N-1$ et tous les entiers k et n tels que $k \geq n \geq p+1$ et $n+p \leq k$, en posant $\beta_0^n = \gamma_0^n = (b_n + [2]d_n)$ et

$$\begin{aligned}\beta_p^n &= \beta_{p-1}^n (b_n + [2]d_n + q^2 d_{n+1} + q^3 d_{n+2} + \dots + q^{p+1} d_{n+p}) \\ \gamma_p^n &= (b_n + [p+2]d_n) \gamma_{p-1}^n\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$. Nous pouvons d'ores et déjà remarquer qu'en vertu des relations de commutation simpliciale, on a

$$\beta_p^n d_i = d_{i-p-1} \beta_p^n \quad \text{et} \quad \gamma_p^n d_i = d_{i-p-1} \gamma_p^n \quad (3.1)$$

pour tout $p \geq 1$, tout $n \geq 0$ et tout $i > n+p$.

LEMME 3.3. — *Pour tous les entiers $p \geq 1$ et $n \geq 0$, on a l'égalité $\beta_p^n = \gamma_p^n$.*

Démonstration. — Pour simplifier les notations, posons $\beta_p^n = \beta_p$ et $\gamma_p^n = \gamma_p$. Nous allons démontrer le lemme par récurrence sur p . On a $\beta_0 = \gamma_0$ par définition. Faisons le calcul pour $p = 1$. Rappelons que $[2] + q^2 = [3]$ et remarquons que, pour tout $n \geq 0$, on a les relations $d_n d_{n+1} = d_n^2$ et $b_n d_{n+1} = d_n b_n$. On calcule alors

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (b_n + [2]d_n)(b_n + [2]d_n + q^2 d_{n+1}) \\ &= b_n^2 + ([2] + q^2) d_n b_n + [2] b_n d_n + [2]([2] + q^2) d_n^2 \\ &= b_n^2 + [3] d_n b_n + [2] b_n d_n + [2][3] d_n^2 \\ &= (b_n + [3]d_n)(b_n + [2]d_n) \\ &= \gamma_1.\end{aligned}$$

Supposons que $\beta_k = \gamma_k$ pour tout $k \leq p$ et montrons que l'égalité est vraie au rang $p+1$. Tout d'abord remarquons que, par hypothèse de récurrence, pour $p \geq 1$, on a $\beta_p = \gamma_p$ et $\beta_{p-1} = \gamma_{p-1}$. Par conséquent, comme $\beta_p = \beta_{p-1}(b_n + \dots + q^{p+2} d_{n+p+1})$ et $\gamma_p = (b_n + [p+2]d_n) \gamma_{p-1}$, on a la relation de commutation

$$\gamma_{p-1}(b_n + [2]d_n + q^2 d_{n+1} + \dots + q^{p+1} d_{n+p}) = (b_n + [p+2]d_n) \gamma_{p-1}. \quad (3.2)$$

A présent, nous pouvons calculer

$$\begin{aligned}\beta_{p+1} &= \beta_p (b_n + [2]d_n + q^2 d_{n+1} + \dots + q^{p+2} d_{n+p+1}) \\ &= \gamma_p (b_n + [2]d_n + q^2 d_{n+1} + \dots + q^{p+2} d_{n+p+1}) \\ &= (b_n + [p+2]d_n) \gamma_{p-1} (b_n + [2]d_n + q^2 d_{n+1} + \dots + q^{p+1} d_{n+p}) \\ &\quad + q^{p+2} (b_n + [p+2]d_n) \gamma_{p-1} d_{n+p+1} \\ &= (b_n + [p+2]d_n)^2 \gamma_{p-1} + q^{p+2} (b_n + [p+2]d_n) d_{n+1} \gamma_{p-1}\end{aligned}$$

où la deuxième égalité est une conséquence de l'hypothèse de récurrence, la troisième de la définition de γ_p^n , la dernière des relations (3.1) et (3.2). On a donc

$$\begin{aligned}
\beta_{p+1} &= \left((b_n + [p+2]d_n)^2 + q^{p+2}(b_n + [p+2]d_n)d_{n+1} \right) \gamma_{p-1} \\
&= \left((b_n + [p+2]d_n)^2 + q^{p+2}d_n(b_n + [p+2]d_n) \right) \gamma_{p-1} \\
&= (b_n + [p+2]d_n + q^{p+2}d_n)(b_n + [p+2]d_n) \gamma_{p-1} \\
&= (b_n + [p+3]d_n)(b_n + [p+2]d_n) \gamma_{p-1} \\
&= \gamma_{p+1}
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient des relations de commutation de d_{n+1} avec d_n et b_n , la quatrième de $[p+2] + q^{p+2} = [p+3]$ et la dernière de la définition de γ_{p+1} . \square

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 3.1.

Démonstration de la proposition 3.1. — Il s'agit de prouver la commutativité des deux diagrammes

$$\begin{array}{ccccccccc}
(\Delta_p C)_* : & \cdots & \xrightarrow{d^p} & C_{2N-1} & \xrightarrow{d^{N-p}} & C_{N+p-1} & \xrightarrow{d^p} & C_{N-1} & \xrightarrow{d^{N-p}} & C_{p-1} \\
\alpha_*^p \downarrow & & & \text{id} \downarrow & & d \downarrow & & \text{id} \downarrow & & d \downarrow \\
(\Delta_{p-1} C)_* : & \cdots & \xrightarrow{d^{p-1}} & C_{2N-1} & \xrightarrow{d^{N-p+1}} & C_{N+p-2} & \xrightarrow{d^{p-1}} & C_{N-1} & \xrightarrow{d^{N-p+1}} & C_{p-2}
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(\Delta_1 C)_* : & \cdots & C_{kN} & \xrightarrow{d} & C_{kN-1} & \xrightarrow{d^{N-1}} & C_{(k-1)N} & \xrightarrow{d} & \cdots & \xrightarrow{d^{N-1}} & C_0 \\
\alpha_*^1 \downarrow & & \alpha_k \downarrow & & \alpha_k \downarrow & & \alpha_{k-1} \downarrow & & & & \text{id} \downarrow \\
C_*^s : & \cdots & C_{2k} & \xrightarrow{b} & C_{2k-1} & \xrightarrow{b} & C_{2(k-1)} & \xrightarrow{b} & \cdots & \xrightarrow{b} & C_0
\end{array} \quad (3.3)$$

Il est évident que le premier est commutatif. Nous allons montrer que le second l'est également. Nous utiliserons le fait, qu'en reprenant les notations du lemme 3.3, on a

$$\alpha_k = \gamma_{N-3}^{2k-1} \gamma_{N-3}^{2(k-1)-1} \cdots \gamma_{N-3}^3 \gamma_{N-3}^1 \quad (3.4)$$

pour tout $k \geq 1$. Nous allons démontrer la proposition par récurrence sur k . Au rang $k = 1$, il faut montrer que chaque carré du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
C_N & \xrightarrow{d} & C_{N-1} & \xrightarrow{d^{N-1}} & C_0 \\
\alpha_1 \downarrow & & \alpha_1 \downarrow & & \parallel \\
C_2 & \xrightarrow{b=b_2} & C_1 & \xrightarrow{b=b_1} & C_0
\end{array} \quad (3.5)$$

est commutatif. Remarquons que $d_0 + qd_1 = d_0 - d_1 + (1+q)d_1 = b_1 + [2]d_1$ et calculons $d^{N-1} : C_{N-1} \rightarrow C_0$. On obtient

$$\begin{aligned}
d^{N-1} &= (d_0 + qd_1)(d_0 + qd_1 + q^2d_2) \cdots (d_0 + qd_1 + q^2d_2 + \cdots + q^{N-1}d_{N-1}) \\
&= (b_1 + [2]d_1)(b_1 + [2]d_1 + q^2d_2) \cdots (b_1 + [2]d_1 + q^2d_2 + \cdots + q^{N-1}d_{N-1}) \\
&= \beta_{N-2}^1.
\end{aligned}$$

Or, d'après le lemme 3.3, on a $\beta_{N-2}^1 = \gamma_{N-2}^1$. De plus, par définition de γ_p^n et comme on a $[N] = 0$, on obtient $\gamma_{N-2}^1 = (b_1 + [N-2+2]d_1)\gamma_{N-3}^1 = b_1\gamma_{N-3}^1$. Finalement, on a bien $d^{N-1} = b\alpha_1$ ce qui prouve la commutativité du carré de droite du diagramme (3.5). A présent, calculons $\alpha_1 d : C_N \rightarrow C_1$. On a

$$\begin{aligned}
\alpha_1 d &= \gamma_{N-3}^1(d_0 + qd_1 + \cdots + q^N d_N) \\
&= \beta_{N-3}^1(b_1 + [2]d_1 + \cdots + q^N d_N) \\
&= \beta_{N-3}^1(b_1 + [2]d_1 + \cdots + q^{N-1}d_{N-1}) + \beta_{N-3}^1 d_N \\
&= \beta_{N-2}^1 + d_2 \beta_{N-3}^1 \\
&= \gamma_{N-2}^1 + d_2 \gamma_{N-3}^1 \\
&= (b_1 + [N]d_1 + d_2)\gamma_{N-3}^1 \\
&= (d_0 - d_1 + d_2)\alpha_1 \\
&= b_2 \alpha_1
\end{aligned}$$

où les deux premières égalités sont des conséquences respectivement de (3.4) et du lemme 3.3. La troisième égalité résulte de $q^N = 1$, la quatrième de la définition de β_p^n et de (3.1), la cinquième du lemme 3.3, la sixième de la définition de γ_p^n et enfin la septième de $[N] = 0$. Nous avons ainsi démontré la commutativité du carré de gauche du diagramme (3.5). Supposons maintenant que le diagramme (3.3) est commutatif pour tout les rang $\leq k-1$. Nous allons montrer la commutativité des carrés du diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
C_{kN} & \xrightarrow{d} & C_{kN-1} & \xrightarrow{d^{N-1}} & C_{(k-1)N} \\
\alpha_k \downarrow & & \alpha_k \downarrow & & \alpha_{k-1} \downarrow \\
C_{2k} & \xrightarrow{b=b_{2k}} & C_{2k-1} & \xrightarrow{b=b_{2k-1}} & C_{2(k-1)}
\end{array} \tag{3.6}$$

Pour cela, remarquons encore, qu'en vertu de (3.1) et (3.5), on a la relation

$$\alpha_k d_i = d_{i-k(N-2)} \alpha_k \tag{3.7}$$

pour tout $k \geq 1$ et $i > kN - 2$. Calculons $\alpha_{k-1} d^{N-1} : C_{kN-1} \rightarrow C_{2(k-1)}$. On a

$$\begin{aligned}
\alpha_{k-1} d^{N-1} &= \alpha_{k-1}(d_0 + qd_1 + \cdots + q^{(k-1)N} d_{(k-1)N} + q^{(k-1)N+1} d_{(k-1)N+1}) d^{N-2} \\
&= \alpha_{k-1}(d_0 + qd_1 + \cdots + q^{(k-1)N} d_{(k-1)N}) d^{N-2} + q \alpha_{k-1} d_{(k-1)N+1} d^{N-2} \\
&= b_{2(k-1)} \alpha_{k-1} d^{N-2} + q \alpha_{k-1} d_{(k-1)N+1} d^{N-2} \\
&= b_{2(k-1)} \alpha_{k-1} d^{N-2} + q d_{2k-1} \alpha_{k-1} d^{N-2} \\
&= (b_{2(k-1)} + q d_{2k-1}) \alpha_{k-1} d^{N-2}
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité découle de $q^N = 1$, la troisième de la commutativité du carré de gauche du diagramme (3.6) au rang $k-1$ et la quatrième de (3.7).

Par des calculs similaires, en faisant commuter chaque facteur d du produit $\alpha_{k-1}d^{N-2}$ avec α_{k-1} , on obtient :

$$\begin{aligned}
\alpha_{k-1}d^{N-1} &= (b_{2(k-1)} + qd_{2k-1})(b_{2(k-1)} + qd_{2k-1} + q^2d_{2k}) \cdots \\
&\quad (b_{2(k-1)} + qd_{2k-1} + \cdots + q^{N-1}d_{2k+N-3})\alpha_{k-1} \\
&= (b_{2k-1} + [2]d_{2k-1})(b_{2k-1} + [2]d_{2k-1} + q^2d_{2k}) \cdots \\
&\quad (b_{2k-1} + [2]d_{2k-1} + \cdots + q^{N-1}d_{2k+N-3})\alpha_{k-1} \\
&= \beta_{N-1}^{2k-1}\alpha_{k-1} \\
&= \gamma_{N-1}^{2k-1}\alpha_{k-1} \\
&= (b_{2k-1} + [N]d_{2k-1})\gamma_{N-3}^{2k-1}\alpha_{k-1} \\
&= b_{2k-1}\alpha_k .
\end{aligned}$$

Ce qui démontre la commutativité du carré de droite du diagramme (3.6). Il reste à montrer la commutativité du carré de gauche. Il faut calculer $\alpha_k d : C_{kN} \rightarrow C_{2k-1}$. On a

$$\begin{aligned}
\alpha_k d &= \gamma_{N-3}^{2k-1}\alpha_{k-1}(d_0 + qd_1 + \cdots + q^{kN}d_{kN}) \\
&= \gamma_{N-3}^{2k-1}\alpha_{k-1}(d_0 + qd_1 + \cdots + q^{(k-1)N}d_{(k-1)N}) \\
&\quad + q^{(k-1)N}\gamma_{N-3}^{2k-1}\alpha_{k-1}(qd_{(k-1)N+1} + \cdots + q^N d_N) \\
&= \gamma_{N-3}^{2k-1}b_{2(k-1)}\alpha_{k-1} + \gamma_{N-3}^{2k-1}(qd_{2k-1} + \cdots + q^N d_{2k-2+N})\alpha_{k-1} \\
&= \beta_{N-3}^{2k-1}(b_{2k-1} + [2]d_{2k-1} + \cdots + q^{N-1}d_{2k-3+N})\alpha_{k-1} + \beta_{N-3}^{2k-1}d_{2k-2+N}\alpha_{k-1} \\
&= \beta_{N-2}^{2k-1}\alpha_{k-1} + d_{2k}\beta_{N-3}^{2k-1}\alpha_{k-1} \\
&= \gamma_{N-2}^{2k-1}\alpha_{k-1} + d_{2k}\gamma_{N-3}^{2k-1}\alpha_{k-1} \\
&= (b_{2k-1} + [N]d_{2k-1})\gamma_{N-3}^{2k-1}\alpha_{k-1} + d_{2k}\gamma_{N-3}^{2k-1}\alpha_{k-1} \\
&= (b_{2k-1} + d_{2k})\gamma_{N-3}^{2k-1}\alpha_{k-1} \\
&= b_{2k}\alpha_k ;
\end{aligned}$$

la première égalité se déduisant de (3.4), la troisième de la commutativité du carré de gauche du diagramme (3.6) au rang $k-1$, de $q^N = 1$ et de (3.7), la cinquième de la définition de β_p^n et de (3.1), la sixième du lemme 3.3, la septième de la définition de γ_p^n , la huitième de $[N] = 0$ et la dernière de (3.4). Ceci prouve la commutativité du carré de gauche du diagramme (3.6) et termine la démonstration. \square

4. — Rapport entre différentes déformations de différentielles simpliciales

Dans cette partie, nous explicitons des morphismes entre les complexes simpliciaux munis des différentes différentielles $d_{(\ell)}$ définies dans [KsW]. En particulier, nous retrouvons les résultats de Dubois-Violette [D1, D2] pour ce qui concerne le calcul de l'homologie du complexe muni de la différentielle $d_{(N-1)}$.

Soit $C = (C_*, d_*, s_*)$ un k -module simplicial. Rappelons que si l'on pose

$$d_{(\ell)} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i d_i + q^n [\ell] d_n : C_n \rightarrow C_{n-1},$$

on définit un N -complexe $C_*^{(\ell)} = (C_*, d_{(\ell)})$ pour tout $\ell \in \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. Les complexes $C_*^{(0)}$ et $C_*^{(1)}$ sont alors respectivement les complexes C'_* et C_* , tandis que le complexe $C_*^{(N-1)}$ est la version homologique du complexe défini dans [D1]. On a le théorème suivant.

THÉORÈME 4.1. — *Pour tout $p = 1, \dots, N-1$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on l'isomorphisme*

$${}_p H_n(C_*^{(N-1)}) \cong {}_p H_{n+N-p-1}(C_*^{(1)}).$$

Comme par définition ${}_p H_*(C_*^{(1)}) = {}_p H_*(C)$, du théorème 2.1, on déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.2. — *Pour tout entier naturel n , et tout p tel que $1 \leq p \leq N-1$, on a*

$${}_p H_n(C^{(N-1)}) = \begin{cases} H_{(2n+N-p)/N}(C) & \text{si } n \equiv p \text{ modulo } N \\ H_{2n/N}(C) & \text{si } n \equiv 0 \text{ modulo } N \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Afin de démontrer le théorème 4.1, considérons l'application $\delta : C_*^{(\ell)} \rightarrow C_*^{(\ell+1)}[1]$ définie par $\delta|_{C_n} = d_n$. Remarquons que δ est indépendante de ℓ .

LEMME 4.3. — *Pour tout $\ell \in \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, l'application $\delta : C_*^{(\ell)} \rightarrow C_*^{(\ell+1)}[1]$ est un morphisme de N -complexes.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{d_{(\ell)}} & C_{n-1} \\ d_n \downarrow & & \downarrow d_{n-1} \\ C_{n-1} & \xrightarrow{d_{(\ell+1)}} & C_{n-2} \end{array}$$

est commutatif pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $\ell \in \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. Calculons

$$\begin{aligned} d_{(\ell+1)} d_n &= \sum_{i=0}^{n-2} q^i d_i d_n + q^{n-1} [\ell+1] d_{n-1} d_n \\ &= d_{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} q^i d_i + q^{n-1} [\ell+1] d_{n-1} d_n \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les règles de commutation simpliciales. Or, comme on a $[\ell + 1] = 1 + q[\ell]$ et $d_{n-1}d_n = d_{n-1}^2$, il vient

$$q^{n-1}[\ell + 1]d_{n-1}d_n = q^{n-1}d_{n-1}^2 + q^n[\ell]d_{n-1}d_n.$$

Par conséquent, on a

$$d_{(\ell+1)}d_n = d_{n-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} q^i d_i + q^n[\ell]d_n \right) = d_{n-1}d_{(\ell)}.$$

□

Nous pouvons à présent démontrer le théorème 4.1.

Démonstration du théorème 4.1. — Considérons le noyau de l'application δ définie ci-dessus. Comme $d_{(\ell)}|_{\text{Ker}(\delta)} = d'$, ce noyau est le sous- N -complexe $K_* = (\text{Ker}(\delta), d')$ de $C_*^{(\ell)}$. Pour tout $\ell \in \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, on a la suite de N -complexes

$$0 \rightarrow K_* \hookrightarrow C_*^{(\ell)} \xrightarrow{\delta} C_*^{(\ell+1)}[1] \rightarrow 0.$$

Cette suite est exacte car le morphisme δ est surjectif. En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $d_n \circ s_{n-1} = \text{id}_{C_{n-1}}$. D'après [KsW, §1.8], on en déduit la longue suite exacte en homologie

$$\begin{array}{ccccc} {}_p H_*(K) & \rightarrow & {}_p H_*(C^{(\ell)}) & \xrightarrow{\delta} & {}_p H_*(C^{(\ell+1)}[1]) \\ \partial_2 \uparrow & & & & \downarrow \partial_1 \\ {}_p H_*(C^{(\ell+1)}[1]) & \xleftarrow{\delta} & {}_p H_*(C^{(\ell)}) & \leftarrow & {}_p H_*(K) \end{array} \quad (4.1)$$

où ∂_1 et ∂_2 sont des morphismes de degrés $-p$ et $p - N$ respectivement. En particulier, lorsque $\ell = 0$, le complexe $C_*^{(\ell)} = C'_*$ est acyclique alors que, lorsque $\ell = N - 1$, c'est le complexe $C_*^{(\ell+1)}[1] = C'_*[1]$ qui est acyclique. La suite exacte (4.1) permet d'en déduire les deux isomorphismes de groupes d'homologie

$${}_p H_n(K) \cong {}_p H_n(C^{(N-1)}) \quad \text{et} \quad {}_p H_n(K) \cong {}_p H_{n+N-p-1}(C^{(1)})$$

pour tout $p = 1, \dots, N - 1$. Ce qui démontre le théorème. □

Références bibliographiques

- [CE] H. CARTAN, S. EILENBERG. — *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [C] A. CONNES. — *Cohomologie cyclique et foncteurs Ext^n* , C. R. Acad. Sc. Paris, t. **296**, 1983, p. 953–958.
- [D1] M. DUBOIS-VIOLETTE. — *Generalized Differential Spaces with $d^N = 0$ and the q -Differential Calculus*, Czechoslovak J. Phys., t. **46**, 1996, p. 1227–1233.
- [D2] M. DUBOIS-VIOLETTE. — *$d^N = 0$: Generalized Homology, K-Theory*, t. **14**, 1998, p. 371–404.
- [Kp] M. M. KAPRANOV. — *On the q -Analog of Homological Algebra*, Preprint xxx, q-alg/9611005, 1996.
- [Ks] Chr. KASSEL. — *Cyclic Homology, Comodules, and Mixed Complexes*, J. Algebra, t. **107**, 1987, p. 195–216.
- [KsW] Chr. KASSEL, M. WAMBST. — *Algèbre homologique des N -complexes et homologie de Hochschild aux racines de l'unité*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., t. **34**, 1998, p. 91–114.
- [L] J.-L. LODAY. — *Cyclic Homology*, Springer Verlag, 1992.
- [M] S. MAC LANE. — *Homology*, Springer Verlag, 1963.