



Estimateurs séquentiels à noyau et aux polynômes locaux pour le problème d'estimation nonparamétrique de la dérive d'un processus de diffusion .

Leonid Galtchouk, Sergei Pergamenshchikov

► To cite this version:

Leonid Galtchouk, Sergei Pergamenshchikov. Estimateurs séquentiels à noyau et aux polynômes locaux pour le problème d'estimation nonparamétrique de la dérive d'un processus de diffusion .. Sequential Analysis, 2005, 24 (3), pp.303-330. <10.1081/SQA-200063289>. <hal-00129636>

HAL Id: hal-00129636

<https://hal.science/hal-00129636v1>

Submitted on 8 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Estimateurs séquentiels à noyau et aux
polynômes locaux pour le problème
d'estimation nonparamétrique de la dérive
d'un processus de diffusion *

L. Galtchouk, S. Pergamenshchikov

IRMA,

Département de Mathématiques,

Université de Strasbourg

7 rue René Descartes

Strasbourg Cedex France

e-mail: galtchou@math.u-strasbg.fr

and

Department of Applied Mathematics and Cybernetics,

Tomsk University, Lenin str. 36, 634050 Tomsk, Russia

e-mail: pergam@vmm.tsu.ru

Abstract

A sequential procedure for estimating the drift function of a diffusion process is constructed. The asymptotic properties such as the asymptotic minimax of the procedure and the asymptotic normality of observation time are established.

Key words: nonparametric sequential estimation, asymptotic minimax.

AMS (1991) Subject Classification : primary 62G07; secondary 62G20

*Ce recherche a été effectuée au Département de Mathématiques, Université Louis Pasteur de Strasbourg et fait partie du projet "Décision séquentielle pour des problèmes de Fiabilité-Qualité." Le seconde auteur était partiellement soutenu par le RFFI-Grant 00-01-880.

1 Introduction

Le papier est consacré à une étude du problème d'estimation non paramétrique du coefficient de dérive d'un processus de diffusion homogène ergodique (ou de la fonction de régression sous un bruit gaussien) au point fixé d'espace .

D'après les publications sur l'estimation nonparamétriques du coefficient de dérive d'un processus de diffusion il existe deux directions principales de recherches.

Dans les travaux de première direction on considère le cas où le coefficient de dérive S dépend que du temps, $S = S(t)$, et appartient à un espace fonctionnel de régularité spécifiée.

Le problème est d'estimer $S(t_0)$ au point fixé t_0 , voir Ibragimov et Khasminskii (1981), Brockman, Grosser et Herrmann (1993), Brown et Low (1996), Lepski (1990), Lepski et Spokoiny (1997), Low (1992), Nemirovskii (1985), Tsybakov (1998) pour les details et d'autres références.

Pinsker (1981) et Golubev (1991) étudient le problème d'estimation de la fonction S sous le risque quadratique.

La précision d'estimation et l'estimateur optimal dépend fortement de la régularité de l'espace fonctionnel.

La seconde direction s'agit du cas où la fonction inconnue S dépend de la variable spaciale, $S = S(x)$, appartenant à un espace fonctionnel de régularité spécifiée.

Dans ce cadre Banon (1978), Kutoyants (1997, 1998), et Negri (1998) ont estimé la distribution stationaire (ou la densité stationaire) au point spacial donné. Ce modèle est considéré aussi par Delattre et Hoffmann (2000) pour le cas nonergodique.

Nous voudrions mentionner aussi le papier de Liptser et Spokoiny (1997) dans lequel la fonction inconnue S dépend d'un processus perturbé .

Notons que le problème d'estimation nonparamétrique d'une autorégression nonlinéaire en temps discret est un cas particulier du problème d'estimation nonparamétrique du coefficient de dérive S (voir Härdle, Tsybakov (1997), Delyon et Juditsky (2000)).

Notre approche est basé sur des estimateurs au noyau. Ces estimateurs sont difficiles pour leurs études parce qu'ils sont des fonctions non-linéaires des observations.

En pratique généralement, il est impossible de calculer la précision d'estimation lorsque la durée d'observation est fixé. Par conséquent, on n'arrive pas de résoudre le problème du choix optimal de largeur de fenêtre qui garantie une meilleure vitesse de convergence (voir, par exemple, Lepski, Spokoiny (1997)).

Pour contourner cette difficulté une voie a été proposée par Liptser et

Spokoyny (1997). Ils ont choisi la largeur de fenêtre en minimisant la précision asymptotique, lorsque la durée d'observation tend vers l'infini. Ils ont obtenu la largeur de fenêtre de la forme $h \approx T^{-\frac{1}{3}}$ sous condition que le coefficient de dérive est une fonction lipschitzienne.

Dans ce papier il est montré que la précision optimale est assurée par une largeur de fenêtre $h \approx T^{-\frac{1}{2}}$, lorsque la durée d'observation est faible, ($T \rightarrow 0$).

Dans le cas general, lorsque la durée d'observation T est fixé, il n'est pas clair lequel de ces deux comportement asymptotiques peut etre appliquée.

Pour trouver une largeur de fenêtre optimale (au sens de précision optimale), nous proposons une approche d'analyse séquentielle basé sur des estimateurs à noyau pour le coefficient de dérive.

Dans le cas paramétrique des estimateurs séquentiels étaient proposés par Shiryaev et Liptser (1978) et Novikov (1971). L'idée de base de cette approche est de présenter l'estimateur du maximum de vraisemblance sous forme d'une intégrale stochastique en utilisant un temps d'arrêt spécial. Cela permet de calculer la précision d'estimation et ensuite choisir une largeur de fenêtre optimale à partir de "l'équation de balance".

Dans ce papier nous considerons la situation nonparamétrique and étudions les propriétés d'optimalité des estimateurs séquentiels à noyau. Pour étudier l'optimalité de cette procédure nous utilisons l'approche asymptotique minimax proposé par Ibragimov et Khasminskii (1981) dans le cas paramétrique et développée par Efroimovich (1980), Spokoyny (1992,1994) pour des schémas d'estimation séquentielle. Pour appliquer cette approche aux situations nonparamétriques nous introduisons des risques globaux and locaux des procédures séquentielles and obtenons leurs bornes inférieures.

Il est bien connu que dans le cas paramétrique les méthodes séquentielles n'ont asymptotiquement aucune avantage en comparaison avec les estimateurs basés sur les échantillons de taille fixé (voir, par exemple, Efroimovich (1980)). Efroimovich (1989) a démontré le même résultat pour des estimateurs de densité en cas nonparamétrique.

Dans ce papier nous montrons que les estimateurs séquentiels à noyau peuvent avoir des avantages en comparaison avec des estimateurs nonséquentiels dans le cas des risques nonasymptotique. Un exemple est donné pour illustrer cette situation. Il est montré que des estimateurs nonséquentiels ont le risque nonasymptotique infini tandis que le risque est fini pour le schéma d'estimation séquentielle.

Le papier est organisé de la façon suivante. Dans la section suivante nous donnons l'énoncé du problème d'estimation , définissons les estimateurs non-séquentiel et séquentiel à noyau et formulons le problème du choix optimal de largeur de fenêtre. En Section 3 nous étudions les propriétés des règles

d'arrêt séquentiels. En Section 4 un exemple du risque nonasymptotique est donné pour comparer la qualité des procédures séquentielles et nonséquentielles. En Section 5 nous prouvons que la borne inférieure du risque global est strictement positive. En Section 6 la borne inférieure est trouvée pour le risque local. En Section 7 nous explicitons la formule de la borne inférieure pour le risque local sous condition que le coefficient de dérive appartient à une classe de Hölder. En Section 8 nous utilisons des estimateurs aux polynômes locaux pour obtenir une vitesse de convergence optimale. Annexe contient les preuves de certains résultats auxiliaires.

2 Enoncé du problème

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions habituelles de continuité à droite et complétude. Soit $(w_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ un processus de Wiener standard.

Supposons que le processus d'observation $(y_t)_{t \geq 0}$ est gouverné par l'équation stochastique différentielle

$$dy_t = S(y_t) dt + dw_t, \quad (2.1)$$

où la fonction $S(\cdot)$ satisfait la condition de Lipschitz, la valeur initiale y_0 est une constante. L'équation (2.1) admet une solution forte. Nous désignons par $(\mathcal{F}_t^y)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle du processus $(y_t)_{t \geq 0}$ et par \mathbf{E}_S l'espérance par rapport à la loi du processus $(y_t)_{t \geq 0}$ sous la dérive S .

Supposons que la fonction $S(\cdot)$ est inconnue et le problème est de l'estimer au point fixé x_0 , i.e. d'estimer $S(x_0)$.

Avant de construire un estimateur pour S à (2.1) il est utile de rappeler la solution du problème similaire de détection du signal 1-périodique $f(t)$ en équation:

$$dx_t = f(t) dt + dw_t, \quad t \in [0, T].$$

Pour estimer la fonction $f(t)$ au point t_0 on utilise souvent l'estimateur à noyau

$$\tilde{f}_h(t_0) = \frac{\int_0^T K_h(t, t_0) dx_t}{\int_0^T K_h(t, t_0) dt},$$

où

$$K_h(t, t_0) = \sum_{k=1}^{\infty} Q\left(\frac{t - t_0 - k + 1}{h}\right) \mathbf{1}_{(k-1, k]}(t),$$

$h = h(T)$ est choisi de façon que $h(T) \rightarrow 0$, lorsque $T \rightarrow \infty$ et h dépend de l'espace de signal, T est multiple à la période 1 du $f(\cdot)$, $Q(z)$ est une fonction

positive, telle que $Q(z) = 0$ pour $|z| \geq 1$. Par exemple, $Q(z) = \mathbf{1}_{\{|z| \leq 1\}}$, où $\mathbf{1}_A$ est l'indicatrice de l'ensemble A .

Considerons l'erreur

$$\tilde{f}_h(t_0) - f(t_0) = B(h) + \xi(h),$$

où $B(h)$ est la précision d'approximation :

$$B(h) = \frac{\int_0^T K_h(t, t_0)(f(t) - f(t_0))dt}{\int_0^T K_h(t, t_0)dt},$$

$\xi(h)$ est le terme stochastique :

$$\xi(h) = \frac{\int_0^T K_h(t, t_0)dw_t}{\int_0^T K_h(t, t_0)dt},$$

et $\xi(h) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(h, T))$ avec

$$\sigma^2(h, T) = \frac{\kappa^2(Q)}{hT}, \quad \kappa^2(Q) = \frac{\int_{-1}^1 Q^2(z)dz}{(\int_{-1}^1 Q(z)dz)^2}.$$

Notons que l'infimum du $\kappa(Q)$ par rapport à Q est égal à $1/2$ et il est atteint par $Q(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$. Dans la suite nous posons $Q(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$. Pour terminer la construction d'un estimateur il reste de déterminer une largeur de fenêtre h . Une approche habituelle pour cela est basée sur les conditions de régularité imposées sur la fonction f , par exemple, que cette fonction satisfait la condition de Lipshitz avec une constante L . Le choix standard d'une largeur de fenêtre en estimation nonparamétrique est motivé par relation de balance entre le biais et le terme stochastique dans la décomposition de l'erreur $\tilde{f}_h(t_0) - f(t_0)$. Sous certaines conditions on peut estimer le biais $B(h)$ par Lh et obtenir l'équation de balance standard

$$Lh = \frac{1}{\sqrt{\pi \int_0^T K_h(t, t_0)dt}}. \quad (2.2)$$

Ceci implique que pour obtenir la vitesse optimale, il faut choisir h comme la fonction de T suivante :

$$h = T^{-1/3}. \quad (2.3)$$

Par analogie avec ce cas, nous considérons l'estimateur à noyau

$$\hat{S}_T(x_0) = \frac{\int_0^T Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) dy_t}{\int_0^T Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) dt} \mathbf{1}_{A_T}, \quad (2.4)$$

où

$$A_T = \left\{ \int_0^T Q \left(\frac{y_t - x_0}{h} \right) dt > 0 \right\}.$$

Pour obtenir un bon estimateur pour la fonction $S(\cdot)$ au point x_0 , il est nécessaire d'imposer de certaines conditions sur la fonction $S(\cdot)$ qui sont similaires à la périodicité de la fonction $f(t)$ dans le problème de détection ci-dessus. Une des conditions suffisantes pour cela est que le processus (y_t) en (2.1) se retourne infiniment à tout voisinage du point x_0 . L'ergodicité du (y_t) assure cette propriété.

Soient L et γ deux constantes positives avec $\gamma < L$. Nous introduisons deux classes de fonctions :

$$\Sigma_{L,\gamma} = \{S : |S(0)| \leq L, -L \leq \frac{S(x) - S(y)}{x - y} \leq -\gamma, \forall x, y \in \mathbf{R}\} \quad (2.5)$$

et

$$\begin{aligned} \Sigma_{L,\gamma,\alpha} &= \{S \in \Sigma_{L,\gamma} : S \text{ est différentiable, tel que} \\ &|\dot{S}(x) - \dot{S}(y)| \leq L|x - y|^\alpha, \forall x, y \in \mathbf{R}\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

où $\alpha \in]0, 1[$.

Si $S \in \Sigma_{L,\gamma}$, il existe la densité ergodique

$$q(x) = \exp\{2 \int_0^x S(z) dz\} / q_\infty, \quad (2.7)$$

où

$$q_\infty = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{2 \int_0^y S(z) dz\} dy.$$

(voir, [8]).

Pour terminer la construction de l'estimateur (2.4) pour modèle (2.1), nous avons à choisir une largeur de fenêtre h . Premièrement nous obtenons l'équation de balance.

Dans ce cas l'erreur est égale à

$$\hat{S}_T(x_0) - S(x_0) = B_T(h) + \xi_T(h),$$

où le terme $B_T(h)$ de précision d'approximation et le terme stochastique $\eta_T(h)$ sont définis de la façon suivante :

$$B_T(h) = \frac{\int_0^T Q \left(\frac{y_t - x_0}{h} \right) (S(y_t) - S(x_0)) dt}{\int_0^T Q \left(\frac{y_t - x_0}{h} \right) dt}, \quad (2.8)$$

$$\xi_T(h) = \frac{1}{\sqrt{\int_0^T Q^2 \left(\frac{y_t - x_0}{h} \right) dt}} \eta_T(h), \quad (2.9)$$

$$\eta_T(h) = \frac{\int_0^T Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) dw_t}{\sqrt{\int_0^T Q^2\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) dt}}. \quad (2.10)$$

Il est clair que $B_T(h) \leq Lh$ si $S \in \Sigma_{L,\gamma}$. Dans ce cas il est difficile de trouver la forme explicite de la quantité $\mathbf{E}_S|\hat{S}_T(x_0) - S(x_0)|$ parce que le dénominateur est aléatoire dans le terme stochastique.

Nous allons étudier le comportement asymptotique de la moyenne d'erreur. Le processus y_t étant ergodique on a

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Q^2\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) dt &= \int_R Q^2\left(\frac{y - x_0}{h}\right) q(y) dy = \\ &= h \int_{-1}^1 q(x_0 + hz) dz, \end{aligned}$$

$\forall h > 0$.

Par suite, dans (2.10) le terme $\eta_T(h)$ est tel que

$$\eta_T(h) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \xi,$$

où $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (voir, par exemple, [22]).

Cette relation implique l'approximation suivante :

$$\xi_T(h) \approx \frac{\xi}{\sqrt{2q(x_0)Th}}$$

lorsque $h \rightarrow 0$.

Prenant en compte cette égalité asymptotique nous choisissons la longueur de fenêtre de la relation

$$h = \frac{1}{\sqrt{Th}}, \quad \text{i.e. } h = T^{-1/3},$$

pour obtenir la vitesse de convergence optimale pour l'estimateur (2.4).

Ce choix de la largeur de fenêtre du comportement asymptotique ne marche plus dans le cadre nonasymptotique, lorsque T ne tend pas vers l'infini.

Si T est petit ($T \rightarrow 0$) pour $y_0 = x_0$, nous avons

$$\xi_T(h) \approx \frac{\xi}{\sqrt{T}}.$$

Donc,

$$h \approx \frac{1}{\sqrt{T}}.$$

Pour une position nonasymptotique du problème d'estimation nous proposons un choix différent de largeur de fenêtre basé sur l'approche de l'analyse séquentielle. Dans ce cas le dénominateur dans (2.10) est réduit à une constante $H > 0$ par remplacement T au temps d'arrêt spécial τ_H , où

$$\tau_H = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) dt \geq H\}. \quad (2.11)$$

Dans ce cas l'estimateur à noyau devient de forme suivante

$$S_H^*(x_0) = \frac{1}{H} \int_0^{\tau_H} Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) dy_t. \quad (2.12)$$

Il reste de choisir la largeur de fenêtre h pour cet estimateur.

Dans ce cas l'erreur est la suivante :

$$S_H^*(x_0) - S(x_0) = B_H^* + \xi_H^*/\sqrt{H}, \quad (2.13)$$

où

$$B_H^* = H^{-1} \int_0^{\tau_H} Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) (S(y_t) - S(x_0)) dt,$$

$$\xi_H^*(h) = H^{-1/2} \int_0^{\tau_H} Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) dw_t \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

On peut montrer que

$$\mathbf{E}_S |S_H^*(x_0) - S(x_0)| \leq Lh + (1/\sqrt{H})\sqrt{2/\pi}. \quad (2.14)$$

Donc, dans ce cas pour obtenir la relation de balance entre le terme d'approximation et le terme stochastique, on a à choisir

$$h = 1/\sqrt{H}.$$

Dans la suite il sera établi que la largeur de fenêtre h de type

$$h = 1/H^\theta$$

assure une constante optimale pour le risque local, lorsque $0 < \theta \leq 1/2$. Dans les sections suivantes nous étudierons les propriétés du temps d'arrêt τ_H pour des procédures d'un tel h .

3 Les propriétés de τ_H

Comme avant

$$\tau_H = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) dt \geq H\},$$

où $Q(z) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(z)$.

Theorem 3.1 *Quel que soit $0 < \theta \leq 1/2$, et $h = \frac{1}{H^\theta}$,*

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} \sup_{S \in \Sigma_{L,\gamma}} \mathbf{E}_S \left| \frac{\tau_H}{l_H} - 1 \right| = 0, \quad (3.1)$$

où

$$l_H = H^{1+\theta} / 2q(x_0).$$

Pour prouver ce théorème on a besoin de plusieurs résultats auxiliaires. On désigne

$$\Delta_T(\varphi) = T^{-1/2} \int_0^T (\varphi(y_t) - m(\varphi)) dt, \quad (3.2)$$

où la fonction $\varphi = \varphi_H(y)$ est telle que

$$|||\varphi||| = \sup_{H>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(y)| dy < \infty \quad (3.3)$$

et

$$m(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) q(y) dy.$$

Par exemple,

$$\varphi(y) = \varphi_H(y) = \frac{1}{h} Q\left(\frac{y - x_0}{h}\right). \quad (3.4)$$

Lemma 3.1 *Si la fonction φ satisfait la condition (3.4), alors il existe une constante $\kappa > 0$ telle que, pour tout $\lambda > 0$,*

$$\sup_{H>0} \sup_{T>1} \sup_{S \in \Sigma_{L,\gamma}} \mathbf{P}_S \{ |\Delta_T(\varphi)| > \lambda \} \leq 2e^{-\kappa\lambda^2}.$$

Lemma 3.2 *Pour tout $\delta > 0$,*

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} \sup_{S \in \Sigma_{L,\gamma}} \mathbf{P}_S \left\{ \left| \frac{\tau_H}{l_H} - 1 \right| > \delta \right\} = 0.$$

Lemma 3.3 *Pour tout $m \geq 1$,*

$$\sup_{H \geq 1} \sup_{S \in \Sigma_{L,\gamma}} \mathbf{E}_S \left(\frac{\tau_H}{l_H} \right)^m < \infty.$$

Les preuves de ces Lemmes sont donnés en Annexe.

La preuve du Théorème 3.1 suit facilement des Lemmes 3.2 et 3.3.

Introduisons la fonction

$$v^*(y) = \begin{cases} \frac{4q(x_0)}{q(y)} \int_y^{+\infty} q(z)dz, & y > x_0, \\ 4 \int_{x_0}^{+\infty} q(z)dz - 2, & y = x_0, \\ -\frac{4q(x_0)}{q(y)} \int_{-\infty}^y q(z)dz, & y < x_0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Cette fonction est bornée pour tout $S \in \Sigma_0$ et donc, il existe l'intégrale

$$m^* = \int_{-\infty}^{+\infty} v^{*2}(z)q(z)dz. \quad (3.6)$$

Theorem 3.2 *Supposons que S est continuellement différentiable. Si $1/3 \leq \theta \leq 1/2$, alors*

$$l_H^{-1/2}(\tau_H - l_H) \implies \mathcal{N}(0, m^*/4q(x_0)), \quad H \rightarrow +\infty.$$

Lemma 3.4 *Sous les conditions du Théorème 3.2*

$$l_H^{-1/2}(\int_0^{\tau_H} (\varphi_H(y_t) - m_H)dt) \implies \mathcal{N}(0, m^*), \quad (3.7)$$

lorsque $H \rightarrow +\infty$, où $m_H = m(\varphi_H)$.

La preuve de ce Lemme est donné en Annexe.

Preuve du Théorème 3.2. Par définition du τ_H on a

$$\tau_H - \frac{H}{hm_H} = -\frac{1}{m_H} \int_0^{\tau_H} (\varphi_H(y_t) - m_H)dt.$$

Ensuite, remarquons que

$$m_H = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_H(y)q(y)dy = \int_{-1}^1 q(x_0 + hz)dz = 2q(x_0) + h^2 \int_{-1}^1 z^2 \tilde{q}_H(z)dz,$$

où

$$\tilde{q}_H(z) = \frac{q(x_0 + hz) - q(x_0) - \dot{q}(x_0)hz}{h^2 z^2}.$$

Il est facile à montrer que

$$\sup_{H>0, z \in [-1,1]} |\tilde{q}_H(z)| < \infty.$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\tau_H - l_H}{\sqrt{l_H}} &= -\frac{1}{m_H} \frac{\int_0^{\tau_H} (\varphi_H(y_t) - m_H) dt}{\sqrt{l_H}} + \\ &+ \frac{H}{h\sqrt{l_H}} (1/m_H - 1/2q(x_0)). \end{aligned}$$

Cette égalité et Lemme 3.4 impliquent Théorème 3.2.

Pour comparer les estimateurs séquentiels and non-séquentiels on a besoin d'étudier d'autres propriétés du temps d'arrêt τ_H , lorsque $H \rightarrow 0$.

On pose

$$y_0 = y^* = |\ln H|/\sqrt{H}, \quad x_0 = x^* = \frac{\alpha + |\ln H|}{\sqrt{H}}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (3.8)$$

et $S(x) = S_L(x) = -Lx$.

On a le modèle

$$dy_t = -Ly_t dt + dw_t. \quad (3.9)$$

La solution de cet équation a la forme

$$y_t = y_0 \exp\{-Lt\} + \xi_t,$$

où

$$d\xi_t = -L\xi_t dt + dw_t, \quad \xi_0 = 0.$$

Nous désignons $\mathbf{E}_L = \mathbf{E}_{S_L}$ et $\mathbf{P}_L = \mathbf{P}_{S_L}$ avec la valeur initiale (3.8). Nous allons étudier les propriétés du temps d'arrêt τ_H pour $h = H^{-1/2}$.

Theorem 3.3 *Soit $h = H^{-1/2}$. Alors pour le processus défini par (3.8)-(3.9)*

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{\mathbf{E}_L \tau_H}{H} = 1.$$

Désignons

$$\Gamma_H = \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 2H} |\xi_t| \leq H^{-1/4} \right\}. \quad (3.10)$$

Lemma 3.5 *Sous les conditions du Théorème 3.3*

$$\mathbf{P}_L\{\Gamma_H^c\} \leq 2 \exp\{-H^{-3/2}/8\},$$

pour tout $H > 0$.

La preuve de ce Lemme est donné en Annexe.

Preuve du Théorème 3.3. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_L \tau_H &= \int_0^{+\infty} \mathbf{P}_L \{\tau_H > t\} dt = \int_0^H \mathbf{P}_L \{\tau_H > t\} dt \\ &\quad + \int_H^{t^*(H)} \mathbf{P}_L \{\tau_H > t\} dt + \int_{t^*(H)}^{+\infty} \mathbf{P}_L \{\tau_H > t\} dt, \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $t^*(H) = \exp\{H^{-5/4}\}$.

Notons que pour H suffisamment petit et $0 \leq s \leq H$ on a

$$\sqrt{H}|y_s - x_0| \leq H^{1/4} + |\ln H|(1 - e^{-LH}) + \alpha < 1$$

sur l'ensemble Γ_H . Donc, d'après Lemme 3.5,

$$\begin{aligned} \int_0^H \mathbf{P}_L \{\tau_H > t\} dt &= \int_0^H \mathbf{P}_L \{\tau_H > t, \Gamma_H\} dt + o(H) \\ &= \int_0^H \mathbf{P}_L \left\{ \int_0^t Q(\sqrt{H}(y_s - x_0)) ds < H, \Gamma_H \right\} dt + o(H) \\ &= H \mathbf{P}_L \{ \Gamma_H \} + o(H) = H + o(H). \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \int_H^{t^*(H)} \mathbf{P}_L \{\tau_H > t\} dt &\leq t^*(H) \mathbf{P}_L \{\tau_H > H\} \\ &= t^*(H) \mathbf{P}_L \left\{ \int_0^H Q(\sqrt{H}(y_s - x_0)) ds < H \right\} \\ &\leq t^*(H) \mathbf{P}_L \{ \Gamma_H^c \} \leq 2 \exp\{H^{-5/4} - H^{-3/2}/8\} = o(H). \end{aligned}$$

Considerons le dernier terme en (3.11). Nous avons

$$\int_{t^*(H)}^{+\infty} \mathbf{P}_L \{\tau_H > t\} dt \leq \int_{t^*(H)}^{+\infty} \mathbf{P}_L \{ |\Delta_t(\varphi_H)| > (tm_H - H\sqrt{H})/\sqrt{t} \} dt,$$

où

$$m_H = \sqrt{L/\pi} \int_{-1}^1 \exp\{-L(x_0 + u/\sqrt{H})^2\} du.$$

D'après Lemme 3.1,

$$\begin{aligned} \int_{t^*(H)}^{+\infty} \mathbf{P}_L \{\tau_H > t\} dt &\leq 2 \int_{t^*(H)}^{+\infty} \exp\{-\kappa(tm_H - H\sqrt{H})^2/t\} dt \\ &\leq 2 \int_{t^*(H)}^{+\infty} \exp\{-\kappa m_H^2 t/2\} dt = \frac{4}{\kappa m_H^2} \exp\{-\kappa m_H^2 t^*(H)/2\}. \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{H} \int_{t^*(H)}^{+\infty} \mathbf{P}_L \{\tau_H > t\} dt = 0.$$

Donc, Théorème 3.3.

4 Comparaison des estimateurs séquentiels et non-séquentiels.

Dans cette section nous allons comparer l'estimateur à noyau (2.4) avec l'estimateur séquentiel (2.12) lorsque $Q(x) = \mathbf{1}_{(|x| \leq 1)}$. Nous définissons le risque nonasymptotique comme

$$\overline{\mathbf{R}}(\hat{S}) = \sup_{H>0} \overline{\mathbf{r}}(\hat{S}, H), \quad (4.1)$$

où

$$\overline{\mathbf{r}}(\hat{S}, H) = \sup_{y_0 \in \mathbf{R}} \sup_{x_0 \in \mathbf{R}} \sup_{S \in \Sigma_{L,\gamma}} \mathbf{E}_{S,y_0} \sqrt{H} |\hat{S}_T(x_0) - S(x_0)|,$$

\mathbf{E}_{S,y_0} est l'espérance par rapport à la loi du processus (3.9) issue de y_0 .

Notons que le risque est borné pour l'estimateur séquentiel S^* :

$$\overline{\mathbf{R}}(S^*) = \sup_{H>0} \overline{\mathbf{r}}(S^*, H) \leq L + \sqrt{2/\pi}. \quad (4.2)$$

Theorem 4.1 *Soit $h = T^{-1/3}$ et $T = \mathbf{E}_S \tau_H$. Alors pour l'estimateur à noyau \hat{S} ,*

$$\overline{\mathbf{R}}(\hat{S}) = \infty. \quad (4.3)$$

Preuve Estimons le risque (4.1). Pour tout $H > 0$ on a

$$\overline{\mathbf{R}}(\hat{S}) \geq \mathbf{E}_L^* \sqrt{H} |\hat{S}_T(x^*) - S_0(x^*)| \geq \mathbf{E}_L^* \sqrt{H} |\hat{S}_T(x^*) - Lx^*| \mathbf{1}_{\Gamma_H},$$

où $\mathbf{E}_L^* = \mathbf{E}_{S_L, y^*}$, $S_L = -Lx$, $y_0 = y^*$, x^* sont définis dans (3.8) et Γ_H dans (3.10).

D'après Théorème 3.3, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{|y_t - x_0|}{h} &= (\mathbf{E}_L^* \tau_H)^{1/3} \left| \frac{\alpha + |\ln H|(1 - e^{-Lt})}{\sqrt{H}} - \xi_t \right| \\ &\geq \left(\frac{\mathbf{E}_L^* \tau_H}{H} \right)^{1/3} \left(\frac{\alpha}{H^{1/6}} - H^{1/12} \right) \rightarrow +\infty, \quad H \rightarrow 0, \end{aligned}$$

sur l'ensemble Γ_H pour $0 \leq t \leq T$ et $y_0 = y^*$, $x_0 = x^*$. Ceci implique

$$\int_0^T Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) dt = 0,$$

for sufficiently small $H > 0$. Therefore,

$$\overline{\mathbf{R}}(\hat{S}) \geq \sqrt{H} L x^* \mathbf{P}_L^* \{\Gamma_H\} = L(\alpha + |\ln H|) \mathbf{P}_L^* \{\Gamma_H\},$$

pour $H > 0$ suffisamment petit. D'ici et du Lemme 3.5 nous obtenons (4.3).

Remark 4.1 Notons que par (4.2), (4.3), il est facile de voir qu'il existe une constante $H_0 > 0$ telle que

$$\sup_{H \geq H_0} \bar{r}(\hat{S}, H) > \sup_{H \geq H_0} \bar{r}(S^*, H).$$

Cela signifie que l'estimateur séquentiel est meilleur que non-séquentiel pour H strictement positif.

5 Risque global

Soit $\tilde{S} = (\tilde{S}_{T_H}(x_0), T_H, H > 0)$, une procédure séquentielle, où

H est une constante positive fixée,

T_H est le temps d'observation qui est un temps d'arrêt par rapport à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^y)_{t \geq 0}$ du processus d'observation tel que pour tout $H \geq 1$,

$$\mathbf{E}_S T_H \leq D^* \mathbf{E}_S \tau_H, \quad S \in \Sigma_{L,\gamma}, \quad (5.1)$$

où

$$D^* = \sup_{H \geq 1} \frac{\sup_{S \in \Sigma_{L,\gamma}} \mathbf{E}_S \tau_H}{\inf_{S \in \Sigma_{L,\gamma}} \mathbf{E}_S \tau_H},$$

$\tilde{S}_{T_H}(x_0)$ est un estimateur du $S(x_0)$ qui est $\mathcal{F}_{T_H}^y$ -mesurable.

Théorème 3.1 et Lemme 3.3 impliquent $D^* < \infty$.

Désignons par \mathcal{M} la classe de toutes les procédures séquentielles vérifiant la propriété (5.1).

Remark 5.1 La classe \mathcal{M} contient toutes les procédures non-séquentielles. En effet, nous pouvons prendre T_H comme

$$T_H = \mathbf{E}_{S_L} \tau_H, \quad S_L(x) = -Lx.$$

Montrons que T_H vérifie (5.1) :

$$\mathbf{E}_{S_L} \tau_H = \frac{\mathbf{E}_{S_L} \tau_H}{\mathbf{E}_S \tau_H} \mathbf{E}_S \tau_H \leq D^* \mathbf{E}_S \tau_H.$$

Nous utilisons la fonction de perte $v(x) = |x|^\mu$, $\mu > 0$. A tout estimateur \tilde{S} correspond son risque asymptotique global

$$\mathbf{R}(\tilde{S}) = \limsup_{H \rightarrow +\infty} I_H, \quad (5.2)$$

où

$$I_H = \sup_{S \in \Sigma_{L,\gamma}} \mathbf{E}_S \psi_H(T_H, S),$$

$$\psi_H(T_H, S) = v(\sqrt{H}(\tilde{S}_{T_H}(x_0) - S(x_0))).$$

Maintenant nous étudierons les propriétés de ce risque.

Theorem 5.1 *Le risque asymptotique (5.2) a une borne inférieure positive, i.e.*

$$\inf_{\tilde{S} \in \mathcal{M}} \mathbf{R}(\tilde{S}) > 0.$$

Preuve Définissons la famille de fonctions

$$S_u(x) = S_*(x) + \frac{u}{\sqrt{H}} V(\nu(x - x_0)\sqrt{H}), \quad V(z) = (1 - |z|)Q(x), \quad (5.3)$$

où ν est un petit nombre positif donné et $S_*(x) = -0.5(L + \gamma)x$.

Notons que si $b \leq (L - \gamma)/(2\nu)$, alors $S_u \in \Sigma_{L,\gamma}$ pour $|u| \leq b$.

D'ici et (5.2) on a

$$I_H \geq \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathbf{E}_{S_u} \psi_H(T_H, S_u) du \geq \sum_{i=1}^K I_{i,H},$$

où

$$I_{i,H} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathbf{E}_{S_u} \mathbf{1}_i \psi_H(T_H, S_u) du,$$

$$\mathbf{1}_i = \mathbf{1}_{\{(i-1) < \kappa(H) \leq i\}}, \quad \kappa(H) = \frac{T_H}{N_*}, \quad N_* = N_*(H) = \mathbf{E}_{S_*} \tau_H,$$

K est un entier positif.

Soit $\lambda_i = iN_*$, $1 \leq i \leq K$. Il est facile de voir que $\mathbf{1}_i \psi_H(T_H, S_u)$ est $\mathcal{F}_{\lambda_i}^y = \sigma\{y_s, 0 \leq t \leq \lambda_i\}$ -mesurable pour tout i .

Les égalités (2.1) et (5.3) impliquent que la mesure \mathbf{P}_{S_u} est équivalente à la mesure \mathbf{P}_S et la dérivée de Radon-Nikodym sur la σ -tribu $\mathcal{F}_{\lambda_i}^y$ peut être écrite sous forme

$$\frac{d\mathbf{P}_{S_u}}{d\mathbf{P}_{S_*}} \Big|_{\mathcal{F}_{\lambda_i}^y} = \exp \left\{ \int_0^{\lambda_i} (S_u(y_s) - S_*(y_s)) dw_s - \frac{1}{2} \int_0^{\lambda_i} (S_u(y_s) - S_*(y_s))^2 ds \right\}. \quad (5.4)$$

Lemma 5.1 *La densité (5.4) admet la forme asymptotique suivante*

$$\rho_{i,H}(u) = \frac{d\mathbf{P}_{S_u}}{d\mathbf{P}_{S_*}} \Big|_{\mathcal{F}_{\lambda_i}^y} = e^{ui^{1/2}\Delta_{i,H} - \frac{1}{2}iu^2\sigma_\nu^2 + r_{i,H}(u)}, \quad \forall u > 0, \quad (5.5)$$

où

$$\sigma_\nu^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V^2(\nu z) dz,$$

$\Delta_{i,H}$ et $r_{i,H}(u)$ satisfont les relations asymptotiques suivantes :

$$L(\Delta_{i,H} | \mathbf{P}_{S_*}) \implies \mathcal{N}(0, \sigma_\nu^2), \quad H \rightarrow \infty, \\ \mathbf{P}_{S_*} - \lim_{H \rightarrow \infty} r_{i,H}(u) = 0. \quad (5.6)$$

La preuve de ce Lemme est donné en Annexe.

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} I_{i,H} &\geq \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathbf{E}_{S_u} \mathbf{1}_i \psi_a(T_H, S_u) du = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathbf{E}_{S_u} \mathbf{1}_i \psi_a(T_H, S_u) \rho_{i,H}(u) du \\ &\geq \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{B_d} \mathbf{1}_i \psi_a(T_H, S_u) \rho_{i,H}^0(u) du + \delta_{i,H}^0(a), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} B_d &= \{|\Delta_{i,H}| \leq d\}, \quad d = i^{1/2} \sigma_\nu^2 (b - \sqrt{b}), \\ \psi_a(T_H, S_u) &= v_a(\sqrt{H}(\hat{S}_{T_H}(x_0) - S(x_0))), \quad v_a(x) = v(x) \wedge a, \quad a > 0, \\ \rho_{i,H}^0(u) &= \exp\{ui^{1/2}\Delta_{i,H} - \frac{1}{2}iu^2\sigma_\nu^2\}, \\ \delta_{i,H}^0(a) &= \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d} \psi_a(T_H, S_u) (\rho_{i,H}(u) - \rho_{i,H}^0(u)) du, \end{aligned}$$

$$\mathbf{1}_{i,d} = \mathbf{1}_i \mathbf{1}_{B_d}.$$

Notons que la famille $\{\rho_{i,H}(u), H > 0\}$ est uniformément intégrable. En effet,

$$\mathbf{E} \rho_{i,H}(u) = 1,$$

pour tout $H > 0$, car $\rho_{i,H}(u)$ est une densité, et en outre,

$$\rho_{i,H}(u) \xrightarrow{H \rightarrow \infty} \eta = \exp ui^{1/2}\xi - \frac{u^2 i \sigma_\nu^2}{2}, \quad \xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\nu^2)$$

avec $\mathbf{E} \eta = 1$. Ceci implique

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \delta_{i,H}^0 = 0,$$

pour tout $1 \leq i \leq K$.

Représentons $\rho_{i,H}^0(u)$ sous forme

$$\rho_{i,H}^0(u) = \zeta_i \exp\left\{-\frac{i\sigma_\nu^2}{2}(u - \tilde{\Delta}_{i,H})^2\right\}, \quad \zeta_i = \exp \Delta_{i,H}^2 / 2\sigma_\nu^2, \quad \tilde{\Delta}_{i,H} = \frac{\Delta_{i,H}}{i^{1/2}\sigma_\nu^2}.$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d} \psi_a(T_H, S_u) \rho_{i,H}^0(u) du \\ &= \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d} \zeta_i \frac{1}{2b} \int_{-b}^b v_a(u - g_H) \exp\left\{-\frac{i\sigma_\nu^2}{2}(u - \tilde{\Delta}_{i,H})^2\right\} du, \end{aligned}$$

où

$$g_H = \sqrt{H}(\tilde{S}_{T_H}(x_0) - S(x_0)).$$

La dernière intégrale est égale à

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d\zeta_i} \frac{1}{2b} \int_{-b-\tilde{\Delta}_{i,H}}^{b-\tilde{\Delta}_{i,H}} v_a(u - \tilde{g}_H) \exp\left\{-\frac{i\sigma_\nu^2}{2}u^2\right\} du \\ & \geq \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d\zeta_i} \frac{1}{2b} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} v_a(u - \tilde{g}_H) \exp\left\{-\frac{i\sigma_\nu^2}{2}u^2\right\} du, \end{aligned}$$

où

$$\tilde{g}_H = g_H - \tilde{\Delta}_{i,H}.$$

Par application de l'inégalité de Anderson, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2b} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d\psi_a}(T_H, S_u) \rho_{i,H}^0(u) du \\ & \geq \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d\zeta_i} \frac{1}{2b} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} v_a(u) \exp\left\{-\frac{i\sigma_\nu^2}{2}u^2\right\} du \\ & = \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d\zeta_i} \frac{1}{2i^{1/2}b} \int_{-\sqrt{ib}}^{\sqrt{ib}} v_a\left(\frac{u}{i^{1/2}}\right) \exp\left\{-\frac{u^2\sigma_\nu^2}{2}\right\} du \\ & \geq \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d\zeta_i} \frac{1}{2bi^{1/2}} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} v_a\left(\frac{u}{i^{1/2}}\right) \exp\left\{-\frac{u^2\sigma_\nu^2}{2}\right\} du \\ & = \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d\zeta_i} \frac{1}{2bi^{1/2}} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} v\left(\frac{u}{i^{1/2}}\right) \exp\left\{-\frac{u^2\sigma_\nu^2}{2}\right\} du + \delta_{i,H}^1(a), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \delta_{i,H}^1(a) &= \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d\zeta_i} \frac{1}{2i^{1/2}b} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} \left(v_a\left(\frac{u}{i^{1/2}}\right) - v\left(\frac{u}{i^{1/2}}\right)\right) \exp\left\{-\frac{u^2\sigma_\nu^2}{2}\right\} du, \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{H \rightarrow \infty} \delta_{i,H}^1(a) &= 0, \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i \leq K$.

Notons que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_\nu i^{1/2}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{i\sigma_\nu^2}{2}(u - \tilde{\Delta}_{i,H})^2\right\} du \\ &\geq \int_{-d_1}^{+d_1} \exp\left\{-\frac{\sigma_\nu^2 i}{2}(u - \tilde{\Delta}_{i,H})^2\right\} du \end{aligned}$$

avec $d_1 = b - 2\sqrt{b}$.

Alors nous avons

$$I_{i,H} \geq Q(b) \int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d} \zeta_i \exp\left\{-\frac{\sigma_\nu^2 i}{2}(u - \tilde{\Delta}_{i,H})^2\right\} du v(1/i^{1/2}) + \delta_{i,H}^1(a) + \delta_H^i,$$

$$Q(b) = \frac{\sigma_\nu}{2b\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} v(u) e^{-u^2 \sigma_\nu^2/2} du.$$

Donc,

$$\begin{aligned} I_{i,H} &\geq Q(b) \int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d} \rho_{i,H}^0(u) du v(1/i^{1/2}) + \delta_{i,H}^1(a) + \delta_H^i \\ &= Q(b) \int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d} \rho_{i,H}(u) du v(1/i^{1/2}) + \delta_{i,H}^1(a) + \delta_H^i + \delta_{i,H}^2, \end{aligned}$$

où

$$\delta_{i,H}^2 = Q(b) \int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d} (\rho_{i,H}(u) - \rho_{i,H}(u)) du v(1/i^{1/2}).$$

Considerons le premier terme de partie droite. On a

$$\begin{aligned} &Q(b) \int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{i,d} \rho_{i,H}(u) du v(1/i^{1/2}) \\ &\geq Q(b) \left(\int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_i \rho_{i,H}(u) du v(1/i^{1/2}) - \int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{B_d^c} \rho_{i,H}(u) du \right) \\ &= Q(b) \left(\int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_u} \mathbf{1}_i v(1/i^{1/2}) du - \int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_S \mathbf{1}_{B_d^c} \rho_{i,H}(u) du \right). \end{aligned}$$

Par suite, nous obtenons

$$\mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{B_d^c} \rho_{i,H}(u) = 1 - \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{B_d} \rho_{i,H}(u) \rightarrow 1 - \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{\{|\eta| < d\}} \exp\left\{i^{1/2} u \eta - \frac{i u^2 \sigma_\nu^2}{2}\right\}, \quad H \rightarrow \infty,$$

où

$$\eta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\nu^2).$$

Pour $|u| \leq d_1$, ceci implique

$$\begin{aligned} \lim_{H \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{B_d^c} \rho_{i,H}(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{|z| > \sigma_\nu i^{1/2} (b - \sqrt{b})} \exp\left\{-\frac{1}{2}(z - i^{1/2} u \sigma_\nu)^2\right\} dz \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{|z| > \sigma_\nu i^{1/2} (b - \sqrt{b} - u)} e^{-z^2/2} dz \\ &\leq \int_{\sigma_\nu \sqrt{b}}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz \leq e^{-\sigma_\nu^2 b/2}. \end{aligned}$$

Donc, nous avons

$$I_{i,H} \geq Q(b) \left(\int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_u} \mathbf{1}_i v_1 \left(\frac{1}{\kappa(H) + 1} \right) du - \widehat{I}_{i,H} \right) + \delta_{i,H}^1(a) + \delta_H^i + \delta_{i,H}^2,$$

$$v_1(x) = |x|^{\mu/2}, \quad \widehat{I}_{i,H} = \int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_*} \mathbf{1}_{B_d^c} \rho_{i,H}(u) du.$$

Cela nous permet d'écrire l'estimation

$$I_H \geq \sum_{i=1}^K I_{i,H} \geq Q(b) \int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_u} \mathbf{1}_{\{\kappa(H) < K\}} v_1 \left(\frac{1}{\kappa(H) + 1} \right) du$$

$$- Q(b) \sum_{i=1}^K \widehat{I}_{i,H} + \delta_0(H, b),$$

où

$$\delta_H^0(b) = \sum_{i=1}^K (\delta_{i,H}^1(a) + \delta_H^i + \delta_{i,H}^2).$$

En appliquant l'inégalité de Jensen nous avons

$$I_H \geq Q(b) \int_{-d_1}^{d_1} \mathbf{E}_{S_u} v_1 \left(\frac{1}{\kappa(H) + 1} \right) du - 2d_1 Q(b) v_1 \left(\frac{1}{K + 1} \right)$$

$$- Q(b) \sum_{i=1}^K \widehat{I}_{i,H} + \delta_0(H, b)$$

$$\geq Q(b) \int_{-d_1}^{d_1} v_1 \left(\frac{1}{\mathbf{E}_{S_u} \kappa(H) + 1} \right) du - 2d_1 Q(b) v_1 \left(\frac{1}{K + 1} \right)$$

$$- Q(b) \sum_{i=1}^K \widehat{I}_{i,H} + \delta_0(H, b)$$

$$\geq 2d_1 Q(b) \left(v_1 \left(\frac{1}{D^* \sup_{|u| \leq b} \phi_u(H) + 1} \right) - v_1 \left(\frac{1}{K + 1} \right) \right) - Q(b) \sum_{i=1}^K \widehat{I}_{i,H} + \delta_0(H, b),$$

où

$$\phi_u(H) = \frac{\mathbf{E}_{S_u} \tau_H}{\mathbf{E}_{S_*} \tau_H}.$$

Ceci, l'inégalité

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \widehat{I}_{i,H} \leq 2d_1 \exp\left\{-\frac{b\sigma_\nu^2}{2}\right\}$$

et le Théorème 3.1 nous donnent

$$\liminf_{H \rightarrow \infty} I_H \geq 2d_1 Q(b) (v_1(1/(D^* + 1)) - v_1(1/(K + 1)) - K e^{-\sigma_\nu^2 b/2}).$$

En choisissant $K \geq D^* + 1$, $b > 0$, $\nu > 0$ tels que

$$v_1(1/(D^* + 1)) - v_1(1/(K + 1)) - K e^{-\sigma_\nu^2 b/2} > 0$$

nous arrivons au résultat recherché.

6 Risque local

Nous allons définir le risque local pour une fonction $S_0 \in \Sigma_{L,\gamma,\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

Dans ce cas pour la procédure (2.11), (2.12) nous prenons $h = H^{-\frac{1}{2\beta}}$, $\beta = 1 + \alpha$.

D'après le Théorème 3.1,

$$\mathbf{E}_S \tau_H \approx H^{\frac{2\beta+1}{2\beta}}, \quad H \rightarrow \infty.$$

Dans cette section nous supposons que la procédure séquentielle $\tilde{S} = (\tilde{S}_{T_H}(x_0), T_H, H > 0)$ est telle que pour $0 < \delta < 1$, $H > 0$ on a

$$\mathbf{E}_S T_H \leq d^*(\delta, H) \mathbf{E}_S \tau_H, \quad S \in \mathcal{U}_{\delta, H},$$

où

$$d^*(\delta, H) = \frac{\sup_{S \in \mathcal{U}_{\delta, H}} \mathbf{E}_S \tau_H}{\inf_{S \in \mathcal{U}_{\delta, H}} \mathbf{E}_S \tau_H},$$

$$\mathcal{U}_{\delta, H} = \left\{ S(\cdot) : S(x) = S_0(x) + D(x), \quad D \in \mathcal{D}_1, \quad \sup_{x \in \mathbf{R}} (|D(x)| + |\dot{D}(x)|) \leq \delta, \right.$$

$$\left. \left| \int_{-1}^1 (D(x_0 + hz) - D(x_0)) dz \right| \leq \delta^{-1} h^2 \right\}.$$

Cette classe de fonctions comprend, par exemple, les fonctions §S§ avec D suivants:

1. $D(x) = \frac{\delta}{2} \cos(x - x_0)$
2. $D(x) = \frac{1}{\sqrt{H}} V_\nu \left(\frac{x - x_0}{h} \right),$

où

$$V_\nu(x) = \frac{1}{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}_\nu(u) g\left(\frac{u - x}{\nu}\right) du, \quad (6.1)$$

$$\tilde{Q}_\nu(u) = \mathbf{1}_{\{|u| \leq 1-2\nu\}} + 2\mathbf{1}_{\{1-2\nu \leq |u| \leq 1-\nu\}},$$

$$g(z) = \begin{cases} c \exp\left\{-\frac{1}{1-z^2}\right\}, & |z| \leq 1, \\ 0, & |z| > 1, \end{cases}$$

$0 < \nu < 1/4$, la constante c est telle que $\int_{-1}^1 g(z) dz = 1$. Pour tout $\nu > 0$, nous avons

$$\int_{-1}^1 V_\nu(x) dx = 2.$$

Par suite,

$$\int_{-1}^1 (D(x_0 + hz) - D(x_0)) dz = 0$$

pour tout $H > 0$.

Notons que d'après le Théorème 3.1, nous avons

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{H \rightarrow \infty} d^*(\delta, H) = 1.$$

Définissons le risque local par formule

$$\mathbf{R}_0(\tilde{S}) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{H \rightarrow \infty} \sup_{S \in \mathcal{U}_{\delta, \mathcal{H}}} \mathbf{E}_S \psi_H(T_H, S),$$

où

$$\psi_H(T_H, S) = v\left(\sqrt{H}(\tilde{S}_{T_H}(x_0) - S(x_0))\right).$$

Theorem 6.1 *Supposons que $S_0 \in \Sigma_{L, \gamma, \alpha}$ avec $\alpha > 0$ en (2.6). Alors*

$$\inf_{\tilde{S} \in \mathcal{M}} \mathbf{R}_0(\tilde{S}) \geq \mathbf{E}v(\xi), \quad \xi \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Preuve Désignons

$$S_u(x) = S_0(x) + \frac{u}{\sqrt{H}} V_\nu\left(\frac{x - x_0}{h}\right),$$

où

$$h = H^{-\frac{1}{2\beta}}, \quad \beta = 1 + \alpha,$$

la fonction $V_\nu(\cdot)$ est définie dans (6.1). Pour tout $b > 0$ et $\delta > 0$, il existe $H_{b, \delta} > 0$ tel que $S_u \in \mathcal{U}_{\delta, H}$ lorsque $|u| \leq b$ et $H \geq H_{b, \delta}$.

Désignons

$$I_{H, \delta} = \sup_{S \in \mathcal{U}_{\delta, H}} \mathbf{E}_S \psi_H(T_H, S).$$

Pour $H \geq H_{b, \delta}$, nous avons les inégalités

$$\begin{aligned} I_{H, \delta} &\geq \sup_{|u| \leq b} \mathbf{E}_{S_u} \psi_H(T_H, S_u) \geq \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathbf{E}_{S_u} \psi_H(T_H, S_u) du \\ &\geq \sum_{i=1}^K \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \mathbf{E}_{S_u} \psi_{a, H}(T_H, S_u) \mathbf{1}_{i, \varepsilon} du, \end{aligned}$$

où

$$\psi_{a, H}(T_H, S) = v_a(\sqrt{H}(\tilde{S}_{T_H}(x_0) - S(x_0))), \quad a > 0,$$

$$\mathbf{1}_{i, \varepsilon} = \mathbf{1}_{\Gamma_{i, \varepsilon}}, \quad \Gamma_{i, \varepsilon} = \{\varepsilon(i-1) \leq \kappa(H) \leq \varepsilon i\},$$

$$\kappa(H) = \frac{T_H}{N_0}, \quad N_0 = N_0(H) = \mathbf{E}_{S_0} \tau_H,$$

ε est un nombre positif et K est un entier. En suivant la ligne de la preuve du Théorème 5.1, on peut obtenir l'inégalité

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{H \rightarrow \infty} I_{H,\delta} \geq \mathbf{E}v(\xi)v\left(\frac{1}{\sigma_\nu}\right)\left(v\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right) - v\left(\frac{1}{(1+K)\varepsilon}\right)\right),$$

où $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

$$\sigma_\nu^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 V_\nu^2(z) dz.$$

En faisant tendre $K \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\nu \rightarrow 0$, nous arrivons au résultat recherché.

7 Minimaxité de la procédure séquentielle

Notons que d'après le Théorème 5.1, le risque (5.2) est fini sur la classe $\Sigma_{L,\gamma}$ pour la procédure séquentielle (2.11)-(2.12). Cela signifie que cette procédure possède la vitesse optimale.

Considerons maintenant la classe $\Sigma_{L,\gamma,\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$. Pour obtenir la vitesse optimale nous avons à choisir le paramètre h dans la procédure (2.11)-(2.12) comme

$$h = H^{-\frac{1}{2\beta}}, \quad \beta = 1 + \alpha.$$

Dans ce cas nous utilisons le risque local.

Definition Nous dirons que la fonction f satisfait la condition \mathcal{H} de paramètre $\alpha > 0$ au point x_0 , si

$$\lim_{y \rightarrow x_0} \frac{|f(y) - f(x_0)|}{|y - x_0|^\alpha} = 0.$$

Désignons

$$S^* = (S_H^*(x_0), \tau_H, H > 0).$$

Theorem 7.1 1) *Le risque local $\mathbf{R}_0(S^*)$ est fini pour toute fonction $S_0 \in \Sigma_{L,\gamma,\alpha}$.*

2) *Si la dérivée \dot{S}_0 au point x_0 satisfait la condition \mathcal{H} de paramètre α , alors*

$$\mathbf{R}_0(S^*) = \mathbf{E}v(\xi), \quad \xi \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Preuve D'après la formule (2.13), pour obtenir le premier résultat, il suffit de montrer que

$$\sup_{0 < \delta < 1} \limsup_{H \rightarrow \infty} \sup_{S \in \mathcal{U}_{\delta,H}} \mathbf{E}_S |\sqrt{H} B_H^*|^\mu < \infty, \quad (7.1)$$

pour tout $\mu > 1$.

En effet,

$$\begin{aligned}\sqrt{H}B_H^* &= \frac{1}{\sqrt{H}} \int_0^{\tau_H} Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) (S(y_t) - S(x_0))dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{H}} \int_0^{\tau_H} Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) (S_0(y_t) - S_0(x_0))dt \\ &+ \frac{1}{\sqrt{H}} \int_0^{\tau_H} Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) (D(y_t) - D(x_0))dt = B_1(H) + B_2(H).\end{aligned}$$

Pour le premier terme de partie droite de cette égalité, on a

$$\begin{aligned}B_1(H) &= \frac{\dot{S}_0(x_0)}{\sqrt{H}} \int_0^{\tau_H} Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) (y_t - x_0)dt \\ &+ \frac{1}{\sqrt{H}} \int_0^{\tau_H} Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) r_0(y_t)dt,\end{aligned}$$

où

$$r_0(y) = S_0(y) - S_0(x_0) - \dot{S}_0(x_0)(y - x_0).$$

Pour la fonction $S_0 \in \Sigma_{L,\gamma,\alpha}$, on a

$$|r_0(y)| \leq Lh^\beta, \quad (7.2)$$

si $|y - x_0| \leq h$. Donc

$$|B_1(H)| \leq L|b(H)| + L,$$

où

$$b(H) = \frac{1}{\sqrt{H}} \int_0^{\tau_H} Q\left(\frac{y_t - x_0}{h}\right) (y_t - x_0)dt.$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \sup_{S \in \Sigma_{L,\gamma}} \mathbf{E}_S |b(H)|^\mu = 0, \quad (7.3)$$

pour tout $\mu > 1$.

Posons

$$\begin{aligned}t_H &= \frac{H}{m_H h}, \quad m_H = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_H(y) q(y) dy, \\ \varphi_H(y) &= \frac{1}{h} Q\left(\frac{y - x_0}{h}\right).\end{aligned}$$

Représentons $b(H)$ sous forme

$$b(H) = b_0(H) + b_1(H),$$

où

$$b_0(H) = \frac{h^2}{\sqrt{H}} \int_0^{t_H} f_H(y_s) ds,$$

$$f_H(y) = \frac{1}{h^2} Q\left(\frac{y - x_0}{h}\right) (y - x_0), \quad b_1 = b - b_0.$$

Par suite,

$$b_0(H) = \frac{h^2 t_H}{\sqrt{H}} m(f_H) + \frac{h^2}{\sqrt{H}} \sqrt{t_H} \Delta_{t_H}(f_H).$$

D'après le Lemme 3.1, nous avons

$$\limsup_{H \rightarrow \infty} \sup_{S \in \Sigma_{L,\gamma}} \mathbf{E}_S |\Delta_{t_H}(f)|^\mu < \infty \quad (7.4)$$

pour tout $\mu > 1$. D'autre part,

$$m(f_H) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_H(y) q(y) dy$$

$$= \int_{-1}^1 z q(x_0 + hz) dz.$$

Ceci implique que

$$|m(f_H)| \leq ch$$

et

$$|b_0(H)| \leq c\sqrt{H}h^2 + h\sqrt{h}|\Delta_{t_H}(f)|.$$

Donc, la fonction $b_0(H)$ possède la propriété (7.3). Ensuite, nous avons

$$|b_1(H)| = \frac{h^2}{\sqrt{H}} \left| \int_0^{\tau_H} f_H(y_s) ds - \int_0^{t_H} f_H(y_s) ds \right|$$

$$\leq \frac{h^2}{\sqrt{H}} \int_{\tau_H \wedge t_H}^{\tau_H \vee t_H} |f_H(y_s)| ds \leq \frac{h^2}{\sqrt{H}} \int_{\tau_H \wedge t_H}^{\tau_H \vee t_H} \varphi_H(y_s) ds$$

$$= h^2 \sqrt{\frac{t_H}{H}} |\Delta_{t_H}(\varphi_H)|.$$

Donc,

$$|b_1(H)| \leq ch\sqrt{h}|\Delta_{t_H}(\varphi)|.$$

Cette inégalité et (7.4) avec $f = \varphi$, donnent (7.3).

Considérons le terme $B_2(H)$. Pour la fonction $S \in \mathcal{U}_{\delta,H}$, nous avons

$$B_2(H) = \frac{h}{\sqrt{H}} \int_0^{\tau_H} \psi_H(y_t) dt = \frac{h}{\sqrt{H}} \int_0^{t_H} \psi_H(y_t) dt + B_3(H), \quad (7.5)$$

où

$$\begin{aligned}\psi_H(y) &= \frac{1}{h} Q\left(\frac{y-x_0}{h}\right) (D(y) - D(x_0)), \\ B_3(H) &= \frac{h}{\sqrt{H}} \left(\int_0^{\tau_H} \psi_H(y_t) dt - \int_0^{t_H} \psi_H(y_t) dt \right).\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}|B_3(H)| &\leq \frac{h\delta}{\sqrt{H}} \left| \frac{H}{h} - \int_0^{t_H} \varphi_H(y_t) dt \right| \\ &= h\delta \sqrt{\frac{t_H}{H}} |\Delta_{t_H}(\varphi_H)|.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\limsup_{H \rightarrow \infty} \sup_{S \in \mathcal{U}_{\delta, H}} \mathbf{E}_S |B_3(H)|^\mu = 0,$$

pour tout $\mu > 1$.

Considerons le premier terme de partie droite de (7.5) :

$$\begin{aligned}& \frac{h}{\sqrt{H}} \left| \int_0^{t_H} \psi_H(y_t) dt \right| \\ & \leq \frac{ht_H |m(\psi_H)|}{\sqrt{H}} + h \sqrt{\frac{t_H}{H}} |\Delta_{t_H}(\psi_H)|,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}m(\psi_H) &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} Q\left(\frac{y-x_0}{h}\right) (D(y) - D(x_0)) q(y) dy \\ &= \int_{-1}^1 (D(x_0 + hz) - D(x_0)) q(x_0 + hz) dz = q(x_0) \int_{-1}^1 (D(x_0 + hz) - D(x_0)) dz \\ &\quad + h\dot{q}(x_0) \int_{-1}^1 (D(x_0 + hz) - D(x_0)) z dz + \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \int_{-1}^1 (D(x_0 + hz) - D(x_0)) \ddot{q}(x_0 + \theta hz) dz, \quad \theta \in [0, 1].\end{aligned}$$

Donc, par définition de $\mathcal{U}_{\delta, H}$, nous obtenons que

$$\sup_{S \in \mathcal{U}_{\delta, H}} |m(\psi_H)| \leq \frac{h^2}{\delta},$$

pour $\delta > 0$ suffisamment petit et $H > 0$ suffisamment grand.

Par suite,

$$|B_2(H)| \leq \delta^{-1} \sqrt{H} h^2 + \sqrt{h} |\Delta_{t_H}(\psi)| + |B_3(H)|.$$

Ceci implique

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \sup_{S \in \mathcal{U}_{\delta, H}} \mathbf{E}_S |B_2(H)|^\mu = 0,$$

pour tout $\mu \geq 1$. Donc, on obtient (7.3) et l'inégalité $\mathbf{R}_0(S^*) < \infty$.

Maintenant nous montrons le second résultat. Pour le terme $r_0(y)$ nous avons l'inégalité suivante :

$$|r_0(y)| \leq L(h)h^{1+\alpha} = \frac{L(h)}{\sqrt{H}}, \quad L(h) = \sup_{|z| \leq h} \frac{|\dot{S}(x_0 + z) - \dot{S}(x_0)|}{|z|^\alpha}$$

si $|y - x_0| \leq h$. Donc,

$$|B_1(H)| \leq L|b(H)| + L(h).$$

Alors

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \sup_{S \in \mathcal{U}_{\delta, H}} \mathbf{E}_S |\sqrt{H}B_H|^\mu = 0,$$

pour tout $\mu > 1$. Donc, le second résultat.

8 Estimateur aux polynômes locaux

Dans la Section 2, formule (2.14), nous avons obtenu la précision garantie pour l'estimateur à noyau $S_H^*(x_0)$.

Soit la fonction $S \in \Sigma_{L, \gamma, \alpha}$ avec $\alpha > 0$. Pour obtenir la vitesse optimale en terme du temps moyen d'observation, il faut choisir la largeur de fenêtre

$$h = H^{-\frac{1}{2\beta}}, \quad \beta = 1 + \alpha.$$

En utilisant la formule asymptotique pour le temps moyen

$$\mathbf{E}_{S\tau_H} \approx H^{\frac{2\beta+1}{2\beta}}$$

nous obtenons

$$\sqrt{H} \approx (\mathbf{E}_{S\tau_H})^{\frac{\beta}{2\beta+1}}.$$

Donc, d'après le théorème 7.1,

$$\mathbf{E}_S |S_H^*(x_0) - S(x_0)| \approx 1/\sqrt{H} \approx (\mathbf{E}_{S\tau_H})^{-\beta/(2\beta+1)}. \quad (8.1)$$

D'autre part, la formule (2.14) donne la vitesse

$$\mathbf{E}_S |S_H^*(x_0) - S(x_0)| \approx H^{-1/2\beta}$$

(parce que $H^{-1/2\beta} > H^{-1/2}$).

Cela signifie que la vitesse donnée par l'estimateur à noyau n'est pas optimale.

La question se pose s'il est possible de trouver un estimateur possédant une précision nonasymptotique d'ordre $H^{-1/2}$. Dans cette section nous allons répondre à cette question.

Nous écrivons l'équation stochastique différentielle du processus d'observation (y_t) sous forme suivante

$$dy_t = \phi'_t \lambda dt + r_t dt + dw_t, \quad (8.2)$$

où

$$\phi_t = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y_t - x_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = S(x_0), \quad \lambda_2 = \dot{S}(x_0),$$

$$r_t = r(y_t), \quad r(y) = S(y) - S(x_0) - \dot{S}(x_0)(y - x_0),$$

la fonction $S(y) \in \Sigma_{L,\gamma,\alpha}$, $'$ signifie l'opération de transposition.

Notons que, pour $|y - x_0| \leq h$ avec $h > 0$, nous avons

$$|r(y)| \leq Lh^\beta. \quad (8.3)$$

Notre objectif dans cette section est de construire un estimateur nonparamétrique séquentiel pour $S(x_0)$ qui garantie la précision donnée nonasymptotique d'ordre $H^{-1/2}$ (voir la formule (8.1)). Nous allons utiliser la procédure séquentielle à deux étapes proposée en [14], [15].

Etape 1.

Soit $(\delta_k)_{k \geq 1}$ une suite croissante de nombres positifs, tels que

$$\rho = \sum_{k \geq 1} \sqrt{\delta_k} < \infty. \quad (8.4)$$

Définissons une suite de temps d'arrêt

$$\tau_k = \tau_k(\delta_k) = \inf \{t \geq 0 : \int_0^t |\phi_u|^2 \mathbf{1}_u du \geq \delta_k^{-1}\}, \quad (8.5)$$

où

$$\mathbf{1}_u = Q\left(\frac{y_u - x_0}{h}\right), \quad Q(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x),$$

h est une largeur de fenêtre que nous choisissons ultérieurement.

Définissons encore une suite d'estimateurs:

$$\hat{\lambda}_{\tau_k} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1(\tau_k) \\ \hat{\lambda}_2(\tau_k) \end{pmatrix} = G_{\tau_k}^+ \int_0^{\tau_k} \phi_t \chi_t dy_t, \quad (8.6)$$

où $G^+ = G^{-1}$ si $\det G > 0$ et $= 0$ si $\det G = 0$,

$$G_T = \begin{pmatrix} G_{11}(T) & G_{12}(T) \\ G_{21}(T) & G_{22}(T) \end{pmatrix} = \int_0^T \phi_t \phi_t' \chi_t dt. \quad (8.7)$$

L'erreur d'estimation (le résidu) sur l'ensemble $\{\det G_{\tau_k} > 0\}$ est la suivante

$$\hat{\lambda}_1(\tau_k) - \lambda_1 = B_k + \xi_k, \quad (8.8)$$

où

$$B_k = \int_0^{\tau_k} [\Gamma_{11}(\tau_k) \phi_1(t) + \Gamma_{12}(\tau_k) \phi_2(t)] r_t \chi_t dt,$$

$$\Gamma_T = G_T^{-1},$$

$$\xi_k = \Gamma_{11}(\tau_k) \int_0^{\tau_k} \phi_1(t) \chi_t dw_t + \Gamma_{12}(\tau_k) \int_0^{\tau_k} \phi_2(t) \chi_t dw_t.$$

En raison de la formule (8.3), on a

$$|B_k| \leq L \gamma_k h^\beta \text{ sur l'ensemble } \{\det G_{\tau_k} > 0\}, \quad (8.9)$$

où

$$\gamma_k = |\Gamma_{11}(\tau_k)| \int_0^{\tau_k} \chi_t dt + |\Gamma_{12}(\tau_k)| \int_0^{\tau_k} |y_t - x_0| \chi_t dt.$$

D'après le théorème ergodique de Bohner (voir [8]), on a le résultat suivant

Proposition 8.1 *Quel que soit $h > 0$*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} G_T = hF(h) \text{ p.s.}, \quad (8.10)$$

où

$$F(h) = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 q(x_0 + hz) dz & h \int_{-1}^1 zq(x_0 + hz) dz \\ h \int_{-1}^1 zq(x_0 + hz) dz & h^2 \int_{-1}^1 z^2 q(x_0 + hz) dz \end{pmatrix}.$$

Ce résultat nous permet d'obtenir immédiatement la propriété asymptotique suivante des temps d'arrêt (8.5).

Proposition 8.2 *Quel que soit $h > 0$*

1.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k \delta_k = \frac{1}{\text{tr} F(h) h} \quad \text{p.s.},$$

2.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = \gamma(h) \quad \text{p.s.},$$

$$\gamma(h) = M_{11}(h)F_{11}(h) + h|M_{12}(h)| \int_{-1}^1 |z| q(x_0 + hz) dz, \text{ où } M(h) = F^{-1}(h).$$

Estimons la borne inférieure du déterminant de la matrice $F(h)$.

Proposition 8.3 *Pour $0 < h < h_0 = \sqrt{3/2}(q_*/\mu)^2 \wedge 1$, on a*

1.

$$\det F(h) \geq 4h^2[(q_*)^2 - (\mu h)^2/3]/3 \geq h^2 f_*,$$

$$\text{où } f_* = 2(q_*)^2/3,$$

$$q^* = \exp\{2L(|x_0| + 1)\} / \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-2L|z| - \gamma z^2\} dz, \quad (8.11)$$

$$q_* = \exp\{-2L(|x_0| + 1) - L(|x_0| + 1)^2\} / \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{2L|z| - \gamma z^2\} dz,$$

$$\mu = \frac{2}{3}L(2 + |x_0|)q^*,$$

2.

$$F_{11}(h) \leq 2q^*, \quad |F_{12}(h)| \leq \frac{2}{3}h^2\mu, \quad F_{22}(h) \leq \frac{2}{3}q^*h^2,$$

$$M_{11}(h) \leq \frac{2q^*}{3f_*}, \quad |M_{12}(h)| \leq \frac{2\mu}{3f_*},$$

3.

$$\gamma(h) \leq \gamma^* = \frac{4(q^*)^2}{3f_*} + \frac{2\mu q^*}{3f_*}.$$

Preuve. En utilisant la définition de la densité ergodique $q(x)$, on obtient que

$$\min_{|x-x_0| \leq 1} q(x) \geq q^*, \quad \max_{|x-x_0| \leq 1} q(x) \leq q^*, \quad \max_{|x-x_0| \leq 1} |\dot{q}(x)| \leq \mu. \quad (8.12)$$

D'après la définition de $F(h)$, on a

$$\det F(h) = h^2 \left[\int_{-1}^1 q(x_0 + hz) dz \int_{-1}^1 z^2 q(x_0 + hz) dz - \left(\int_{-1}^1 z q(x_0 + hz) dz \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} &\geq h^2 \left[\int_{-1}^1 q(x_0 + hz) dz \int_{-1}^1 z^2 q(x_0 + hz) dz - \left(\int_{-1}^1 |z| |q(x_0 + hz) - q(x_0)| dz \right)^2 \right] \\ &\geq h^2 [(4/3)(q_*)^2 \int_{-1}^1 z^2 q(x_0 + hz) dz - h^2 \mu^2 - 4/9], \end{aligned}$$

d'où le premier résultat. On obtient deux autres résultats par calcul direct.

Estimons le terme ξ_k en (8.8).

Proposition 8.4 *Sur l'ensemble $\{\det G_{\tau_k} > 0\}$*

1.

$$|\xi_k| \leq \beta_k \eta_k,$$

$$\text{où } \beta_k = (|\Gamma_{11}(\tau_k)| + |\Gamma_{12}(\tau_k)|) / \delta_k, \quad \eta_k = \delta_k [|\int_0^{\tau_k} \phi_1(t) \chi_t dw_t| + |\int_0^{\tau_k} \phi_2(t) \chi_t dw_t|].$$

2. $\forall k \geq 1$

$$\sup_{S \in \Sigma_{L, \gamma, \alpha}} \mathbf{E}_S \eta_k^2 \leq 2\delta_k.$$

3.

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k &= \beta(h) = \text{tr} F(h) [|M_{11}(h)| + |M_{12}(h)|], \\ \limsup_{h \rightarrow 0} \beta(h) &\leq \beta^* = 1 + L(1 + |x_0|). \end{aligned} \tag{8.13}$$

Ces résultats suivent du calcul direct qu'on omet.

Etape 2. Définissons l'estimateur recherché :

$$\lambda_1^*(H) = \sum_{k=1}^{\sigma(H)} b_k \hat{\lambda}_1(\tau_k) / \sum_{k=1}^{\sigma(H)} b_k,$$

où $H > 0$,

$$\sigma = \sigma(H) = \inf \{k \geq 1 : \sum_{i=1}^k b_i \geq H\},$$

$$b_k = (1/\beta_k) \mathbf{1}(\gamma_k \leq \gamma^*, \det G_{\tau_k} > 0),$$

γ^* est donné dans la Proposition 8.3.

Définissons le temps d'arrêt (la règle d'arrêt) de procédure :

$$T(h, H) = \tau_{\sigma(H)}.$$

Theorem 8.1 *Quel que soit $H > 0$, $0 < h < h_0$, la procédure séquentielle $\lambda_1^*(H), T(h, H)$ possède les propriétés*

$$T(h, H) < \infty, \text{ p.s.}$$

$$\sup_{S \in \Sigma_{L, \gamma, \alpha}} \mathbf{E}_S |\lambda_1^*(H) - S(x_0)| \leq e(h, H), \tag{8.14}$$

où $e(h, H) = L\gamma^* h^\beta + \sqrt{2}\rho/H$, ρ est défini dans (8.4).

Preuve D'après les Propositions 8.1, 8.2 et la formule (8.13), pour tout $h > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1/\beta(h) > 1/\beta^* \quad \text{p.s..} \quad (8.15)$$

Cela signifie que $\sigma(H) < \infty$ p.s. quel que soit $H > 0$.

D'après (8.8)-(8.9) et Proposition 8.4, on a

$$\begin{aligned} |\hat{\lambda}_1(H) - S(x_0)| &\leq Lh^\beta \sum_{k=1}^{\sigma(H)} b_k \gamma_k / \sum_{k=1}^{\sigma(H)} b_k + \sum_{k=1}^{\sigma(H)} b_k \beta_k \eta_k / \sum_{k=1}^{\sigma(H)} b_k \\ &\leq L\gamma^* h^\beta + H^{-1} \sum_{k=1}^{\sigma(H)} \eta_k. \end{aligned}$$

En calculant l'espérance mathématique dans cette inégalité et tenant compte de la Proposition 8.4, on obtient le résultat.

Pour obtenir la vitesse de convergence optimale il suffit de choisir

$$\delta_k = \begin{cases} H^{-1}, & k \leq k_0(H) \\ \delta_k^*, & k > k_0(H) \end{cases} \quad (8.16)$$

avec $k_0(H) = \beta^* H$, $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\delta_k^*} < \infty$,

$$\rho = \rho(H) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\delta_k} = \sum_{k \leq k_0(H)} 1/\sqrt{H} + \sum_{k > k_0(H)} \sqrt{\delta_k^*} \leq \beta^* \sqrt{H} + \rho_*(H),$$

où $\rho_*(H) = \sum_{k > k_0(H)} \sqrt{\delta_k^*}$.

Un tel choix des paramètres implique que la borne supérieure en (8.14) a la forme

$$e(h, H) = L\gamma^* h^\beta + (\beta^* + \rho_*(H))/\sqrt{H}.$$

En choisissant $h = h_H = H^{-\frac{1}{2\beta}}$, on obtient que la borne supérieure a la forme

$$e(H) = (L\gamma^* + \beta^* + \rho_*(H))/\sqrt{H}.$$

Etudions maintenant le comportement asymptotique du temps d'arrêt $T(h_H, H)$.

Theorem 8.2

$$\mathbf{P} - \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{T(h_H, H)}{H} = \frac{1}{2q(x_0)}.$$

Preuve. Tout d'abord remarquons que

$$\mathbf{P} - \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\sigma(H)}{H} = 1 + |S(x_0)|.$$

D'après la définition (8.15), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{P} - \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{T(h_H, H)h_H}{H} &= \mathbf{P} - \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\tau(H^{-1})h_H}{H} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\text{tr} F(h)} = \frac{1}{2q(x_0)}. \end{aligned}$$

9 Annexe

A1. *Preuve* du Lemme 3.1. D'après [27], si fonction $\varphi(\cdot)$ est continue, il existe un nombre positif α tel que

$$\sup_{S \in \Sigma_{L,\gamma}} \mathbf{P}_S \{ |\Delta_T(\varphi)| > \lambda \} \leq 2e^{-\alpha\lambda^2/\varphi^*}. \quad (9.1)$$

Plaçons nous maintenant dans le cas general. Définissons une suite de fonctions

$$\varphi^{(n)}(y) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)g(n(y-z))dz,$$

où $g(\cdot)$ est donné dans (6.1).

il est bien connu que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^{(n)}(y) - \varphi(y)|dy = 0. \quad (9.2)$$

Ensuite, nous posons

$$m^{(n)} = m(\varphi^{(n)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n)}(y)q(y)dy.$$

Egalité (8.2) implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m^{(n)} = m(\varphi).$$

Montrons maintenant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_S |\Delta_T^{(n)} - \Delta_T(\varphi)| = 0, \quad (9.3)$$

pour $H > 0$, $T > 0$, $S \in \Sigma_{L,\gamma}$, où

$$\Delta_T^{(n)} = \Delta_T(\varphi^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T (\varphi^{(n)}(y_t) - m^{(n)})dt.$$

En effet,

$$\mathbf{E}_S |\Delta_T^{(n)} - \Delta_T(\varphi)| \leq \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \mathbf{E} |\varphi^{(n)}(y_t) - \varphi(y_t)| dt + \sqrt{T} |m^{(n)} - m(\varphi)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

parce que le processus y_t possède une densité bornée (voir, par exemple, [8]).

Ensuite, notons que

$$(\varphi^{(n)})^* = \sup_{H>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi^{(n)}(y)| dy \leq \varphi^*.$$

Tenant en compte l'inégalité (8.1) pour la fonction $\varphi^n(\cdot)$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_S \{|\Delta_T(\varphi)| > \lambda\} &\leq \mathbf{P}_S \{|\Delta_T^{(n)}| > \lambda/2\} + \mathbf{P}_S \{|\Delta_T^{(n)} - \Delta_T(\varphi)| > \lambda/2\} \\ &\leq 2e^{-\alpha\lambda^2/4\varphi^*} + \frac{2}{\lambda} \mathbf{E}_S |\Delta_T^{(n)} - \Delta_T(\varphi)|. \end{aligned}$$

D'ici le Lemme 3.1 suit.

A2. *Preuve du Lemme 3.2.* On a

$$\mathbf{P}_S \left\{ \left| \frac{\tau_H}{l_H} - 1 \right| > \delta \right\} \leq \mathbf{P}_S \{ \tau_H < T_1 \} + \mathbf{P}_S \{ \tau_H > T_2 \}, \quad (9.4)$$

où $T_1 = l_H(1 - \delta)$, et $T_2 = l_H(1 + \delta)$.

Considérons le premier terme de partie droite de cette inégalité. Par définition du temps d'arrêt τ_H , nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_S \{ \tau_H < T_1 \} &= \mathbf{P}_S \left\{ \int_0^{T_1} \varphi_H(y_t) dt < H\sqrt{H} \right\} \\ &= \mathbf{P}_S \left\{ \Delta_{T_1}(\varphi_H) \geq \frac{H\sqrt{H} - m_H T_1}{\sqrt{T_1}} \right\}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} m_H &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_H(y) q(y) dy = \int_{-1}^{+1} q(x_0 + z/\sqrt{H}) dz \\ &= 2q(x_0) + \int_{-1}^{+1} (q(x_0 + z/\sqrt{H}) - q(x_0)) dz. \end{aligned}$$

Il en suit que

$$|m_H - 2q(x_0)| \leq C/\sqrt{H},$$

pour une constante $C > 0$.

Ensuite, notons qu'il existe une constante δ_* indépendante de S telle que

$$\mathbf{P}_S \{ \tau_H < T_1 \} \leq \mathbf{P}_S \{ \Delta_{T_1}(\varphi_H) \geq \delta_* H^{3/4} \}.$$

Par Lemme 3.1, le terme de droite est borné par $e^{-\kappa H\sqrt{H}}$. Pareillement, nous pouvons estimer le second terme de partie droite de l'inégalité (8.4). On obtient

$$\sup_{S \in \Sigma_0} \mathbf{P}_S \{ |\frac{\tau_H}{l_H} - 1| > \delta \} \leq e^{-\kappa H\sqrt{H}}.$$

Donc, le Lemme 3.2.

A3. *Preuve du Lemme 3.3.* Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_S(\tau_H)^m &= m \int_0^{+\infty} t^{m-1} \mathbf{P}_S \{ \tau_H > t \} dt \leq (3l_H)^m + m \int_{3l_H}^{+\infty} t^{m-1} \mathbf{P}_S \{ \tau_H > t \} dt \\ &\leq (3l_H)^m + m \int_{3l_H}^{+\infty} t^{m-1} \mathbf{P}_S \left\{ |\Delta_t(\varphi_H)| > \frac{tm_H - H\sqrt{H}}{\sqrt{t}} \right\} dt. \end{aligned}$$

Par Lemme 3.1, on trouve que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_S(\tau_H)^m &\leq (3l_H)^m + m \int_{3l_H}^{+\infty} t^{m-1} \exp\{-\kappa(tm_H - H\sqrt{H})^2/\sqrt{t}\} dt \\ &\leq (3l_H)^m + m \int_{l_H}^{+\infty} (t + 2l_H)^{m-1} e^{-t\kappa} dt. \end{aligned}$$

On en arrive à Lemme 3.3.

A4.

Lemma 9.1 *Soit $\rho(\cdot)$ une fonction nonnegative bornée intégrable. Alors il existe une constante M telle que*

$$d(H) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}_H(y) - \varphi_H(y)| \rho(y) dy \leq M/H, \quad (9.5)$$

où $\tilde{\varphi}_H(y) = \varphi_H^{(n)}(y)$ avec $n = n(H) = H^2$.

Preuve On pose $\mu = H^{-1}$ et

$$\Gamma_H = \{y \in R : 1 - \mu \leq \sqrt{H}|y - x_0| \leq 1 + \mu\}. \quad (9.6)$$

Par définition du $\tilde{\varphi}_H(y)$, on a

$$\begin{aligned} d(H) &\leq \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_H(y + z/n) - \varphi_H(y)| \rho(y) dy g(z) dz \\ &= \int_{-1}^1 \int_{\Gamma_H} |\varphi_H(y + z/n) - \varphi_H(y)| \rho(y) dy g(z) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-1}^1 \int_{\Gamma_H^c} |\varphi_H(y + z/n) - \varphi_H(y)| \rho(y) dy g(z) dz \\
& \leq \sqrt{H} \int_{\Gamma_H} \rho(y) dy + \int_{-1}^1 \int_{\Gamma_H^c} |\varphi_H(y + z/n) - \varphi_H(y)| \rho(y) dy g(z) dz.
\end{aligned}$$

Parce que $g(z) = 0$ pour $|z| \geq 1$ et par définition du φ_H , nous obtenons que $\varphi_H(y + z/n) = \varphi_H(y)$, pour $y \in \Gamma_H^c$. Donc,

$$d(H) \leq \sqrt{H} \sup_y \rho(y) \text{mes}(\Gamma_H),$$

où $\text{mes}(\Gamma_H)$ désigne la mesure de Lebesgue du Γ_H . Ceci implique que

$$d(H) \leq 4 \sup_y \rho(y) / H.$$

D'où le Lemme 8.1.

A5. *Preuve du Lemme 3.4.* Premièrement nous montrons que

$$\frac{\int_0^{\tau_H} (\tilde{\varphi}_H(y_t) - \tilde{m}_H) dt}{\sqrt{l_H}} \implies \mathcal{N}(0, m^*), \quad H \rightarrow +\infty, \quad (9.7)$$

où

$$\tilde{m}_H = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_H(y) q(y) dy.$$

D'après la formule d'Ito,

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^{\tau_H} (\tilde{\varphi}_H(y_t) - \tilde{m}_H) dt}{\sqrt{l_H}} \\
& = \frac{\tilde{V}_H(y_{\tau_H})}{\sqrt{l_H}} - \frac{\tilde{V}_H(y_0)}{\sqrt{l_H}} - \frac{1}{\sqrt{l_H}} \int_0^{\tau_H} \tilde{v}_H(y_t) dw_t,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_H(y) &= \int_0^y \tilde{v}_H(x) dx, \\
\tilde{v}_H(y) &= 2 \int_y^{+\infty} (\tilde{m}_H - \tilde{\varphi}_H(z)) \exp\{2 \int_y^z S(u) du\} dz.
\end{aligned}$$

Notons qu'il existe la limite

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} \tilde{v}_H(y) = v^*(y), \quad (9.8)$$

pour tout $y \in R$.

Montrons que

$$\mathbf{P} - \lim_{H \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{V}_H(y_{\tau_H})}{\sqrt{l_H}} = 0. \quad (9.9)$$

La fonction $\tilde{V}_H(y)$ est bornée par Cy , où C est une constante. Pour obtenir la convergence (8.9), on a à prouver que

$$\mathbf{P} - \lim_{H \rightarrow +\infty} \frac{y_{\tau_H}}{\sqrt{l_H}} = 0.$$

Nous présentons le processus y_t sous forme

$$y_t = \xi_t + \eta_t,$$

où

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_t &= \alpha(t)\xi_t + S(0), \quad \xi_0 = y_0, \quad \alpha(t) = (S(y_t) - S(0))/y_t, \\ d\eta_t &= \alpha(t)\eta_t dt + dw_t, \quad \eta_0 = 0. \end{aligned}$$

La fonction ξ_t est bornée. Il est connu (voir [12]) que le processus η_t possède la propriété

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |\eta_t|^m = 0,$$

pour tout $m > 1$.

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \frac{|y_{\tau_H}|}{\sqrt{l_H}} > a \right\} &\leq \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 2l_H} |y_t| > a\sqrt{l_H} \right\} + \mathbf{P}\{\tau_H > 2l_H\} \\ &\leq \frac{1}{a^4 l_H^2} \mathbf{E} \sup_{0 \leq t \leq 2l_H} |y_t|^4 + \mathbf{P}\{\tau_H > 2l_H\} \end{aligned}$$

et nous obtenons la convergence (8.9).

Ensuite, nous avons à montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{l_H}} \int_0^{\tau_H} \tilde{v}_H(y_t) dw_t \implies \mathcal{N}(0, m^*), \quad H \rightarrow +\infty.$$

Notons que du (8.8) et théorème ergodique (voir [8]), il suit que

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} \frac{1}{l_H} \int_0^{l_H} (\tilde{v}_H(y_t))^2 dt = m^* \quad \text{p.s.}$$

D'ici et du Théorème Central Limite pour les intégrales stochastiques (voir [31], [16]), nous obtenons que

$$\frac{1}{\sqrt{l_H}} \int_0^{l_H} \tilde{v}_H(y_t) dw_t \Longrightarrow \mathcal{N}(0, m^*), \quad H \rightarrow +\infty.$$

Considérons l'expression

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \frac{1}{l_H} \left(\int_0^{\tau_H} \tilde{v}_H(y_t) dw_t - \int_0^{l_H} \tilde{v}_H(y_t) dw_t \right)^2 \\ &= \mathbf{E} \frac{1}{l_H} \left| \int_0^{\tau_H} \tilde{v}_H^2(y_t) dt - \int_0^{l_H} \tilde{v}_H^2(y_t) dt \right| \\ &\leq C \mathbf{E}_S \left| \frac{\tau_H}{l_H} - 1 \right|. \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 3.1 nous obtenons (8.7).

Ensuite, nous étudions la quantité

$$\delta_H = \frac{1}{m_H} \frac{\int_0^{\tau_H} (\tilde{\varphi}_H(y_t) - \varphi_H(y_t)) dt}{\sqrt{l_H}} + \frac{1}{m_H} \frac{\tau_H(m_H - \tilde{m}_H)}{\sqrt{l_H}}.$$

Sur l'événement $\{\tau_H \leq 2l_H\}$ nous avons

$$\begin{aligned} |\delta_H| &\leq \frac{1}{m_H \sqrt{l_H}} \int_0^{2l_H} |\tilde{\varphi}_H(y_t) - \varphi_H(y_t)| dt \\ &\quad + \frac{\sqrt{2l_H}}{m_H} |\tilde{m}_H - m_H|. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{1}_{\{\tau_H \leq 2l_H\}} |\delta_H| &\leq \frac{1}{m_H \sqrt{l_H}} \int_0^{2l_H} \mathbf{E} |\tilde{\varphi}_H(y_t) - \varphi_H(y_t)| dt \\ &\quad + \frac{\sqrt{2l_H}}{m_H} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}_H(y) - \varphi_H(y)| q(y) dy \\ &= \frac{1}{m_H \sqrt{l_H}} \int_0^{2l_H} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}_H(y) - \varphi_H(y)| p(0, y_0, t, y) dy \\ &\quad + \frac{\sqrt{2l_H}}{m_H} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\varphi}_H(y) - \varphi_H(y)| q(y) dy. \end{aligned}$$

Ici $p(0, y_0, t, y)$ est la densité de transition du y_t qui est de forme suivante (voir [8])

$$p(0, y_0, t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{y - y_0}{2t} + \int_{y_0}^y S(u) du\right\} \\ \times \mathbf{E}_S \exp\left\{t \int_0^1 B(y_0 + \sqrt{t}\eta(u) + u(y - y_0)) du\right\},$$

où

$$B(y) = -S^2(y)/2 - \dot{S}(y)/2, \quad \eta(u) = \tilde{w}(u) - u\tilde{w}(1), \quad \tilde{w}(u) = w(tu)/\sqrt{t}.$$

La fonction $B(\cdot)$ est bornée. Donc, la densité de transition $p(0, y_0, t, y)$ est aussi bornée. En appliquant le Théorème 3.1 et le Lemme 8.1, nous obtenons le Lemme 3.4.

A6. *Preuve du Lemme 3.5.* Notons que pour tout $t > 0$,

$$\xi_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2), \quad \sigma_t^2 = \int_0^t \exp\{-2L(t-s)\} ds$$

et donc, pour $m \geq 1$,

$$\mathbf{E}(\xi_t)^{2m} = (2m-1)!! \sigma_t^{2m} \leq (2m-1)!! t^m.$$

Ensuite, en posant

$$\tau_H^* = \inf\{t \geq 0 : |\xi_t| \geq H^{-1/4}\} \wedge 2H,$$

nous obtenons

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq 2H} |\xi_t| > H^{-1/4}\right\} \leq \mathbf{P}\{|\xi_{\tau_H^*}| \geq H^{-1/4}\}.$$

Montrons que

$$\mathbf{E} \exp\{|\xi_\tau|^2/8H\} \leq 2, \tag{9.10}$$

pour tout temps d'arrêt τ à valeurs dans $[0, 2H]$.

D'après la formule d'Ito, nous avons

$$(\xi_\tau)^{2m} = -2mL \int_0^\tau (\xi_t)^{2m} dt \\ + m(2m-1) \int_0^\tau (\xi_t)^{2(m-1)} dt + (2m-1) \int_0^\tau (\xi_t)^{2m-1} dw_t.$$

Donc,

$$\mathbf{E}(\xi_\tau)^{2m} \leq m(2m-1) \int_0^{2H} \mathbf{E}(\xi_t)^{2(m-1)} dt \leq m(2m-1)!! \int_0^{2H} t^{m-1} dt = (2m-1)!! (2H)^m$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \exp\{|\xi_\tau|^2/8H\} &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(8H)^m} \frac{\mathbf{E}(\xi_\tau)^{2m}}{m!} \\ &\leq 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} = 2.\end{aligned}$$

D'ici nous obtenons (8.10).

Ensuite, nous avons

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq 2H} |\xi_t| > H^{-1/4}\right\} \leq \mathbf{P}\{|\xi_{\tau_H^*}| \geq H^{-1/4}\} \leq 2 \exp\{-1/8H^{3/2}\}.$$

Donc, le Lemme 3.5.

A7. *Preuve* du Lemme 5.1. Les relations (5.3) et (5.4) impliquent que

$$\Delta_{i,H} = \frac{u}{\sqrt{H}} \int_0^{\lambda_i} V(\nu(y_t - x_0)\sqrt{H}) dw_t$$

et

$$\int_0^{\lambda_i} (S_u(y_t) - S_*(y_t))^2 dt = \frac{u^2}{H} \int_0^{\lambda_i} V^2(\nu(y_t - x_0)\sqrt{H}) dt.$$

D'après le Théorème 3.1, nous obtenons que

$$\begin{aligned}\mathbf{P} - \lim_{H \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda_i} (S_u(y_t) - S_*(y_t))^2 dt \\ &= \mathbf{P} - \lim_{H \rightarrow \infty} u^2 \frac{\lambda_i}{H} \frac{1}{\lambda_i} \int_0^{\lambda_i} V^2(\nu(y_t - x_0)\sqrt{H}) dt \\ &= u^2 i \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}_{S_*} \tau_H}{H} \int_{-\infty}^{\infty} V^2(\nu(y - x_0)\sqrt{H}) q(y) dy \\ &= u^2 i \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}_{S_*} \tau_H}{H \sqrt{H}} \int_{-1}^1 V^2(\nu z) q(x_0 + z/\sqrt{H}) dz = u^2 i \sigma_\nu^2.\end{aligned}$$

En utilisant le Théorème Central Limite pour les intégrale stochastique (voir [31], [16]), nous arrivons au résultat du Lemme 5.1.

Remerciements. Les auteurs remercient O. V. Lepski pour les remarques et discussion.

References

- [1] Banon, G. (1978) Nonparametric identification for diffusion processes. *SIAM J. Control and Optimization* **16**, 3, p. 380-395
- [2] Bretagnolle, J. and Huber, C. (1979) Estimation des densités: risque minimax. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **47**, p. 119-137
- [3] Brown, L.D. and Low, M.G. (1996) Asymptotic equivalence of nonparametric regression and white noise. *Ann. Statist.*, **24**, p. 2384-2398
- [4] Delattre, S. and Hoffmann, M. (2000) On asymptotic Equivalence for a Null Recurrent Diffusion. *Universite Paris XII - Val de Marne*, preprint 01-2000
- [5] Delyon, B. and Juditsky, A. (2000) On minimax identification of nonparametric autoregressive models. *Probab. Theory Relat. Fields*, **116**, p. 21-39
- [6] Efroimovich, S.Yu. (1980) On sequential estimation under the condition of the local asymptotic normality. - *Theory Probab. Appl.*, **25**(1), p. 30-43
- [7] Efroimovich, S.Yu. (1989) Sequential nonparametric estimation of a density. *Theory Probab. Appl.*, **34**(2), p. 228-239
- [8] Gihkman, I.I. and Skorohod, A.V. Stochastic differential equations. *Naukova Dumka*, Kiev, 1968
- [9] Golubev, G.K. (1991) LAN in problems of nonparametric estimation of functions and lower bounds for quadratic risks. *Theory Probab. Appl.*, **36**, p. 143-149
- [10] Hardle, W. and Tsybakov, A. (1997) Local polynomial estimators of the volatility function in nonparametric autoregression. *J. Econometrics* **81**, p. 223-242
- [11] Ibragimov, I.A. and Hasminskii, R.Z. Statistical Estimation: Asymptotic Theory, *Springer, Berlin-NewYork*, 1981
- [12] Kabanov, Yu.M. and Pergamenshchikov, S.M. Two Scale Stochastic Systems: Asymptotic Analysis and Control. *Springer-Verlag, Berlin, New York*, 2000 (submitted)

- [13] Kerkyacharian, G. and Picard, D. (1993) Density estimation by kernel and wavelet method, optimality in Besov space. *Statist. Probab. Lett.* **18**, p. 327-336
- [14] Konev, V.V. and Pergamenshchikov, S.M. (1981) Sequential estimation of the parameters of the random processes with continuous time. *Math. Stat. and Appl.*, Tomsk State University, Tomsk, **8**, p. 93-101
- [15] Konev, V.V. and Pergamenshchikov, S.M. (1985) Sequential estimation of the parameters of the diffusion processes. *Problems of Inform. Trans.*, **21**, 1, p. 48-62
- [16] Kutoyants, Yu.A. Parameter estimation for stochastic processes. *Armenian Academy of Sciences, Yerevan, 1980 (translation Heldeman-Verlag, Berlin, 1984)*.
- [17] Kutoyants, Yu.A. (1997) Efficiency of the empirical distribution for ergodic diffusion, *Bernoulli*, **3**(4), p. 445-456
- [18] Kutoyants, Yu.A (1995) On density estimation by the observations of ergodic diffusion process. Universite du Maine, *Statistics and Control of Stochastic processes. The Liptser Festschrift*, World Scientific, Singapore, 1998, p. 253-274.
- [19] Lepski, O.V. and Spokoiny, V.G. (1997) Optimal pointwise adaptive methods in nonparametric estimation. *Ann. Statist.*, **25**(6), p. 2512-2546
- [20] Liptser, R.Sh. and Shiryaev, A.N. Statistics of random processes, I-II, *Springer-Verlag*, 1978
- [21] Liptser, R.Sh. and Shiryaev, A.N. Theory of martingales, *Kluwer academic publishers*, Rordrecht /Boston /London 1978
- [22] Liptser, R.Sh. and Spokoiny, V.G.(1997) On estimating a dynamic function of stochastic system with averaging. Preprint 381, Berlin.
- [23] Low, M. (1992) Renormalisation and white noise approximation for nonparametric functional estimation problems. *Ann. Statist.*, **20**(1), p. 545-554
- [24] Negri, I. (1998) Efficacité globale de la fonction de répartition empirique dans le cas d'un processus de diffusion ergodique. *Thèse de doctorat de l'Université du Maine, France*

- [25] Nemirovski, A. (1985) On nonparametric estimation of smooth regression function. *Soviet J. Comput. System. Sci.* **23**, p. 1-11
- [26] Novikov, A.A. (1971) Sequential estimation of the parameters of the diffusion processes. *Theory Probab. Appl.* **16**, p. 394-396
- [27] Pergamenshchikov, S.M. (1998) On large deviation probabilities in ergodic theorem for singularly perturbed stochastic systems. *WIAS, Berlin*, preprint 414
- [28] Pinsker, M.S. (1981) Optimal filtration of square integrable signals in gaussian noise. *Problems Inform. Transmission*, **17**, p. 120-133.
- [29] Spokoiny, V.G. (1994) Efficient estimation and experimental design for controlled systems. Asymptotic approach. *Stochastics and Stochastic Reports* **50**(3-4), p. 129–160.
- [30] Spokoiny, V.G. (1992) Lower bounds of minimax risk in estimation problems without LAN condition. *Stochastics and Stochastic Reports*, **38**, 67–93.
- [31] Taraskin, A.F. (1970) On asymptotic normality of stochastic integrals and estimation of the drift for a diffusion process. In *Sbornik Mathematical Physics*, f.8, Naukova Dumka, Kiev, 149-163.
- [32] Tsybakov, A. (1998) Pointwise and sup-norm sharp adaptive estimation of functions on the Sobolev classes. *Ann. Statist.*, **26**(6), p. 221-245