



HAL
open science

Martingales continues dans les variétés différentiables.

Michel Emery

► **To cite this version:**

| Michel Emery. Martingales continues dans les variétés différentiables.. 1999. hal-00129634

HAL Id: hal-00129634

<https://hal.science/hal-00129634>

Preprint submitted on 8 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MARTINGALES CONTINUES
DANS LES VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES

Michel Émery

C.N.R.S. et Université Louis Pasteur

Département de Mathématiques

7 rue René Descartes

67084 Strasbourg Cedex

France

emery@math.u-strasbg.fr

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	2
CHAPITRE 1 : Variétés, vecteurs, covecteurs, diffuseurs, codiffuseurs	4
1. — Variétés, sous-variétés, applications C^p	4
2. — Vecteurs et covecteurs tangents	7
3. — Diffuseurs	11
4. — Codiffuseurs	14
CHAPITRE 2 : Semimartingales dans une variété et géométrie d'ordre 2	21
1. — Brefs rappels sur les semimartingales continues	21
2. — Semimartingales dans une variété	24
3. — Intégration des codiffuseurs le long des semimartingales	27
4. — Intégrales de Stratonovitch	31
5. — Topologie des semimartingales dans une variété	33
CHAPITRE 3 : Connexions et martingales	37
1. — Connexions et géodésiques	37
2. — Intégrales d'Itô et martingales	42
3. — Applications affines; connexion produit	47
CHAPITRE 4 : Fonctions convexes et comportement des martingales	51
1. — Fonctions convexes et convergence à l'infini des martingales	51
2. — Caractérisation des martingales par les fonctions convexes	54
3. — Détermination des martingales par leurs valeurs finales	60
CHAPITRE 5 : Mouvements browniens et applications harmoniques	72
1. — Variétés riemanniennes et mouvements browniens	72
2. — Applications harmoniques	75
RÉFÉRENCES	79

À Françoise

Je raconterai cette histoire en toute honnêteté; je parviendrai peut-être ainsi à la comprendre moi-même.

J. L. BORGES, *Guayaquil*

INTRODUCTION

En commençant à préparer ce cours, j'espérais parvenir à y exposer les principales propriétés des martingales dans les variétés, ainsi qu'une de leurs applications; comme application, j'hésitais entre le travail d'Arnaudon et Thalmaier [12] sur la dérivée d'une famille de martingales et sur l'estimation du gradient des applications harmoniques, et le théorème de Kendall [71] sur la régularité des applications finement harmoniques. Il est vite apparu que l'un ou l'autre de ces deux objectifs n'aurait pu être atteint en quinze heures de cours qu'au prix d'une course effrénée à travers les définitions, m'obligeant à passer rapidement sur les intégrales d'Itô sans révéler la vraie nature à l'ordre 2 du calcul stochastique intrinsèque. Je n'ai pu m'y résoudre, c'est pourquoi le cinquième chapitre est très court, ne donnant qu'une faible idée du champ des applications possibles, représentées uniquement par le joli théorème 5.5 de Kendall [65] et [66]. De mon ambition initiale, il subsiste dans ces notes, comme les inutiles os du bassin dans le corps de la baleine, l'élégant théorème 4.11 (dû à Arnaudon et Thalmaier [11]) selon lequel si des martingales convergent uniformément sur tout intervalle $[0, t]$ en probabilité, il en va de même de leurs intégrales stochastiques; ce théorème n'est pas utilisé ensuite, et a d'ailleurs été omis lors des exposés oraux.

Le chapitre 1 esquisse une présentation de quelques notions fondamentales de la géométrie différentielle (vecteurs et covecteurs, fibrés tangent et cotangent); puis la géométrie différentielle d'ordre 2 fait son apparition : diffuseurs et codiffuseurs, fibrés osculateur et coosculateur. Comme l'a découvert Schwartz, c'est le seul langage qui permette un calcul stochastique intrinsèque très général par rapport aux semimartingales continues dans une variété; cette géométrie au second ordre est tout aussi fondamentale mais beaucoup moins classique que la géométrie différentielle ordinaire : si les géomètres sont depuis longtemps familiers avec les variétés de jets de tous ordres, il ne semble pas que les spécificités de l'ordre 2 aient particulièrement retenu leur attention.

Le deuxième chapitre est entièrement consacré au calcul stochastique intrinsèque de Schwartz [95], [96], [101] dans une variété; l'objet fondamental est l'intégrale stochastique le long d'une semimartingale continue d'un processus coosculateur à la variété le long de cette semimartingale (théorème 2.10).

Le chapitre suivant expose la théorie des martingales dans une variété, due à Meyer [78], [79], [82] : interprétation des connexions dans le langage d'ordre 2, définition (après Duncan [38] et Bismut [15], et indépendamment de Darling [23], [27]) de l'intégrale d'Itô d'un processus cotangent à la variété le long d'une semimartingale, introduction des martingales.

Le quatrième chapitre emprunte une voie ouverte par Darling [24] et explorée par Arnaudon [6], [7], [8], [9], Arnaudon, Li et Thalmaier [10], Kendall [66], [67], [68], [69], [71], Zheng [48]: utiliser les fonctions convexes comme outil d'étude des martingales. Comme les fonctions convexes n'existent en général pas globalement, ceci oblige à quelques exercices de localisation. Les résultats sont des théorèmes de convergence (problème abordé par Darling [26], [29], He, Yan et Zheng [57], He et Zheng [58], Kendall [68], [69], Meyer [81] et Zheng [107]). Ce chapitre se termine sur le théorème 4.19 de Kendall [66], [68], [69], qui relie de façon frappante la géométrie de la variété (existence globale de fonctions convexes convenables) et la propriété de détermination des martingales par leur valeur finale. Je me suis résigné à passer sous silence les travaux sur l'existence d'une martingale de valeurs finale donnée (Arnaudon [9], Darling [32], [33], Kendall [66], Picard [86], [87], [89]).

Enfin le dernier chapitre envisage la théorie des martingales dans une variété comme un outil pour l'étude des applications harmoniques entre variétés (rien d'étonnant à cela, ces applications transformant les mouvements browniens en martingales). Faute de temps, un seul théorème est présenté (théorème 5.5, de Kendall [65], [66]) : Si toutes les fonctions réelles harmoniques bornées sur V sont constantes, toutes les applications harmoniques de V dans une autre variété W le sont aussi, pourvu que W ne soit pas trop grande.

Je suis très reconnaissant à l'École d'Été de m'avoir permis d'exposer une théorie fort belle mais trop peu connue, et aux organisateurs du séjour sanflorain, qui ont poussé la prévenance jusqu'à nous procurer du beau temps! Merci aussi aux auditeurs, qui ont su rendre vivants les exposés, ainsi qu'à ceux qui m'ont signalé des erreurs ou ont contribué à améliorer ces notes : Marc Arnaudon, Françoise Emery, Uwe Franz, Christophe Leuridan, Anthony Phan.

Chapitre 1

VARIÉTÉS, VECTEURS, COVECTEURS, DIFFUSEURS, CODIFFUSEURS

LE MAÎTRE DE PHILOSOPHIE

[...] vous savez le latin, sans doute.

MONSIEUR JOURDAIN

Oui; mais faites comme si je ne le savais pas.

MOLIÈRE, *Le Bourgeois Gentilhomme*

1. — Variétés, sous-variétés, applications C^p

Les deux propriétés fondamentales d'une variété différentiable, et dont chacune peut être utilisée comme définition, sont les suivantes : au voisinage de tout point, la variété a la même structure différentiable que \mathbb{R}^d , dont on aurait oublié la structure linéaire ou affine; et parmi les fonctions sur la variété, on peut distinguer les fonctions de classe C^p , qui forment une algèbre ayant de bonnes propriétés. Mettre cela sous forme rigoureuse donne malheureusement lieu à des définitions techniques assez pénibles; nous allons aridement survoler ci-dessous une telle définition, renvoyant les auditeurs aux manuels de géométrie différentielle pour les indispensables exemples, illustrations, compléments et exercices. Ceux de Berger et Gostiaux [14], de Darling [31] et le premier volume de Spivak [102], de styles très différents, sont très recommandables.

Techniquement, les variétés dans lesquelles nous allons travailler sont des variétés différentiables réelles, de dimension finie, de classe C^p (où, le plus souvent, $2 \leq p \leq \infty$), sans bord. Un tel objet est un triplet $(V, (\chi_\iota)_{\iota \in I}, d)$, où V est un espace topologique séparé et non vide, d un entier positif, appelé la dimension, et $(\chi_\iota)_{\iota \in I}$ une famille dénombrable de cartes locales sur V : chaque χ_ι est un homéomorphisme d'un ouvert D_ι de V , le domaine de la carte, sur un ouvert $\chi_\iota(D_\iota)$ de \mathbb{R}^d , l'image de la carte; la réunion des D_ι est V ; enfin, pour tous ι et κ dans I , l'application $\chi_\kappa \circ \chi_\iota^{-1}$ est un difféomorphisme C^p entre les deux ouverts $\chi_\iota(D_\iota \cap D_\kappa)$ et $\chi_\kappa(D_\iota \cap D_\kappa)$ de \mathbb{R}^d . L'exemple fondamental de variété est un ouvert V de \mathbb{R}^d (par exemple \mathbb{R}^d lui-même), muni de l'unique carte identique de V dans lui-même. Plus généralement, un espace vectoriel de dimension finie, ou un ouvert non vide d'un tel espace, sont aussi des variétés (de même dimension que l'espace).

Comme pour bien d'autres structures mathématiques, on identifiera souvent par abus de langage l'ensemble V sous-jacent et la variété elle-même, dans des expressions telles que « un point v d'une variété V ». Par oubli de structure, une variété de classe C^p est aussi une variété de classe C^q pour tout $q < p$; par exemple, les applications de classe C^p , définies plus loin entre deux variétés de classe C^p , le sont aussi entre deux variétés de classes C^q et C^r pourvu que $q \geq p$ et $r \geq p$.

Pratiquement, les cartes locales, également appelées systèmes de coordonnées locales, sont utilisés pour repérer les points de V : pour ι fixé dans I , tout point v de

D_ι est caractérisé par le vecteur $\chi_\iota(v) \in \mathbb{R}^d$, dont nous noterons souvent v^1, \dots, v^d les d composantes réelles, sans préciser davantage le ι considéré.

Si $V = (V, (\chi_\iota)_{\iota \in I}, d)$ est une variété de classe C^p et si $q \leq p$, une application $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^q si pour chaque ι la restriction de f à D_ι , composée avec χ_ι^{-1} , est une fonction C^q sur l'ouvert $\chi_\iota(D_\iota)$ de \mathbb{R}^d . En langage peut-être moins obscur : lue dans toute carte locale, la fonction devient une fonction C^q des d variables v^i . Nous commettrons souvent l'abus de langage consistant à noter encore f sa restriction à D_ι composée avec χ_ι^{-1} , et à écrire $f(v^1, \dots, v^d)$ au lieu de $f(v)$. L'ensemble de toutes les fonctions C^p est noté $C^p(V, \mathbb{R})$, ou $C^p(V)$, ou tout simplement C^p . C'est une algèbre; bien plus généralement, il est stable par toutes les opérations ϕ elles-mêmes C^p , à un nombre quelconque d'arguments : pour $f_1, \dots, f_n \in C^p$ et ϕ fonction C^p de n variables réelles, $\phi(f_1, \dots, f_n)$ est encore dans C^p .

Une variété de classe C^p est caractérisée par son ensemble sous-jacent V et par l'ensemble $C^p(V)$; autrement dit, la véritable définition d'une variété n'est pas un triplet comme ci-dessus, mais une classe d'équivalence de triplets, deux familles différentes de cartes locales pouvant définir la même structure de variété C^p . Ainsi, dans l'exemple de la variété \mathbb{R}^d évoquée ci-dessus, on oublie la structure linéaire de \mathbb{R}^d pour n'en conserver que la structure C^p ; on sait dire si une fonction est C^p (ou C^q pour un $q < p$), mais on ne peut plus reconnaître les fonctions linéaires, ni les polynômes... L'ensemble $C^p(V)$ joue vis-à-vis de V un rôle un peu analogue à celui du dual d'un espace vectoriel en algèbre linéaire.

La topologie dont est munie la variété, et pour laquelle les D_ι sont des ouverts et les χ_ι des homéomorphismes, rend continues les fonctions C^p . Plus précisément, elle peut être, comme toute la structure de variété, caractérisée par les fonctions C^p : c'est la topologie la moins fine qui les rende toutes continues.

Un outil fort utile pour ramener les calculs sur une variété à des calculs dans des cartes est les fonctions-plateaux : Si F_0 et F_1 sont dans V deux fermés disjoints, il existe une fonction $\phi \in C^p(V)$ telle que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 0$ sur F_0 et $\phi = 1$ sur F_1 .

Si V et W sont deux variétés de classe C^p au moins, non nécessairement de même dimension, une application $\phi : V \rightarrow W$ est dite de classe C^p si $f \circ \phi$ est une fonction C^p sur V pour toute fonction f réelle C^p sur W . (Exercice : donner une définition équivalente utilisant les cartes locales au lieu des fonctions C^p , et démontrer l'équivalence.) L'ensemble de toutes ces applications C^p est noté $C^p(V, W)$. Lorsque W est la variété \mathbb{R} (munie de sa structure C^p canonique), il n'y a pas d'ambiguïté, et $C^p(V, W) = C^p(V)$. Bien entendu, la composée de deux applications C^p est C^p .

On appelle difféomorphisme C^p entre deux variétés V et W toute bijection ϕ de V sur W telle que ϕ et ϕ^{-1} soient toutes deux de classe C^p ; V et W sont alors nécessairement de même dimension. Les difféomorphismes transportent les structures de variétés; si ϕ est une bijection entre une variété V de classe C^p et un ensemble W , il existe sur W une structure de variété C^p et une seule telle que ϕ soit un difféomorphisme C^p .

EXERCICE. — Si V et W sont deux variétés C^p , leur produit $V \times W$ est canoniquement muni d'une structure de variété C^p ; les deux projections sont des applications de classe C^p .

Un sous-ensemble W d'une variété V est une sous-variété de dimension d' si, pour tout $w \in W$, il existe un sous-espace vectoriel $E \subset \mathbb{R}^d$ de dimension d' et un difféomorphisme χ entre un voisinage D de w dans V et un ouvert $\chi(D)$ de \mathbb{R}^d tels que $\chi^{-1}(E) = D \cap W$. On munit alors canoniquement W d'une structure de variété, en exigeant que les χ ci-dessus, restreints aux $D \cap W$, soient des cartes locales. La restriction à W de toute fonction C^p sur V est une fonction C^p sur W , et l'injection canonique de W dans V est C^p . Il n'est pas vrai en général que toute fonction C^p sur W soit la restriction à W d'une fonction C^p sur V , mais cela a lieu pour les fonctions sur W qui sont de classe C^p et à support compact.

La sous-variété W est dite plongée dans V si son intersection avec tout compact de V est compacte (ce qui revient à dire que toute suite dans W tendant vers l'infini tend aussi vers l'infini dans V). En ce cas, les fonctions C^p sur W sont exactement les restrictions à W des fonctions C^p sur V .

Comme exemple de sous-variété, il y a « la » sphère S^d , qui est la sphère unité de \mathbb{R}^{d+1} , ou toute variété qui lui est difféomorphe. Cette variété ne peut pas être décrite au moyen d'une seule carte locale, mais deux cartes suffisent (car pour tout $s \in S^d$, $S^d \setminus \{s\}$ est difféomorphe à \mathbb{R}^d).

Les sous-variétés de V ayant même dimension que V sont les ouverts non vides de V . La plupart des variétés que je parviens à imaginer (et absolument toutes celles que je sois tant bien que mal capable de dessiner!) sont des sous-variétés de \mathbb{R}^3 .

L'important théorème de plongement de Whitney dit que toute variété de dimension d est difféomorphe à une sous-variété plongée dans \mathbb{R}^{2d} (on peut même toujours choisir $d' = 2d$); on pourra se reporter par exemple à de Rham [92]. Mais on pourrait aussi prendre cette propriété comme définition, en décidant de ne considérer comme variétés que les sous-variétés des espaces \mathbb{R}^{2d} ! Lorsque la variété n'est pas elle-même un ouvert de \mathbb{R}^d , qui admet d coordonnées globales (une seule carte), ce théorème permet de munir la variété d'un système de d' coordonnées, surnuméraires mais globales.

Un *fibré vectoriel* (de dimension finie) *au-dessus d'une variété* V est une variété F de classe C^p pourvue d'une application surjective $\pi \in C^p(F, V)$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

lorsque v parcourt V , les ensembles $F_v = \pi^{-1}(\{v\}) \subset F$ (appelés *fibres*) sont tous des espaces vectoriels, de même dimension finie, soit d' ;

pour tout $v \in V$, il existe un voisinage W de v dans V et un difféomorphisme ϕ de classe C^p entre $W \times \mathbb{R}^{d'}$ et $\pi^{-1}(W) \subset F$ tel que $x \mapsto \phi(w, x)$ soit, pour chaque $w \in W$, une bijection linéaire entre $\mathbb{R}^{d'}$ et la fibre F_w .

La dimension d'un tel fibré comme variété est $d+d'$; elle doit être soigneusement distinguée de la dimension algébrique d' de chaque fibre.

Si $v = \pi(x)$, on dit aussi que x est *au-dessus de* v ; on a l'habitude de schématiser V comme un espace « horizontal » et F comme placé au-dessus de V ; et on imagine la fibre F_v comme l'intersection de F avec une verticale passant par v ; on dit également que la fibre F_v est au dessus de x .

EXERCICE. — Soit F un fibré vectoriel au-dessus de V .

a) Pour toute fonction $f \in C^p(V)$, l'application de F dans F de multiplication par le scalaire f , dont la restriction à une fibre F_v est la multiplication par le réel $f(v)$, est de classe C^p .

b) Dans la variété $F \times F$, le sous-ensemble F' formé des (x, y) tels que $\pi(x) = \pi(y)$ est une sous-variété C^p , et l'application $(x, y) \mapsto x+y$ de F' dans F est C^p .

c) On appelle section du fibré (sous-entendu : de classe C^p) toute application $A \in C^p(V, F)$ telle que $\pi \circ A = \text{Id}_V$. Soit $v \in V$. Montrer qu'il existe d' sections du fibré $A_1, \dots, A_{d'}$ et un voisinage ouvert W de v tels que, pour chaque $w \in W$, les vecteurs $A_1(w), \dots, A_{d'}(w)$ forment une base de l'espace F_w . Pour toute section B du fibré, les fonctions $b^1, \dots, b^{d'}$, définies sur W par $B(w) = \sum_i b^i(w) A_i(w)$, sont de classe C^p sur W .

EXERCICE. — Si F est un fibré vectoriel au-dessus de V , définir canoniquement le fibré dual F^* , dont chaque fibre F_v^* est l'espace dual de F_v . De même, si F et G sont deux fibrés *au-dessus d'une même variété* V , définir les fibrés $F \oplus G$, $F \otimes G$, $L(F, G)$, qui sont, fibre par fibre, la somme directe de F et G , le produit tensoriel de F et G , l'ensemble des applications linéaires de F dans G .

Nous rencontrerons énormément de formules contenant des sommations et des dérivées partielles; c'est pourquoi il sera utile d'en alléger l'écriture. Les dérivées partielles d'une fonction f , lue dans des coordonnées locales v^1, \dots, v^d , par rapport à ces coordonnées, seront notées $D_i f$ au lieu de $\partial f / \partial v^i$; de même pour les dérivées d'ordre supérieur : $D_{i_j k} f$ remplace $\partial^3 f / \partial v^i \partial v^j \partial v^k$, etc. Pour alléger encore les formules, on supprime le signe \sum , au moyen de la convention suivante, en vigueur dans toute la suite : *lorsqu'un même indice, soit i , figure deux fois dans un même monôme, une fois en position basse et une fois en position haute, le signe \sum_i est sous-entendu devant ce monôme.*

2. — Vecteurs et covecteurs tangents

Soit $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, V)$ une courbe dans une variété V . À l'instant 0, γ se trouve en un point $x = \gamma(0) \in V$, mais qu'est-ce que la vitesse $\dot{\gamma}(0)$ de γ à cet instant? On peut choisir des coordonnées locales v^1, \dots, v^d au voisinage de x , observer les coordonnées $\gamma^i(t)$ du point $\gamma(t)$ (elles sont bien définies pour t voisin de 0), et considérer le système des d dérivées $\dot{\gamma}^i(0)$; mais comment faire apparaître ce système de façon intrinsèque (c'est-à-dire invariante par difféomorphismes)? L'une des manières possibles est la suivante. Pour toute fonction $f \in C^1(V)$, la composée $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^1 , dont la dérivée en $t = 0$ est $\dot{\gamma}^i(0) D_i f(x)$ (convention de sommation!). Ainsi, les d composantes $\dot{\gamma}^i(0)$ sont aussi les coefficients de l'opérateur différentiel $f \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$; ces coefficients ne sont pas intrinsèques, mais l'opérateur l'est; et il est donc légitime de définir la vitesse $\dot{\gamma}(t)$ comme étant cet opérateur lui-même.

DÉFINITIONS. — Soient V une variété C^p où $1 \leq p \leq \infty$, et x un point de V . Une application A de $C^p(V)$ dans \mathbb{R} est un *vecteur tangent à V au point x* s'il existe une carte locale (v^1, \dots, v^d) de domaine contenant x et des réels A^1, \dots, A^d tels que $Af = A^i D_i f(x)$ pour toute $f \in C^p(V)$. Les A^i sont appelés les *coefficients* de A dans la carte.

Si $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, V)$ est une courbe dans V , on appelle *vitesse de γ à l'instant t* , et on note $\dot{\gamma}(t)$, le vecteur $f \mapsto (f \circ \gamma)'(t)$ tangent à V au point $\gamma(t)$.

REMARQUES. — Si A est un vecteur tangent en x à V , les coefficients A^i tels que $Af = A^i D_i f(x)$ existent pour *toute* carte dont le domaine contient x , bien qu'on ne l'ait exigé que pour une seule carte. Si (v^i) et (w^α) sont deux cartes contenant x , les

coefficients A^i et A^α de A dans ces deux cartes sont liés par la *formule de changement de cartes* pour les vecteurs tangents

$$A^\alpha = A(w^\alpha) = D_i w^\alpha(x) A^i,$$

qui est linéaire et fait naturellement apparaître les coefficients $\frac{\partial w^\alpha}{\partial v^i}$ de la matrice jacobienne liée au changement de coordonnées locales.

Tout vecteur tangent en x à V est la vitesse à l'instant 0 d'une courbe γ telle que $\gamma(0) = x$. Fixons en effet des coordonnées locales (v^i) au voisinage de x , et soient x^i les coordonnées de x et A^i les coefficients de A dans ce système. La courbe γ de coordonnées $\gamma^i(t) = x^i + A^i t$ répond à la question. (Elle n'est parfois bien définie que sur un voisinage de $t = 0$; si l'on veut une courbe définie pour tout t , on peut par exemple poser $\gamma^i(t) = x^i + a^{-1} \tanh(a A^i t)$, en choisissant a assez grand.)

Remarquons enfin que le nom de vecteurs est justifié par le fait que *les vecteurs tangents à V en x forment un espace vectoriel de dimension d , dont une base est composée des d vecteurs $f \mapsto D_i f(x)$* (cette base dépend du choix des coordonnées locales au voisinage de x).

DÉFINITIONS. — Si x est un point d'une variété V de classe C^p , où $p \geq 1$, on appelle *espace tangent en x à V* , et l'on note $T_x V$, l'espace vectoriel de tous les vecteurs tangents en x à V .

On appelle *fibré tangent à V* , et l'on note TV , la réunion disjointe $\bigcup_{x \in V} T_x V$.

Le fibré tangent TV est canoniquement muni d'une structure de fibré vectoriel au-dessus de V , de classe C^{p-1} , de la manière suivante : Si (v^i) est une carte locale de V , de domaine D , la réunion $\bigcup_{x \in D} T_x V = \pi^{-1}(D)$ est le domaine d'une carte locale de TV , dans laquelle les $2d$ coordonnées d'un vecteur tangent $A \in T_x V$ sont les d coordonnées x^i de sa projection $x = \pi(A)$, et les d coefficients de A dans la carte locale. Le passage entre deux telles cartes, qui se fait au moyen de la formule de changement de cartes rencontrée plus haut, fait intervenir comme on l'a vu les matrices jacobiennes, dont les coefficients sont de classe C^{p-1} seulement; d'où la perte d'un ordre de différentiabilité en passant de V à TV .

EXERCICE. — Que peut-on dire de l'espace tangent en un point à une variété produit? à une sous-variété?

DÉFINITION. — Soient V et W deux variétés de classe C^p (où $1 \leq p \leq \infty$), x un point de V , et ϕ une application C^p de V dans W . Pour chaque $A \in T_x V$, l'application qui à toute $f \in C^p(W)$ associe le nombre $A(f \circ \phi)$ est un vecteur tangent à W au point $\phi(x)$, noté $\phi_{*x}(A)$. L'application ϕ_{*x} ainsi définie de $T_x V$ dans $T_y W$ est linéaire; on l'appelle *l'application linéaire tangente à ϕ au point x* .

Si (v^i) est une carte locale au voisinage de x et (w^α) une carte locale au voisinage de $\phi(x)$, la matrice de ϕ_{*x} dans les bases D_i et D_α est la matrice $(D_i \phi^\alpha)$. Les applications linéaires tangentes se composent naturellement : $(\psi \circ \phi)_{*x} = \psi_{*\phi(x)} \circ \phi_{*x}$.

EXERCICE. — L'application $\phi_{*x} : T_x V \rightarrow T_{\phi(x)} W$ peut aussi être définie par la propriété suivante : pour toute courbe $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, V)$ vérifiant $\gamma(0) = x$, l'image de la vitesse initiale $\dot{\gamma}(0)$ de γ est la vitesse initiale $(\phi \circ \gamma)'(0)$ de la courbe $\phi \circ \gamma$.

On peut d'ailleurs remarquer que le vecteur $\dot{\gamma}(0)$ est lui-même l'image par γ_{*0} du vecteur tangent $\frac{d}{dt} \in T_0 \mathbb{R}$.

Soient ϕ une application C^p d'une variété V dans une variété W (avec $p \geq 1$). L'application tangente à ϕ est l'application $\phi_* \in C^{p-1}(TV, TW)$ dont la restriction à chaque fibre $T_x V$ est ϕ_{*x} . Plus question de linéarité, TV n'étant pas un espace vectoriel; mais la formule de composition $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$ subsiste. Et ϕ_* peut être caractérisée par $\phi_*(\dot{\gamma}(0)) = (\phi \circ \gamma)'(0)$ pour toute courbe γ dans V .

PROPOSITION 1.1 ET DÉFINITION. — Soient V une variété C^p , où $1 \leq p \leq \infty$, et A une fonction réelle sur $V \times C^p(V)$. Pour chaque x de V , notons $A(x)$ la fonction $f \mapsto A(x, f)$ sur $C^p(V)$; pour chaque $f \in C^p(V)$, notons Af la fonction $x \mapsto A(x, f)$ sur V . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) pour chaque x de V , $A(x)$ est un vecteur tangent en x à V , et l'application $x \mapsto A(x)$ ainsi définie de V dans TV est de classe C^{p-1} (autrement dit, A est une section du fibré tangent);
- (ii) pour toute carte locale (v^1, \dots, v^d) , il existe des fonctions A^1, \dots, A^d , définies et de classe C^{p-1} dans le domaine D de la carte, telles que, pour tous $x \in D$ et $f \in C^p(V)$, on ait $A(x, f) = A^i(x) D_i f(x)$;
- (iii) $f \mapsto Af$ est une application linéaire de $C^p(V)$ dans $C^{p-1}(V)$ vérifiant pour toutes f^1, \dots, f^n dans $C^p(V)$ et toute ϕ dans $C^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ la formule (dite de changement de variables)

$$A(\phi \circ (f^1, \dots, f^n)) = D_j \phi \circ (f^1, \dots, f^n) Af^j .$$

Quand ces conditions sont réalisées, on dit que A est un champ de vecteurs sur V .

DÉMONSTRATION (sans les détails). — Les implications (i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) sont laissées comme exercices aux auditeurs.

(iii) \Rightarrow (ii). Si f est une fonction de C^p nulle au voisinage de x , il existe $g \in C^p$ telle que $g = 1$ au voisinage de x et $fg = 0$ partout. La formule de changement de variables donne $f Ag + g Af = A(fg) = 0$, d'où $Af = 0$ au voisinage de x ; ceci montre que l'opérateur A est local. Étant donnés x et f , pour calculer $A(x, f)$, on se fixe une carte (v^i) au voisinage de x et, quitte à modifier les v^i et f hors d'un voisinage de x , on se ramène au cas où les v^i sont définis partout sur V et où $f = \phi \circ (v^1, \dots, v^d)$, pour une $\phi \in C^p(\mathbb{R}^d)$. L'hypothèse (iii) donne alors $A(x, f) = A(x, v^i) D_i f(x)$. ■

EXERCICE. — Lorsque $p = \infty$, les deux conditions qui suivent sont équivalentes à (i), (ii) et (iii) ci-dessus :

(iv) $f \mapsto Af$ est une application linéaire de $C^\infty(V)$ dans $C^\infty(V)$ vérifiant la formule (de Leibniz)

$$\forall f \in C^\infty(V) \quad A(f^2) = 2f Af ;$$

(v) $f \mapsto Af$ est une application linéaire de $C^\infty(V)$ dans $C^\infty(V)$, on a $A1 = 0$ et, pour tous $f \in C^\infty(V)$ et $x \in V$ tels que $f(x) = 0$, $A(x, f^2) = 0$.

De même que les vecteurs tangents en un point peuvent être multipliés par des réels, les champs de vecteurs peuvent être multipliés par des fonctions, et forment ainsi un module sur l'algèbre $C^{p-1}(V)$.

La propriété fondamentale d'un champ de vecteurs est de donner lieu à un flot sur la variété : Pour $p \geq 1$, si A est un champ de vecteurs de classe C^{p-1} et x un point de V , il existe un intervalle ouvert I tel que $0 \in I \subset \mathbb{R}$ et une courbe $\gamma \in C^p(I, V)$ tels que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t))$ pour tout $t \in I$. Lorsque $p \geq 2$ (ou qu'une

condition de Lipschitz est satisfaite), on peut choisir I maximal, il y a unicité (deux solutions γ' et γ'' coïncident sur $I' \cap I''$) et la solution $\gamma(t)$ est fonction C^{p-1} de x (pour t fixé, l'ensemble des $x \in V$ tels que la solution $\gamma(t)$ soit définie est un ouvert, sur lequel la solution est une application C^{p-1} dans V).

DÉFINITIONS. — Soient $p \geq 1$ et V une variété de classe C^p . Pour $x \in V$, on appelle *espace cotangent en x à V* le dual T_x^*V de l'espace vectoriel T_xV . Les éléments de T_x^*V sont appelés *covecteurs* (ou *vecteurs cotangents*). On appelle *fibré cotangent* la réunion disjointe $T^*V = \bigcup_{x \in V} T_x^*V$; c'est un fibré vectoriel de classe C^{p-1} au-dessus de V .

Si f est une fonction C^p sur V , ou seulement sur un voisinage de x dans V , un covecteur $df(x) \in T_x^*V$ est défini par la formule $\langle df(x), A \rangle = Af$ pour tout $A \in T_xV$. Si (v^i) est une carte au voisinage de x , les d covecteurs $dv^i(x)$ forment une base de T_x^*V , plus précisément la base duale de la base (D_i) , car $\langle dv^i(x), D_j \rangle = D_j v^i(x) = \delta_j^i$. Tout covecteur $\sigma \in T_x^*V$ s'écrit donc de façon unique $\sigma = \sigma_i dv^i(x)$, où σ_i sont d coefficients réels; et la dualité entre vecteurs et covecteurs s'exprime en coordonnées locales par la formule très simple

$$\langle \sigma, A \rangle = \langle \sigma_i dv^i(x), A^j D_j \rangle = \sigma_i A^j \langle dv^i(x), D_j \rangle = \sigma_i A^j \delta_j^i = \sigma_i A^i .$$

Les coefficients σ_i du covecteur $\sigma = df(x)$ sont bien sûr $\sigma_i = D_i f$. Tout covecteur de T_x^*V est de la forme $df(x)$ pour une f bien choisie (prendre par exemple f égale à $\sigma_i v^i$ au voisinage de x si les coefficients du covecteur dans la base $dv^i(x)$ sont σ_i).

EXERCICE. — La formule de changement de cartes pour les coefficients σ_i et σ_α d'un même covecteur σ exprimé dans deux cartes (v^i) et (w^α) est $\sigma_\alpha = D_\alpha v^i \sigma_i$; la matrice $(D_\alpha v^i)$ qui y apparaît est l'inverse de la matrice jacobienne $(D_i w^\alpha)$.

EXERCICE. — Quelle relation y a-t-il entre $df(x)$ et l'application linéaire f_{*x} tangente à f en x ?

Si $\phi : V \rightarrow W$ est une application C^p entre deux variétés, on note ϕ_x^* l'application adjointe de ϕ_{*x} , qui va de $T_{\phi(x)}^*W$ dans T_x^*V ; elle peut être caractérisée par $\phi_x^*[df(\phi(x))] = d(f \circ \phi)(x)$ pour toute $f \in C^p(W)$.

DÉFINITION. — Sur une variété V de classe C^p , un *champ de covecteurs*¹ est une application $\sigma \in C^{p-1}(V, T^*V)$ telle que $\sigma(x) \in T_x^*V$ pour tout x de V .

EXERCICE. — Les champs de covecteurs sont les sections du fibré cotangent. On peut les identifier aux fonctions C^{p-1} sur TV , dont la restriction à chaque fibre T_xV est linéaire.

L'exemple fondamental de champ de covecteurs est df , où $f \in C^p$, de valeur $df(x)$ au point x . Il n'est pas vrai que tout champ de covecteurs soit de cette forme, mais une conséquence du théorème de plongement de Whitney est l'existence de fonctions $f^1, \dots, f^n \in C^p$, telles que tout champ de covecteur s'écrive (de façon en général non unique) $\sum_{k=1}^n g_k df_k$, où les g_k sont dans C^{p-1} . Remarquer que, si f est une fonction de classe C^p et γ une courbe, on a $\langle df, \dot{\gamma}(t) \rangle = (f \circ \gamma)'(t)$.

1. Le terme consacré est *forme différentielle de degré 1*.

EXERCICE. — Si ϕ est une application C^p de V dans W et σ un champ de covecteurs sur W , on peut définir un champ de covecteurs $\phi^*\sigma$ sur V . Mais si A est un champ de vecteurs sur V , on ne peut pas en général définir un champ de vecteurs ϕ_*A sur W !

EXERCICE. — L'ensemble des champs de covecteurs est un module sur l'algèbre $C^{p-1}(V)$, plus précisément le dual du module des champs de vecteurs sur V . (Indication : Tout champ de vecteurs C^{p-1} nul en un point x peut s'écrire comme une somme finie $\sum_{\ell} f_{\ell}A_{\ell}$, où les A_{ℓ} sont des champs de vecteurs C^{p-1} et les f_{ℓ} des fonctions C^{p-1} nulles en x .)

3. — Diffuseurs

En 1979, Schwartz a découvert que le langage qui décrit de façon intrinsèque les semimartingales dans les variétés est la géométrie différentielle d'ordre 2, dans laquelle les espaces de jets d'ordre 2 jouent un rôle aussi fondamental que les traditionnels objets tangents ou cotangents d'ordre 1 évoqués plus haut. En Géométrie et en Mécanique, pour passer à l'ordre 2 et parler par exemple de l'accélération d'une courbe, on a l'habitude de travailler dans le tangent itéré TTV (le fibré tangent construit sur la variété TV). Le point de vue agréable pour les probabilistes est un peu différent, parce que la formule de changement de variable pour les semimartingales fait appel à des objets d'ordre 2 qui ne s'expriment pas naturellement dans le cadre de TTV : il s'agit des opérateurs différentiels d'ordre 2 sans terme constant, qui jouent en calcul stochastique un rôle aussi central que les vecteurs tangents (opérateurs différentiels d'ordre 1 sans terme constant) dans le calcul différentiel ordinaire.

DÉFINITION. — Soient V une variété C^p où $2 \leq p \leq \infty$, et x un point de V . Une application L de $C^p(V)$ dans \mathbb{R} est un *diffuseur au point x* s'il existe une carte locale (v^1, \dots, v^d) de domaine contenant x et des réels L^1, \dots, L^d et $L^{11}, L^{12}, \dots, L^{dd}$ tels que $Lf = L^{ij} D_{ij}f(x) + L^k D_k f(x)$ pour toute $f \in C^p(V)$. Les nombres L^k et $\frac{1}{2}(L^{ij} + L^{ji})$ sont appelés les *coefficients* de L dans la carte.

Pour construire un diffuseur en x , on peut, une fois choisie la carte, se donner arbitrairement les $d + d^2$ nombres L^k et L^{ij} . Mais, en raison de la symétrie $D_{ij}f(x) = D_{ji}f(x)$ des dérivées secondes, on ne change pas L en symétrisant la matrice des L^{ij} ; L ne dépend donc que de ses $d + d(d+1)/2$ coefficients. Et réciproquement L détermine ses $d + d(d+1)/2$ coefficients, puisque $L^k = Lv^k$ et $L^{ij} + L^{ji} = L(\tilde{v}^i \tilde{v}^j)$, où la fonction $\tilde{v}^i \in C^p(V)$ est définie par $\tilde{v}^i(y) = v^i(y) - v^i(x)$.

En choisissant nuls les coefficients L^{ij} , on voit que tout vecteur tangent en x est aussi un diffuseur en x .

Tout comme les vecteurs, les diffuseurs au point x peuvent indifféremment être décrits dans toute carte locale entourant x : si (w^{α}) est une autre carte, le diffuseur L s'écrit aussi, en posant $\tilde{w}^{\alpha} = w^{\alpha} - w^{\alpha}(x)$,

$$L = \frac{1}{2}L(\tilde{w}^{\alpha}\tilde{w}^{\beta})D_{\alpha\beta} + Lw^{\gamma}D_{\gamma}.$$

Les formules de changement de cartes sont donc

$$L^{\gamma} = L^{ij}D_{ij}w^{\gamma}(x) + L^k D_k w^{\gamma}(x) \quad L^{\alpha\beta} = L^{ij}D_i w^{\alpha}(x)D_j w^{\beta}(x).$$

La première de ces formules montre que, lorsque les coefficients L^k des termes d'ordre 1 sont nuls, il n'en va pas nécessairement de même des coefficients L^γ ; la notion d'opérateur différentiel en x « purement d'ordre 2 » n'existe pas, ou plutôt n'est pas intrinsèque, car non invariante par changements non linéaires de coordonnées. Plus généralement, on ne peut pas parler de la partie d'ordre 1 d'un diffuseur, car il ne suffit pas de connaître les L^k pour savoir calculer les L^γ , il faut aussi les L^{ij} . Mais cela a un sens de parler des « diffuseurs sans termes d'ordre 2 » : ce sont exactement les vecteurs tangents.

DÉFINITION. — Si $\gamma \in C^2(\mathbb{R}, V)$ est une courbe dans V , on appelle *accélération de γ à l'instant t* , et on note $\ddot{\gamma}(t)$, le diffuseur $f \mapsto (f \circ \gamma)''(t)$ au point $\gamma(t)$.

Ses composantes dans une carte locale sont $L^k = \ddot{\gamma}^k(t)$ et $L^{ij} = \dot{\gamma}^i(t)\dot{\gamma}^j(t)$. Remarquer que c'est précisément dans le coefficient L^k du terme d'ordre 1 que vient se nicher $\ddot{\gamma}^k(t)$, la seule information authentiquement d'ordre 2! Remarquer aussi que si l'on connaît le diffuseur $\ddot{\gamma}(t)$, on peut presque retrouver le vecteur $\dot{\gamma}(t)$, mais pas tout à fait : $\dot{\gamma}(t)$ n'est déterminé qu'à un facteur ± 1 près.

DÉFINITION. — Si x est un point d'une variété V de classe C^p avec $2 \leq p \leq \infty$, on appelle *espace osculateur en x à V* , et on note $\mathbb{T}_x V$, l'espace vectoriel formé de tous les diffuseurs en x .

Une fois choisie une carte locale autour de x , les opérateurs différentiels D_k et D_{ij} au point x forment, pour $1 \leq k \leq d$ et $1 \leq i \leq j \leq d$, une base de l'espace osculateur $\mathbb{T}_x V$.

L'espace tangent $\mathbb{T}_x V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{T}_x V$.

LEMME 1.2. — Soient $x \in V$ et \mathcal{C} l'ensemble de toutes les courbes γ de classe C^p telles que $\gamma(0) = x$. Lorsque γ décrit \mathcal{C} , les vecteurs $\dot{\gamma}(0)$ décrivent tout l'espace tangent $\mathbb{T}_x V$, et les diffuseurs $\ddot{\gamma}(0)$ décrivent une partie génératrice de l'espace osculateur $\mathbb{T}_x V$.

Pour que les accélérations $\ddot{\gamma}(0)$ et $\ddot{\delta}(0)$ de deux courbes γ et δ dans \mathcal{C} diffèrent d'un vecteur tangent ($\ddot{\gamma}(0) - \ddot{\delta}(0) \in \mathbb{T}_x V$), il faut et il suffit que les vitesses $\dot{\gamma}(0)$ et $\dot{\delta}(0)$ soient égales ou opposées : $\dot{\gamma}(0) = \pm \dot{\delta}(0)$. En particulier, l'accélération $\ddot{\gamma}(0)$ est dans $\mathbb{T}_x V$ si et seulement si la vitesse $\dot{\gamma}(0)$ est nulle.

Enfin, lorsque γ décrit toutes les courbes de \mathcal{C} telles que $\dot{\gamma}(0) = 0$, les diffuseurs $\ddot{\gamma}(0)$ décrivent tout l'espace tangent $\mathbb{T}_x V$.

DÉMONSTRATION. — La première des quatre assertions, rappelée ici pour mémoire, a déjà été établie comme remarque, après la définition des vecteurs tangents.

Fixons une carte locale autour de x . Si une courbe γ passe en x à l'instant 0, elle est dans le domaine de la carte pour t voisin de 0, et ses coordonnées $\dot{\gamma}_i(t)$ sont définies pour t voisin de 0. Le diffuseur $\ddot{\gamma}(0)$ a pour composantes $L^k = \ddot{\gamma}^k(0)$ et $L^{ij} = \dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0)$; ces nombres L^{ij} sont les coefficients d'une matrice symétrique, positive, de rang 0 ou 1. Réciproquement, étant donnés une telle matrice m et un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$, il existe une courbe γ dans \mathcal{C} telle que $\gamma(0) = x$, $\ddot{\gamma}^k(0) = v^k$ et $\ddot{\gamma}^{ij}(0) = m^{ij}$: il suffit de choisir un vecteur $w \in \mathbb{R}^d$ tel que $w^i w^j = m^{ij}$ et de poser par exemple $\gamma^i(t) = x^i + f(t)(w^i t + \frac{1}{2} v^i t^2)$, où f est C^∞ , vaut 1 au voisinage de $t = 0$, et est portée par un compact assez petit pour que γ ne sorte pas du domaine de la carte. Les accélérations $\ddot{\gamma}(0)$ sont donc exactement les diffuseurs $L^{ij} D_{ij} + L^k D_k$ où les L^k sont quelconques et les L^{ij} forment une matrice symétrique positive de

rang 0 ou 1. Puisque ces matrices engendrent linéairement l'espace de toutes les matrices symétriques, les accélérations $\dot{\gamma}(0)$ engendrent linéairement $\mathbb{T}_x V$.

Pour que $\ddot{\gamma}(0) - \ddot{\delta}(0)$ soit dans $\mathbb{T}_x V$, il faut et il suffit que les d^2 nombres $\dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0) - \dot{\delta}^i(0)\dot{\delta}^j(0)$ soient nuls; en fixant un indice i_0 tel que $\dot{\gamma}^{i_0}(0) \neq 0$ (s'il en existe) et en s'intéressant seulement aux couples $i_0 j$, on en déduit facilement que $\dot{\delta}(0) = \pm \dot{\gamma}(0)$. Et cette condition nécessaire est évidemment suffisante.

Enfin, pour $A \in \mathbb{T}_x V$, de composantes A^i dans la carte, toute courbe γ telle que $\dot{\gamma}^i(0) = 0$ et $\ddot{\gamma}^i(0) = A^i$ (nous venons de voir qu'il en existe) vérifie $\ddot{\gamma}(0) = A$. ■

DÉFINITION. — Soient V et W deux variétés de classe C^p (où $2 \leq p \leq \infty$), x un point de V , et ϕ une application C^p de V dans W . Pour chaque $L \in \mathbb{T}_x V$, l'application qui à toute $f \in C^p(W)$ associe le nombre $L(f \circ \phi)$ est un diffuseur sur W au point $\phi(x)$, noté $\phi_{*x}(L)$. Ceci définit une application linéaire de $\mathbb{T}_x V$ dans $\mathbb{T}_{\phi(x)} W$ dont la restriction à $\mathbb{T}_x V$ est l'application tangente ϕ_{*x} ; on l'appelle *application osculatrice en x à ϕ* , et on la note encore ϕ_{*x} .

Les applications osculatrices se composent naturellement, comme les applications tangentées : $(\psi \circ \phi)_{*x} = \psi_{*\phi(x)} \circ \phi_{*x}$.

Si (v^i) est une carte locale au voisinage de x et (w^α) une carte locale au voisinage de $\phi(x)$, le diffuseur $M = \phi_{*x}(L)$ est donné par ses composantes $M^\alpha = L\phi^\alpha$ et $M^{\alpha\beta} = L^{ij} D_i \phi^\alpha(x) D_j \phi^\beta(x) = \frac{1}{2}(L(\phi^\alpha \phi^\beta) - \phi^\alpha L\phi^\beta - \phi^\beta L\phi^\alpha)$.

EXERCICES. — L'accélération initiale $\ddot{\gamma}(0)$ d'une courbe est l'image par γ_{*0} du diffuseur $\frac{d^2}{dt^2} \in \mathbb{T}_0 \mathbb{R}$.

L'application $\phi_{*x} : \mathbb{T}_x V \rightarrow \mathbb{T}_{\phi(x)} W$ est caractérisée par la propriété suivante : ϕ_{*x} est linéaire, et pour toute courbe $\gamma \in C^2(\mathbb{R}, V)$ vérifiant $\gamma(0) = x$, l'image de l'accélération initiale $\ddot{\gamma}(0)$ de γ est l'accélération initiale $(\phi \circ \gamma)_{*0}(0)$ de la courbe $\phi \circ \gamma$.

DÉFINITION. — Le *fibré osculateur* \mathbb{TV} est la réunion disjointe $\bigcup_{x \in V} \mathbb{T}_x V$; c'est une variété de classe C^{p-2} .

La structure de variété de \mathbb{TV} est construite comme celle du fibré tangent \mathbb{TV} ; la perte de deux ordres de différentiabilité vient de la formule de changement de cartes pour les diffuseurs, où interviennent, on l'a vu plus haut, des dérivées secondes $D_{ij} w^\alpha$, qui sont seulement $p-2$ fois différentiables.

Soient ϕ une application C^p d'une variété V dans une variété W (où $p \geq 2$). L'*application osculatrice à ϕ* est l'application $\phi_* \in C^{p-2}(\mathbb{TV}, \mathbb{TW})$ dont la restriction à chaque fibre $\mathbb{T}_x V$ est ϕ_{*x} . La formule de composition $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$ s'étend bien sûr aux applications osculatrices; et réciproquement, ϕ_* peut être caractérisée par $\phi_*(\ddot{\gamma}(0)) = (\phi \circ \gamma)_{*0}(0)$ pour toute courbe γ dans V .

PROPOSITION 1.3 ET DÉFINITION. — Soient V une variété C^p , où $2 \leq p \leq \infty$, et L une fonction réelle sur $V \times C^p(V)$. Pour chaque x de V , notons $L(x)$ la fonction $f \mapsto L(x, f)$ sur $C^p(V)$; pour chaque $f \in C^p(V)$, notons Lf la fonction $x \mapsto L(x, f)$ sur V . Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour chaque x de V , $L(x)$ est un diffuseur en x , et l'application $x \mapsto L(x)$ ainsi définie de V dans \mathbb{TV} est de classe C^{p-2} (autrement dit, L est une section du fibré osculateur);

(ii) pour toute carte locale (v^1, \dots, v^d) , il existe des fonctions L^1, \dots, L^d et $L^{11}, L^{12}, \dots, L^{dd}$, définies et de classe C^{p-2} dans le domaine D de la carte, telles

que, pour tous $x \in D$ et $f \in C^p(V)$, on ait

$$L(x, f) = L^{ij}(x) D_{ij}f(x) + L^k(x) D_k f(x) ;$$

(iii) $f \mapsto Lf$ est une application linéaire de $C^p(V)$ dans $C^{p-2}(V)$; et en posant $\Gamma(fg) = \frac{1}{2}[L(fg) - fLg - gLf]$, on a pour toutes f^1, \dots, f^n dans $C^p(V)$ et toute ϕ dans $C^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ la formule (dite de changement de variables)

$$L(\phi \circ (f^1, \dots, f^n)) = D_k \phi \circ (f^1, \dots, f^n) Lf^k + D_{ij} \phi \circ (f^1, \dots, f^n) \Gamma(f^i, f^j) .$$

Lorsque ces trois conditions sont réalisées, on dit que L est un champ de diffuseurs sur V ; l'opérateur bilinéaire Γ est le carré du champ associé à L .

DÉMONSTRATION (sans les détails). — Les implications (i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) sont laissées comme exercices aux auditeurs.

(iii) \Rightarrow (ii). Si f est une fonction de C^p nulle au voisinage de x , il existe $g \in C^p$ telle que $g = 1$ au voisinage de x et $fg = 0$ partout. La formule de changement de variables donne $0 = L(fg^2) = fL(g^2) + 2gL(fg) - g^2Lf - 2fgLg$, d'où $Lf = 0$ au voisinage de x ; ceci montre que l'opérateur L est local. Étant donnés x et f , pour calculer $L(x, f)$, on se fixe une carte (v^i) au voisinage de x et, quitte à modifier les v^i et f hors d'un voisinage de x , on se ramène au cas où les v^i sont définis partout sur V et où $f = \phi \circ (v^1, \dots, v^d)$, pour une $\phi \in C^p(\mathbb{R}^d)$. L'hypothèse (iii) donne alors $L(x, f) = Lv^k(x) D_k f(x) + \Gamma(v^i, v^j)(x) D_{ij} f(x)$. ■

EXERCICE. — Lorsque $p = \infty$, les deux conditions qui suivent sont équivalentes à (i), (ii) et (iii) ci-dessus :

(iv) $f \mapsto Lf$ est une application linéaire de $C^\infty(V)$ dans $C^\infty(V)$ vérifiant la formule

$$\forall f \in C^\infty(V) \quad L(f^3) = 3fL(f^2) - 3f^2Lf ;$$

(v) $f \mapsto Lf$ est une application linéaire de $C^\infty(V)$ dans $C^\infty(V)$, on a $L1 = 0$ et, pour tous $f \in C^\infty(V)$ et $x \in V$ tels que $f(x) = 0$, $L(x, f^3) = 0$.

Les champs de diffuseurs forment un module sur l'algèbre $C^{p-2}(V)$. Un exemple fort important de champ de diffuseurs est le composé AB de deux champs de vecteurs A et B : comme composé de deux opérateurs différentiels de degré 1, c'est un opérateur différentiel de degré au plus 2 ; comme il tue les fonctions constantes, il n'a pas de terme constant.

Sous des hypothèses de régularité et d'ellipticité, un champ de diffuseurs sur V est le générateur infinitésimal d'une diffusion sous-markovienne, à durée de vie éventuellement finie, unique en loi (voir Ikeda et Watanabe [60] ou Stroock et Varadhan [103]). Mais, alors qu'un champ de vecteurs s'intègre en un flot déterministe, un champ de diffuseurs L ne donne pas lieu, de façon intrinsèque, à un flot stochastique ; il faut pour cela une structure plus riche, obtenue en choisissant une décomposition de L en somme de Hörmander $B_0 + \sum_i A_i^2$, où B_0 et A_i sont des champs de vecteurs.

4. — Codiffuseurs

DÉFINITIONS. — Soient $p \geq 2$ et V une variété de classe C^p . Pour $x \in V$, on appellera *espace coosculteur en x à V* le dual \mathbb{T}_x^*V de l'espace vectoriel \mathbb{T}_xV . Les éléments de \mathbb{T}_x^*V seront appelés *codiffuseurs*. On appellera *fibré coosculteur* la réunion disjointe $\mathbb{T}^*V = \bigcup_{x \in V} \mathbb{T}_x^*V$; c'est un fibré vectoriel de classe C^{p-2} au-dessus de V .

L'exemple le plus simple de codiffuseur est l'application $L \mapsto Lf$ de $\mathbb{T}_x V$ dans \mathbb{R} , où f est une fonction de classe C^p définie au voisinage de x . Ce codiffuseur sera noté $d^2f(x)$; cette écriture trouvera sa justification en 1.5. Il peut être caractérisé par la formule $\langle d^2f(x), \ddot{\gamma}(0) \rangle = (f \circ \gamma)''(0)$ pour toute courbe γ telle que $\gamma(0) = x$. Comme pour les covecteurs, il est vrai que tous les éléments de $\mathbb{T}_x^* V$ sont de la forme $d^2f(x)$; nous le verrons en 1.6.

Les codiffuseurs au point x sont donc les applications linéaires de $\mathbb{T}_x V$ dans \mathbb{R} . Puisque $\mathbb{T}_x V$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{T}_x V$, chaque codiffuseur $\theta \in \mathbb{T}_x^* V$ peut être restreint à $\mathbb{T}_x V$, fournissant ainsi un covecteur $\mathbf{R}\theta \in \mathbb{T}_x^* V$, naturellement appelé la *restriction* de θ . Cette application $\mathbf{R} : \mathbb{T}_x^* V \rightarrow \mathbb{T}_x^* V$ est linéaire et surjective (c'est l'application adjointe de l'injection canonique de $\mathbb{T}_x V$ dans $\mathbb{T}_x V$). Pour $f \in C^p$, on lit immédiatement sur les définitions que $\mathbf{R}(d^2f(x)) = df(x)$.

PROPOSITION 1.4 ET DÉFINITION. — *On suppose V de classe C^p , où $2 \leq p \leq \infty$. Soient $\sigma \in \mathbb{T}_x^* V$ et $\tau \in \mathbb{T}_x^* V$ deux covecteurs en x . Il existe un unique codiffuseur $\sigma \cdot \tau \in \mathbb{T}_x^* V$ (appelé le produit de σ et τ) tel que pour toute courbe γ vérifiant $\gamma(0) = x$ on ait*

$$\langle \sigma \cdot \tau, \ddot{\gamma}(0) \rangle = \langle \sigma, \dot{\gamma}(0) \rangle \langle \tau, \dot{\gamma}(0) \rangle .$$

Le produit $\sigma \cdot \tau$ est bilinéaire, symétrique et de restriction nulle : $\mathbf{R}(\sigma \cdot \tau) = 0$. En outre, pour toutes f et g de classe C^p , on a

$$df(x) \cdot dg(x) = \frac{1}{2} [d^2(fg)(x) - f(x)d^2g(x) - g(x)d^2f(x)] .$$

DÉMONSTRATION. — Pour établir l'existence, il suffit de choisir une carte locale au voisinage de x , d'en déduire une base (D_{ij}, D_k) de $\mathbb{T}_x V$ (où $1 \leq i \leq j \leq d$ et $1 \leq k \leq d$), et de poser $\langle \sigma \cdot \tau, D_{ij} \rangle = \frac{1}{2} (\langle \sigma, D_i \rangle \langle \tau, D_j \rangle + \langle \sigma, D_j \rangle \langle \tau, D_i \rangle)$ et $\langle \sigma \cdot \tau, D_k \rangle = 0$; on vérifie immédiatement que cet objet satisfait la propriété requise :

$$\begin{aligned} \langle \sigma \cdot \tau, \ddot{\gamma}(0) \rangle &= \langle \sigma \cdot \tau, \dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0)D_{ij} + \ddot{\gamma}^k(0)D_k \rangle \\ &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}^i(0)\dot{\gamma}^j(0) (\langle \sigma, D_i \rangle \langle \tau, D_j \rangle + \langle \sigma, D_j \rangle \langle \tau, D_i \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle \sigma, \dot{\gamma}(0) \rangle \langle \tau, \dot{\gamma}(0) \rangle + \langle \sigma, \dot{\gamma}(0) \rangle \langle \tau, \dot{\gamma}(0) \rangle) = \langle \sigma, \dot{\gamma}(0) \rangle \langle \tau, \dot{\gamma}(0) \rangle ; \end{aligned}$$

Comme $\langle \sigma \cdot \tau, D_k \rangle = 0$ pour tout k , on a $\mathbf{R}(\sigma \cdot \tau) = 0$.

L'unicité découle de ce que les accélérations $\ddot{\gamma}(0)$ engendrent linéairement l'espace osculateur $\mathbb{T}_x V$ (lemme 1.2). De même, la bilinéarité et la symétrie, évidentes sur les accélérations $\ddot{\gamma}(0)$, s'étendent à tout $\mathbb{T}_x V$; et la formule pour $df(x) \cdot dg(x)$ résulte de

$$\begin{aligned} \langle df(x) \cdot dg(x), \ddot{\gamma}(0) \rangle &= \langle df(x), \dot{\gamma}(0) \rangle \langle dg(x), \dot{\gamma}(0) \rangle = (f \circ \gamma)'(0) (g \circ \gamma)'(0) \\ &= \frac{1}{2} [((fg) \circ \gamma)'' - f(x)(g \circ \gamma)'' - g(x)(f \circ \gamma)''](0) \\ &= \frac{1}{2} \langle d^2(fg)(x) - f(x)d^2g(x) - g(x)d^2f(x), \ddot{\gamma}(0) \rangle . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Nous venons de voir deux opérations qui relient covecteurs et codiffuseurs, la restriction et le produit. Il y en a une troisième, la différentiation symétrique. Contrairement aux deux autres, elle n'est pas ponctuelle (bien qu'elle soit locale) : on ne peut pas la définir en restant dans des fibres au dessus de x , il faut travailler au voisinage de x (comme nous avons déjà dû le faire pour la composition des champs de vecteurs). Ceci nécessite de définir les champs de codiffuseurs.

DÉFINITION. — Un *champ de codiffuseurs* est une application $\theta \in C^{p-2}(V, \mathbb{T}^*V)$ telle que $\theta(x) \in \mathbb{T}_x^*V$ pour tout x de V .

EXERCICE. — Les champs de codiffuseurs sont les sections du fibré coosculteur ; on peut les identifier aux fonctions C^{p-2} sur $\mathbb{T}V$, dont la restriction à chaque fibre \mathbb{T}_xV est linéaire.

Comme exemple de champ de codiffuseurs, citons d^2f , où f est une fonction C^p ; la valeur de d^2f au point x est le codiffuseur $d^2f(x)$ et son accouplement avec les champs de covecteurs est donné par $\langle d^2f, L \rangle = Lf$. Il est faux que tout champ de codiffuseurs soit de cette forme (c'est déjà faux pour les champs de covecteurs, qui ne sont pas tous de la forme df). La formule de la proposition 1.4 s'étend immédiatement aux champs de covecteurs : $df \cdot dg = \frac{1}{2}(d^2(fg) - f d^2g - g d^2f)$.

PROPOSITION 1.5 ET DÉFINITION. — On suppose V de classe C^p , où $2 \leq p \leq \infty$. Si σ est un champ de covecteurs, il existe un unique champ de codiffuseurs $d\sigma$ (appelé la différentielle symétrique de σ) tel que pour toute courbe γ on ait

$$\langle d\sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle = \frac{d}{dt} \langle \sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle .$$

On a toujours $\mathbf{R}(d\sigma) = \sigma$ et $d(df) = d^2f$. La différentiation $\sigma \mapsto d\sigma$ est linéaire, mais n'est pas C^p -linéaire : pour $f \in C^p$, on a $d(f\sigma) = df \cdot \sigma + f d\sigma$.

Il importe de ne pas confondre ce d avec l'opérateur de différentiation extérieure, ou cobord, que nous n'utiliserons pas, et qui transforme les champs de covecteurs — ou formes différentielles de degré 1 — en formes différentielles de degré 2 ; celles-ci sont antisymétriques par nature, au contraire des champs de codiffuseurs.

Contrairement à la différentielle extérieure, d ne vérifie pas $dod = 0$, puisque $d(df) = d^2f$. C'est bien sûr cette dernière formule qui justifie de noter d^2f le codiffuseur $L \mapsto Lf$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.5. — Commençons par établir l'existence et la formule $\mathbf{R}(d\sigma) = \sigma$. Si χ est une carte locale, soient σ_i les coefficients de σ dans cette carte ; ce sont des fonctions définies sur le domaine D de la carte, et de classe C^{p-1} sur D . Définissons, en tout point de D , un codiffuseur θ^χ par $\langle \theta^\chi, D_k \rangle = \sigma_k$ et $\langle \theta^\chi, D_{ij} \rangle = \frac{1}{2}(D_i\sigma_j + D_j\sigma_i)$. Il vérifie $\mathbf{R}\theta^\chi = \sigma$ sur D , et pour toute courbe γ , on a, sur l'ouvert $\{t \in \mathbb{R} : \gamma(t) \in D\}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle &= \frac{d}{dt} [\sigma_j(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t)] = D_i\sigma_j(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) + \sigma_j(\gamma(t)) \ddot{\gamma}^j(t) \\ &= \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \langle \theta^\chi, D_{ij} \rangle + \ddot{\gamma}^k(t) \langle \theta^\chi, D_k \rangle = \langle \theta^\chi, \ddot{\gamma}(t) \rangle . \end{aligned}$$

Si χ' et χ'' sont deux cartes, cette formule jointe au lemme 1.2 montre que $\theta^{\chi'} = \theta^{\chi''}$ sur l'intersection des domaines de χ' et χ'' ; il existe donc un champ de codiffuseurs θ tel que, pour chaque carte χ , $\theta = \theta^\chi$ sur le domaine de χ ; il vérifie identiquement les formules $\mathbf{R}\theta = \sigma$ et $\langle \theta, \ddot{\gamma}(t) \rangle = \frac{d}{dt} \langle \sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle$.

Il reste à établir l'unicité, la linéarité en σ et les formules donnant $d(df)$ et $d(f\sigma)$. L'unicité et la linéarité en σ , qu'il suffit de vérifier en un point x , résultent du lemme 1.2. La formule $d(df) = d^2f$ s'obtient de même en remarquant que

$$\langle d^2f, \ddot{\gamma}(t) \rangle = \frac{d^2}{dt^2} f \circ \gamma(t) = \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)'(t) = \frac{d}{dt} \langle df, \dot{\gamma}(t) \rangle ;$$

enfin, la formule donnant $d(f\sigma)$ résulte de

$$\begin{aligned} \langle d(f\sigma), \dot{\gamma}(t) \rangle &= \frac{d}{dt} \langle f\sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle = \frac{d}{dt} [f(\gamma(t)) \langle \sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle] \\ &= \frac{d}{dt} [f(\gamma(t))] \langle \sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle + f(\gamma(t)) \frac{d}{dt} \langle \sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &= \langle df, \dot{\gamma}(t) \rangle \langle \sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle + f(\gamma(t)) \langle d\sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle \\ &= \langle df \cdot \sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle + \langle f d\sigma, \dot{\gamma}(t) \rangle . \end{aligned}$$

La base de l'espace osculateur $\mathbb{T}_x V$ formée des $d + d(d+1)/2$ diffuseurs D_{ij} et D_k , où $1 \leq i \leq j \leq d$ et $1 \leq k \leq d$ est peu maniable; en pratique, on préfère travailler avec tous les D_{ij} , en utilisant les coefficients des diffuseurs. C'est sous cette forme que la dualité entre diffuseurs et codiffuseurs s'exprime de façon agréable.

PROPOSITION 1.6. — Soit x un point du domaine d'une carte locale (v^1, \dots, v^d) sur V . Tout codiffuseur $\theta \in \mathbb{T}_x^* V$ s'écrit de façon unique comme

$$\theta_{ij} dv^i(x) \cdot dv^j(x) + \theta_k d^2 v^k(x) ,$$

où θ_{ij} et θ_k sont $d^2 + d$ nombres réels vérifiant $\theta_{ij} = \theta_{ji}$.

Si $L \in \mathbb{T}_x V$ est un diffuseur en x , de coefficients L^{ij} et L^k (donc tel que $L = L^{ij} D_{ij} + L^k D_k$ et $L^{ij} = L^{ji}$), la dualité entre $\mathbb{T}_x^* V$ et $\mathbb{T}_x V$ s'exprime par

$$\langle \theta, L \rangle = \theta_{ij} L^{ij} + \theta_k L^k ;$$

cette formule reste d'ailleurs valable lorsque l'un seulement de θ et L est écrit sous forme symétrique en i et j .

Lorsque f parcourt les fonctions de classe C^{p-2} , le codiffuseur $d^2 f(x)$ décrit tout l'espace coosculateur $\mathbb{T}_x^* V$.

DÉMONSTRATION. — Si L est un diffuseur en x , de coefficients L^{ij} et L^k , puisque

$$\langle d^2 v^\ell, L \rangle = L v^\ell = L^{ij} D_{ij} v^\ell + L^k D_k v^\ell = 0 + L^k \delta_k^\ell = L^\ell$$

et que

$$\begin{aligned} 2 \langle L, dv^\ell \cdot dv^m \rangle &= L(v^\ell v^m) - v^\ell(x) L v^m - v^m(x) L v^\ell \\ &= L^k D_k (v^\ell v^m) + L^{ij} D_{ij} (v^\ell v^m) - v^\ell(x) L v^m - v^m(x) L v^\ell \\ &= L^k (\delta_k^\ell v^m(x) + v^\ell(x) \delta_k^m) + L^{ij} (\delta_i^\ell \delta_j^m + \delta_i^m \delta_j^\ell) - v^\ell(x) L v^m - v^m(x) L v^\ell \\ &= L^{\ell m} + L^{m\ell} = 2 L^{\ell m} , \end{aligned}$$

les $dv^i(x) \cdot dv^j(x)$ et les $dv^k(x)$ engendrent toutes les formes linéaires sur $\mathbb{T}_x V$, c'est-à-dire le dual $\mathbb{T}_x^* V$. La formule de dualité $\langle \theta, L \rangle = \theta_{ij} L^{ij} + \theta_k L^k$ en résulte également, et ainsi que l'unicité de l'écriture de θ (pourvu que $\theta_{ij} = \theta_{ji}$) : si $\theta_{ij} dv^i(x) \cdot dv^j(x) + \theta_k d^2 v^k(x) = 0$, alors $\theta_{ij} L^{ij} + \theta_k L^k = 0$ pour tout L , donc θ_{ij} et θ_k sont nuls.

L'extension de la formule de dualité au cas où l'une seulement des matrices (θ_{ij}) ou (L^{ij}) est symétrique est immédiate : si, par exemple, $L^{ij} = L^{ji}$, on ne change pas $\theta_{ij} L^{ij}$ en remplaçant θ_{ij} par sa symétrisée $\frac{1}{2}(\theta_{ij} + \theta_{ji})$.

Enfin, pour $\theta = \theta_{ij} dv^i(x) \cdot dv^j(x) + \theta_k d^2 v^k(x) \in \mathbb{T}_x^* V$ (écriture symétrique), il existe $f \in C^{p-2}$ telle que $D_{ij} f(x) = \theta_{ij}$ et $D_k f(x) = \theta_k$ (on peut prendre par exemple un polynôme convenable en les v^i multiplié par une fonction C^p , égale à 1 au voisinage de x , et à support compact inclus dans le domaine de la carte); on a alors

$$\langle \theta, L \rangle = \theta_{ij} L^{ij} + \theta_k L^k = L^{ij} D_{ij} f(x) + L^k D_k f(x) = L f = \langle d^2 f(x), L \rangle$$

pour tout $L \in \mathbb{T}_x V$, d'où $d^2 f = \theta$. ■

PROPOSITION 1.7. — Soit (v^1, \dots, v^d) une carte locale, de domaine D . Tout champ de codiffuseurs θ sur V s'écrit dans D de façon unique comme

$$\theta_{ij} dv^i \cdot dv^j + \theta_k d^2 v^k ,$$

où θ_{ij} et θ_k sont $d^2 + d$ fonctions sur D de classe C^{p-2} et vérifiant la condition de symétrie $\theta_{ij} = \theta_{ji}$.

On a aussi

$$\mathbf{R}(\theta_{ij} dv^i \cdot dv^j + \theta_k d^2 v^k) = \theta_k dv^k ,$$

et, si f et g sont deux fonctions et σ et τ deux champs de covecteurs qui s'écrivent $\sigma = \sigma_i dv^i$ et $\tau = \tau_i dv^i$ dans D ,

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sigma_k d^2 v^k + D_i \sigma_j dv^i \cdot dv^j , & d^2 f &= D_k f d^2 v^k + D_{ij} f dv^i \cdot dv^j , \\ \sigma \cdot \tau &= \sigma_i \tau_j dv^i \cdot dv^j . & df \cdot dg &= D_i f D_j g dv^i \cdot dv^j \end{aligned}$$

(remarquer que ces écritures des champs de codiffuseurs $d\sigma$, $\sigma \cdot \tau$ et $df \cdot dg$ ne sont pas mises sous forme symétrique).

La formule de dualité entre champs de diffuseurs et de codiffuseurs s'écrit encore

$$\langle \theta, L \rangle = \theta_{ij} L^{ij} + \theta_k L^k ,$$

où $L = L^{ij} D_{ij} + L^k D_k$ est une écriture dans la carte d'un champ de diffuseurs et où l'un au moins des systèmes de coefficients (θ_{ij}) et (L^{ij}) est symétrique.

DÉMONSTRATION. — L'existence et l'unicité de cette écriture d'un champ de codiffuseurs, ainsi que la formule de dualité avec les champs de diffuseurs, se déduisent des énoncés analogues en un point (proposition 1.6).

La formule donnant la restriction $\mathbf{R}(\theta)$ résulte immédiatement des propriétés $\mathbf{R}(d^2 f) = df$ et $\mathbf{R}(s \cdot \tau) = 0$ de \mathbf{R} . Enfin, les quatre formules donnant $d\sigma$, $\sigma \cdot \tau$, $d^2 f$ et $df \cdot dg$ se déduisent sans peine des propositions 1.4 et 1.5. \blacksquare

Si $\phi : V \rightarrow W$ est une application C^p entre deux variétés, on note ϕ_x^* l'application adjointe de ϕ_{*x} , qui va de $\mathbb{T}_{\phi(x)}^* W$ dans $\mathbb{T}_x^* V$; elle est définie par $\langle \phi_x^* \theta, L \rangle = \langle \theta, \phi_{*x} L \rangle$ pour tout $L \in \mathbb{T}_x V$ et, grâce à 1.6, peut être caractérisée par $\phi_x^* [d^2 f(\phi(x))] = d^2(f \circ \phi)(x)$ pour toute $f \in C^p(W)$.

Si ϕ est une application C^p de V dans W et θ un champ de codiffuseurs sur W , on peut définir un champ de codiffuseurs $\phi^* \theta$ sur V : en un point $x \in V$, poser $(\phi^* \theta)(x) = \phi_x^* [\theta(\phi(x))]$. Le même symbole ϕ^* est donc utilisé pour deux opérations analogues, l'une sur les covecteurs, l'autre sur les codiffuseurs. L'expérience montre que ce n'est pas gênant, bien au contraire : cela ajoute à l'élégance des trois formules ci-dessous :

PROPOSITION 1.8. — Soient ϕ une application C^p de V dans W , θ un champ de codiffuseurs sur W , σ et τ deux champs de covecteurs sur W . On a

$$\begin{aligned} \phi^*(d\sigma) &= d(\phi^* \sigma) , \\ \phi^*(\mathbf{R}\theta) &= \mathbf{R}(\phi^* \theta) \quad \text{et} \quad \phi^*(\sigma \cdot \tau) = \phi^* \sigma \cdot \phi^* \tau . \end{aligned}$$

Les deux dernières formules ont aussi lieu si θ , σ et τ sont un codiffuseur et des covecteurs en un point y de W de la forme $\phi(x)$, en remplaçant, bien sûr, ϕ^* par ϕ_x^* .

DÉMONSTRATION. — La seconde formule se vérifie séparément en chaque point x , en choisissant une fonction f sur W telle que $(d^2f)(\phi(x)) = \theta(\phi(x))$ et en écrivant, au point x ,

$$\phi^*(\mathbf{R}\theta) = \phi^*(\mathbf{R}(d^2f)) = \phi^*(df) = d(f \circ \phi) = \mathbf{R}d^2(f \circ \phi) = \mathbf{R}\phi^*(d^2f) .$$

La troisième peut, en utilisant le lemme 1.2 et la définition du produit des covecteurs, se vérifier sur les accélérations des courbes :

$$\begin{aligned} \langle \phi^*(\sigma \cdot \tau), \ddot{\gamma} \rangle &= \langle \sigma \cdot \tau, \phi_* \ddot{\gamma} \rangle = \langle \sigma \cdot \tau, (\phi \circ \gamma)'' \rangle = \langle \sigma, (\phi \circ \gamma)' \rangle \langle \tau, (\phi \circ \gamma)' \rangle \\ &= \langle \sigma, \phi_* \dot{\gamma} \rangle \langle \tau, \phi_* \dot{\gamma} \rangle = \langle \phi^* \sigma, \dot{\gamma} \rangle \langle \phi^* \tau, \dot{\gamma} \rangle = \langle \phi^* \sigma \cdot \phi^* \tau, \ddot{\gamma} \rangle . \end{aligned}$$

Pour la première formule, on écrit σ comme une somme finie de champs de covecteurs du type $f dg$, où f et g sont des fonctions; c'est toujours possible dans le domaine d'une carte (ça l'est aussi globalement, mais peu importe...). On peut donc supposer $\sigma = f dg$. On a alors $\phi^* \sigma = f \circ \phi \phi^*(dg) = f \circ \phi d(g \circ \phi)$, d'où

$$\begin{aligned} d(\phi^* \sigma) &= d(f \circ \phi d(g \circ \phi)) = d(f \circ \phi) \cdot d(g \circ \phi) + f \circ \phi d^2(g \circ \phi) \\ &= \phi^* df \cdot \phi^* dg + f \circ \phi \phi^* d^2g = \phi^*(df \cdot dg + f d^2g) = \phi^* d(f dg) = \phi^* d\sigma . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Comme pour les champs de vecteurs, si A est un champ de diffuseurs sur V , il n'est en général pas possible de définir un champ de diffuseurs $\phi_* A$ sur W .

EXERCICE. — Soient ϕ une application C^p de V dans W , x et y tels que $\phi(x) = y$ et soit (v^i) (respectivement (w^α)) un système de coordonnées locales au voisinage de x (respectivement y). Si $\theta = \theta_{\alpha\beta} dw^\alpha dw^\beta + \theta_\gamma d^2w^\gamma \in \mathbb{T}_y^*W$ est un codiffuseur au point y , établir la formule (au point x)

$$\phi^* \theta = [\theta_{\alpha\beta} D_i \phi^\alpha D_j \phi^\beta + \theta_\gamma D_{ij} \phi^\gamma] dv^i \cdot dv^j + \theta_\gamma D_k \phi^\gamma d^2v^k .$$

DÉFINITION. — Un codiffuseur $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$ tel que $\mathbf{R}\theta = 0$ sera dit *purement d'ordre deux*.

Dans la dualité entre \mathbb{T}_xV et \mathbb{T}_x^*V , le sous-espace purement d'ordre deux de \mathbb{T}_x^*V est donc l'orthogonal du sous-espace « purement d'ordre un » \mathbb{T}_xV de \mathbb{T}_xV .

PROPOSITION 1.9. — *Pour $x \in V$, le sous-espace vectoriel purement d'ordre deux $\text{Ker } \mathbf{R}$ de l'espace coosculteur \mathbb{T}_x^*V est linéairement engendré par les codiffuseurs de la forme $\sigma \cdot \sigma$, où σ décrit \mathbb{T}_xV .*

*Il existe une bijection linéaire \mathbf{Q} entre le sous-espace purement d'ordre deux de \mathbb{T}_x^*V et l'ensemble des formes quadratiques sur \mathbb{T}_xV , telle que $\mathbf{Q}(\sigma \cdot \sigma)$ soit la forme quadratique $A \mapsto \langle \sigma, A \rangle^2$. La forme quadratique $\mathbf{Q}\theta$ est aussi caractérisée par la formule $\langle \theta, \ddot{\gamma}(0) \rangle = (\mathbf{Q}\theta)(\dot{\gamma}(0))$, valable pour toute courbe γ telle que $\gamma(0) = x$. Réciproquement, étant donné $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$, s'il existe une forme quadratique q sur \mathbb{T}_xV telle que $\langle \theta, \ddot{\gamma}(0) \rangle = q(\dot{\gamma}(0))$ pour toute telle courbe, alors θ est purement d'ordre deux et $q = \mathbf{Q}\theta$.*

Autrement dit, $\mathbf{Q}(\sigma \cdot \sigma) = \sigma \otimes \sigma$ et le sous-espace purement d'ordre deux $\text{Ker } \mathbf{R}$ de l'espace coosculteur s'identifie au produit tensoriel symétrique $\mathbb{T}_x^*V \odot \mathbb{T}_x^*V$.

DÉFINITION. — Un codiffuseur $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$ purement d'ordre deux sera dit *positif* (respectivement *défini positif*) si la forme quadratique associée $\mathbf{Q}\theta$ est positive (respectivement définie positive).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 1.9. — Utilisons des coordonnées locales au voisinage de x . Un codiffuseur $\theta \in \text{Ker } \mathbf{R}$ s'écrit $\theta_{ij} dv^i(x) \cdot dv^j(x)$; on établit ainsi une bijection entre l'espace $\text{Ker } \mathbf{R}$ et les matrices symétriques (θ_{ij}) . Pour $\sigma = \sigma_i dv^i(x) \in \mathbb{T}_x^*V$, la matrice correspondant à $\theta = \sigma \cdot \sigma$ est $\theta_{ij} = \sigma_i \sigma_j$, et $\mathbf{Q}\theta$ est caractérisée par $\mathbf{Q}(\theta)(A^i D_i) = \theta_{ij} A^i A^j$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$ et toute courbe γ telle que $\gamma(0) = x$, on a en coordonnées locales $\langle \theta, \ddot{\gamma} \rangle = \theta_k \ddot{\gamma}^k + \theta_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j$. On voit immédiatement sur cette expression que les coefficients θ_k sont nuls si et seulement si θ s'identifie à une forme quadratique agissant sur $\dot{\gamma}$, et qu'alors cette forme quadratique, de matrice (θ_{ij}) , est égale à $\mathbf{Q}\theta$. ■

La formule de changement de base pour les covecteurs purement d'ordre deux s'écrit

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_{ij} D_\alpha v^i D_\beta v^j .$$

Elle ne fait intervenir que les dérivées premières des coordonnées. Ceci traduit le caractère tensoriel de ces objets; cela montre aussi que le « fibré coosculteur purement d'ordre deux » est muni d'une structure de variété de classe C^{p-1} , donc un peu plus régulier que le fibré coosculteur, qui est de classe C^{p-2} .

DÉFINITION. — On appelle *variété riemannienne* une variété de classe C^p munie d'un champ C^{p-1} de codiffuseurs purement d'ordre deux, définis positifs.

Une structure riemannienne sur une variété munit chaque espace tangent $\mathbb{T}_x V$ d'une structure euclidienne; ceci permet de quantifier la vitesse des courbes, puis de parler de leur longueur, et de bien d'autres invariants. (C'est aussi ce qui permet de définir les mouvements browniens dans la variété; c'est dire s'il s'agit d'une notion intéressante!)

Chapitre 2

SEMIMARTINGALES DANS UNE VARIÉTÉ ET GÉOMÉTRIE D'ORDRE 2

Ces objets au second degré peuvent se combiner à d'autres; le processus, au moyen de certaines abréviations, est pratiquement infini.

J. L. BORGES,
Tlön Uqbar Orbis Tertius

La théorie des intégrales stochastiques repose essentiellement sur des inégalités de martingales, c'est pourquoi, en calcul stochastique usuel (dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^d), on introduit le plus souvent les martingales avant les intégrateurs plus généraux que sont les semimartingales. En géométrie différentielle stochastique, la situation est différente, parce que les martingales nécessitent une structure géométrique plus riche, et parce qu'il semble impossible de les définir autrement que comme des semimartingales ayant une propriété supplémentaire. Avant d'en venir aux martingales dans les variétés, objets de ce cours, un chapitre va être consacré aux semimartingales dans les variétés.

1. — Brefs rappels sur les semimartingales continues

Les semimartingales continues, à valeurs dans \mathbb{R} ou dans un espace vectoriel de dimension finie, sont au cœur de la théorie de l'intégration stochastique, et font l'objet de nombreux ouvrages. Mes préférences vont aux tomes II et V du traité en cinq volumes [36] et [35] de Dellacherie, Maisonneuve et Meyer, véritable bible sur ce sujet. Son seul défaut serait d'être trop complet : pour le cas continu qui seul nous intéresse ici, on peut le lire en négligeant tout ce qui concerne les sauts de semimartingales. Mais bien d'autres sources fournissent aussi une excellente approche.

Un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est fixé (et souvent sous-entendu) dans la suite. Les conditions habituelles sont en vigueur : la tribu \mathcal{A} est complète, chaque tribu \mathcal{F}_t contient tous les événements négligeables (de \mathcal{A}) et est égale à l'intersection $\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.

Si X est un processus et T un temps d'arrêt, nous noterons $X^{T]}$ le processus arrêté, défini par $X_t^{T]} = X_{t \wedge T}$.

Rappelons qu'une semimartingale est un processus réel $X = (X_t)_{t \geq 0}$ admettant une décomposition de la forme $X_t = X_0 + M_t + A_t$, où M est une martingale locale nulle pour $t = 0$ et A un processus adapté, dont chaque trajectoire $t \mapsto A_t(\omega)$ est une fonction nulle en 0 et à variation bornée sur tout compact de \mathbb{R}_+ (un tel processus A est dit à *variation finie*).

Nous ne nous intéresserons qu'à des semimartingales continues : par convention, le mot semimartingale signifiera dorénavant « semimartingale continue ». Si X est un tel processus, les processus M et A figurant dans la décomposition de X peuvent aussi être pris continus, et une telle décomposition est alors unique; nous les choisirons toujours ainsi. (Mais si l'on remplace \mathbb{P} par une probabilité équivalente, la décomposition change, bien que X reste une semimartingale.)

THÉORÈME 2.1 (INTÉGRATION STOCHASTIQUE). — *Soit X une semimartingale. Il existe une unique application linéaire de l'espace des processus prévisibles localement bornés dans l'espace des semimartingales nulles en zéro, notée $H \mapsto \int H \, dX$, vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) *pour $s \geq 0$ et $A \in \mathcal{F}_s$, si $H = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{]s, \infty[}$ (ou encore $H = \mathbb{1}_A$ lorsque $s = 0$),*

$$\int H \, dX = (X - X^{s]) \mathbb{1}_A ;$$

(ii) *si $(H^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de processus prévisibles qui converge vers une limite H , et si $\sup_n |H^n|$ est localement borné, alors $\int H^n \, dX$ tend vers $\int H \, dX$ (convergence uniforme sur tout compact $[0, t]$, en probabilité).*

Elle jouit également des propriétés suivantes :

(iii) *si X est une martingale locale (respectivement un processus à variation finie), il en va de même de $\int K \, dX$;*

(iv) *si H et K sont deux processus prévisibles localement bornés,*

$$\int (KH) \, dX = \int K \, d(\int H \, dX) .$$

Si X et Y sont deux semimartingales, la semimartingale

$$[X, Y] = XY - X_0Y_0 - \int X \, dY - \int Y \, dX$$

est à variation finie, et nulle si X (ou Y) est à variation finie. Elle dépend bilinéairement de X et Y ; on l'appelle *covariation* de X et Y . On a toujours

$$[\int H \, dX, \int K \, dY] = \int HK \, d[X, Y] .$$

Le processus $[X, X]$ est appelé *variation quadratique* de X ; c'est un processus croissant, nul si et seulement si X est à variation finie.

THÉORÈME 2.2 (FORMULE DU CHANGEMENT DE VARIABLE). — *Soient d semimartingales X^1, \dots, X^d définies sur un même espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 au moins, le processus $f(X^1, \dots, X^d)$ est une semimartingale. Plus précisément, il admet l'écriture en intégrales stochastiques*

$$f(X^1, \dots, X^d) = f(X_0^1, \dots, X_0^d) + \int D_i f(X^1, \dots, X^d) \, dX^i + \frac{1}{2} \int D_{ij} f(X^1, \dots, X^d) \, d[X^i, X^j] .$$

Cette formule peut être simplifiée en introduisant les *intégrales de Stratonovitch*. Si X et Y sont deux semimartingales, l'intégrale de Stratonovitch $\int Y \delta X$ est définie comme $\int Y dX + \frac{1}{2}[Y, X]$; elle satisfait à la formule d'associativité

$$\int Z \delta(\int Y \delta X) = \int (ZY) \delta X ,$$

et la formule de changement de variable devient, pour f de classe C^3 ,

$$f(X^1, \dots, X^d) = f(X_0^1, \dots, X_0^d) + \int D_i f(X^1, \dots, X^d) \delta X^i .$$

Cette formule est encore vraie si f est C^2 , en définissant $\int Y \delta X$ pour les processus Y de la forme $g \circ X$, où g est C^1 (ce ne sont pas nécessairement des semimartingales). La formule du changement de variables ainsi simplifiée justifie l'adage selon lequel le calcul de Stratonovitch obéit aux mêmes règles que le calcul intégral-différentiel habituel.

L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ étant fixé, l'ensemble L^0 de toutes les variables aléatoires p.s. finies est pourvu d'une structure d'espace vectoriel topologique métrisable complet (e.v.t.m.c.) par la *topologie de la convergence en probabilité*, qui peut être définie par la distance $\text{dist}_p(X, Y) = \rho_p(X - Y)$, où $\rho_p(X) = \mathbb{E}[|X| \wedge 1]$.

L'espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ étant fixé, l'ensemble des processus continus et adaptés est muni d'une structure d'e.v.t.m.c. par la *topologie de la convergence uniforme sur les compacts, en probabilité*, donnée par la distance $\text{dist}_{cp}(X, Y) = \rho_{cp}(X - Y)$, où $\rho_{cp}(X) = \sum_n 2^{-n} \rho_p(\sup_{t \in [0, n]} |X_t|)$.

Enfin, l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ étant toujours fixé, l'ensemble des semimartingales est un e.v.t.m.c. pour la *topologie des semimartingales*, que l'on peut définir par $\text{dist}_{sm}(X, Y) = \rho_{sm}(X - Y)$ où, si $X = X_0 + M + A$ est la décomposition canonique d'une semimartingale X , on a posé $\rho_{sm}(X) = \rho_p(X_0) + \rho_{cp}([M, M]) + \rho_{cp}(\int |dA|)$.

Sur le sous-espace formé des martingales locales, les deux topologies (semimartingales et convergence uniforme sur les compacts en probabilité) coïncident, et déterminent une structure d'e.v.t.m.c.

PROPOSITION 2.3. — *Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de semimartingales qui converge, au sens des semimartingales, vers une semimartingale X .*

Si $(Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de semimartingales qui converge, en topologie des semimartingales, vers une limite Y , les covariations $[X^n, Y^n]$ convergent, au sens des semimartingales, vers $[X, Y]$.

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite fonctions C^2 qui converge vers f au sens des fonctions C^2 (convergence uniforme sur les compacts de la fonction et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2), alors $f_n \circ X^n$ converge au sens des semimartingales vers $f \circ X$.

Si $(H^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de processus prévisibles qui converge simplement vers un processus H , et si $\sup_n H^n$ est localement borné, alors $\int H^n dX^n$ tend vers $\int H dX$ au sens des semimartingales.

Si \mathbb{Q} est une probabilité absolument continue par rapport à \mathbb{P} (par exemple $\mathbb{Q}[A] = \mathbb{P}[A|E]$, où E est un événement non négligeable), X^n tend vers X en topologie des semimartingales pour la probabilité \mathbb{Q} .

L'une des raisons qui rendent maniable la topologie des semimartingales est son caractère local, explicité pour référence ultérieure dans l'énoncé ci-dessous.

PROPOSITION 2.4. — Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de semimartingales. On suppose réalisée l'une des trois hypothèses suivantes.

(i) Il existe une suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt tels que $\sup_k T_k = \infty$ et que, pour chaque k , la suite des semimartingales $\mathbb{1}_{\{T_k > 0\}}(X^n)^{T_k]$ converge au sens des semimartingales vers une limite $Y^{(k)}$.

(ii) La suite $(X_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une limite $Y_{(0)}$ et il existe un recouvrement ouvert prévisible dénombrable $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\llbracket 0, \infty \llbracket$, tel que, pour chaque k , $\int \mathbb{1}_{A_k} dX^n$ tende en topologie des semimartingales vers une limite $Y^{(k)}$.

(iii) Il existe une suite $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'événements non négligeables, de réunion Ω , tels que, pour chaque k , X^n tende sur E_k (c'est-à-dire pour la probabilité conditionnée par E_k) au sens des semimartingales vers une limite $Y^{(k)}$.

Alors X^n tend au sens des semimartingales vers une limite Y , qui vérifie respectivement dans chacun des trois cas :

(i) $\mathbb{1}_{\{T_k > 0\}} Y^{T_k] = Y^{(k)}$;

(ii) $Y_0 = Y_{(0)}$ et $\int \mathbb{1}_{A_k} dY = Y^{(k)}$;

(iii) la restriction de Y à E_k est $Y^{(k)}$.

Le point (iii), par exemple, signifie que lorsqu'on établit que X^n tend vers X au sens des semimartingales, on a le droit (comme pour les convergences en probabilité) de négliger des événements de probabilité arbitrairement petite.

Pour terminer ces rappels, deux mots sur les semimartingales jusqu'à l'infini.

DÉFINITION. — Si X est une semimartingale, de décomposition $X_0 + M + A$, et E un événement, on dit que X est une semimartingale jusqu'à l'infini sur E si $[M, M]_\infty + \int_0^\infty |dA_t| < \infty$ presque sûrement sur E .

Il est clair que l'ensemble des E tels que X soit une semimartingale jusqu'à l'infini sur E est stable par union dénombrable; lorsque $E = \Omega$, on dit simplement que X est une semimartingale jusqu'à l'infini.

PROPOSITION 2.5. — Soit $a : [0, \infty] \rightarrow [0, 1]$ un homéomorphisme croissant. On définit une nouvelle filtration par $\mathcal{F}'_{a(t)} = \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{F}'_t = \mathcal{F}_\infty$ pour $t \geq 1$. Soit X une semimartingale.

Pour que X soit une semimartingale jusqu'à l'infini, il faut et il suffit que la limite $X_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ existe presque sûrement, et que le processus changé de temps X' , défini par $X'_{a(t)} = X_t$ et $X'_t = X_\infty$ pour $t \geq 1$, soit une semimartingale pour la filtration changée de temps \mathcal{F}' .

Plus généralement, pour que X soit une semimartingale jusqu'à l'infini sur un événement E , il faut et il suffit que X_∞ existe presque sûrement sur E , et que X' soit une semimartingale pour \mathcal{F}' et pour la probabilité conditionnée $A \mapsto \mathbb{P}[A|E]$.

2. — Semimartingales dans une variété

On peut simplifier les notations du théorème 2.2 en appelant semimartingale à valeurs dans \mathbb{R}^d tout processus $X = (X^1, \dots, X^d)$ dont les d composantes sont des semimartingales; et le théorème dit qu'alors toutes les fonctions de classe C^2 (et pas seulement les fonctions linéaires ou affines sur \mathbb{R}^d) transforment X en une semimartingale réelle. On a là une propriété caractéristique des semimartingales dans \mathbb{R}^d , qui ne fait pas intervenir la structure linéaire de \mathbb{R}^d , mais seulement la structure différentiable, et que l'on peut donc étendre aux variétés.

DÉFINITION. — L'espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est fixé. Soit V une variété de classe C^2 au moins. Un processus X à valeurs dans V est une *semimartingale dans V* si, pour toute fonction $f \in C^2(V)$, le processus $f \circ X$ est une semimartingale (réelle).

Cette définition est due à Schwartz [94] ; tout ce chapitre est emprunté à Schwartz [94], [95], [96], [100] et à Meyer [78], [79], [80], [82], ainsi qu'à Arnaudon et Thalmaier [11] pour ce qui concerne la topologie des semimartingales dans les variétés.

La première chose à remarquer à propos de cette définition est qu'elle ne ne crée pas d'ambiguïté : lorsque V est l'espace \mathbb{R} ou \mathbb{R}^d , muni de sa structure canonique de variété, les semimartingales à valeurs dans V sont exactement les semimartingales usuelles.

Dans une variété seulement de classe C^1 , il n'est pas possible, en l'absence d'une structure supplémentaire,¹ de définir les semimartingales. *Dans toute la suite, le mot « variété » signifiera « variété de classe C^2 au moins » ; et les fonctions et les champs de vecteurs, de diffuseurs, de codiffuseurs, etc. définis sur une variété auront, sauf spécification contraire, la plus grande régularité possible.* Par exemple, sur une variété C^p , champ de codiffuseurs signifiera champ de codiffuseurs de classe C^{p-2} .

LEMME 2.6. — *Soit X un processus à valeurs dans une variété V . Pour que X soit une semimartingale dans V , (il faut et) il suffit que $f \circ X$ soit une semimartingale pour toute fonction f sur V de classe C^2 et à support compact.*

DÉMONSTRATION. — Supposons cette condition réalisée. Il existe une famille dénombrable \mathcal{D} de fonctions C^2 et à supports compacts telles que, pour tout point x de V et tout voisinage compact K de x , il existe une fonction g de \mathcal{D} , à support dans K et égale à 1 en x ; comme chacun des processus $g \circ X$ est continu et adapté, il en va de même de X . Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts de V , de limite $\bigcup_n K_n = V$ et telle que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$; les temps d'arrêt $T_n = \inf \{t : X_t \notin K_n\}$ croissent vers l'infini par continuité de X . Si f est une fonction C^2 sur V , il existe pour chaque n une fonction f_n de classe C^2 , à support compact, et égale à f sur K_n , et une semimartingale réelle Y_n telle que $f \circ X^{T_n} = Y^{T_n}$: sur l'événement $\{X_0 \notin K_n\}$, prendre Y^n constant et égal à $f \circ X_0$, et sur $\{X_0 \in K_n\}$, poser $Y^n = f_n \circ X$. En conséquence, le processus $f \circ X$ est lui-même une semimartingale, et X est une semimartingale dans V . ■

PROPOSITION 2.7. — *Soient V et W deux variétés et $\phi : V \rightarrow W$ une application de classe C^2 . Si X est une semimartingale dans V , $\phi \circ X$ est une semimartingale dans W .*

Soient V une sous-variété d'une variété W et X un processus à valeurs dans V . Pour que X soit une semimartingale dans V , il faut et il suffit qu'il soit une semimartingale dans W .

DÉMONSTRATION. — La première assertion résulte de ce que, pour f dans $C^2(W)$, $f \circ \phi$ est dans $C^2(V)$.

1. L'espace des fonctions sur \mathbb{R}^d qui transforment les semimartingales en semimartingales contient aussi des fonctions qui ne sont pas de classe C^2 , par exemple les différences de fonctions convexes ; ceci ouvre la possibilité de définir des semimartingales sur une structure plus pauvre que la structure C^2 . Noter en passant que si $d \geq 2$, on ne sait pas si cet espace contient d'autres fonctions que les différences de convexes.

Si V est une sous-variété de W , l'injection canonique de V dans W est de classe C^p , et a fortiori C^2 , et toute semimartingale dans V est aussi une semimartingale dans W .

La réciproque s'obtient à l'aide du lemme 2.6, en utilisant le fait que toute fonction C^2 et à support compact sur V est la restriction à V d'une fonction C^2 sur W . ■

PROPOSITION 2.8. — *Soit V une variété. Il existe un sous-ensemble fini F de $C^p(V)$ ayant la propriété suivante : un processus X dans V est une semimartingale si et seulement si $f \circ X$ est une semimartingale pour toute $f \in F$.*

A fortiori, un processus X dans V est une semimartingale si et seulement si $f \circ X$ est une semimartingale pour toute $f \in C^p(V)$.

DÉMONSTRATION. — C'est une conséquence du théorème de Whitney (que nous admettons), selon lequel il existe un entier n et un plongement ϕ de classe C^p de V dans \mathbb{R}^n . Il suffit de prendre pour F l'ensemble des n fonctions $p \circ \phi$, où p décrit les n projections de \mathbb{R}^n sur ses facteurs. En effet, la proposition 2.7 affirme que X est une sous-martingale si et seulement si $\phi \circ X$ en est une, et, puisque $\phi \circ X$ est dans \mathbb{R}^n , cela peut être testé avec les n fonctions p .

La seconde assertion se déduit aussitôt de la première. ■

Les auditeurs frustrés par l'usage du théorème de Whitney n'auront pas de mal à donner une autre démonstration de la dernière assertion de la proposition 2.8, par exemple à l'aide du lemme de localisation 2.9 ci-dessous (que nous démontrerons sans utiliser 2.8).

La propriété d'être une semimartingale dans V peut aussi se vérifier localement, en utilisant des coordonnées locales. On n'a alors besoin que de d fonctions, mais la caractérisation n'est valable que sur le sous-ensemble de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ formé des (t, ω) tels que $X_t(\omega)$ soit dans le domaine de la carte. Plus précisément, on a l'énoncé suivant :

LEMME DE LOCALISATION 2.9. — *Soit $(U_\iota)_{\iota \in I}$ un recouvrement ouvert au plus dénombrable de V tel que chaque U_ι soit relativement compact dans le domaine d'une carte locale $(v_\iota^i)_{1 \leq i \leq d}$. Soit X un processus continu adapté à valeurs dans V . Pour tout instant rationnel $s \in \mathbb{Q}_+$ et tout $\iota \in I$, on introduit le temps d'arrêt $T(s, \iota) = \inf \{t \geq s : X_t \notin U_\iota\}$ et les d processus réels*

$$X_t^{s, \iota, i} = \begin{cases} 0 & \text{si } X_s \notin U_\iota \\ v_\iota^i(X_{t \wedge T(s, \iota)}) & \text{si } X_s \in U_\iota, \end{cases}$$

définis pour $t \geq s$.

Pour que X soit une semimartingale dans V , il faut et il suffit que chaque processus $X^{s, \iota, i}$ soit une semimartingale réelle sur l'intervalle $[s, \infty[$ correspondant (pour la filtration \mathcal{F} restreinte à cet intervalle).

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.9. — La condition nécessaire est facile : remplacer dans la définition de $X^{s, \iota, i}$ la fonction v_ι^i par une fonction C^2 sur V et égale à v_ι^i sur \bar{U}_ι , et utiliser les propriétés de localisation des semimartingales réelles.

Pour la réciproque, introduisons le temps d'arrêt S , supremum essentiel de l'ensemble des temps d'arrêt R tels que les processus arrêtés $X^{R, \cdot}$ soient des semimartingales dans V (il est bien défini car le processus constant X^0 est une semimartingale dans V). Il existe une suite de temps d'arrêt (R_n) telle que $\sup_n R_n = S$ et que chaque $X^{R_n, \cdot}$ soit une semimartingale dans V . Il suffit de

montrer que S est presque sûrement infini, et le caractère local des semimartingales (qui s'étend immédiatement aux variétés) permettra de conclure.

Supposons donc l'événement $\{S < \infty\}$ non négligeable. Comme X est continu, les intervalles stochastiques

$$J(s, \iota) = \begin{cases} \llbracket 0, T(0, \iota) \llbracket & \text{si } s = 0 \\ \llbracket s, T(s, \iota) \llbracket & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

recouvrent le produit $\mathbb{R}_+ \times \Omega$; il existe donc un s et un ι tels que l'événement $\{S \in J(s, \iota)\}$ soit non négligeable; et il existe aussi un n tel que l'événement $A = \{R_n \in \llbracket s, T(s, \iota) \llbracket\}$ ne soit pas non plus négligeable.

Si f est une fonction C^2 sur V , la restriction de f à un voisinage de \bar{U}_ι est de la forme $g(v_\iota^1, \dots, v_\iota^d)$ pour une fonction $g \in C^2(\mathbb{R}^d)$; en utilisant l'hypothèse du lemme, il s'ensuit que le processus réel, défini sur $\llbracket s, \infty \llbracket$, égal à $g(0)$ sur $\{X_s \notin U_\iota\}$ et à $f \circ X^{T(s, \iota)}$ sur $\{X_s \in U_\iota\}$, est une semimartingale. Les propriétés de recollement des semimartingales réelles entraînent que, en posant $T = R_n \mathbb{1}_{A^c} + T(s, \iota) \mathbb{1}_A$, on obtient un temps d'arrêt tel que $f \circ X^T$ soit une semimartingale. Comme T ne dépend pas de f , X^T est une semimartingale dans V . Puisque $T = T(s, \iota) > S$ sur l'événement non négligeable A , ceci est impossible. ■

EXERCICE. — Si X et Y sont respectivement deux semimartingales dans des variétés V et W , le couple (X, Y) est une semimartingale dans la variété produit $V \times W$. (On pourra utiliser le lemme de localisation 2.9.)

3. — Intégration des codiffuseurs le long des semimartingales

Soit X une semimartingale à valeurs dans \mathbb{R}^d , ou, plus généralement, dans une variété V munie pour simplifier de coordonnées *globales* (v^1, \dots, v^d) . En notant X^i les semimartingales réelles $v^i \circ X$ (les coordonnées de X), la formule de changement de variable 2.2 peut être écrite symboliquement

$$d(f \circ X_t) = D_k f \circ X_t dX_t^k + \frac{1}{2} D_{ij} f \circ X_t d[X^i, X^j]_t.$$

Lorsque X est une courbe C^1 , ceci se réduit à $D_k f \circ X \dot{X}^k dt$, c'est-à-dire à $\langle df, \dot{X} \rangle dt$, faisant apparaître la vitesse de X et le covecteur $df(X)$ au point X . Dans le cas général, on peut se ramener à ce formalisme au moyen de l'intégrale de Stratonovitch; en 1979, Schwartz a adopté un point de vue entièrement nouveau : accepter la présence des covariations et tenter d'interpréter cette formule comme l'action du codiffuseur d^2f au point X_t sur un diffuseur exprimant la cinématique de X . Un tel diffuseur devrait s'écrire

$$dX^k D_k + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] D_{ij};$$

pour lui donner un statut mathématique, il faudrait soit définir rigoureusement les différentielles de semimartingales dX_t^k et $d[X^i, X^j]_t$, soit (comme nous venons de le faire avec dt) les écrire comme absolument continues par rapport à une même différentielle de semimartingale, qui servirait de référence. Mais il n'est pas nécessaire de se lancer dans de telles complications : sans chercher à donner un sens rigoureux à $dX^k D_k + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] D_{ij}$, nous allons tirer les conséquences de sa nature de diffuseur. La première d'entre elles est la possibilité d'intégrer les codiffuseurs le long des semimartingales.

DÉFINITION. — Soit V une variété. Un processus Θ à valeurs dans le fibré \mathbb{T}^*V (respectivement $\mathbb{T}V$, \mathbb{T}^*V , $\mathbb{T}V$) sera dit *localement borné* s'il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts de \mathbb{T}^*V (respectivement $\mathbb{T}V$, \mathbb{T}^*V , $\mathbb{T}V$) et une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de temps d'arrêt telles que T_n tende vers l'infini et que, presque partout sur l'événement $\{T_n > 0\}$, le processus Θ^{T_n} soit à valeurs dans K_n .

Ceci revient à exiger que, pour toute fonction f continue sur le fibré (ou pour une fonction f continue sur le fibré et tendant vers $+\infty$ à l'infini), le processus $f \circ \Theta - f(\Theta_0)$ soit localement borné au sens usuel.

DÉFINITION. — Soit V une variété. Un processus Θ à valeurs dans \mathbb{T}^*V (respectivement $\mathbb{T}V$, \mathbb{T}^*V , $\mathbb{T}V$) sera dit *au-dessus* d'un processus X à valeurs dans V si, π désignant la projection canonique du fibré \mathbb{T}^*V (respectivement $\mathbb{T}V$, \mathbb{T}^*V , $\mathbb{T}V$) sur V , on a $X = \pi(\Theta)$.

Par exemple, dans le cas du fibré \mathbb{T}^*V , cela revient à dire que, pour tout (t, ω) , le codiffuseur $\Theta_t(\omega)$ est dans la fibre $\mathbb{T}_{X_t(\omega)}^*V$ au-dessus du point $X_t(\omega)$.

THÉORÈME 2.10 ET DÉFINITION. *Soit X une semimartingale dans une variété V . Il existe une, et une seule, application linéaire $\Theta \mapsto \int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ de tous les processus prévisibles à valeurs dans \mathbb{T}^*V , localement bornés, au-dessus de X , dans l'espace des semimartingales réelles, vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) *pour toute fonction f de classe C^2 sur V ,*

$$\int \langle d^2f, \mathcal{D}X \rangle = f \circ X - f(X_0) ;$$

(ii) *pour tout processus réel H , prévisible et localement borné,*

$$\int \langle H\Theta, \mathcal{D}X \rangle = \int H d(\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle) .$$

La semimartingale $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ est appelée l'intégrale du codiffuseur Θ le long de X ; sa valeur à l'instant t est notée $\int_0^t \langle \Theta_s, \mathcal{D}X_s \rangle$. Elle est nulle pour $t = 0$ et a en outre les propriétés suivantes :

(iii) *si Θ et Ξ sont dans \mathbb{T}^*V deux processus au-dessus de X , prévisibles et localement bornés,*

$$\frac{1}{2} [\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle, \int \langle \Xi, \mathcal{D}X \rangle] = \int \langle \mathbf{R}\Theta \cdot \mathbf{R}\Xi, \mathcal{D}X \rangle ;$$

(iv) *en particulier, si f et g sont deux fonctions C^2 ,*

$$\frac{1}{2} [f \circ X, g \circ X] = \int \langle df \cdot dg, \mathcal{D}X \rangle ;$$

(v) *si $\mathbf{R}\Theta = 0$, l'intégrale $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ est à variation finie ; si de plus Θ est positive (voir 1.9), cette intégrale est un processus croissant ;*

(vi) *si X est à variation finie, l'intégrale $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ est à variation finie et est égale, trajectoire par trajectoire, à l'intégrale de Stieltjes $\int \langle \mathbf{R}\Theta, dX \rangle$; en particulier, elle ne dépend que des covecteurs $\mathbf{R}\Theta$;*

(vii) *si T est un temps d'arrêt, l'intégrale arrêtée $(\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle)^{T]}$ est égale à $\int \langle \Theta^{T}], \mathcal{D}(X^{T]) \rangle$.*

Heuristiquement, $\mathcal{D}X$ est le diffuseur qui s'écrit $dX^k D_k + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] D_{ij}$ en coordonnées locales; le processus Θ s'écrit $\theta_k dv^k(X_t) + \theta_{ij} dv^i(X_t) \cdot dv^j(X_t)$, où les coefficients θ_k et θ_{ij} sont des processus prévisibles, et $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ n'est autre que la semimartingale $\int \theta_k dX^k + \frac{1}{2} \int \theta_{ij} d[X^i, X^j]$.

L'ensemble \mathbb{T}^*V n'étant pas un espace vectoriel mais un fibré, la linéarité en Θ n'a de sens que parce que l'on impose à Θ d'être au-dessus de X , ce qui permet l'addition dans chaque fibre.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.10. — Nous commençons par l'existence. On choisit un recouvrement ouvert dénombrable $(U_\iota)_{\iota \in \mathbb{N}}$ de V tel que chaque U_ι soit relativement compact dans le domaine d'une carte locale $(v_\iota^i)_{1 \leq i \leq d}$; pour s rationnel et $\iota \in \mathbb{N}$, on introduit les temps d'arrêt prévisibles $T(s, \iota) = \inf \{t \geq s : X_t \notin U_\iota\}$; et pour $n \in \mathbb{N}$, les temps d'arrêt prévisibles $T_n = \inf \{t \geq 0 : X_t \notin U_0 \cup \dots \cup U_n\}$. Les temps T_n croissent vers l'infini. Quand (s, ι) décrit $\mathbb{Q}_+ \times \{0, \dots, n\}$, les intervalles stochastiques prévisibles $J(s, \iota) =]s, T(s, \iota)[$ recouvrent $]0, T_n[[$; en remplaçant chacun d'eux par un ensemble prévisible $Q(s, \iota, n)$ plus petit, on construit une partition prévisible de $]T_{n-1}, T_n[[\cap]0, T_n[[$ (ce n'est pas vraiment une partition : certains $Q(s, \iota, n)$ peuvent être vides). Sur $J(s, \iota)$, et a fortiori sur $Q(s, \iota, n)$, le processus X est dans U_ι , et l'on peut donc lire les composantes θ_k^ι et θ_{ij}^ι de Θ dans la carte v_ι ; comme U_ι est relativement compact dans le domaine de la carte, les processus prévisibles réels $\mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} \theta_k^\iota$ et $\mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} \theta_{ij}^\iota$ sont localement bornés. A fortiori, pour ι et n fixés tels que $\iota \leq n$, chacun des processus prévisibles

$$\sum_s \mathbb{1}_{Q(s, \iota, n)} \theta_k^\iota \quad \text{et} \quad \sum_s \mathbb{1}_{Q(s, \iota, n)} \theta_{ij}^\iota$$

est localement borné. Appelons w_ι^i une fonction C^2 sur V tout entière, et qui coïncide avec v_ι^i sur un voisinage de \bar{U}_ι ; soit $Y^{\iota, i}$ la semimartingale $\int \mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} d(w_\iota^i \circ X)$. Nous pouvons enfin poser

$$\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle = \sum_n \sum_{\iota=0}^n \left(\int \left(\sum_s \mathbb{1}_{Q(s, \iota, n)} \theta_k^\iota \right) dY^{\iota, k} + \frac{1}{2} \int \left(\sum_s \mathbb{1}_{Q(s, \iota, n)} \theta_{ij}^\iota \right) d[Y^{\iota, i}, Y^{\iota, j}] \right).$$

Il n'y a aucun problème de convergence, puisque les termes d'indices supérieurs à n sont des semimartingales nulles sur $]0, T_n[[$, et la somme est une semimartingale.

La linéarité en Θ est évidente sur la construction, de même que la propriété (ii); il reste à vérifier (i). Soit donc $f \in C^2$. Il existe $f^\iota \in C^2(\mathbb{R}^d)$ telle que, au voisinage de \bar{U}_ι , on ait $f = f^\iota \circ (w_1^\iota, \dots, w_d^\iota)$. Pour $\Theta = d^2 f(X)$, on peut écrire $\mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} \theta_k^\iota = D_k f(X) = D_k f^\iota(w \circ X)$ et $\mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} \theta_{ij}^\iota = D_{ij} f(X) = D_{ij} f^\iota(w \circ X)$, d'où

$$\mathbb{1}_{Q(s, \iota, n)} \theta_k^\iota dY^{\iota, k} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{Q(s, \iota, n)} \theta_{ij}^\iota d[Y^{\iota, i}, Y^{\iota, j}] = \mathbb{1}_{Q(s, \iota, n)} d(f \circ X).$$

Comme les $Q(s, \iota, n)$ où $\iota \leq n$ forment une partition de $]0, \infty[[$, ceci donne $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle = \int \mathbb{1}_{]0, \infty[[} d(f \circ X) = f \circ X - f(X_0)$.

Pour vérifier l'unicité, nous conservons les mêmes objets U_ι , v_ι^i , w_ι^i , et nous appelons $J(\Theta)$ l'intégrale $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ construite ci-dessus. Soit $I(\Theta)$ une semimartingale dépendant linéairement de Θ et vérifiant les propriétés (i) et (ii); il s'agit de montrer que $I(\Theta) = J(\Theta)$. Remarquons d'abord que la formule de la proposition 1.4

$$df(x) \cdot dg(x) = \frac{1}{2} [d^2(fg)(x) - f(x) d^2g(x) - g(x) d^2f(x)]$$

jointe à la propriété (ii) fournissent

$$2I(df \cdot dg) = \int d((fg) \circ X) - \int f \circ X d(g \circ X) - \int g \circ X d(f \circ X) = [f \circ X, g \circ X].$$

Revenons à un Θ général. Sur l'ensemble $\{X \in U_\iota\}$, on a

$$\Theta = \theta_k^\iota d^2 w_k^\iota(X) + \theta_{ij}^\iota dw_i^\iota(X) \cdot dw_j^\iota(X),$$

d'où, en utilisant (i), (ii) et la formule $I(dw_i^\iota \cdot dw_j^\iota) = \frac{1}{2}[w_i^\iota \circ X, w_j^\iota \circ X]$, on obtient

$$\mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} d(I(\Theta)) = \mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} \left(\theta_k^\iota dY^{\iota,k} + \frac{1}{2} \theta_{ij}^\iota d[Y^{\iota,i}, Y^{\iota,j}] \right) = \mathbb{1}_{\{X \in U_\iota\}} d(J(\Theta)).$$

Il ne reste qu'à remarquer que les $\{X \in U_\iota\}$ forment un recouvrement dénombrable prévisible de $\llbracket 0, \infty \llbracket$ pour obtenir $I(\Theta) = J(\Theta)$.

La nullité à l'origine ainsi que la propriété (vii) se vérifient facilement sur la formule explicite donnée plus haut pour établir l'existence. La propriété (iv) a déjà été établie pour démontrer l'unicité; (vi) peut s'obtenir en remarquant que, si X est à variation finie, $\Theta \mapsto \int \langle \mathbf{R}\Theta, dX \rangle$ satisfait les deux propriétés (i) et (ii) qui caractérisent $\int \langle \Theta, dX \rangle$.

Pour vérifier (iii), désignons par M et N les deux membres et par A_ι l'ensemble prévisible $\{X \in U_\iota\}$; il suffit d'établir pour chaque ι l'égalité $\int \mathbb{1}_{A_\iota} dM = \int \mathbb{1}_{A_\iota} dN$, c'est-à-dire encore, en utilisant (ii),

$$\frac{1}{2} \left[\int \langle \mathbb{1}_{A_\iota} \Theta, dX \rangle, \int \langle \mathbb{1}_{A_\iota} \Xi, dX \rangle \right] = \int \langle \mathbf{R}(\mathbb{1}_{A_\iota} \Theta) \cdot \mathbf{R}(\mathbb{1}_{A_\iota} \Xi), dX \rangle.$$

En oubliant l'indice ι , on est ainsi ramené au cas où l'on a identiquement $\Theta = \theta_k d^2 w^k(X) + \theta_{ij} dw^i(X) \cdot dw^j(X)$ et $\Xi = \xi_k d^2 w^k(X) + \xi_{ij} dw^i(X) \cdot dw^j(X)$ pour des fonctions w^i de classe C^2 et des processus prévisibles localement bornés θ_k , θ_{ij} , ξ_k et ξ_{ij} . On écrit alors $\mathbf{R}\Theta \cdot \mathbf{R}\Xi = \theta_i \xi_j dw^i(X) \cdot dw^j(X)$, et il ne reste qu'à appliquer (iv) aux fonctions w^i et w^j .

Enfin, la propriété (v) se lit aussi sur la formule explicite, en utilisant, pour la croissance, une remarque sur les semimartingales vectorielles (équivalente à la formule de Kunita et Watanabe de contrôle des covariations) : *Si X est une semimartingale dans \mathbb{R}^d et θ un processus prévisible, localement borné, à valeurs dans les matrices symétriques positives, alors le processus à variation finie $\int \theta_{ij} d[X^i, X^j]$ est croissant.* Ceci peut se voir en appelant $r = (r_{ij})$ la racine carrée positive de la matrice θ ; on obtient ainsi un processus prévisible localement borné parce que la racine carrée positive est une fonction continue sur les matrices symétriques positives. Et il ne reste plus qu'à poser $Y^i = \int r_{ij} dX^j$ et à remarquer que $\int \theta_{ij} d[X^i, X^j] = \sum_i [Y^i, Y^i]$. ■

EXERCICE. — Réécrire la démonstration du théorème 2.10 dans le cas où il existe sur V une carte globale (supprimer les U_ι , s , n , w , ...).

PROPOSITION 2.11. — *Soient V et W deux variétés, ϕ une application C^2 de V dans W , et X une semimartingale dans V . Si Θ est un processus prévisible, localement borné, au-dessus de $\phi \circ X$, à valeurs dans $\mathbb{T}W$, le processus $\phi^* \Theta$ dans $\mathbb{T}V$ est prévisible, localement borné et au-dessus de X , et l'on a*

$$\int \langle \Theta, d(\phi \circ X) \rangle = \int \langle \phi^* \Theta, dX \rangle.$$

Cet énoncé donne, par dualité, un contenu rigoureux à la formule heuristique $\mathcal{D}(\phi \circ X) = \phi_*(\mathcal{D}X)$.

DÉMONSTRATION. — Le caractère localement borné résulte de la continuité de $\phi^* : \mathbb{T}W \rightarrow \mathbb{T}V$, et le fait que $\phi^*\Theta$ soit au-dessus de X se lit sur la définition de ϕ^* . Pour établir l'égalité, il suffit de vérifier que l'application $\Theta \mapsto I_\Theta = \int \langle \phi^*\Theta, \mathcal{D}X \rangle$ satisfait aux deux conditions

$$I_{d^2f} = f \circ (\phi \circ X) - f(\phi(X_0)) \quad \text{et} \quad I_{H\Theta} = \int H \, dI_\Theta$$

qui, d'après 2.10 caractérisent $\int \langle \Theta, \mathcal{D}(\phi \circ X) \rangle$. La première égalité résulte de $d^2(f \circ \phi) = \phi^*(d^2f)$; la seconde de $\Phi^*(H\Theta) = H\phi^*\Theta$ et de 2.10.(ii). ■

DÉFINITION. On dit qu'une semimartingale X dans V est une *semimartingale jusqu'à l'infini* sur un événement E si, pour toute fonction $f \in C^2$, le processus réel $f \circ X$ est une semimartingale jusqu'à l'infini sur E . (Lorsque $E = \Omega$, on dit simplement que X est une semimartingale jusqu'à l'infini.)

PROPOSITION 2.12. — *Pour qu'une semimartingale X dans V soit une semimartingale jusqu'à l'infini sur E , il faut et il suffit que la limite $X_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ existe presque sûrement sur E , et que le processus changé de temps X' , défini comme dans la proposition 2.5, soit une semimartingale pour la filtration changée de temps elle aussi et la probabilité conditionnée $A \mapsto \mathbb{P}[A|E]$.*

Si X est dans V une semimartingale jusqu'à l'infini sur E , et si θ est un champ mesurable, localement borné de codiffuseurs sur V , l'intégrale $\int \langle \theta, \mathcal{D}X \rangle$ est une semimartingale jusqu'à l'infini sur E ; en particulier, sur E , elle converge presque sûrement à l'infini.

DÉMONSTRATION. — La première assertion résulte aussitôt de la définition et de 2.5. La seconde s'en déduit en vérifiant, grâce aux critères 2.10.(i) et 2.10.(ii), que le changé de temps et de probabilité de l'intégrale $\int \langle \theta, \mathcal{D}X \rangle$ est égal à $\int \langle \theta, \mathcal{D}X' \rangle$, et en appliquant à nouveau la proposition 2.5. ■

4. — Intégrales de Stratonovitch

Un champ de covecteurs peut être intégré le long des courbes déterministes (ou plus généralement à variation finie, au moyen d'une intégrale de Stieltjes); le long d'une semimartingale, nous venons de voir que ce sont les codiffuseurs qui s'intègrent bien. Pour intégrer un champ de covecteurs σ le long d'une semimartingale générale, une méthode consiste à le transformer d'abord en un champ de codiffuseurs $d\sigma$ par différentiation symétrique (voir 1.5).

DÉFINITION. — Soient X une semimartingale dans V , et σ un champ de covecteurs, de classe C^1 au moins. On appelle *intégrale de Stratonovitch* de σ le long de X la semimartingale $\int \langle d\sigma, \mathcal{D}X \rangle$.

Comme dans la théorie des semimartingales réelles, le nom d'intégrale donné à ces objets est un peu abusif, puisqu'une certaine régularité est exigée de σ , et qu'aucun théorème de convergence dominée n'est satisfait; il s'agit plutôt d'un opérateur intégral-différentiel. Remarquer que lorsque σ est le champ de covecteurs df , on obtient $\int \langle df, \mathcal{D}X \rangle = \int \langle d^2f, \mathcal{D}X \rangle = f \circ X - f \circ X_0$.

Si V a une carte globale $(v^i)_{1 \leq i \leq d}$, en notant σ_i les composantes de σ et X^i les coordonnées de X , la différentielle symétrique $\theta = d\sigma$ du champ σ est donnée par $\theta = \sigma_k d^2 v^k + D_i \sigma_j dv^i dv^j$; l'intégrale de Stratonovitch de σ le long de X vaut donc

$$\int \sigma_k(X) dX^k + \frac{1}{2} \int D_i \sigma_j(X) d[X^i, X^j] = \int \sigma_k(X) dX^k + \frac{1}{2} [\sigma_k(X), X^k],$$

c'est-à-dire l'intégrale de Stratonovitch $\int \sigma_k(X) \delta X^k$. Ceci explique le nom donné à ce processus.

PROPOSITION 2.13 ET DÉFINITION. — *Soit X une semimartingale dans une variété V de classe C^3 au moins. Il existe une unique application linéaire $\Sigma \mapsto \int \langle \Sigma, \delta X \rangle$ de l'ensemble des semimartingales à valeurs dans T^*V et au-dessus de X , dans l'espace des semimartingales réelles issues de 0, vérifiant les deux propriétés suivantes :*

- (i) si σ est un champ de covecteurs de classe C^2 , $\int \langle \sigma \circ X, \delta X \rangle = \int \langle d\sigma, \mathcal{D}X \rangle$;
- (ii) si Z est une semimartingale réelle,

$$\int Z \delta \left(\int \langle \Sigma, \delta X \rangle \right) = \int \langle (Z\Sigma), \delta X \rangle.$$

Le processus $\int \langle \Sigma, \delta X \rangle$ est appelé intégrale de Stratonovitch de Σ le long de X . (Il n'y a pas d'ambiguïté : lorsque σ est un champ C^1 de covecteurs tel que $\sigma \circ X$ soit une semimartingale, cette définition coïncide avec la précédente.)

Il serait possible de s'affranchir de l'hypothèse C^3 en définissant les intégrales pour des processus plus généraux que les semimartingales au-dessus de X ; mais la démonstration serait alors considérablement alourdie. Même en restant sous l'hypothèse C^3 , qui est nécessaire pour que les semimartingales dans T^*V soient définies, on pourrait déjà élargir la classe des processus que l'on intègre aux sommes finies $\sum_\alpha f^\alpha \circ X \Sigma^\alpha$, où les f^α sont des fonctions C^1 sur V et les Σ^α des semimartingales au-dessus de X ; il faudrait alors en particulier établir que l'intégrale ne dépend pas de la décomposition choisie.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.13. — La variété $W = T^*V$ est au moins de classe C^2 . Appelons π la projection canonique de $W = T^*V$ sur V . Pour $x \in V$ et $\sigma \in T_x^*V \subset W$, l'application $\pi_{*\sigma} : T_\sigma W \rightarrow T_x V$ peut être composée avec $\sigma : T_x V \rightarrow \mathbb{R}$ pour définir une forme linéaire $\lambda_\sigma = \sigma \circ \pi_{*\sigma}$ sur $T_\sigma W$; ceci définit un élément canonique λ_σ dans $T_\sigma^* W$, et l'application $\sigma \mapsto \lambda_\sigma$ est un champ de covecteurs canonique sur W (appelé la forme de Liouville). En coordonnées locales, v^i sont les coordonnées de x , σ s'écrit $\sigma_i dv^i$, et, au point de W de coordonnées σ_i et v^i (il y a $2d$ coordonnées sur W), λ est simplement $\sigma_i dv^i$; le champ de covecteurs λ sur W est donc de classe C^{p-1} . Remarquer que si σ est maintenant un champ de covecteurs sur V , c'est une application de V dans W vérifiant $\pi \circ \sigma = \text{Id}$, et le champ de covecteurs $\sigma^* \lambda$ sur V n'est autre que σ , comme cela se vérifie immédiatement : $\sigma^* \lambda = \lambda \circ \sigma_* = \sigma \circ \pi_* \circ \sigma_* = \sigma \circ (\pi \circ \sigma)_* = \sigma \circ \text{Id} = \sigma$.

Pour toute semimartingale Σ dans W , on peut définir l'intégrale de Stratonovitch $\int \langle \lambda, \delta \Sigma \rangle = \int \langle d\lambda, \mathcal{D}\Sigma \rangle$ de λ le long de Σ ; pour démontrer la proposition, il suffira de vérifier que cette intégrale satisfait les deux conditions (i) et (ii), et est la seule à les satisfaire.

Si l'on a une application linéaire $\Sigma \mapsto I(\Sigma)$ vérifiant (i) et (ii), pour montrer $I(\Sigma) = \int \langle \lambda, \delta \Sigma \rangle$, il suffit de le vérifier sur les intervalles $[[s, T_s]]$ durant lesquels

X reste dans le domaine d'une carte locale $(v^i)_{1 \leq i \leq d}$. Sur un tel intervalle, on peut définir pour chaque i une semimartingale Y^i au-dessus de X dans $W = T^*V$ par $Y^i = (dv^i)(X)$, et toute semimartingale Σ au-dessus de X s'écrit $\Sigma = \Sigma_i Y^i$, où les Σ_i , qui sont les composantes de Σ dans le système de coordonnées, sont d semimartingales réelles. Sur le même intervalle, on définit des semimartingales réelles X^i par $X^i = v^i \circ X$. Enfin, toujours sur cet intervalle, on a $\int \langle \lambda, \delta \Sigma \rangle = \int \Sigma_i \delta X^i$ en raison de la formule explicite de λ dans les coordonnées locales de W .

Le (i) appliqué au covecteur dv^i donne $I(Y^i) = \int \langle d^2 v^i, \mathcal{D}X \rangle = X^i - X_0^i$, puis le (ii) appliqué à Σ_i donne $I(\Sigma) = I(\Sigma_i Y^i) = \int \Sigma_i \delta(I(Y^i)) = \int \Sigma_i \delta X^i = \int \langle \lambda, \delta \Sigma \rangle$.

Et inversement, vérifier que $\int \Sigma_i \delta X^i$ satisfait aux conditions (i) et (ii) est un jeu d'enfant. ■

PROPOSITION 2.14. — *Soit $\phi : V \rightarrow W$ une application C^p entre deux variétés de classe au moins C^3 . Si X est une semimartingale dans V et Σ une semimartingale dans T^*W au dessus de $\phi \circ X$, on a $\int \langle \Sigma, \delta(\phi \circ X) \rangle = \int \langle \phi^* \Sigma, \delta X \rangle$.*

DÉMONSTRATION. — On vérifie sans difficulté, en utilisant 1.8, que $\int \langle \phi^* \Sigma, \delta X \rangle$ satisfait aux deux conditions 2.13.(i) et 2.13.(ii) qui caractérisent le membre de gauche. ■

5. — Topologie des semimartingales dans une variété

DÉFINITION. Étant donnés $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ et V , on dit qu'une suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de semimartingales dans V converge *au sens des semimartingales* vers une semimartingale X dans V si $f \circ X^n$ tend vers $f \circ X$ au sens des semimartingales réelles pour toute fonction f de classe C^2 sur V .

On pourrait aussi, comme Arnaudon et Thalmaier [11], utiliser un plongement propre de V dans un espace vectoriel et vérifier que la topologie ne dépend pas du plongement propre choisi. On obtiendrait ainsi un ensemble *fini* de fonctions-test C^p pour la convergence des semimartingales.

De façon analogue, en considérant toutes les fonctions continues sur V (ou seulement les fonctions C^p , ou en plongeant proprement V dans un espace vectoriel), on peut définir la convergence *uniforme sur tout compact de \mathbb{R}_+ en probabilité* pour les processus continus adaptés à valeurs dans V .

Comme pour les semimartingales réelles, la convergence au sens des semimartingales est plus forte que la convergence uniforme sur les compacts en probabilité (pour laquelle, d'ailleurs, les semimartingales ne forment pas un fermé).

Dans la définition de la topologie des semimartingales, comme d'ailleurs dans celle de la convergence uniforme sur les compacts en probabilité, on peut restreindre la classe des fonctions-test en exigeant que leurs supports soient compacts. Ce n'est pas tout à fait immédiat; suivant Arnaudon et Thalmaier [11], nous allons le démontrer à l'aide d'un argument diagonal.

PROPOSITION 2.15. — *Dans V , soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de processus continus adaptés (respectivement de semimartingales) et X un processus continu adapté (respectivement une semimartingale). Pour que X^n tende vers X uniformément sur les compacts en probabilité (respectivement au sens des semimartingales), il suffit que, pour toute fonction f de classe C^p et à support compact, $f \circ X^n$ tende vers $f \circ X$ uniformément sur les compacts en probabilité (respectivement au sens des semimartingales).*

DÉMONSTRATION. — Supposant la condition satisfaite, il s'agit de montrer que pour $f \in C^p$, la suite $f \circ X^n$ converge vers $f \circ X$ pour la topologie considérée. On peut se restreindre à ne le démontrer que pour une sous-suite. Soit $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts de V , telle que $K_m \subset \overset{\circ}{K}_{m+1}$ et que $\bigcup_n K_n = V$; pour chaque m , soit g_m une fonction C^p égale à 1 sur K_m et à 0 sur le complémentaire de K_{m+1} . Fixons $t > 0$. Pour chaque m , la suite de variables aléatoires $\sup_{[0,t]} |g_m \circ X^n - g_m \circ X|$ tend vers zéro en probabilité quand n tend vers l'infini; en extrayant une sous-suite convenable, on obtient la convergence presque sûre. Grâce au procédé diagonal de Cantor, on peut trouver une même sous-suite qui convient à la fois pour tous les m ; on a donc une sous-suite $(Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall m \quad \exists N(m, \omega) \quad \forall n \geq N(m, \omega) \quad \sup_{[0,t]} |g_m \circ Y^n - g_m \circ X| < \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N(m, \omega)$, on a l'inclusion $Y^n([0, t]) \subset K_{m+1}$ sur l'événement $E_m = \{X([0, t]) \subset K_m\}$.

Soit f une fonction C^p . La fonction $f_m = fg_{m+1}$ est C^p , à support compact, et égale à f sur K_{m+1} . Sur l'événement $F_{m,\ell} = E_m \cap \{N(\omega, m) \leq \ell\}$, en convenant d'arrêter tous les processus à t , on a à la fois

$$f \circ X = f_m \circ X \quad \text{et} \quad \forall n \geq \ell \quad f \circ Y^n = f_m \circ Y^n;$$

donc, en appliquant l'hypothèse à f_m , $f \circ Y^n$ tend vers $f \circ X$ sur $F_{m,\ell}$ uniformément sur $[0, t]$ en probabilité (respectivement au sens des semimartingales sur $[0, t]$). Il ne reste qu'à remarquer que la réunion en m et ℓ des $F_{m,\ell}$ est Ω pour obtenir, grâce à 2.4.(iii) dans le cas des semimartingales, la convergence sur $[0, t]$. On conclut par le caractère local de la topologie des semimartingales 2.4.(i). ■

Remarquer que la proposition 2.15 serait en défaut si l'on demandait seulement que chaque $f \circ X^n$ converge, sans préciser la limite (prendre par exemple des constantes $X^n = x^n$ qui tendent vers l'infini dans V). (Cette remarque ne vaut que pour les fonctions à support compact; si l'on utilise toutes les fonctions C^p , il n'y a aucun problème.)

Voici un résultat général de stabilité des intégrales de codiffuseurs, un peu technique, mais parfois bien utile. Pour l'énoncer, nous nous donnons une norme continue ν sur le fibré cosculateur \mathbb{T}^*V , c'est à dire une fonction continue sur \mathbb{T}^*V dont la restriction à chaque espace vectoriel \mathbb{T}_x^*V est une norme. L'existence de telles normes continues est facile à établir (par exemple en utilisant une partition de l'unité sur V subordonnée à un atlas); on vérifie sans difficultés que l'hypothèse de majoration dans l'énoncé ci-dessous ne dépend pas du choix de ν .

PROPOSITION 2.16. — *Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de semimartingales dans V , convergeant pour la topologie des semimartingales vers une limite X . Pour chaque n , soit Θ^n un processus prévisible de codiffuseurs au-dessus de X^n . On suppose que la suite des Θ^n converge simplement; sa limite Θ est un processus prévisible au-dessus de X . On suppose aussi que, pour une norme continue ν sur \mathbb{T}^*V , le processus $\sup_n \nu(\Theta^n)$ est localement borné. L'intégrale $\int \langle \Theta^n, \mathcal{D}X^n \rangle$ converge vers $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ pour la topologie des semimartingales.*

DÉMONSTRATION. — On recouvre V par une suite d'ouverts U , chacun relativement compact dans le domaine d'une carte (v^i) . Les ouverts prévisibles $\{X \in U\}$ recouvrent $\mathbb{R}_+ \times \Omega$; en raison du caractère local de la topologie des semimartingales, il suffit

de montrer que $\int \mathbb{1}_{\{X \in U\}} \langle \Theta^n, \mathcal{D}X^n \rangle$ converge pour U fixé vers $\int \mathbb{1}_{\{X \in U\}} \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ au sens des semimartingales.

Le compact \bar{U} admet un voisinage ouvert U' relativement compact dans le domaine de la carte (v^i). On écrit

$$\begin{aligned} & \int \mathbb{1}_{\{X \in U\}} \langle \Theta^n, \mathcal{D}X^n \rangle \\ &= \int \mathbb{1}_{\{X \in U\}} \mathbb{1}_{\{X^n \notin U'\}} \langle \Theta^n, \mathcal{D}X^n \rangle + \int \mathbb{1}_{\{X \in U\}} \mathbb{1}_{\{X^n \in U'\}} \langle \Theta^n, \mathcal{D}X^n \rangle. \end{aligned}$$

Le premier terme converge vers zéro pour la topologie des semimartingales; en effet, puisque X^n converge vers X pour la topologie uniforme sur les compacts en probabilité, et puisque U est relativement compact dans U' , les temps d'arrêt $T_n = \inf \{t : X_t \in U \text{ et } X_t^n \notin U'\}$ convergent en probabilité vers l'infini; or le premier terme est une semimartingale identiquement nulle avant T_n .

Pour le second terme, on peut utiliser des fonctions $w^i \in C^p(V)$ telles que $w^i = v^i$ sur U' ; les semimartingales réelles $\xi^{n,i} = w^i \circ X^n$ convergent au sens des semimartingales vers $\xi^i = w^i \circ X$. En écrivant Θ^n et Θ à l'aide des coordonnées v^i , on a pour chaque n

$$\int \mathbb{1}_{\{X \in U, X^n \in U'\}} \langle \Theta^n, \mathcal{D}X^n \rangle = \int (\Theta_k^n d\xi^{n,k} + \frac{1}{2} \Theta_{ij}^n d[\xi^{n,i}, \xi^{n,j}])$$

avec des coefficients prévisibles Θ_k^n et Θ_{ij}^n nuls hors de l'ensemble $\{X \in U \text{ et } X^n \in U'\}$, et qui tendent vers Θ_k et Θ_{ij} . Il existe une fonction continue c définie sur le domaine de la carte (donc bornée sur U') telle que $|\theta_k|$ et $|\theta_{ij}|$ sont bornés par $c(x) \nu(\theta)$ pour tous x dans le domaine et $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$. Les processus $|\Theta_k^n|$ et $|\Theta_{ij}^n|$ sont donc contrôlés par le processus prévisible localement borné $\sup_{U'} c \sup_n \nu(\Theta^n)$, et l'intégrale converge pour la topologie des semimartingales vers

$$\int (\Theta_k d\xi^k + \frac{1}{2} \Theta_{ij} d[\xi^i, \xi^j]) = \int \mathbb{1}_{\{X \in U\}} \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 2.17. — Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de semimartingales dans V , qui converge au sens des semimartingales vers une limite X . Pour chaque n , soit Θ^n un processus prévisible de codiffuseurs au-dessus de X^n . On suppose que la suite des Θ^n converge simplement vers un processus Θ , nécessairement prévisible et au-dessus de X . S'il existe dans le fibré coosculteur \mathbb{T}^*V des compacts K_q tels que les temps d'arrêt $T_q = \inf \{t : \exists n \Theta_t^n \notin K_q\}$ tendent vers l'infini, l'intégrale $\int \langle \Theta^n, \mathcal{D}X^n \rangle$ converge vers $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ pour la topologie des semimartingales.

DÉMONSTRATION. — Choisir n'importe quelle norme continue; elle est bornée sur chaque K_q , et l'hypothèse de la proposition 2.16 est donc satisfaite. \blacksquare

PROPOSITION 2.18. — Soit θ un champ de codiffuseurs sur V , non nécessairement C^{p-2} , mais mesurable et localement borné. L'application $X \mapsto \int \langle \theta, \mathcal{D}X \rangle$, de l'ensemble des semimartingales dans V vers l'espace des semimartingales réelles, est continue pour les topologies des semimartingales dans V et dans \mathbb{R} .

DÉMONSTRATION. — Il suffit de vérifier que si une suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X au sens des semimartingales, les intégrales $\int \langle \theta, \mathcal{D}X^n \rangle$ tendent vers $\int \langle \theta, \mathcal{D}X \rangle$, toujours au sens des semimartingales. Soit $(K_q)_{q \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts recouvrant V et tels que $K_q \subset \overset{\circ}{K}_{q+1}$. Puisque X^n tend vers le processus continu X uniformément sur les

compacts en probabilité, les temps d'arrêt $T_q = \inf \{t : \exists n X_t^n \notin K_q\}$ tendent vers l'infini en probabilité. En extrayant des sous-suites, on se ramène à la convergence presque sûre, et il ne reste qu'à appliquer le corollaire 2.17 à des compacts $L_q \subset \mathbb{T}^*V$ tels que $\theta(K_q) \subset L_q$. ■

Chapitre 3

CONNEXIONS ET MARTINGALES

Il n'y a que des connexions *régulières*
qui soient *pensables*.

L. WITTEGENSTEIN,
Tractatus Logico-Philosophicus

1. — Connexions et géodésiques

La structure générale de variété que nous avons rencontrée jusqu'ici ne permet pas de décomposer une semimartingale X en somme d'une partie martingale (locale) et d'une partie à variation finie, tout simplement parce que l'on ne peut pas additionner des points d'une variété. Nous allons être moins ambitieux et chercher une décomposition non pas de X_t , mais de son accroissement infinitésimal $\mathcal{D}X_t$; cela ne permettra pas de décomposer X en général, mais au moins de dire, au vu de cette décomposition, si X est une martingale (locale) ou au contraire possède une composante à variation finie. Heuristiquement, en coordonnées locales, $\mathcal{D}X$ est le diffuseur $dX^k D_k + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] D_{ij}$. En écrivant $X^k = M^k + A^k$, $\mathcal{D}X$ se décompose en un terme de martingale, $dM^k D_k$, et une partie à variation finie $dA^k D_k + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] D_{ij}$, où se mélangent les termes de dérive et les termes de crochet. Pour reconnaître quand X est une martingale, il faudrait savoir dire quand les termes de dérive sont nuls, donc savoir les séparer des termes de crochet. Géométriquement, le problème est donc d'écrire un diffuseur $L \in \mathbb{T}_x V$ comme somme d'une partie d'ordre 1 (un élément du sous-espace $\mathbb{T}_x V$) et d'une partie qui soit, en un sens à préciser, purement d'ordre 2.

Ceci est facile lorsque $V = \mathbb{R}^d$, ou, plus généralement lorsque V possède une structure d'espace vectoriel ou affine : utiliser la base canonique de \mathbb{R}^d (ou un repère linéaire ou affine) pour écrire les diffuseurs sous la forme $L^{ij} D_{ij} + L^k D_k$ et décréter que $L^{ij} D_{ij}$ est la partie purement d'ordre 2 et $L^k D_k$ la partie d'ordre 1. Ceci est invariant par un changement linéaire ou affine de repère, et règle donc la question, mais en mettant à contribution la structure vectorielle ou affine. On peut aussi l'habiller de façon un peu plus élégante : dans un espace vectoriel ou affine, on sait définir les mouvements uniformes ; et la partie d'ordre 2 de l'accélération d'une courbe γ à l'instant t_0 est la différence $\ddot{\gamma}(t_0) - \ddot{g}(t_0)$, où g est le mouvement uniforme tangent à γ à l'instant t_0 , c'est-à-dire vérifiant $g(t_0) = \gamma(t_0)$ et $\dot{g}(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)$. Or les géomètres connaissent depuis longtemps l'analogie dans une variété des mouvements uniformes dans \mathbb{R}^d : ce sont les géodésiques, dont la définition fait intervenir une structure géométrique supplémentaire, la connexion. Bien sûr, puisque les traités élémentaires de géométrie différentielle ignorent les espaces osculateurs, la définition des connexions qui y figure est exprimée à l'aide d'autres structures, et nous devons donc commencer par la traduire dans notre langage. Voici, en suivant Meyer [78], [79] et [80], ce que cela donne.

DÉFINITION. Soient V une variété (de classe C^2 au moins) et x un point de V . Une *connexion au point x* est une application linéaire de l'espace osculateur $\mathbb{T}_x V$ dans l'espace tangent $T_x V$, dont la restriction au sous-espace $\mathbb{T}_x V \subset \mathbb{T}_x V$ est l'identité.

Une telle application linéaire Γ est une projection, elle est donc caractérisée par son noyau $\text{Ker } \Gamma$, qui est un sous-espace de $\mathbb{T}_x V$ supplémentaire de $\mathbb{T}_x V$; et $\mathbb{T}_x V$ est somme directe de $\text{Ker } \Gamma$ et de $\mathbb{T}_x V$, la décomposition s'écrivant $L = (L - \Gamma L) + \Gamma L$.

Si (v^1, \dots, v^d) est une carte au voisinage de x , les D_k en x forment une base de $\mathbb{T}_x V$, et une connexion Γ au point x est complètement déterminée par le choix des coefficients Γ_{ij}^k tels que $\Gamma(D_{ij}) = \Gamma_{ij}^k D_k$. Ces coefficients répondent au joli nom de *symboles de Christoffel* de la connexion. Puisque D_{ij} est symétrique en i et j , il en va de même des symboles de Christoffel Γ_{ij}^k .

Lorsque V est un espace vectoriel ou affine, la *connexion plate* au point x est celle qui consiste à choisir la décomposition naturelle $\Gamma(L^{ij} D_{ij} + L^k D_k) = L^k D_k$ dans toute carte formée de fonctions linéaires ou affines; dans une telle carte, les symboles de Christoffel de cette connexion sont donc tous nuls.

Un exemple très important de connexion concerne le cas d'une sous-variété V d'un espace vectoriel (ou affine) euclidien E . Soit x un point de V . On peut munir V d'une connexion au point x de la façon suivante (qui dépend de l'injection canonique $i : V \rightarrow E$ et de la structure euclidienne de E) : Pour $L \in \mathbb{T}_x V$, $i_{*x} L$ est dans $\mathbb{T}_x E$; on peut donc prendre sa partie d'ordre 1 (pour la connexion plate de E au point x) $\Gamma_E(i_{*x} L)$, qui est dans l'espace tangent $T_x E$. Elle n'est pas nécessairement dans $\mathbb{T}_x V$, mais on utilise alors la structure euclidienne de l'espace tangent $T_x E$ pour projeter orthogonalement $\Gamma_E(i_{*x} L)$ sur le sous-espace $\mathbb{T}_x V$. Cette opération est linéaire, et il est clair qu'elle respecte $\mathbb{T}_x V$; c'est donc une connexion au point x , appelée la connexion induite par i et par la structure euclidienne.

[Les connexions que l'on rencontre en géométrie sont un peu plus générales que les nôtres; elles sont déterminées par des symboles de Christoffel non nécessairement symétriques en i et j . Celles que nous utilisons sont appelées *connexions sans torsion* par les géomètres; comme nous n'utiliserons pas les connexions tordues, il n'y a pas d'inconvénient à appeler ici simplement connexions les connexions sans torsion.]

EXERCICE. — Si (v^i) et (w^α) sont deux cartes locales au voisinage de x , la formule de changement de cartes pour les symboles de Christoffel d'une connexion au point x est

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = D_k w^\gamma (D_\alpha v^i D_\beta v^j \Gamma_{ij}^k + D_{\alpha\beta} v^k).$$

EXERCICE. — L'ensemble des connexions en x est un espace affine, mais n'est pas un espace vectoriel. (La somme de deux connexions en x n'est pas une connexion, mais la demi-somme en est une.) La dimension de cet espace est $d^2(d+1)/2$. (La symétrie en i et j est la seule contrainte sur les symboles de Christoffel.)

Une connexion $\Gamma : \mathbb{T}_x V \rightarrow T_x V$ au point x transforme les diffuseurs en vecteurs, et vérifie $\Gamma \circ i = \text{Id}_{\mathbb{T}_x V}$ (où i désigne l'injection canonique de $\mathbb{T}_x V$ dans $\mathbb{T}_x V$). Duale, l'application adjointe Γ^* transforme les covecteurs en codiffuseurs et vérifie $\mathbf{R} \circ \Gamma^* = \text{Id}_{\mathbb{T}_x^* V}$; son image $\text{Im } \Gamma^*$ est un sous-espace de $\mathbb{T}_x^* V$ isomorphe à $\mathbb{T}_x^* V$ et supplémentaire à $\text{Ker } \mathbf{R}$; elle donne lieu à une décomposition de $\mathbb{T}_x^* V$ en somme directe, s'écrivant $\theta = (\theta - \Gamma^* \mathbf{R} \theta) + \Gamma^* \mathbf{R} \theta$: le premier terme est dans

$\text{Ker } \mathbf{R}$, le second dans $\text{Im } \Gamma^*$. En coordonnées locales, pour $\sigma = \sigma_i dv^i(x) \in \mathbb{T}_x^*V$ et $\theta = \theta_k d^2v^k(x) + \theta_{ij} dv^i(x) \cdot dv^j(x) \in \mathbb{T}_x^*V$, on a

$$\Gamma^* \sigma = \sigma_k (d^2v^k(x) + \Gamma_{ij}^k dv^i(x) \cdot dv^j(x)) \quad \text{et} \quad \theta - \Gamma^* \mathbf{R} \theta = (\theta_{ij} - \theta_k \Gamma_{ij}^k) dv^i(x) \cdot dv^j(x).$$

Puisque (proposition 1.6) tout codiffuseur $\theta \in \mathbb{T}_x^*V$ est de la forme $d^2f(x)$ pour une fonction $f \in C^2(V)$, la connexion au point x est aussi caractérisée par l'application $f \mapsto d^2f(x) - \Gamma^* df(x)$.

DÉFINITION. — Soit Γ une connexion au point x . Pour $f \in C^2(V)$, le codiffuseur $d^2f(x) - \Gamma^* df(x) \in \mathbb{T}_x^*V$ est appelé la *hessienne* de f au point x (sous-entendu : relativement à Γ) et noté $\text{Hess } f(x)$.

Remarquer que $\text{Hess } f(x)$ est purement d'ordre deux : $\mathbf{R} \text{ Hess } f(x) = 0$. En coordonnées locales, $\text{Hess } f(x) = (D_{ij} - \Gamma_{ij}^k D_k) f(x) dv^i(x) \cdot dv^j(x)$. L'action de $\text{Hess } f(x)$ sur les diffuseurs en x est donnée par $\langle \text{Hess } f(x), L \rangle = (\text{Id} - \Gamma)Lf(x)$; elle consiste à faire agir sur f la partie purement du second ordre $(\text{Id} - \Gamma)L$ de L . Si V est un espace vectoriel et Γ la connexion plate, on a en coordonnées linéaires $\text{Hess } f(x) = D_{ij} f(x) dv^i(x) \cdot dv^j(x)$, ce qui justifie le nom de hessienne.

[La définition habituelle d'une connexion en géométrie consiste, comme nous le verrons très bientôt, à introduire une dérivation covariante ∇ . L'objet ici appelé $\text{Hess } f(x)$ est, à un isomorphisme canonique près, la dérivée covariante seconde $\nabla df(x)$ de la géométrie usuelle; l'isomorphisme est l'identification de l'espace des codiffuseurs purement d'ordre deux à $\mathbb{T}_x^*V \odot \mathbb{T}_x^*V$ par la bijection \mathbf{Q} vue en 1.9.]

DÉFINITION. — Une *connexion* sur une variété V de classe au moins C^2 est la donnée, pour tout x de V , d'une connexion au point x .

Les symboles de Christoffel d'une connexion sont donc des fonctions, définies sur tout le domaine d'une carte; nous leur demanderons la plus grande régularité possible, en exigeant qu'elles soient de classe C^{p-2} . (Mais on rencontre parfois aussi des connexions qui sont seulement continues, voire boréliennes...)

En faisant agir la connexion simultanément en chaque point, on peut la considérer comme une machine C^{p-2} -linéaire qui transforme tout champ de diffuseur en un champ de vecteur, et préserve les champs de vecteurs. Duale, Γ^* est une opération C^{p-2} -linéaire transformant les champs de covecteurs en champs de codiffuseurs, et vérifiant $\mathbf{R} \circ \Gamma^* = \text{Id}$.

En particulier, si A et B sont deux champs de vecteurs, leur composé AB (au sens de la composition des opérateurs différentiels) est un champ de diffuseurs, et $\Gamma(AB)$ est à nouveau un champ de vecteurs; les géomètres l'appellent *dérivée covariante de B selon A* et le notent $\nabla_A B$. Leurs livres définissent une connexion comme une opération $(A, B) \mapsto \nabla_A B$ sur les champs de vecteurs vérifiant certaines propriétés.¹

1. Techniquement, le point de vue des espaces osculateurs présente parfois certains avantages. Par exemple, le défaut d'affinité d'une courbe γ est le vecteur $\Gamma\dot{\gamma}$, d'un maniement aisé. Le géomètre traditionnel utilisera plus naturellement $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$, mais cette quantité, égale à $\mathbb{1}_{\{\dot{\gamma} \neq 0\}} \Gamma\dot{\gamma}$, n'est en général pas continue (prenez l'exemple de la courbe $\gamma(t) = t^2$ dans \mathbb{R} muni de la connexion plate). Ceci est source de complications, voire d'erreurs : certains livres affirment — et démontrent! — que l'équation du transport parallèle est $\nabla_{\dot{\gamma}} u = 0$, alors que cette condition ne suffit pas si la courbe γ a des intervalles de constance; l'équation $\Gamma(u') = 0$, où u' désigne le diffuseur tel que $\langle d^2f, u' \rangle = \frac{d}{dt} \langle df, u(t) \rangle$, est, elle, nécessaire et suffisante.

Bien entendu, si V est un espace affine, la connexion plate sur V est celle qui est plate en chaque point; elle opère sur les champs de diffuseurs en gardant seulement la partie d'ordre 1 (en coordonnées affines).

Si V est une sous-variété d'un espace affine euclidien E , la connexion induite sur V par l'injection et par la structure euclidienne est définie, comme plus haut, en chaque point. Cet exemple de connexion est tout à fait fondamental. (Les auditeurs ayant un peu fréquenté les variétés riemanniennes vérifieront sans peine que la connexion ainsi construite sur V n'est autre que la connexion de Levi-Civita associée à la structure riemannienne induite sur V par E . Ceci resterait d'ailleurs vrai si l'on remplaçait E lui-même par une variété riemannienne.)

DÉFINITION. — Soit V une variété munie d'une connexion Γ . Une courbe $\gamma : I \rightarrow V$ de classe C^2 au moins et définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ est une *géodésique* si l'on a $\Gamma\ddot{\gamma}(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Lorsque Γ est la connexion plate sur un espace affine, les géodésiques sont les mouvements uniformes. Lorsque Γ est la connexion induite sur une sous-variété V d'un espace affine euclidien E , γ est une géodésique si et seulement si son vecteur accélération dans E (au sens usuel de la cinématique : c'est un vecteur et non un diffuseur) reste à tout instant t orthogonal à l'espace tangent $T_{\gamma(t)}V$.

En coordonnées locales, l'équation des géodésiques $\Gamma\ddot{\gamma} = 0$ s'écrit

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) = 0 \quad \text{pour tout } k.$$

Si l'on pose $u^k = \dot{\gamma}^k$, on obtient le système différentiel d'ordre 1 à $2d$ composantes

$$\begin{cases} \frac{du^k}{dt} = -\Gamma_{ij}^k(\gamma^1, \dots, \gamma^d) u^i u^j \\ \frac{d\gamma^k}{dt} = u^k. \end{cases}$$

Pour pouvoir le résoudre, nous ferons, jusqu'à la fin de cette section, l'hypothèse que V est de classe C^3 au moins; ainsi Γ est au moins C^1 et en particulier localement lipschitzienne. Ceci assure l'existence locale et l'unicité de la solution si l'on se donne les $2d$ nombres $\gamma^k(0)$ et $u^k(0)$. Ainsi, pour tout $x \in V$ et tout vecteur $A \in T_xV$, il existe une géodésique telle que $\dot{\gamma}(0) = A$; elle est unique, au sens où deux telles géodésiques, soient γ' et γ'' , respectivement définies sur des intervalles ouverts I' et I'' de \mathbb{R} , coïncident sur l'intersection $I' \cap I''$. Il existe donc une unique géodésique maximale (c'est-à-dire définie sur un intervalle ouvert maximal) de vitesse initiale $\dot{\gamma}(0)$ donnée dans TV .

Remarquer que si γ est une géodésique et a une application affine de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $\gamma \circ a$ est encore une géodésique. En particulier, si γ est la géodésique maximale telle que $\dot{\gamma}(0)$ soit un vecteur donné A , alors $t \mapsto \gamma(\lambda t)$ est la géodésique maximale de vitesse initiale λA , ceci pour tout réel λ .

EXERCICE. — La variété \mathbb{R}^2 est munie des coordonnées globales (x, y) et de la connexion de classe C^0 ainsi définie : Tous les symboles de Christoffel sont nuls sauf un, $\Gamma_{11}^2(x, y) = -6\sqrt[3]{y}$. Vérifier que les courbes

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 + t \\ y(t) = t^3 \end{cases}$$

sont des géodésiques différentes ayant mêmes position et vitesse initiales.

EXERCICE. — Sur la variété \mathbb{R} , il existe une connexion C^∞ pour laquelle les géodésiques sont les courbes $\gamma(t) = \ln(at+b)$; leurs intervalles maximaux de définition sont donc des demi-droites. Sur la variété compacte \mathbb{R}/\mathbb{Z} , il existe une connexion C^∞ pour laquelle les géodésiques sont les images modulo 1 des précédentes. Comment se comportent-elles lorsque $t \rightarrow -b/a$?

DÉFINITION. — On appelle *application exponentielle en un point x* l'application \exp_x définie par $\exp_x(u) = \gamma(1)$, où u est dans T_xV et γ est la géodésique maximale vérifiant $\dot{\gamma}(0) = u$.

Elle est définie seulement pour les u tels que 1 soit dans l'intervalle (maximal) I de définition de γ . Comme l'application $u \mapsto \sup I$ est semi-continue inférieurement, ces u forment un ouvert de T_xV .

PROPOSITION 3.1. — *Soit x un point d'une variété de classe C^p , où $p \geq 3$. Il existe un voisinage U de l'origine dans T_xV et un voisinage W de x dans V tels que \exp_x soit un difféomorphisme de classe C^{p-2} de U sur W .*

DÉMONSTRATION. — Puisque les symboles de Christoffel qui apparaissent dans l'équation des géodésiques en coordonnées locales sont de classe C^{p-2} , le théorème de régularité des solutions des équations différentielles permet d'affirmer que $\phi = \exp_x$ est de classe C^{p-2} sur l'ouvert où elle est définie. Sa différentielle ϕ_{*0} à l'origine est l'application identique de T_xV dans lui-même (en identifiant l'espace tangent en un point à un espace vectoriel avec cet espace vectoriel). En effet, si A est un vecteur de T_xV et γ la géodésique de V de vitesse initiale A , la courbe $c(t) = tA$ dans T_xV vérifie $\phi \circ c = \gamma$, donc $\phi_{*0}(A) = \phi_{*0}\dot{c}(0) = \dot{\gamma}(0) = A$. Comme $p-2 \geq 1$, la proposition résulte immédiatement du théorème des fonctions implicites (voir par exemple [16]). ■

DÉFINITION. Soit x un point d'une variété C^3 au moins. On appelle *carte normale* en x toute carte v de la forme $b \circ \exp_x^{-1}$, où b est un isomorphisme linéaire entre T_xV et \mathbb{R}^d , et où le domaine D de la carte est tel que \exp_x^{-1} soit un difféomorphisme de D sur un voisinage de l'origine dans T_xV . Le point x est appelé le *centre* de la carte.

Une telle carte transforme les géodésiques passant par le centre en mouvements uniformes passant par l'origine. Mais en général, les géodésiques ne passant pas par le centre sont transformées en mouvements non uniformes!

PROPOSITION 3.2. — *Les symboles de Christoffel associés à une carte normale sont nuls au centre de cette carte.*

DÉMONSTRATION. — Appelons x le centre de la carte normale. Soient a^1, \dots, a^d des coefficients; soit γ la géodésique telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}^i(0) = a^i$ (lecture de $\dot{\gamma}$ dans la carte). On a $\gamma^k(t) = a^k t$ pour tout t assez petit; l'équation des géodésiques entraîne $\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) a^i a^j = 0$ pour tout k et tout t . En particulier, pour $t = 0$, $\Gamma_{ij}^k(x) a^i a^j = 0$. Les a^i étant arbitraires et les Γ_{ij}^k symétriques en i et j , on a $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$. ■

DÉFINITION. — On appelle *application exponentielle* l'application \exp qui à un vecteur $u \in TV$ associe le couple $(x, \exp_x(u)) \in V \times V$, où $x = \pi(u)$ est le point de V tel que $u \in T_xV$.

PROPOSITION 3.3. — *Soit V une variété de classe C^p avec $p \geq 3$. Il existe dans TV un voisinage D de l'ensemble des vecteurs nuls, et dans $V \times V$ un voisinage E de la diagonale, tels que la restriction à D de l'application exponentielle soit un difféomorphisme C^{p-2} de D sur E .*

DÉMONSTRATION. — Soient x un point de V et 0_x le vecteur nul de T_xV . L'équation des géodésiques écrite dans une carte locale autour de x , jointe au théorème de régularité des solutions d'équations différentielles, montre (comme dans la proposition 3.1) que l'application exponentielle est bien définie et de classe C^{p-2} sur un voisinage de 0_x dans TV . Nous allons montrer que c'est un difféomorphisme sur un voisinage ouvert U_x de 0_x ; la proposition en découlera en prenant $D = \bigcup_{x \in V} U_x$. Pour vérifier cette propriété de difféomorphisme, il suffit par le théorème d'inversion locale d'établir que l'application linéaire tangente \exp_{*0_x} est une bijection entre les espaces tangents en 0_x à TV et en (x, x) à $V \times V$. Les dimensions de TV et $V \times V$ étant les mêmes ($2d$), il suffit déjà de montrer la surjectivité. Lorsque γ décrit les géodésiques telles que $\gamma(0) = x$, les courbes $t \mapsto t\dot{\gamma}(0)$ et $t \mapsto 0_{\gamma(t)}$ sont dans TV et passent en 0_x à l'instant 0. Leurs images par \exp sont les courbes de la forme $(x, \gamma(t))$ et de la forme $(\gamma(t), \gamma(t))$; donc les vecteurs $(0, \dot{\gamma}(0))$ et $(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0))$ de $T_xV \times T_xV = T_{(x,x)}V \times V$ sont dans l'espace image de \exp_{*0_x} . Comme ils en forment une partie génératrice, cette image est l'espace $T_{(x,x)}V \times V$ tout entier. ■

2. — Intégrales d'Itô et martingales

Symboliquement, si X est une semimartingale dans V , $\mathcal{D}X$ est le diffuseur $dX^k D_k + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] D_{ij}$. Disposant d'une connexion Γ sur la variété, nous pouvons élaguer la partie purement d'ordre 2, pour ne garder que la partie d'ordre 1 $\Gamma \mathcal{D}X = (dX^k + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(X_t) d[X^i, X^j]) D_k$; c'est — toujours symboliquement — un vecteur tangent, soumis à la brave formule *linéaire* de changements de cartes dans TV , et pour lequel une décomposition en parties martingale et partie à variation finie $dM + dA$ sera donc invariante par changement de cartes, c'est-à-dire intrinsèque (dM et dA sont dans $T_{X_t}V$; ni M ni A n'existent). Plutôt que de raisonner sur l'objet formel $\mathcal{D}X$, il est plus agréable, et plus conforme aux bonnes mœurs mathématiques, de dire tout cela de façon rigoureuse, en utilisant le langage officiel pour parler de $\mathcal{D}X$, celui des intégrales de codiffuseurs le long de X . Cela nous mène aux intégrales d'Itô dans une variété. Introduites et étudiées par Meyer [78] et [80], elles avaient auparavant déjà été considérées par Duncan [38] dans le cas riemannien (comme limites de sommes de Riemann!) et par Bismut [15] dans le cas des diffusions (c'est lui qui, le premier, a identifié la connexion comme étant la structure géométrique permettant leur existence). La méthode d'approximation de Duncan a été ultérieurement redécouverte par Darling [23] et [27].

DÉFINITION. — Soit X une semimartingale dans une variété V pourvue d'une connexion Γ . Soit Σ un processus prévisible, à valeurs dans T^*V , localement borné et au-dessus de X . On appelle *intégrale d'Itô* de Σ le long de X , et l'on note $\int \langle \Sigma, d_\Gamma X \rangle$, la semimartingale réelle $\int \langle \Gamma^* \Sigma, \mathcal{D}X \rangle$.

Pour donner un sens à cette définition, il faut remarquer que lorsque Σ est un tel processus de covecteurs, le processus de codiffuseurs $\Gamma^* \Sigma$ est prévisible, localement borné et au-dessus de X . Formellement, la différentielle d'Itô $d_\Gamma X_t$ n'est autre que la partie d'ordre un $\Gamma \mathcal{D}X_t = (dX_t^k + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(X_t) d[X^i, X^j]_t) D_k$ du diffuseur infinitésimal $\mathcal{D}X_t$.

PROPOSITION 3.4. — Soient X une semimartingale dans une variété V pourvue d'une connexion, et Σ et T deux processus prévisibles, à valeurs dans T^*V ,

localement bornés et au-dessus de X . La covariation des deux intégrales d'Itô est donnée par

$$\frac{1}{2} [\int \langle \Sigma, d_\Gamma X \rangle, \int \langle T, d_\Gamma X \rangle] = \int \langle \Sigma \cdot T, \mathcal{D}X \rangle .$$

Si H est un processus prévisible réel localement borné, on a

$$\int \langle H\Sigma, d_\Gamma X \rangle = \int H d(\int \langle \Sigma, d_\Gamma X \rangle) .$$

DÉMONSTRATION. — La première formule résulte aussitôt de $\mathbf{R}\Gamma^*\Sigma = \Sigma$ et de 2.10.(iii); la seconde de $\Gamma^*(H\Sigma) = H\Gamma^*\Sigma$ et de 2.10.(ii). ■

Par conséquent, en coordonnées locales, si Σ s'écrit $\sigma_i dv^i$, l'intégrale d'Itô de Σ n'est autre que $\int \sigma_k (dX^k + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(X) d[X^i, X^j])$. À l'aide des intégrales d'Itô, on peut très facilement écrire la formule d'Itô dans V :

PROPOSITION 3.5. — Soit X une semimartingale dans V .

Pour toute fonction $f \in C^2(V)$, on a

$$f \circ X = f(X_0) + \int \langle df, d_\Gamma X \rangle + \int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle .$$

DÉMONSTRATION. — Immédiat à l'aide des définitions $\int \langle df, d_\Gamma X \rangle = \int \langle \Gamma^* df, \mathcal{D}X \rangle$ et $\text{Hess } f = d^2 f - \Gamma^* df$, et de l'égalité $f \circ X - f(X_0) = \int \langle d^2 f, \mathcal{D}X \rangle$. ■

DÉFINITION. — Une semimartingale X dans une variété V munie d'une connexion Γ est une *martingale* si, pour tout processus prévisible Σ à valeurs dans T^*V , localement borné et au-dessus de X , l'intégrale d'Itô $\int \langle \Sigma, d_\Gamma X \rangle$ est une martingale locale.

Heuristiquement, X est une martingale si $\mathcal{D}X$ peut se décomposer en une différentielle de martingale (d'ordre un) et une partie purement d'ordre deux, c'est-à-dire dans le noyau de Γ .

Ces êtres ne sont pas l'analogie dans V des martingales continues dans \mathbb{R}^d , mais des *martingales locales* continues dans \mathbb{R}^d ; et quand V est la variété \mathbb{R}^d et Γ la connexion plate, cette définition crée une ambiguïté : les martingales dans V sont les martingales *locales* (continues) usuelles. Malgré cela, nous préférons le terme de martingale pour trois raisons : il est plus simple que martingale locale; dans une variété générale, il n'existe pas d'objets qui correspondent aux vraies martingales (non locales); enfin, l'expérience montre que cette ambiguïté n'est pas gênante. Les auteurs anglo-saxons emploient le terme de « Γ -martingale », qui a le double avantage de supprimer toute ambiguïté et de faire figurer explicitement la connexion.

La définition ci-dessus d'une martingale dans une variété est empruntée à Meyer [78] et [79]; une autre approche, par les fonctions convexes, est due à Darling [23] et [24] et fera l'objet du prochain chapitre.

PROPOSITION 3.6. — Pour qu'une semimartingale X dans V soit une martingale, (il faut et) il suffit que, pour toute fonction f de classe C^p et à support compact, la différence $f \circ X - \int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle$ soit une martingale locale.

DÉMONSTRATION. — Utilisons un recouvrement ouvert dénombrable $(U_\iota)_{\iota \in I}$ de V tel que chaque U_ι soit relativement compact dans le domaine d'une carte locale $(v_\iota^i)_{1 \leq i \leq d}$. Soient w_ι^i des fonctions C^p à support compact, telles que $w_\iota^i = v_\iota^i$ sur U_ι .

Si Σ est un processus prévisible dans T^*V , localement borné et au-dessus de X , il s'agit de montrer que $M = \int \langle \Sigma, d_\Gamma X \rangle$ est une martingale locale.

Puisque les ensembles prévisibles $A_\iota = \{X \in U_\iota\}$ recouvrent $\llbracket 0, \infty \llbracket$, il suffit de vérifier que, pour un ι (fixé dans la suite), $\int \mathbb{1}_{A_\iota} dM$ est une martingale locale. Définissons des processus prévisibles σ_i par la formule $\Sigma = \sigma_i dv_\iota^i(X)$ sur A_ι et par $\sigma_i = 0$ sur A_ι^c ; ils sont localement bornés parce que U_ι est relativement compact dans le domaine de la carte v_ι . En remarquant que $\mathbb{1}_{A_\iota} \Sigma = \sigma_i dw_\iota^i(X)$ et en utilisant 3.4, on peut écrire

$$\int \mathbb{1}_{A_\iota} dM = \int \langle \mathbb{1}_{A_\iota} \Sigma, d_\Gamma X \rangle = \int \sigma_i d(\int \langle dw_\iota^i, d_\Gamma X \rangle);$$

et c'est fini, puisque la formule d'Itô 3.5 et l'hypothèse assurent que l'intégrale d'Itô

$$\int \langle dw_\iota^i, d_\Gamma X \rangle = w_\iota^i \circ X - w_\iota^i(X_0) - \int \langle \text{Hess } w_\iota^i, \mathcal{D}X \rangle$$

est une martingale locale. ■

EXERCICE. — a) Si f^1, \dots, f^q sont des fonctions C^2 sur (V, Γ) et si $\phi : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi C^2 , la formule de changement de variable pour les hessiennes s'écrit

$$\text{Hess} [\phi \circ (f^1, \dots, f^q)] = D_k \phi(f^1, \dots, f^q) \text{Hess } f^k + D_{ij} \phi(f^1, \dots, f^q) df^i \cdot df^j.$$

b) On suppose donné un plongement propre de V dans \mathbb{R}^q (ceci entraîne que toute fonction C^p sur V est restriction à V d'une fonction C^p définie sur \mathbb{R}^q). La connexion Γ sur V est quelconque, et n'a a priori rien à voir avec le plongement. Soient f^1, \dots, f^q les fonctions C^p sur V obtenues en composant les coordonnées de \mathbb{R}^q par le plongement. Montrer qu'une semimartingale X dans V est une martingale pour Γ si et seulement si chaque $f^k \circ X - \int \langle \text{Hess } f^k, \mathcal{D}X \rangle$ est une martingale locale.

Pour rendre plus concrète la notion de martingale, voici trois situations dans lesquelles les martingales sont faciles à caractériser. La première est le cas où la variété admet un système de coordonnées globales.

PROPOSITION 3.7. — *On suppose V pourvue d'une carte globale $(v^i)_{1 \leq i \leq d}$; on note Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel de la connexion pour cette carte. Soit X une semimartingale dans V , de coordonnées $X^k = v^k \circ X$. Pour que X soit une martingale, il faut et il suffit que chacun des d processus réels*

$$M^k = X^k + \frac{1}{2} \int \Gamma_{ij}^k(X) d[X^i, X^j]$$

soit une martingale locale.

Si l'on se donne des martingales locales (continues) M^1, \dots, M^d , tout processus X dans V , dont les coordonnées X^k vérifient

$$X^k = M^k - \frac{1}{2} \int \Gamma_{ij}^k(X) d[M^i, M^j],$$

est une martingale.

Ainsi, dès que la connexion est suffisamment régulière pour que l'équation différentielle stochastique ci-dessus ait toujours une unique solution, les martingales dans V sont en correspondance avec les martingales locales continues dans \mathbb{R}^d (à des problèmes de durée de vie près).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.7. — Puisque $\text{Hess } v^k = -\Gamma_{ij}^k dv^i \cdot dv^j$, la quantité $M^k = X^k + \frac{1}{2} \int \Gamma_{ij}^k(X) d[X^i, X^j]$ n'est autre que l'intégrale d'Itô $\int \langle dv^k, d_{\Gamma} X \rangle$; si X est une martingale, M^k est donc une martingale locale.

Réciproquement, si chaque M^k est une martingale locale, la formule de changement de variable

$$d(f \circ X) = D_k f \circ X (dX^k + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(X) d[X^i, X^j]) + \frac{1}{2} (D_{ij} - \Gamma_{ij}^k D_k) f \circ X d[X^i, X^j]$$

montre que pour toute $f \in C^2$, le processus $f \circ X - \int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle$ est une martingale locale, et X est une martingale d'après 3.6.

Si l'on se donne des martingales locales continues M^k , tout processus X tel que $X^k = M^k - \frac{1}{2} \int \Gamma_{ij}^k(X) d[M^i, M^j]$ vérifiera $[X^i, X^j] = [M^i, M^j]$; on aura donc $M^k = X^k + \frac{1}{2} \int \Gamma_{ij}^k(X) d[X^i, X^j]$ et X sera une martingale par la première partie de la proposition. ■

La seconde situation où les martingales se décrivent simplement est le cas des diffusions. Une diffusion est une martingale si et seulement si son générateur est purement d'ordre deux:

PROPOSITION 3.8. — *Sur la variété V , soit L un champ de diffuseurs, non nécessairement continu, mais borélien et localement borné. Soit aussi X une semimartingale dans V , telle que, pour toute $f \in C^2(V)$,*

$$f \circ X_t - \int_0^t Lf(X_s) ds$$

soit une martingale locale.

Alors X est une martingale dans V si et seulement si le temps passé par X dans l'ensemble $\{x \in V : \Gamma L(x) \neq 0\}$ est nul. En particulier, lorsque cet ensemble est ouvert (par exemple si L est continu), X est une martingale si et seulement si presque toutes ses trajectoires sont à valeurs dans le fermé $\{\Gamma L = 0\}$.

Si $\Gamma L = 0$, le processus X est toujours une martingale dans V .

DÉMONSTRATION. — Notons $\stackrel{m}{\equiv}$ l'égalité modulo les martingales locales : $Y \stackrel{m}{\equiv} Z$ signifiera que la différence entre les deux processus réels Y et Z est une martingale locale. Notons aussi $\int H dt$ le processus $\int H dA$ où $A_t \equiv t$. Pour tout Θ prévisible, localement borné et au-dessus de X dans \mathbb{T}^*V , on a $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle \stackrel{m}{\equiv} \int \langle \Theta, L \rangle dt$. C'est en effet vrai par hypothèse quand $\Theta = d^2f(X)$, cela s'étend sans peine au cas où $\Theta = H d^2f(X)$, où H est prévisible réel localement borné, puis à $\Theta = H df \cdot dg$ en écrivant $df \cdot dg = \frac{1}{2} (d^2(fg) - f d^2g - g d^2f)$, et enfin au cas général comme dans 3.6, par localisation dans des cartes et écriture de Θ sous la forme $H_k d^2v^k + H_{ij} dv^i \cdot dv^j$.

Pour tout processus de covecteurs Σ , prévisible, localement borné et au-dessus de X , on peut écrire

$$\int \langle \Sigma, d_{\Gamma} X \rangle = \int \langle \Gamma^* \Sigma, \mathcal{D}X \rangle \stackrel{m}{\equiv} \int \langle \Gamma^* \Sigma, L \rangle(X) dt = \int \langle \Sigma, \Gamma L \rangle(X) dt .$$

Pour que X soit une martingale, il faut et il suffit que pour tout Σ , le membre de gauche soit une martingale locale; ou encore que pour tout Σ , le processus à variation finie $\int \langle \Sigma, \Gamma L \rangle(X) dt$ soit identiquement nul. Cette condition est toujours satisfaite si le temps passé par X dans l'ensemble $U = \{\Gamma L \neq 0\}$ est nul. Réciproquement, si elle est satisfaite, soit σ un champ de covecteurs borélien, localement borné, tel que $\langle \sigma, \Gamma L \rangle > 0$ sur U . En prenant $\Sigma = \sigma \circ X$, on obtient $\int \mathbb{1}_{\{X \in U\}} dt = 0$. ■

La troisième situation où les martingales sont faciles à caractériser est le cas où V est une sous-variété de \mathbb{R}^q munie de la connexion induite.

PROPOSITION 3.9. — *Soit V une sous-variété d'un espace vectoriel euclidien E , munie de la connexion induite; appelons p_x la projection orthogonale de $T_x E$ sur $T_x V$, et identifions chaque $T_x E$ à E . Soit X une semimartingale dans V ; appelons A la partie à variation finie de la décomposition canonique de X dans E (c'est le processus à variation finie, adapté, continu et issu de l'origine, tel que $X - A$ soit une martingale locale dans E).*

Pour tout processus Σ de covecteurs sur V , prévisible, localement borné et au-dessus de X , l'intégrale d'Itô $\int \langle \Sigma, d_\Gamma X \rangle$ est l'intégrale stochastique usuelle $\int \Sigma \circ p_X (dX)$ dans E , et sa la partie à variation finie est donc $\int \Sigma \circ p_X (dA)$.

Pour que X soit une martingale dans V , il faut et il suffit qu'il existe un processus réel croissant, continu, adapté C et un processus prévisible H à valeurs dans E tels que l'on ait

$$A = \int H dC \quad \text{et} \quad H_t \perp T_{X_t} V .$$

En langage moins rigoureux mais plus direct, X est une martingale dans V si et seulement si dA_t reste orthogonal dans E au sous-espace $T_{X_t} V$. L'analogie avec le comportement des géodésiques, caractérisées par l'orthogonalité entre leur accélération (dans E) et l'espace tangent à V , n'est nullement fortuite!

DÉMONSTRATION. — Pour plus de précision, nous appellerons i l'injection canonique de V dans E , ce qui permet de distinguer un point x de V de son image ix dans E , et le processus X de son image $Y = i \circ X$. Nous noterons Γ_V la connexion sur V et Γ_E la connexion plate sur E ; la définition de Γ_V est $\Gamma_V L = p_* \Gamma_E i_* L$ pour $L \in T_x V$.

Si Σ est un processus de covecteurs sur V , prévisible, localement borné et au-dessus de X , la formule $T = \Gamma_E^*(\Sigma \circ p)$ définit un processus T de codiffuseurs sur E , prévisible, localement borné et au-dessus de Y , tel que $\int \langle i^* T, \mathcal{D}X \rangle = \int \langle T, \mathcal{D}Y \rangle$ par la proposition 2.11. Ceci permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int \langle \Sigma, d_{\Gamma_V} X \rangle &= \int \langle \Gamma_V^* \Sigma, \mathcal{D}X \rangle = \int \langle i^* \Gamma_E^*(\Sigma \circ p_X), \mathcal{D}X \rangle \\ &= \int \langle \Gamma_E^*(\Sigma \circ p_X), \mathcal{D}Y \rangle = \int \langle \Sigma \circ p_X, d_{\Gamma_E} Y \rangle \end{aligned}$$

où les intégrales de la première ligne sont dans V et celles de la seconde dans E . L'intégrale d'Itô finale est écrite pour la connexion plate Γ_E sur E ; c'est donc l'intégrale usuelle $\int \Sigma \circ p_X (dY)$, et la première partie de l'énoncé est établie.

Si A peut s'écrire $\int H dC$, où C est croissant continu, et H_t est prévisible dans E et normal à $T_{X_t} V$, alors $p_X(H) = 0$, et pour tout Σ ,

$$\int \Sigma \circ p_X (dA) = \int \Sigma \circ p_X (H dC) = \int \langle \Sigma, p_X(H) \rangle dC = 0 ;$$

X est donc une martingale pour Γ_V .

Réciproquement, si X est une martingale, soient A^i les composantes de A dans une base de E (coordonnées linéaires!), $C = \sum_i \int |dA^i|$, et H un processus prévisible borné dans E tel que $dA = H dC$. En identifiant $T_{X_t} V$ et $T_{X_t}^* V$ au moyen de la

structure euclidienne, on peut définir un processus prévisible borné dans Γ^*V au dessus de X par $\Sigma = p(H)$; puisque X est une martingale,

$$0 = \int \Sigma \circ p_X (dA) = \int \langle \Sigma, p_X(H) \rangle dC = \int \|p_X(H)\|^2 dC .$$

Ceci montre que, quitte à modifier H sur un ensemble négligeable pour dC , on a $p_X(H) = 0$, c'est-à-dire $H_t \perp T_{X_t}V$. ■

La formule d'Itô 3.5 n'a été énoncée que pour les fonctions; elle s'étend immédiatement aux codiffuseurs :

PROPOSITION 3.10. — Soient X une semimartingale dans V et Θ un processus coosculteur prévisible, localement borné, au-dessus de X . On a toujours l'identité

$$\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle = \int \langle \mathbf{R}\Theta, d_\Gamma X \rangle + \int \langle (\Theta - \Gamma^* \mathbf{R}\Theta), \mathcal{D}X \rangle .$$

Lorsque X est une martingale, ceci est la décomposition canonique de $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$ en parties martingale et à variation finie.

DÉMONSTRATION. — La formule se réduit à la trivialité $\Theta = \Gamma^* \mathbf{R}\Theta + (\Theta - \Gamma^* \mathbf{R}\Theta)$. Comme $\mathbf{R}\Gamma^*$ est l'identité sur les covecteurs, $(\Theta - \Gamma^* \mathbf{R}\Theta)$ est dans le noyau de \mathbf{R} , et l'intégrale $\int \langle (\Theta - \Gamma^* \mathbf{R}\Theta), \mathcal{D}X \rangle$ est toujours à variation finie d'après 2.10.(v). Si de plus X est une martingale, l'intégrale d'Itô est une martingale locale réelle, et la formule ci-dessus coïncide donc avec la décomposition canonique de $\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle$. ■

3. — Applications affines; connexion produit

DÉFINITION. — Soient Γ_V et Γ_W deux connexions sur des variétés V et W respectivement. Si x est un point de V , une application $\phi \in C^2(V, W)$ est *affine au point x* si l'on a $\phi_{*x}(\Gamma_V L) = \Gamma_W(\phi_{*x}L)$ pour tout $L \in T_x V$, ou encore, de façon équivalente, $\phi_x^*(\Gamma_W^* \sigma) = \Gamma_V^*(\phi_x^* \sigma)$ pour tout $\sigma \in T_{\phi(x)}^* W$. Elle est *affine* si elle est affine en tout point x de V .

Il n'existe en général pas d'applications affines non constantes d'une variété dans une autre. Une importante exception est le cas où V est \mathbb{R} ou un intervalle de \mathbb{R} : une courbe à valeurs dans W est une application affine (l'intervalle de définition étant muni de la connexion plate) si et seulement si c'est une géodésique.

Même dans le cas où V est une sous-variété de $W = \mathbb{R}^q$ et où Γ_V est la connexion induite par l'inclusion i et une structure euclidienne sur W , l'application i n'est en général pas affine. En effet, elle ne transforme pas les géodésiques de V en mouvements uniformes dans W , alors que, comme nous allons le voir, ce serait une condition nécessaire (et suffisante) d'affinité.

Plus généralement, si l'on se donne ϕ et Γ_W , il n'existe en général pas de connexion Γ_V rendant ϕ affine.

EXERCICE 3.11. — Pour que $\phi \in C^2(V, W)$ soit affine, il faut et il suffit que l'on ait $\text{Hess}_V(f \circ \phi) = \phi^*(\text{Hess}_W f)$ pour toute $f \in C^2(W)$.

LEMME 3.12. — Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $\gamma : I \rightarrow V$ une courbe dans V telle que $\gamma \circ M$ soit une martingale dans V pour toute martingale locale réelle M à valeurs dans I . La courbe γ est une géodésique.

DÉMONSTRATION. — Soit σ un champ de covecteurs sur V ; $\tau = \gamma^* \Gamma^* \sigma$ est un champ de codiffuseurs sur I , que l'on peut écrire $\tau = a(t) d^2t + b(t) dt \cdot dt$, où les fonctions a et b sur I sont données par $a = \langle \tau, \frac{\partial}{\partial t} \rangle$ et $b = \langle \tau, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rangle$. Pour toute martingale locale M dans I ,

$$\begin{aligned} \int (a(M) dM + \frac{1}{2} b(M) d[M, M]) &= \int \langle \tau, \mathcal{D}M \rangle = \int \langle \gamma^* \Gamma^* \sigma, \mathcal{D}M \rangle \\ &= \int \langle \Gamma^* \sigma, \mathcal{D}(\gamma \circ M) \rangle = \int \langle \sigma, d_\Gamma(\gamma \circ M) \rangle \end{aligned}$$

est par hypothèse une martingale locale, donc $\int b(M) d[M, M] = 0$. En prenant pour M un mouvement brownien changé de temps de façon à quitter tout compact de I quand t tend vers l'infini, on obtient $\int b(M) dt = 0$, et, b étant continu, $b = 0$ sur I . Ceci s'écrit $\langle \tau, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rangle = 0$, ou encore $\langle \sigma, \Gamma \ddot{\gamma} \rangle = 0$ puisque $\gamma_* (\frac{\partial^2}{\partial t^2}) = \ddot{\gamma}$. Comme σ est arbitraire, $\Gamma \ddot{\gamma}$ est nul, et γ est une géodésique. ■

PROPOSITION 3.13. — *Pour qu'une application soit affine, il faut et il suffit qu'elle transforme les géodésiques (respectivement martingales) de V en géodésiques (respectivement martingales) de W .*

DÉMONSTRATION. — En trois étapes. Dans un premier temps, nous allons vérifier que les applications affines transforment les martingales en martingales. Soit ϕ affine. Si X est une semimartingale dans V , et si Σ est un processus prévisible, localement borné de covecteurs sur W au-dessus de $\phi \circ X$, on a, en utilisant la définition de l'intégrale d'Itô et la proposition 2.11,

$$\begin{aligned} \int \langle \Sigma, d_{\Gamma_W}(\phi \circ X) \rangle &= \int \langle \Gamma_W^* \Sigma, \mathcal{D}(\phi \circ X) \rangle = \int \langle \phi^* \Gamma_W^* \Sigma, \mathcal{D}X \rangle \\ &= \int \langle \Gamma_V^* \phi^* \Sigma, \mathcal{D}X \rangle = \int \langle \phi^* \Sigma, d_{\Gamma_V} X \rangle ; \end{aligned}$$

si X est une martingale dans V , l'intégrale de droite est une martingale, et l'on en déduit que $\phi \circ X$ est une martingale dans W .

Ensuite, nous allons établir que si ϕ transforme les martingales en martingales, elle transforme aussi les géodésiques en géodésiques. Soit γ une géodésique de V , définie sur un intervalle ouvert I . Comme γ est affine de I dans V , l'étape précédente montre que $\gamma \circ M$ est une martingale dans V pour toute martingale locale M dans I . En utilisant l'hypothèse sur ϕ , on obtient que $\phi \circ \gamma \circ M$ est une martingale dans W ; et d'après le lemme 3.12, la courbe $\phi \circ \gamma$ est une géodésique de W .

Enfin, si ϕ transforme les géodésiques en géodésiques, elle est affine. Pour le montrer, il suffit grâce au lemme 1.2 de vérifier que $\phi_{*x} \Gamma_V \ddot{c}(0) = \Gamma_W \phi_{*x} \ddot{c}(0)$ pour tout x de V et toute courbe c dans V telle que $c(0) = x$. Mais il existe une géodésique γ telle que $\gamma(0) = x$ et $\dot{\gamma}(0) = \dot{c}(0)$. Puisque les courbes c et γ ont même vitesse en $t = 0$, le lemme 1.2 dit que leurs accélérations $\ddot{c}(0)$ et $\ddot{\gamma}(0)$ diffèrent d'un vecteur : il existe $A \in \mathbb{T}_x V$ tel que $\ddot{c}(0) = \ddot{\gamma}(0) + A$. Comme γ est une géodésique, on a

$$\phi_{*x} \Gamma_V \ddot{c}(0) = \phi_{*x} \Gamma_V (\ddot{\gamma}(0) + A) = \phi_{*x} \Gamma_V \ddot{\gamma}(0) + \phi_{*x} A = \phi_{*x} A ;$$

et de même, en utilisant le fait que $\phi \circ \gamma$ est une géodésique,

$$\begin{aligned} \Gamma_W \phi_{*x} \ddot{c}(0) &= \Gamma_W \phi_{*x} (\ddot{\gamma}(0) + A) = \Gamma_W \phi_{*x} \ddot{\gamma}(0) + \Gamma_W \phi_{*x} A \\ &= \Gamma_W (\phi \circ \gamma) \ddot{\gamma}(0) + \phi_{*x} A = \phi_{*x} A . \end{aligned}$$

L'égalité annoncée est ainsi établie. ■

REMARQUE. — En prenant $V = W$ et $\phi = \text{Id}$ dans cette proposition, on voit qu'une connexion est caractérisée par ses géodésiques (respectivement ses martingales).

DÉFINITION. — Soit W une sous-variété de V ; V est munie d'une connexion Γ . Appelons i l'injection canonique de W dans V . On dit que la sous-variété W est *totale-ment géodésique* si pour tout vecteur A tangent à W , il existe une géodésique γ de V telle que $\dot{\gamma}(0) = i_*A$ et que $\gamma(t) \in W$ pour tout t assez voisin de 0.

EXERCICE. — Décrire toutes les sous-variétés totalement géodésiques de \mathbb{R}^d (muni de la connexion plate).

PROPOSITION 3.14. — *Une sous-variété W de V est totalement géodésique si et seulement si il existe sur W une connexion qui rende affine l'injection canonique $i : W \rightarrow V$. Cette connexion est alors unique.*

DÉMONSTRATION. — Supposons d'abord l'existence d'une connexion Γ_W sur W rendant i affine. Pour $A \in \mathbb{T}W$, il existe une courbe γ dans W , géodésique pour Γ_W , telle que $\dot{\gamma}(0) = A$. Comme i est affine, la courbe $\delta = i \circ \gamma$ est une géodésique de V à valeurs dans iW et vérifiant $\dot{\delta}(0) = i_*A$, et W est donc totalement géodésique.

Réciproquement, supposons W totalement géodésique. Une connexion Γ_W rend i affine si et seulement on a $i_{*x}\Gamma_W L = \Gamma i_{*x}L$ pour tout $x \in W$ et tout $L \in \mathbb{T}_x W$. Comme i_{*x} est une injection de $\mathbb{T}_x W$ dans $\mathbb{T}_{ix} V$, l'unicité est évidente, et l'existence sera assurée à condition que $\Gamma i_{*x}L$ veuille bien se trouver dans l'espace image $i_{*x}\mathbb{T}_x W$. Par le lemme 1.2, il suffit de vérifier ceci quand $L = \ddot{c}(0)$ où c est une courbe dans W telle que $c(0) = x$. Puisque W est totalement géodésique, il existe une géodésique δ de V , vérifiant $\dot{\delta}(0) = i_{*x}\dot{c}(0)$, et de la forme $i \circ \gamma$ pour une courbe γ dans W . On a donc $\dot{\gamma}(0) = \dot{c}(0)$, et le lemme 1.2 dit que $A = \ddot{c}(0) - \ddot{\gamma}(0)$ est dans $\mathbb{T}_x W$. Pour vérifier que $\Gamma i_{*x}\ddot{c}(0)$ est dans $i_{*x}\mathbb{T}_x W$, il ne reste qu'à écrire $\Gamma i_{*x}\ddot{c}(0) = \Gamma i_{*x}\ddot{\gamma}(0) + \Gamma i_{*x}A = \Gamma \dot{\delta}(0) + i_{*x}A = i_{*x}A$. ■

PROPOSITION 3.15 ET DÉFINITION. — *Soient V_1 et V_2 deux variétés munies de connexions respectives Γ_1 et Γ_2 . Appelons $p_1 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_1$ et $p_2 : V_1 \times V_2 \rightarrow V_2$ les projections canoniques. On définit une connexion sur $V_1 \times V_2$, appelée la connexion produit de Γ_1 et Γ_2 et notée $\Gamma_1 \times \Gamma_2$, par la formule*

$$\forall x_1 \in V_1 \quad \forall x_2 \in V_2 \quad \forall L \in \mathbb{T}_{(x_1, x_2)}(V_1 \times V_2)$$

$$(\Gamma_1 \times \Gamma_2)L = (\Gamma_1 p_{1*}L, \Gamma_2 p_{2*}L) \in \mathbb{T}_{x_1} V_1 \times \mathbb{T}_{x_2} V_2 = \mathbb{T}_{(x_1, x_2)}(V_1 \times V_2).$$

Elle possède les six propriétés suivantes :

- (i) les projections p_1 et p_2 sont des applications affines;
- (ii) si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ est une courbe dans $V_1 \times V_2$,

$$(\Gamma_1 \times \Gamma_2)\ddot{\gamma}(t) = (\Gamma_1 \ddot{\gamma}_1(t), \Gamma_2 \ddot{\gamma}_2(t));$$

- (iii) si X est une semimartingale dans $V_1 \times V_2$, de composantes $X_1 = p_1 X$ et $X_2 = p_2 X$, et si Σ est un processus prévisible, localement borné de covecteurs au-dessus de X , de composantes Σ_1 et Σ_2 (de sorte que $\Sigma = p_1^* \Sigma_1 + p_2^* \Sigma_2$),

$$\int \langle \Sigma, d_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} X \rangle = \int \langle \Sigma_1, d_{\Gamma_1} X_1 \rangle + \int \langle \Sigma_2, d_{\Gamma_2} X_2 \rangle :$$

- (iv) les géodésiques de $V_1 \times V_2$ sont les courbes $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ telles que γ_1 soit une géodésique de V_1 et γ_2 une géodésique de V_2 ;

(v) les martingales dans $V_1 \times V_2$ sont les processus $X = (X_1, X_2)$ tels que X_1 soit une martingale de V_1 et X_2 une martingale de V_2 ;

(vi) si $V_1 = V_2 (= V)$, la diagonale du produit $V \times V$ est une sous-variété totalement géodésique dans $V \times V$ muni de la connexion produit ; la connexion dont elle est munie d'après (3.14) est l'image de la connexion Γ sur V par le difféomorphisme canonique entre V et la diagonale.

DÉMONSTRATION. — Il s'agit bien d'une connexion, car si le diffuseur L est un vecteur, $p_{1*}L$ et $p_{2*}L$ en sont aussi, et $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)L = (p_{1*}L, p_{2*}L) = L$.

(i) Pour un vecteur $A = (A_1, A_2) \in \mathbb{T}_{(x_1, x_2)}V = \mathbb{T}_{x_1}V_1 \times \mathbb{T}_{x_2}V_2$, on a $p_{1*}A = A_1$ et $p_{2*}A = A_2$; l'affinité des projections résulte donc immédiatement de la définition de $\Gamma_1 \times \Gamma_2$.

(ii) Puisque $\gamma_1 = p_1 \circ \gamma$, $\ddot{\gamma}_1 = p_{1*}\ddot{\gamma}$; de même pour γ_2 .

(iii) Puisque p_1 est affine, on a $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)^* p_1^* \sigma_1 = p_1^* \Gamma_1 \sigma_1$ pour $\sigma_1 \in \mathbb{T}^*V_1$; d'où, en utilisant 2.11,

$$\begin{aligned} \int \langle p_1^* \Sigma_1, d_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} X \rangle &= \int \langle (\Gamma_1 \times \Gamma_2)^* p_1^* \Sigma_1, \mathcal{D}X \rangle = \int \langle p_1^* \Gamma_1^* \Sigma_1, \mathcal{D}X \rangle \\ &= \int \langle \Gamma_1^* \Sigma_1, \mathcal{D}(p_1 \circ X) \rangle = \int \langle \Sigma_1, d_{\Gamma_1} X_1 \rangle . \end{aligned}$$

(iv) Une courbe γ est une géodésique si et seulement si $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \ddot{\gamma} = 0$; par (ii), cela revient à dire que $\Gamma_1 \ddot{\gamma}_1$ et $\Gamma_2 \ddot{\gamma}_2$ sont nuls, c'est-à-dire que γ_1 et γ_2 sont des géodésiques.

(v) Si X est une martingale dans $V_1 \times V_2$, ses composantes sont des martingales par (i) et 3.13. Réciproquement, si X_1 et X_2 sont des martingales, X est une semimartingale et toutes les intégrales d'Itô $\int \langle \Sigma, d_{\Gamma_1 \times \Gamma_2} X \rangle$ sont des martingales locales en raison de (iii) ; X est donc une martingale.

(vi) Nous laissons aux auditeurs le soin de vérifier que la diagonale est une sous-variété de $V \times V$, difféomorphe à V par l'application $(x, x) \leftrightarrow x$. Si γ est une géodésique de V , (γ, γ) est une géodésique dans $V \times V$ par (iv) ; l'injection canonique de la diagonale (identifiée à V) dans $V \times V$ est donc affine, et la diagonale est totalement géodésique d'après 3.14. ■

EXERCICE. — 1) Contrairement au cas des vecteurs tangents, les images $p_{1*}L$ et $p_{2*}L$ d'un diffuseur osculateur à une variété produit ne caractérisent pas ce diffuseur.

2) Si X et Y sont deux semimartingales réelles, décrire la différence entre le couple de « diffuseurs » $(\mathcal{D}X, \mathcal{D}Y) \in \mathbb{T}\mathbb{R} \times \mathbb{T}\mathbb{R}$ et le « diffuseur » $\mathcal{D}(X, Y) \in \mathbb{T}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

EXERCICE. — Chacune des propriétés (i) à (v) de la proposition 3.15 caractérise la connexion produit. De plus, le (iv) peut être ainsi généralisé : une application $\phi : W \rightarrow V_1 \times V_2$ est affine si et seulement si ses deux composantes $p_1 \circ \phi$ et $p_2 \circ \phi$ le sont.

Chapitre 4

FONCTIONS CONVEXES ET COMPORTEMENT DES MARTINGALES

C'est en cherchant des preuves
que j'ai trouvé des difficultés.

D. DIDEROT,
Pensées philosophiques

Les fonctions convexes jouent un rôle central dans l'étude des martingales pour deux raisons. D'une part, l'existence de fonctions à la fois convexes au voisinage d'un point et affines en ce point supplée l'absence de fonctions affines sur une variété non plate, et permet une caractérisation locale des martingales à l'aide des fonctions convexes; d'autre part, le comportement global des martingales (convergence à l'infini, non-confluence, existence quand la valeur finale est donnée) est étroitement lié à l'existence de fonctions convexes ayant certaines propriétés. Malheureusement, il ne sera pas toujours possible de travailler uniquement avec des fonctions convexes de classe C^2 , et nous devons dans le théorème 4.19 nous accommoder de fonctions peu régulières. Afin de faire agir sur les martingales des fonctions convexes non nécessairement C^2 , il nous faudra connaître la structure de ces fonctions; pour éviter de passer trop de temps sur des détails techniques sans grand intérêt pour les probabilistes, nous serons conduits à admettre des propriétés géométriques des fonctions convexes.

1. — Fonctions convexes et convergence à l'infini des martingales

DÉFINITION. Soit V une variété munie d'une connexion. Une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ est *convexe* si, pour toute géodésique γ dans V , $f \circ \gamma$ est une fonction convexe sur l'intervalle où γ est définie.

Cette définition n'exige aucune régularité de la fonction. On peut démontrer que, comme dans \mathbb{R}^d , toute fonction convexe est en fait continue; nous donnerons un énoncé plus précis (mais que nous ne démontrerons pas) en 4.12.

Lorsque V est un ouvert convexe de \mathbb{R}^d muni de la connexion plate, cette définition coïncide avec la définition usuelle des fonctions convexes de plusieurs variables.

PROPOSITION 4.1. — Soient f une fonction C^2 sur V et X une martingale dans V .

a) Pour que f soit convexe, il faut et il suffit que le codiffuseur purement d'ordre deux $\text{Hess } f$ soit positif (voir 1.9).

b) Si tel est le cas, $f \circ X$ est une sous-martingale locale.

c) Plus généralement, que f soit convexe ou non, $\int \mathbb{1}_{\{\text{Hess } f(X) \geq 0\}} d(f \circ X)$ est toujours une sous-martingale locale.

Comme c'est déjà le cas dans \mathbb{R}^d , il est vrai en toute généralité que $f \circ X$ est une sous-martingale locale pour toute martingale X et toute fonction convexe f , que f soit C^2 ou non. C'est pour le démontrer, en 4.13, qu'il nous faudra connaître la structure d'une fonction convexe générale.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.1. — a) Puisque $\text{Hess } f = d^2f - \Gamma^*df$ est purement d'ordre deux, en utilisant 1.9 on a pour toute géodésique γ

$$\begin{aligned} (f \circ \gamma)'' &= \langle d^2f, \ddot{\gamma} \rangle = \langle \text{Hess } f + \Gamma^*df, \ddot{\gamma} \rangle = \langle \text{Hess } f, \ddot{\gamma} \rangle + \langle \Gamma^*df, \ddot{\gamma} \rangle \\ &= (\mathbf{Q} \text{Hess } f)(\dot{\gamma}) + \langle df, \Gamma \ddot{\gamma} \rangle = (\mathbf{Q} \text{Hess } f)(\dot{\gamma}) . \end{aligned}$$

Si $\mathbf{Q} \text{Hess } f$ est positif, on a $(f \circ \gamma)''(t) \geq 0$ pour toute géodésique γ , et f est donc convexe.

Réciproquement, si f est convexe, pour $A \in \text{TV}$, il existe une géodésique γ telle que $\dot{\gamma}(0) = A$, et l'on a $(\mathbf{Q} \text{Hess } f)(A) = (f \circ \gamma)''(0) \geq 0$, ce qui montre que $\mathbf{Q} \text{Hess } f$ est positif.

c) Si f est C^2 et si X est une martingale, la formule d'Itô 3.5 entraîne que la partie à variation finie de la semimartingale réelle $f \circ X$ est $\int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle$. La partie à variation finie de $\int \mathbb{1}_{\{\text{Hess } f(X) \geq 0\}} d(f \circ X)$ est donc $\int \mathbb{1}_{\{\text{Hess } f(X) \geq 0\}} \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle$; c'est un processus croissant en raison de 2.10.(v).

Enfin b) est un cas particulier de c). ■

EXERCICE. — Soient U un ouvert de \mathbb{R}^d , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p , et $V \subset \mathbb{R}^{d+1}$ le graphe de f , muni de sa structure de sous-variété de \mathbb{R}^{d+1} et de la connexion Γ induite par la structure euclidienne habituelle de \mathbb{R}^{d+1} . La projection de V sur U est un difféomorphisme entre V et U et une carte globale de V . Montrer que les symboles de Christoffel de Γ dans cette carte sont

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{1 + \|\nabla f\|^2} D_{ij}f D_k f .$$

Soit $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur la dernière composante : pour $u \in U$, \tilde{f} envoie le point $(u, f(u)) \in V$ sur $f(u) \in \mathbb{R}$. Montrer que la hessienne de \tilde{f} pour Γ est donnée, toujours dans la même carte, par

$$\text{Hess}_{ij} \tilde{f} = \frac{1}{1 + \|\nabla f\|^2} D_{ij}f .$$

En déduire que \tilde{f} est convexe (respectivement définie-convexe; voir ci-dessous) sur V munie de Γ si et seulement si f l'est sur U muni de la connexion plate.

DÉFINITION. — Une fonction f , définie sur une variété munie d'une connexion, sera dite *définie-convexe* si f est de classe C^2 et si le codiffuseur purement d'ordre deux $\text{Hess } f$ est partout défini positif.

Comme l'a montré Kendall [68], la seule existence d'une fonction définie-convexe et bornée sur une variété implique pour les martingales des propriétés de convergence analogues à celles que l'on observe dans les ouverts bornés de \mathbb{R}^d .

PROPOSITION 4.2. — *La variété V étant munie d'une connexion, soient U un ouvert de V et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie-convexe et bornée.*

(i) *Si X est une martingale dans U , $f \circ X$ est une semimartingale jusqu'à l'infini.*

(ii) Si X est une martingale dans V , X est une semimartingale jusqu'à l'infini sur l'événement

$$\{\omega \in \Omega : \text{il existe un compact } K(\omega) \subset U \text{ et un instant } s(\omega) \geq 0 \\ \text{tels que } X_t(\omega) \in K(\omega) \text{ pour tout } t \geq s(\omega)\}.$$

(iii) Toute martingale à valeurs dans U est p.s. convergente dans le compactifié d'Alexandrov $U \cup \{\infty\}$ de U .

(iv) Toute martingale à valeurs dans un compact de U converge p.s.

Ce critère de Kendall est vraiment précis : même si U est relativement compact dans V , on ne peut pas remplacer « dans un compact de U » par « dans U » dans (iv). Si par exemple V est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dans \mathbb{R}^3 , munie de la connexion induite par la structure euclidienne habituelle de \mathbb{R}^3 , et si U est l'hémisphère ouvert formé des points de V tels que $z < 0$, la fonction z est définie-convexe et bornée sur U (ceci résulte de l'exercice qui suit la proposition 4.1). Cependant, il existe des martingales à valeurs dans U et qui ne convergent pas dans V quand $t \rightarrow \infty$. La construction d'une telle martingale est laissée en exercice aux auditeurs. (Indication : chercher une martingale de la forme $(X_t, Y_t, Z_t) = (\cos \Theta_t \cos \Lambda_t, \sin \Theta_t \cos \Lambda_t, \sin \Lambda_t)$, où Θ est un mouvement brownien réel et Λ un processus déterministe.)

On remarquera que le (iv) de la proposition 4.2 reste vrai même lorsque f n'est pas supposée bornée; cela se voit en appliquant le (iv) à la variété W , où W est à la fois un voisinage ouvert du compact considéré, et une partie relativement compacte de V (de sorte que la restriction de f à W est nécessairement bornée).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.2. — (i) Écrivons la formule d'Itô 3.5 : $f \circ X - f \circ X_0 = M + \int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle$, où M est une martingale locale. Le membre de gauche est borné, et la partie à variation finie $\int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle$ est croissante et positive, donc minorée. Par différence, M est majorée, donc p.s. convergente et c'est une semimartingale jusqu'à l'infini. Par différence encore, le processus croissant $\int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle$ est convergent, c'est donc aussi une semimartingale jusqu'à l'infini.

(ii) Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de compacts tels que $\overset{\circ}{K}_n \nearrow U$. Il suffit d'établir que toute martingale X dans V est une semimartingale jusqu'à l'infini sur l'événement $E_n = \{\forall t \geq n \ X_t(\omega) \in K_n\}$; car X sera alors une semimartingale jusqu'à l'infini sur la réunion en n des E_n , or tout compact de U est inclus dans l'un des K_n .

Sur l'événement E_n , la sous-martingale locale $\int \mathbb{1}_{\{X \in K_n\}} d(f \circ X)$ est p.s. bornée, sa partie martingale est donc p.s. majorée, donc convergente, et son compensateur, le processus croissant $\int \mathbb{1}_{\{X \in K_n\}} \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle$, p.s. borné, donc convergent à l'infini.

Soit $g \in C^2(V)$; n est fixé; nous devons montrer que $g \circ X$ est une semimartingale jusqu'à l'infini sur E_n . Puisque les codiffuseurs purement d'ordre deux $\text{Hess } f$ et $\text{Hess } g$ sont continus, et puisque $\text{Hess } f$ est par hypothèse défini positif, il existe une constante c telle que l'on ait $-c \text{Hess } f \leq \text{Hess } g \leq c \text{Hess } f$ sur K_n (inégalités au sens de la positivité des codiffuseurs purement d'ordre deux). Écrivons la formule d'Itô : il existe une martingale locale N telle que $g \circ X - g \circ X_0 = N + \int \langle \text{Hess } g, \mathcal{D}X \rangle$. Sur E_n , la variation totale $\int_n^\infty |\langle \text{Hess } g, \mathcal{D}X \rangle|$ du processus $\int \langle \text{Hess } g, \mathcal{D}X \rangle$ est contrôlée par $c \int_n^\infty \mathbb{1}_{\{X \in K_n\}} \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle$, qui est p.s. fini comme nous venons de le voir; $\int \langle \text{Hess } g, \mathcal{D}X \rangle$ est donc une semimartingale jusqu'à l'infini sur E_n . Toujours sur E_n , le processus $g \circ X$ est p.s. borné, ainsi que la martingale locale N par différence; elle est donc aussi une semimartingale jusqu'à l'infini sur E_n .

(iii) Si X est une martingale dans U , pour montrer que X converge presque sûrement dans $U \cup \{\infty\}$, il suffit de vérifier que $g \circ X$ converge p.s. pour toute fonction $g \in C^2(U)$ à support compact dans U . Sur U , une telle fonction vérifie globalement $-c \text{Hess } f \leq \text{Hess } g \leq c \text{Hess } f$ pour une constante c ; comme ci-dessus, on en déduit que $\int \langle \text{Hess } g, \mathcal{D}X \rangle$ est p.s. convergente. Il ne reste qu'à écrire la formule d'Itô $g \circ X - g \circ X_0 = N + \int \langle \text{Hess } g, \mathcal{D}X \rangle$ et à remarquer que, g étant bornée, la partie martingale N est p.s. bornée, donc p.s. convergente.

(iv) C'est un corollaire de (ii). ■

COROLLAIRE 4.3. — *Dans une variété V munie d'une connexion, tout point a un voisinage ouvert U tel que toute martingale X dans V soit une semimartingale jusqu'à l'infini sur l'événement $\{\exists s(\omega) \forall t \geq s(\omega) X_t(\omega) \in U\}$.*

DÉMONSTRATION. — Pour $x \in V$, soit (v^i) une carte locale de domaine D contenant x et telle que $v^i(x) = 0$ pour tout i . La fonction $f = \sum_i (v^i)^2$ définie sur D est C^2 , et vérifie $\text{Hess}_{ij} f(x) = 2\delta_{ij} > 0$. Il suffit de choisir un voisinage U de x relativement compact dans $U' = D \cap \{\text{Hess } f > 0\} \cap \{f < 1\}$, et d'appliquer 4.2.(ii) à U' . ■

COROLLAIRE 4.4. — *Soit X une martingale dans une variété V munie d'une connexion. Sur l'événement $\{\lim_{t \rightarrow \infty} X_t \text{ existe dans } V\}$, X est une semimartingale jusqu'à l'infini.*

DÉMONSTRATION. — On recouvre V à l'aide d'une famille dénombrable $(U_\iota)_{\iota \in I}$ d'ouverts qui vérifient la propriété du corollaire 4.3. Si X est une martingale dans V , c'est une semimartingale jusqu'à l'infini sur chacun des événements $E_\iota = \{\exists s(\omega) \forall t \geq s(\omega) X_t(\omega) \in U_\iota\}$, donc aussi sur leur union. Or cette union contient $\{\lim_{t \rightarrow \infty} X_t \text{ existe dans } V\}$. ■

Ce résultat a été initialement obtenu par Zheng [107], sans utiliser les fonctions convexes sur la variété. Une autre méthode est proposée par He, Yan et Zheng [57].

COROLLAIRE 4.5. — *Sur une variété V munie d'une connexion, soit θ un champ de codiffuseurs mesurable et localement borné. Si X est une martingale dans V , l'intégrale $\int \langle \theta, \mathcal{D}X \rangle$ est une semimartingale jusqu'à l'infini (et en particulier elle converge) sur l'événement $\{\lim_{t \rightarrow \infty} X_t \text{ existe dans } V\}$.*

DÉMONSTRATION. — Conséquence immédiate de 4.4 et de 2.12. ■

Un cas particulier de ce corollaire, également dû à Zheng [107], utilise le langage qui sera introduit juste avant la proposition 4.14; il s'énonce ainsi : Si une martingale X à valeurs dans une variété riemannienne est p.s. convergente, sa variation quadratique riemannienne totale est p.s. finie.

2. — Caractérisation des martingales par les fonctions convexes

Les martingales locales dans un espace vectoriel sont caractérisées par l'action des formes linéaires ou affines, qui en font des martingales locales réelles. Sur une variété munie d'une connexion, il n'y a en général pas de fonctions affines non constantes, ni même de fonctions convexes non constantes; mais, un point étant donné, il existe beaucoup de fonctions convexes au voisinage de ce point et affines en ce point (c'est un exercice facile de vérifier que $\text{Hess}(h^y)(y) = 0$ dans le lemme ci-dessous). Ceci a été mis à profit par Darling [23] et [24] pour définir les martingales comme les processus localement transformés en sous-martingales par les fonctions convexes, et étudier leurs propriétés à partir de cette définition.

LEMME 4.6. — Soit $f \in C^p(V)$. Pour tout $x \in V$, il existe un ouvert U contenant x et une fonction h sur $U \times U$, continue, bornée et jouissant des propriétés suivantes : Pour tout $y \in U$, la fonction h^y définie sur U par $h^y(z) = h(y, z)$ est convexe et de classe C^2 sur U , et vérifie $h^y(y) = 0$ et $d^2(h^y)(y) = \Gamma df(y)$; en outre, le codiffuseur $d^2(h^y)(z) \in \mathbb{T}_z^*V$ dépend continûment de (y, z) et est à valeurs dans un compact de \mathbb{T}^*V .

DÉMONSTRATION. — Avant de commencer, remarquons que si $\rho :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ est une fonction qui tend vers zéro à l'origine, il existe une fonction concave $g : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$, nulle en 0, C^1 sur $]0, \infty[$, et vérifiant $g \geq \rho$ près de 0; on a en outre pour t non nul et assez proche de 0 l'encadrement $0 \leq tg'(t) \leq g(t)$ qui résulte de la concavité. La fonction $G(t) = \int_0^t g(s) ds$ est C^2 sur $]0, \infty[$ et vérifie $G(0) = G'(0) = 0$, $G'(t) \geq \rho(t)$ et $0 \leq tG''(t) \leq G'(t)$ pour t proche de 0.

Si G est une telle fonction, la fonction de d variables

$$\phi(u_1, \dots, u_d) = G\left(\frac{1}{2}(u_1^2 + \dots + u_d^2)\right)$$

a pour dérivées partielles

$$D_i \phi(u_1, \dots, u_d) = u_i G'(\dots) \quad \text{et} \quad D_{ij} \phi(u_1, \dots, u_d) = u_i u_j G''(\dots) + \delta_{ij} G'(\dots);$$

ces formules montrent que la fonction ϕ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^d , avec des dérivées partielles d'ordre un et deux nulles à l'origine.

Revenons à notre variété. Quitte à se restreindre à un voisinage de x , on peut supposer l'existence d'une carte globale $v = (v^i)_{1 \leq i \leq d}$, dans laquelle $D_k f$ sont les coefficients de df et Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel. Posons

$$u^i(y, z) = v^i(z) - v^i(y); \quad r^2(y, z) = \sum_i (u^i(y, z))^2;$$

$$h(y, z) = D_k f(y) \left[u^k(y, z) + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(y) u^i(y, z) u^j(y, z) \right] + G\left(\frac{1}{2} r^2(y, z)\right),$$

où G est du type ci-dessus, pour une fonction ρ qui sera précisée plus tard. La fonction h est continue sur $U \times U$ et ses sections h^y sont de classe C^2 ; il n'est pas difficile d'expliciter leurs dérivées partielles et leur hessienne :

$$D_i h^y(z) = D_i f(y) + D_k f(y) \Gamma_{ij}^k(y) u^j + u^i G'\left(\frac{1}{2} r^2\right)$$

$$D_{ij} h^y(z) = D_k f(y) \Gamma_{ij}^k(y) + \delta_{ij} G'\left(\frac{1}{2} r^2\right) + u^i u^j G''\left(\frac{1}{2} r^2\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Hess}_{ij} h^y(z) &= D_k f(y) \left[\Gamma_{ij}^k(y) - \Gamma_{ij}^k(z) - \Gamma_{ij}^\ell(z) \Gamma_{\ell m}^k(y) u^m \right] \\ &\quad + \left[\delta_{ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k(z) u^k \right] G'\left(\frac{1}{2} r^2\right) + u^i u^j G''\left(\frac{1}{2} r^2\right) \end{aligned}$$

(j'ai abrégé $u^i(y, z)$ en u^i et $r^2(y, z)$ en r^2). Les deux propriétés $h^y(y) = 0$ et $d^2 h^y(y) = \Gamma^* df(y)$ se lisent facilement sur ces expressions, ainsi que la continuité de $(y, z) \mapsto d^2(h^y)(z)$; la propriété de compacité en résulte, quitte à diminuer un peu U . Il ne reste qu'à établir la convexité de h^y . Les d^2 fonctions de (y, z) $H_{ij}(y, z) = D_k f(y) \left[\Gamma_{ij}^k(y) - \Gamma_{ij}^k(z) - \Gamma_{ij}^\ell(z) \Gamma_{\ell m}^k(y) u^m(y, z) \right]$ qui apparaissent dans la hessienne sont continues et nulles sur la diagonale; quitte à se restreindre à un voisinage relativement compact de x , il existe une fonction ρ , tendant vers zéro à l'origine, telle que $|H_{ij}(y, z)| \leq (2d)^{-1} \rho\left(\frac{1}{2} r^2(y, z)\right)$ (en effet, sur l'ensemble $\{|H_{ij}| \geq \varepsilon\}$, la fonction $\frac{1}{2} r^2$ est minorée par compacité par une quantité $\delta(\varepsilon) > 0$). Choisissons G comme expliqué plus haut, à partir de cette fonction ρ ; on a

$|H_{ij}| \leq (2d)^{-1} G'(\frac{1}{2}r^2)$ pour r assez petit, donc sur tout $U \times U$ en restreignant encore U si nécessaire. De même, on peut supposer que les quantités $|\sum_k \Gamma_{ij}^k(z) u^k|$ sont bornées par $(2d)^{-1}$. En négligeant le terme $u^i u^j G''(\frac{1}{2}r^2)$, qui est de type positif, la matrice hessienne de h^y s'écrit $(\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}) G'(\frac{1}{2}r^2)$, où chaque coefficient ε_{ij} est borné en module par $1/d$. Une telle matrice est de type positif, et c'est terminé. ■

LEMME 4.7. — *Tout point de V a un voisinage ouvert U tel que, pour tout processus X à valeurs dans U , X est une martingale si et seulement si, pour toute fonction f définie au voisinage de \bar{U} , de classe C^2 et convexe, $f \circ X$ est une sous-martingale locale (réelle et continue).*

DÉMONSTRATION. — Soit w une carte définie au voisinage de x . Pour une constante c assez grande, les d fonctions $v^i(y) = w^i(y) + c \sum_j (w^j(y) - w^j(x))^2$ sont convexes au voisinage de x ; comme la matrice jacobienne $\partial v / \partial w$ au point x est l'identité, les v^i forment, sur un voisinage de x , une carte locale faite de fonctions convexes. Sur un voisinage ouvert U' de x , le lemme 4.6 a lieu pour chacune des $2d$ fonctions $f = v^i$ et $f = -v^i$. Choisissons un ouvert U contenant x et relativement compact dans U' .

Soit X un processus à valeurs dans U . Par la proposition 4.1, nous savons déjà que si X est une martingale dans U et g une fonction convexe et C^2 au voisinage de \bar{U} , $g \circ X$ est une sous-martingale locale; il reste à montrer que si toutes les fonctions convexes sur U transforment X en sous-martingale locale, X est une martingale. Remarquons d'abord que puisque nos coordonnées globales v^i sur U sont convexes, chaque $v^i \circ X$ est une sous-martingale locale, donc une semimartingale, et X est une semimartingale. Pour établir que X est bien une martingale, nous allons établir que, si f est l'une quelconque des $2d$ fonctions v^i et $-v^i$, l'intégrale d'Itô $\int \langle df, d_\Gamma X \rangle$ est une sous-martingale locale. En changeant f en $-f$, on en déduira que c'est en fait une martingale locale, et l'on sait par la proposition 3.7 que cela suffit pour que X soit une martingale. La fonction f est donc fixée, ainsi que la fonction h du lemme 4.6.

Rappelons que $h(y, z)$ est bornée, continue en (y, z) , et convexe en z ; chaque processus $h(y, X)$ est une sous-martingale bornée. Pour chaque $s \geq 0$, le processus $t \mapsto h(X_s, X_t)$ est aussi une sous-martingale sur l'intervalle $[s, \infty[$; cela peut se voir en approchant X_s dans U par des variables aléatoires mesurables pour \mathcal{F}_s et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs; l'inégalité des sous-martingales passe à la limite par convergence dominée (tout est borné).

Discretisons l'axe des temps, en posant $t_k = k2^{-q}$ et $\tau(t) = t_k$ pour $t \in]t_k, t_{k+1}]$. Le processus Z_t^q , défini pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$ par

$$Z_t^q = \sum_{\ell < k} h(X_{t_\ell}, X_{t_{\ell+1}}) + h(X_{t_k}, X_t),$$

est une sous-martingale (continue), que l'on peut écrire plus agréablement

$$Z^q = \int \langle d^2(h^{X_{\tau(t)}}, \mathcal{D}X_t) \rangle.$$

Faisons tendre q vers l'infini. Pour t et ω fixés, $\tau(t)$ tend vers t , $X_{\tau(t)}$ vers X_t , et $d^2(h^{X_{\tau(t)}})(X_t)$ vers $d^2(h^{X_t})(X_t)$ (continuité de $d^2(h^y)(z)$). Puisque tous les $d^2(h^y)(z)$ sont dans un même compact de \mathbb{T}^*V , la sous-martingale Z^q tend vers $\int \langle d^2(h^X), \mathcal{D}X \rangle$ au sens des semimartingales grâce au corollaire 2.17; cette limite est donc une sous-martingale locale. Mais puisque $d^2(h^y)(y) = \Gamma^* df(y)$, cette sous-martingale locale n'est autre que $\int \langle \Gamma^* df, \mathcal{D}X \rangle$, c'est à dire l'intégrale d'Itô $\int \langle df, d_\Gamma X \rangle$, et c'est fini. ■

THÉORÈME 4.8. — *La variété V admet un recouvrement dénombrable $(U_\iota)_{\iota \in I}$ formé d'ouverts relativement compacts possédant la propriété suivante : Pour qu'un processus X dans V , continu et adapté soit une martingale, il faut et il suffit que, pour tout rationnel positif s , tout $\iota \in I$, et toute fonction $f \in C^2(V)$, à support compact, convexe au voisinage de \bar{U}_ι , en posant $T(s, \iota) = \inf \{t \geq s : X_t \notin U_\iota\}$, le processus $f \circ X^{T(s, \iota)}$ soit une sous-martingale sur l'intervalle $[s, \infty[$.*

Ce théorème est dû à Darling [23] et [27], qui l'énonce de façon différente, mais équivalente : prenant cette propriété caractéristique comme définition des martingales, il en déduit que les intégrales d'Itô $\int \langle \sigma, d_\Gamma X \rangle$ sont des martingales locales; sa définition des intégrales d'Itô diffère d'ailleurs aussi de la nôtre, puisqu'il les construit comme limites de certaines sommes de Riemann définies à l'aide de cartes exponentielles.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.8. — Choisissons un recouvrement $(U_\iota)_{\iota \in I}$ tel que chaque U_ι ait la propriété du lemme 4.7.

Si X est une martingale, en se restreignant à l'intervalle $[s, \infty[$ et en arrêtant X à $T(s, \iota)$, on obtient une martingale Y (pour la filtration $\mathcal{F}^s = (\mathcal{F}_t)_{t \geq s}$), dont chaque trajectoire est constante ou contenue dans \bar{U}_ι . Pour toute fonction f dans $C^2(V)$ et convexe au voisinage de \bar{U}_ι , le processus $(f \circ Y_t)_{t \geq s}$ est donc une sous-martingale.

Réciproquement, soit X continu, adapté, et vérifiant la condition de l'énoncé. Les intervalles stochastiques $]s, T(s, \iota)[$ et $]0, T(0, \iota)[$ forment un recouvrement dénombrable de $]0, \infty[$; on les ordonne en une suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on appelle S_n le début de $(J_0 \cup \dots \cup J_n)^c$. Le lemme 4.7 et le choix des U_ι entraînent que chaque X^{S_n} est une semimartingale; comme le recouvrement est ouvert, les S_n croissent vers l'infini et X est aussi une semimartingale. Soient σ un champ de covecteurs et M l'intégrale d'Itô $\int \langle \sigma, d_\Gamma X \rangle$. Chaque intégrale $\int \mathbb{1}_{]s, T(s, \iota)[} dM$ étant une martingale locale, c'est aussi vrai de M ; ainsi, X est une martingale. ■

Le théorème 4.8, caractérisation des martingales, a un analogue pour les suites de processus : il s'agit d'un théorème d'Arnaudon et Thalmaier [11] qui montrent que, comme pour les processus scalaires, les topologies de la convergence compacte en probabilité et des semimartingales coïncident sur l'ensemble des martingales dans une variété. Nous allons voir cela tout de suite, juste après deux petits lemmes préparatoires.

LEMME 4.9. — *Soient K un compact de V et U un voisinage de K . Si une suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de processus continus adaptés dans V converge uniformément sur les compacts en probabilité vers une limite Y , les temps d'arrêt*

$$T'_n = \inf \{t : Y_t \notin U \text{ et } X_t^n \in K\} \quad \text{et} \quad T''_n = \inf \{t : X_t^n \notin U \text{ et } Y_t \in K\}$$

tendent vers l'infini en probabilité.

DÉMONSTRATION. — Par plongement de V dans \mathbb{R}^n (ou à l'aide d'une structure riemannienne), on définit une distance dist sur V , compatible avec la topologie de V , et telle que, pour chaque t , la suite des variables aléatoires $S_t^n = \sup_{s \leq t} \text{dist}(X_s^n, Y_s)$ tende vers 0 en probabilité quand n tend vers l'infini.

Puisque K est compact, la distance $\text{dist}(K, U^c)$ n'est pas nulle; appelons-la a . Si $Y_s \notin U$ et $X_s^n \in K$, on a $\text{dist}(X_s^n, Y_s) \geq a$; d'où

$$\{T'_n \leq t\} \subset \{\exists s \leq t \text{ dist}(X_s^n, Y_s) \geq a\} \subset \{S_t^n \geq a\},$$

et $\mathbb{P}[T'_n \leq t] \rightarrow 0$ pour chaque t .

L'argument pour T''_n est exactement le même. ■

LEMME 4.10. *Tout point de V a un voisinage ouvert U jouissant de la propriété suivante : Si une suite de martingales à valeurs dans U converge, dans U , uniformément sur tout compact en probabilité, vers une martingale, la convergence a lieu pour la topologie des semimartingales.*

DÉMONSTRATION. — Soit $(v^k)_{1 \leq k \leq d}$ une carte au voisinage de x , telle que $v^k(x) = 0$ pour tout k .

La fonction $u = \sum_k (v^k)^2$, qui est définie dans le domaine de la carte, vérifie $\text{Hess}_{ij} u(x) = 2\delta_{ij}$; comme $\text{Hess} u$ est continue, la matrice $\text{Hess}_{ij} u(y) - \delta_{ij}$ est positive pour y assez voisin de x . Choisissons un ouvert U relativement compact dans le domaine de la carte, et tel que $\text{Hess}_{ij} u(y) - \delta_{ij}$ soit positive sur U ; les coordonnées $v^k(y)$ et les symboles de Christoffel $\Gamma_{ij}^k(y)$ sont des fonctions bornées sur U , par une constante c . (Nous rencontrerons d'autres constantes ne dépendant que de la carte; nous les noterons toutes indistinctement c , par abus de langage.) La fonction u est convexe sur U , et, pour toute semimartingale X dans U , de coordonnées $X^k = v^k \circ X$, on a $\frac{1}{2} \sum_k [X^k, X^k] \leq \int \langle \text{Hess} u, \mathcal{D}X \rangle$.

Si X est une martingale dans U , on a d'après 3.7

$$dX^k = dL^k - \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(X) d[L^i, L^j] = dL^k + dA^k,$$

où les L^k sont d martingales locales et les A^k sont d processus à variation finie. Le processus $u \circ X$ est une sous-martingale positive bornée; sa partie à variation finie $\int \langle \text{Hess} u, \mathcal{D}X \rangle$ est minorée par $\frac{1}{2} \sum_k [X^k, X^k] = \frac{1}{2} \sum_k [L^k, L^k]$. En conséquence, $\mathbb{E}[u \circ X_t] \geq \frac{1}{2} \sum_k \mathbb{E}[[L^k, L^k]_t]$, et il existe donc une constante c (la même pour toutes les martingales X) telle que $\mathbb{E}[[L^k, L^k]_\infty] \leq c$. Remarquant ensuite que $dA^k = -\frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(X) d[L^i, L^j]$ où les Γ_{ij}^k sont bornés, on en tire $\mathbb{E}[\int_0^\infty |dA^k|] \leq c$.

Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de martingales dans U qui converge u.c.p. dans U vers une martingale Y ; nous allons établir que les X^n tendent vers Y au sens des semimartingales. Ce qui précède s'applique aux décompositions canoniques

$$dX^{n,k} = dL^{n,k} + dA^{n,k} \quad \text{et} \quad dY^k = dM^k + dB^k$$

des coordonnées de X^n et Y . Fixons l'indice k et définissons des semimartingales réelles Z^n par $Z^n = X^{n,k} - Y^k$. Par différence, leurs décompositions canoniques $dZ^n = dN^n + dC^n$ vérifient aussi $\mathbb{E}[[N^n, N^n]_\infty] \leq c$ et $\mathbb{E}[\int_0^\infty |dC^n|] \leq c$; ces estimations sont uniformes en n . Faisons maintenant tendre n vers l'infini dans la formule

$$(Z_t^n)^2 = (Z_0^n)^2 + 2 \int_0^t Z_s^n dN_s^n + 2 \int_0^t Z_s^n dC_s^n + [N^n, N^n]_t.$$

Les Z^n sont bornés et, par hypothèse, tendent vers zéro uniformément sur tout compact en probabilité. Les deux intégrales par rapport à N^n et C^n aussi, parce que la variation quadratique de $\int Z^n dN^n$ vaut $\int (Z^n)^2 d[N^n, N^n]$ et la variation totale de $\int Z^n dC^n$ vaut $\int |Z^n| |dC^n|$. Par différence, $[N^n, N^n]$ tend vers zéro u.c.p., et les martingales $L^{n,k}$ tendent donc vers M^k en topologie des semimartingales. Ceci ayant lieu pour chaque k , on en déduit que $A^{n,k} = \int -\frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(X^n) d[L^{n,i}, L^{n,j}]$ tend vers $B^k = \int -\frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(Y) d[M^i, M^j]$ en variation totale, et que $X^{n,k}$ tend vers Y^k au sens des semimartingales. ■

THÉORÈME 4.11. — *Si une suite de martingales dans V converge uniformément sur tout compact en probabilité, sa limite est une martingale et la convergence a lieu au sens des semimartingales.*

DÉMONSTRATION. — Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de martingales dans V , qui converge vers une limite Y uniformément sur les compacts en probabilité. Pour établir que Y est une martingale, nous allons utiliser le critère de Darling 4.8. Nous fixons donc un s , un U_ι et une fonction C^2 , convexe sur un voisinage ouvert U'' de \bar{U}_ι ; en posant $T(s, \iota) = \inf \{t \geq s : Y_t \notin U_\iota\}$, nous devons vérifier que $f \circ Y^{T(s, \iota)}$ est une sous-martingale sur $[s, \infty[$. Par arrêt à $T(s, \iota)$ et restriction à $[s, \infty[$, on se ramène au cas où les trajectoires de Y sont toutes dans \bar{U}_ι ou constantes; en conditionnant par l'événement $\{T(s, \iota) > s\}$ qui est dans \mathcal{F}_s , on peut supposer Y à valeurs dans \bar{U}_ι .

Soit U' un ouvert tel que $\bar{U}_\iota \subset U' \subset \bar{U}' \subset U''$. La suite des temps d'arrêt $T''_n = \inf \{t : Y_t \in \bar{U}_\iota \text{ et } X_t^n \notin U'\}$ tend vers l'infini en probabilité d'après 4.9; par extraction d'une sous-suite, on peut supposer que la convergence a lieu presque sûrement, et les temps $R_m = \inf_{n \geq m} T''_n$ tendent donc aussi vers l'infini. Par arrêt à R_m , on est ramené au cas où tous les X^n sont à valeurs dans \bar{U}' . Par 4.8, les $f \circ X^n$ sont pour $n \geq m$ des sous-martingales locales, uniformément bornées; la propriété de sous-martingale passe à la limite, et $f \circ Y$ est une sous-martingale.

Sachant maintenant que Y est une martingale, nous allons prouver que $f \circ X^n$ tend vers $f \circ Y$ au sens des semimartingales pour toute f de classe C^2 et à support compact; la proposition 2.15 montrera alors que X^n tend vers Y en topologie des semimartingales. En écrivant f comme une somme finie, on se ramène au cas où le support K de f est non vide et inclus dans un ouvert U ayant la propriété du lemme 4.10.

Il existe des compacts K_1, K_2 et K_3 tels que

$$K \subset \overset{\circ}{K}_1 \subset K_1 \subset \overset{\circ}{K}_2 \subset K_2 \subset \overset{\circ}{K}_3 \subset K_3 \subset U ;$$

en posant pour s rationnel $T_s = \inf \{t \geq s : Y_t \notin \overset{\circ}{K}_2\}$, on obtient un recouvrement dénombrable de $\llbracket 0, \infty \llbracket$ par les ouverts prévisibles $\llbracket s, T_s \llbracket$, $\llbracket 0, T_0 \llbracket$ et $\{Y \notin K_1\}$. La proposition 2.4.(ii) dit qu'il suffit d'établir séparément les convergences

$$\int \mathbb{1}_{\{Y \notin K_1\}} d(f \circ X^n) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \int \mathbb{1}_{\llbracket s, T_s \llbracket} d(f \circ X^n) \rightarrow \int \mathbb{1}_{\llbracket s, T_s \llbracket} d(f \circ Y)$$

au sens des semimartingales. Pour la première, il suffit de remarquer que les temps d'arrêt $S_n = \inf \{t : \int \mathbb{1}_{\{Y \notin K_1\}} d(f \circ X^n) \neq 0\}$ sont respectivement minorés par $T'_n = \inf \{t : Y_t \notin K_1 \text{ et } X_t^n \in K\}$, qui tendent vers l'infini en probabilité d'après 4.9. Pour la deuxième, s étant fixé, pour établir que $Z^n = \int \mathbb{1}_{\llbracket s, T_s \llbracket} d(f \circ X^n)$ tend vers $Z = \int \mathbb{1}_{\llbracket s, T_s \llbracket} d(f \circ Y)$, on se ramène par arrêt à T_s et conditionnement par un événement de \mathcal{F}_s au cas où Y est à valeurs dans K_2 . On observe, toujours par 4.9, que les temps d'arrêt $T''_n = \inf \{t : X_t^n \notin K_3\} = \inf \{t : X_t^n \notin K_3 \text{ et } Y_t \in K_2\}$ tendent vers l'infini en probabilité. Il suffira donc de montrer que $(Z^n)^{T''_n}$ tend au sens des semimartingales vers Z ; en effet, l'erreur commise est une semimartingale nulle sur $\llbracket 0, T''_n \llbracket$, donc tendant vers zéro pour la topologie des semimartingales. Mais l'intégrale $(Z^n)^{T''_n}$ ne fait intervenir que le processus arrêté $(X^n)^{T''_n}$, qui est à valeurs dans K_3 donc dans U ; on est finalement ainsi ramené au cas où tous les X^n et X sont dans U , et il ne reste plus qu'à laisser le lemme 4.10 faire le travail. ■

3. — Détermination des martingales par leurs valeurs finales

Une propriété fort importante des martingales réelles est la possibilité, pour $s \leq t$, d'exprimer X_s à partir de X_t (comme une espérance conditionnelle). Pour étendre cette propriété aux variétés, nous devons limiter la taille de la variété (déjà, dans le cas réel, cette propriété est fautive pour les martingales locales non bornées) et imposer des contraintes de nature géométrique à la variété, c'est-à-dire en fait à la connexion. Le résultat principal de cette section est le théorème 4.19, emprunté à Kendall [66], [68] et [69]. Pour y parvenir, nous aurons besoin de nous appuyer sur l'action des fonctions convexes sur les martingales, et sur un critère de tension pour les suites de martingales. Nous commencerons donc par ces résultats auxiliaires.

PROPOSITION 4.12. — *Soit f une fonction convexe sur une variété V de classe C^3 au moins.*

Elle est continue; plus précisément, lue dans une carte locale, elle devient localement lipschitzienne.

Pour $x \in V$ et $u \in T_x V$, notons $\delta f_x(u)$ la dérivée à droite en 0 de la fonction convexe d'une variable $t \mapsto f \circ \exp_x(tu)$ définie au voisinage de l'origine. La fonction δf_x est positivement homogène et convexe sur l'espace vectoriel $T_x V$, et l'on a $f(\exp_x(u)) \geq f(x) + \delta f_x(u)$ pour tout u dans le domaine de définition de \exp_x .

Nous admettrons cet énoncé de régularité des fonctions convexes; on peut le trouver dans [48], sous l'hypothèse que la variété est C^∞ . La démonstration proposée dans [48] s'étend au cas C^3 en utilisant la proposition 3.3. Elle consiste essentiellement à vérifier que le réseau des géodésiques est structuré de façon à permettre, comme dans le cas vectoriel, d'exploiter l'hypothèse de convexité sur chaque géodésique.

PROPOSITION 4.13. — *Soient V une variété de classe C^3 au moins, f une fonction convexe sur V et X une martingale dans V . Le processus réel $f \circ X$ est une sous-martingale locale — et donc en particulier une semimartingale.*

DÉMONSTRATION. — En considérant le supremum essentiel de l'ensemble des temps d'arrêt tels que $f \circ X$ arrêté soit une sous-martingale locale, on se ramène à établir que V peut être recouverte par une famille dénombrable d'ouverts U tels que, pour toute martingale Y à valeurs dans U , le processus $f \circ Y$ soit une sous-martingale. Ceci permet de supposer que V est une boule de \mathbb{R}^d , que f est globalement h -lipschitzienne, pour une constante h , et, en prenant $U \times U$ inclus dans l'ensemble D de la proposition 3.3, que tout point de la variété est le centre d'une carte normale globale.

Pour tout $x \in V$, les vecteurs $D_i \in T_x V$ forment une base de $T_x V$; pour $y \in V$, le vecteur $\exp_x^{-1}(y) \in T_x V$ s'écrit donc sous la forme $\exp_x^{-1}(y) = e^i(x, y) D_i$, pour des fonctions e^i de classe C^{p-2} sur $V \times V$ (voir 3.3; p est bien sûr l'ordre de différentiabilité de V). Nous noterons $e_j^i(x, y)$ les dérivées partielles $\frac{\partial e^i}{\partial y^j}(x, y)$, où y^j sont les coordonnées au sens usuel de y (c'est-à-dire dans \mathbb{R}^d , et non dans la carte normale $e^i(x, \cdot)$). Appelons $\Gamma_{ij}^k(x, y)$ les symboles de Christoffel de la connexion Γ dans la carte normale $e^i(x, \cdot)$; on a $\Gamma(x, x) = 0$ par 3.2. Quitte à restreindre V encore un peu, on peut supposer les fonctions $\Gamma_{ij}^k(x, y)$ uniformément continues et les fonctions $e_j^i(x, y)$ bornées (par une constante c) sur $V \times V$.

Pour $u \in T_x V$, assez voisin de 0_x pour que son exponentielle existe, $\delta f_x(u)$ est la limite pour t tendant vers zéro de $(f(\exp_x(tu)) - f(x))/t$; comme f est h -lipschitzienne, $|\delta f_x(u)|$ est majoré par la limite supérieure de $(h/t) \|\exp_x(tu) - x\|$, où la norme et la différence sont dans \mathbb{R}^d . Mais le vecteur $(\exp_x(tu) - x)/t$ tend dans \mathbb{R}^d vers le vecteur de composantes $e^i(x, \exp_x(u))$, ce qui donne l'estimation $|\delta f_x(u)| \leq h \|u\|_x$, où $\|\cdot\|_x$ est la norme euclidienne sur $T_x V$ pour laquelle la base (D_i) est orthonormée.

Soit X une martingale dans V pour la connexion Γ . Pour montrer que $f \circ X$ est une sous-martingale locale, on peut par arrêt supposer que le processus croissant $C_t = \sum_{ij} \int_0^t |d[X^i, X^j]_s|$ est borné.

La proposition 3.7 permet d'écrire

$$\begin{aligned} e^k(x, X_t) &= e^k(x, X_s) + N_t - N_s - \frac{1}{2} \int_s^t \Gamma_{ij}^k(x, X_u) d[e^i(x, X_u), e^j(x, X_u)] \\ &= e^k(x, X_s) + N_t - N_s - \frac{1}{2} \int_s^t \Gamma_{ij}^k(x, X_u) e_\ell^i(x, X_u) e_m^j(x, X_u) d[X^\ell, X^m]_u \end{aligned}$$

où N est une martingale locale dépendant de x et k ; comme tous les autres termes sont bornés, N aussi, et c'est donc une martingale bornée. Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, on obtient, en remplaçant x par X_S (qui est mesurable pour \mathcal{F}_S)

$$\mathbb{E}[e^k(X_S, X_T) | \mathcal{F}_S] = -\frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_S^T (\Gamma_{ij}^k e_\ell^i e_m^j)(X_S, X_t) d[X^\ell, X^m]_t \mid \mathcal{F}_S \right];$$

cette formule va bientôt nous servir.

Pour montrer que $f \circ X$ est une sous-martingale, il suffit de vérifier que, si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, on a $\mathbb{E}[f(X_T)] \geq \mathbb{E}[f(X_S)]$. Pour $\varepsilon > 0$, définissons une suite croissante de temps d'arrêt entre S et T par

$$R_0 = S; \quad R_{n+1} = T \wedge \inf \{t \geq R_n : \sum_{ijk} |\Gamma_{ij}^k(X_{R_n}, X_t)| \geq \varepsilon\}.$$

Comme les fonctions Γ_{ij}^k sont nulles sur la diagonale et uniformément continues, les temps R_n croissent vers T , et, f étant bornée (parce que globalement lipschitzienne), la proposition 4.12 donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_T) - f(X_S)] &= \sum_n \mathbb{E}[f(X_{R_{n+1}}) - f(X_{R_n})] \\ &\geq \sum_n \mathbb{E}[\delta f_{X_{R_n}}(\exp_{X_{R_n}}^{-1}(X_{R_{n+1}}))] \\ &= \sum_n \mathbb{E}[\mathbb{E}[\delta f_{X_{R_n}}(\exp_{X_{R_n}}^{-1}(X_{R_{n+1}})) | \mathcal{F}_{R_n}]] \\ &\geq \sum_n \mathbb{E}[\delta f_{X_{R_n}}(\mathbb{E}[\exp_{X_{R_n}}^{-1}(X_{R_{n+1}}) | \mathcal{F}_{R_n}])] \end{aligned}$$

(la première minoration vient de $\delta f_x \leq f \circ \exp_x - f(x)$ et la seconde de la convexité de δf_x sur l'espace tangent $T_x V$). En utilisant l'estimation $|\delta f_x(u)| \leq h \|u\|_x$, on continue par

$$\mathbb{E}[f(X_T) - f(X_S)] \geq -h \sum_n \mathbb{E}[\|\mathbb{E}[\exp_{X_{R_n}}^{-1}(X_{R_{n+1}}) | \mathcal{F}_{R_n}]\|_{X_{R_n}}].$$

Dans la base (D_i) au point X_{R_n} , les coordonnées du vecteur $\exp_{X_{R_n}}^{-1}(X_{R_{n+1}})$ sont $e^i(X_{R_n}, X_{R_{n+1}})$; en conséquence les coordonnées de son espérance conditionnelle sont $\mathbb{E}[e^i(X_{R_n}, X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]$. Notre minoration devient

$$\mathbb{E}[f(X_T) - f(X_S)] \geq -h \sum_n \mathbb{E} \left[\sum_k |\mathbb{E}[e^k(X_{R_n}, X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]| \right].$$

C'est le moment d'utiliser la formule vue plus haut, pour écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^k(X_{R_n}, X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}] &= -\frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_{R_n}^{R_{n+1}} (\Gamma_{ij}^k e_\ell^i e_m^j)(X_{R_n}, X_{R_{n+1}}) d[X^\ell, X^m]_t \middle| \mathcal{F}_{R_n} \right]; \\ |\mathbb{E}[e^k(X_{R_n}, X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]| &\leq \frac{1}{2} d^2 \varepsilon c^2 \mathbb{E}[C_{R_{n+1}} - C_{R_n} | \mathcal{F}_{R_n}]. \end{aligned}$$

En sommant en k et en prenant l'espérance, on en déduit

$$\mathbb{E} \left[\sum_k |\mathbb{E}[e^k(X_{R_n}, X_{R_{n+1}})|\mathcal{F}_{R_n}]| \right] \leq \frac{1}{2} d^3 \varepsilon c^2 \mathbb{E}[C_{R_{n+1}} - C_{R_n}],$$

puis, en sommant maintenant en n ,

$$\mathbb{E}[f(X_T) - f(X_S)] \geq -\frac{1}{2} h d^3 \varepsilon c^2 \mathbb{E}[C_T - C_S].$$

Puisque ε est arbitraire, on a $\mathbb{E}[f(X_T) - f(X_S)] \geq 0$, et c'est fini. \blacksquare

Nous venons de voir que les fonctions convexes transforment les martingales dans V en sous-martingales locales. Il est vrai également, mais nous n'en parlerons pas ici, qu'elles transforment toutes les semimartingales dans V en semimartingales réelles (voir [48]).

Outre l'action des fonctions convexes, il nous faudra un autre outil pour pouvoir lire les travaux de Kendall. Il s'agit d'un critère de tension pour des suites de martingales dans une variété riemannienne. Mais auparavant, quelques notions sur les martingales dans une variété riemannienne nous seront utiles.

Rappelons qu'une structure riemannienne sur une variété V est la donnée d'un champ g de codiffuseurs purement d'ordre deux, définis positifs, de classe C^{p-1} . Nous ne postulons aucune relation entre g et la connexion Γ sur V .¹ Il existe toujours des structures riemanniennes sur une variété donnée; lorsque la variété admet une carte globale $(v^i)_{1 \leq i \leq d}$, on peut par exemple poser $g = \delta_{ij} dv^i \cdot dv^j$; dans le cas général, on peut plonger V dans une variété ayant une carte globale (et donc une structure riemannienne h) et poser $g = \phi^* h$, où ϕ désigne le plongement. On peut généraliser aux variétés riemanniennes la variation quadratique euclidienne des semimartingales dans \mathbb{R}^d :

DÉFINITION. Si X est une semimartingale dans une variété riemannienne (V, g) , on appelle *variation quadratique riemannienne* le processus croissant $2 \int \langle g, \mathcal{D}X \rangle$.

Si V est muni d'une carte globale $(v^i)_{1 \leq i \leq d}$, dans laquelle g s'écrit $g_{ij} dv^i \cdot dv^j$, la variation quadratique riemannienne de X vaut $\int g_{ij} \circ X d[v^i \circ X, v^j \circ X]$. En particulier, lorsque V est un espace vectoriel euclidien (par exemple \mathbb{R}), la variation quadratique riemannienne de X coïncide avec sa variation quadratique euclidienne. (C'est à cela que sert le coefficient 2 dans la définition.)

1. En géométrie riemannienne, l'objet fondamental est g , et on montre comment construire une connexion à partir de g ; ici, la connexion est donnée, et nous utiliserons une structure riemannienne à titre d'outil technique auxiliaire, comme on utilise une distance sur un espace topologique métrisable.

PROPOSITION 4.14. — *La variété V étant munie d'une connexion Γ et d'une structure riemannienne g , soient X une martingale dans V (pour Γ) et A sa variation quadratique riemannienne.*

(i) *Si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$, le processus X est constant sur l'intervalle $\llbracket S, T \rrbracket$ si et seulement le processus A l'est aussi.*

(ii) *Sur l'événement $\{A_\infty < \infty\}$, le processus X converge, dans le compactifié d'Alexandrov $V \cup \{\infty\}$, vers une limite X_∞ .*

(iii) *Définissons des temps d'arrêt par $T_t = \inf \{s : A_s > t\} \leq \infty$, une nouvelle filtration \mathcal{G} par $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{T_t}$, et un processus Y par $Y_t = X_{T_t}$ (on pose $Y_t = X_\infty$ sur $\{t \geq A_\infty\}$). La variable aléatoire $A_\infty \leq \infty$ est un temps d'arrêt de \mathcal{G} , et, sur l'intervalle $\llbracket 0, A_\infty \llbracket$, le processus Y est pour \mathcal{G} une martingale dans V . Si θ est un champ mesurable, localement borné, de codiffuseurs sur V , on a l'égalité $\int_0^t \langle \theta, \mathcal{D}Y_s \rangle = \int_0^{T_t} \langle \theta, \mathcal{D}X_s \rangle$ sur $\llbracket 0, A_\infty \llbracket$; en particulier, la variation quadratique riemannienne de Y est la restriction à $\llbracket 0, A_\infty \llbracket$ du processus t .*

(iv) *Si de plus X est à valeurs dans un compact de V , Y est une martingale dans V sur tout l'intervalle $\llbracket 0, \infty \llbracket$, l'intégrale $\int_0^t \langle \theta, \mathcal{D}Y_s \rangle$, définie sur tout cet intervalle, est constante sur $\llbracket A_\infty, \infty \llbracket$, et la variation quadratique riemannienne de Y est le processus $t \mapsto t \wedge A_\infty$.*

Dû à Darling [26], le (ii) est, historiquement, le premier théorème de convergence des martingales dans les variétés.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.14. — (i) Si une semimartingale X dans V est constante sur $\llbracket S, T \rrbracket$, on a $\int \langle \theta, \mathcal{D}X \rangle = \int \langle \mathbb{1}_{\llbracket S, T \rrbracket} \theta, \mathcal{D}X \rangle$ parce que le second membre satisfait les propriétés 2.10.(i) et 2.10.(ii) qui caractérisent le premier membre; en particulier, $\int \langle g, \mathcal{D}X \rangle$ est constante sur $\llbracket S, T \rrbracket$.

Réciproquement, si une martingale X est constante sur $\llbracket S, T \rrbracket$, soit f une fonction C^p à support compact. Par continuité et compacité, il existe une constante c telle que l'on ait $-cg \leq \text{Hess } f \leq cg$ et $-cg \leq df \cdot df \leq cg$ sur tout le support de f , donc partout; les deux intégrales $\int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle$ et $\int \langle df \cdot df, \mathcal{D}X \rangle$ ont donc une variation totale nulle sur $\llbracket S, T \rrbracket$, et sont constantes sur cet intervalle. Les formules 3.5 et 3.4 permettent d'écrire $f \circ X = f \circ X_0 + M + \int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle$ où M est une martingale locale telle que $\frac{1}{2} [M, M] = \int \langle df \cdot df, \mathcal{D}X \rangle$, donc constante sur $\llbracket S, T \rrbracket$; finalement, $f \circ X$ est constante sur cet intervalle, et X aussi.

(ii) Si f est une fonction C^p à support compact, le même argument que ci-dessus montre que $f \circ X = f \circ X_0 + M + B$, où $[M, M]_\infty + \int_0^\infty |dB| \leq c A_\infty$. Sur $\{A_\infty < \infty\}$, la limite $(f \circ X)_\infty$ existe, et, f étant arbitraire, X_∞ existe dans $V \cup \{\infty\}$.

(iii) Les temps d'arrêt $T_t = \inf \{s : A_s > t\}$ sont croissants et continus à droite en t , donc \mathcal{G} est une filtration. Posons $S_t = \inf \{s : A_s \geq t\}$; on a $S_t \leq T_t$ et A est constant sur $\llbracket S_t, T_t \rrbracket$. Le processus Y est lui aussi continu à droite, et a pour limites à gauche $Y_{t-} = X_{S_t}$; il est continu d'après (i). Pour $f \in C^p$, le processus $f \circ Y$ est pour \mathcal{G} une semimartingale continue, et Y est une semimartingale dans V . L'égalité $\int_0^t \langle \theta, \mathcal{D}Y_s \rangle = \int_0^{T_t} \langle \theta, \mathcal{D}X_s \rangle$ résulte de ce que le membre de droite vérifie les propriétés 2.10.(i) et 2.10.(ii) qui caractérisent celui de gauche. En particulier, pour $\theta = \Gamma^* \sigma$, on voit que les intégrales d'Itô par rapport à Y proviennent par changement de temps de celles par rapport à X , et Y est une martingale.

(iv) C'est une conséquence du (iii), en remarquant que, sur $\{A_\infty < \infty\}$, X_∞ existe dans V d'après (ii), et X est une semimartingale jusqu'à l'infini d'après 4.4. ■

Comme c'est déjà le cas pour les martingales locales dans \mathbb{R}^d , si X est une martingale dans V pour une certaine filtration, c'est aussi une martingale pour sa filtration naturelle; cela se vérifie immédiatement sur la définition. En conséquence, sur l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+, V)$, muni comme d'habitude de la filtration engendrée par les coordonnées, le processus canonique est une martingale dans V pour la loi $\mathbb{R}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ de X . (Rappelons que $C(\mathbb{R}_+, V)$ est un espace polonais, dont la topologie est celle de la convergence uniforme sur les compacts de \mathbb{R}_+ .) Le critère de tension ci-dessous, que je recopie de Kendall [68], étend aux variétés des résultats bien connus dans le cas vectoriel (voir par exemple Rebolledo [91]).

PROPOSITION 4.15. — *Soit K un compact d'une variété V munie d'une connexion et d'une structure riemannienne g . Considérons toutes les martingales X dans V , à valeurs dans K , et dont la variation quadratique riemannienne vérifie*

$$2 \int_s^t \langle g, \mathcal{D}X \rangle \leq t - s \quad \text{pour tous } s \text{ et } t \text{ tels que } s \leq t.$$

L'ensemble des lois de ces martingales est tendu sur l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+, V)$.

DÉMONSTRATION. — On commence par plonger V dans un espace euclidien \mathbb{R}^n . [Le théorème de Whitney n'est pas ici nécessaire : il suffit de plonger un voisinage U de K ; or on peut recouvrir U par un nombre fini q d'ouverts, chacun relativement compact dans le domaine d'une carte, et il est dès lors facile de plonger U dans \mathbb{R}^{qd} .] Appelons $i : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ un tel plongement. Appelons « bonne martingale » toute martingale X dans V , à valeurs dans K , et de variation quadratique riemannienne $2\langle g, \mathcal{D}X_t \rangle$ majorée par dt . Pour vérifier que l'ensemble des lois des bonnes martingales X est tendu sur $C(\mathbb{R}_+, V)$, il suffit de vérifier que l'ensemble des lois des $i \circ X$ est tendu sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$. À cet effet, nous allons appliquer le critère 1.4.6 de Stroock et Varadhan [103]. Selon ce critère, il suffit d'établir que pour toute f de classe C^∞ et à support compact sur \mathbb{R}^n , il existe une constante C telle que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, le processus $f(u + (i \circ X)) + Ct$ soit une sous-martingale.

Appelons v^k les n coordonnées usuelles sur \mathbb{R}^n ; par compacité et continuité, il existe une constante c telle que, sur K , on ait $d(v^k \circ i) \cdot d(v^k \circ i) \leq cg$ et $-cg \leq \text{Hess}(v^k \circ i) \leq cg$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Pour toute bonne martingale X , la décomposition canonique $v^k \circ i(X_0) + M^k + B^k$ de $v^k \circ i(X)$ vérifie

$$\frac{1}{2} [M^k, M^k] = \int \langle d(v^k \circ i) \cdot d(v^k \circ i), \mathcal{D}X \rangle \quad \text{et} \quad B^k = \int \langle \text{Hess}(v^k \circ i), \mathcal{D}X \rangle,$$

donc aussi $d[M^k, M^k] \leq c dt$ et $|dB^k| \leq c dt$. Soit f de classe C^∞ et à support compact dans \mathbb{R}^n . Il existe un nombre $\alpha < \infty$ tel que l'on ait $|D_k f(y)| \leq \alpha$ et $|D_{ij} f(y)| \leq \alpha$ pour tous i, j et k et pour tout y dans \mathbb{R}^n . Si X est une bonne martingale, la semimartingale

$$\begin{aligned} f(u + iX) &= f(u + iX_0) + \int D_k f(u + iX) dM^k \\ &\quad + \int D_k f(u + iX) dB^k + \frac{1}{2} \int D_{ij} f(u + iX) d[M^i, M^j] \end{aligned}$$

a pour partie à variation finie $R = \int D_k f(u + iX) dB^k + \frac{1}{2} \int D_{ij} f(u + iX) d[M^i, M^j]$, qui vérifie $|dR| \leq n\alpha c dt + \frac{1}{2} n^2 \alpha c dt$. Il suffit donc de poser $C = (n + \frac{1}{2} n^2) \alpha c$ pour que $f(u + iX) + Ct$ soit une sous-martingale locale, donc aussi une sous-martingale (elle est bornée sur tout intervalle $[0, t]$). ■

Ce critère permettra de construire des processus comme limites en loi de suites de martingales; son utilité vient du fait que de telles limites sont nécessairement des martingales, comme l'affirme la proposition ci-dessous, également empruntée à Kendall [68].

PROPOSITION 4.16. — *Sur l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+, V)$, l'ensemble des probabilités qui font du processus canonique une martingale dans V est fermé pour la convergence vague.*

En d'autres termes, si une suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de martingales dans V (définies chacune sur son propre espace probabilisé filtré) converge en loi vers une limite X , alors X est elle-même une martingale pour sa filtration naturelle. La convergence en loi est la convergence vague des lois des X^n , l'espace canonique étant muni de sa structure polonaise.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.16. — Nous utiliserons une distance dist sur V obtenue par plongement propre de V dans un espace euclidien (ou donnée par une structure riemannienne; toutes ces distances sont uniformément équivalentes sur les compacts de V).

Soit $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de martingales dans V qui converge en loi vers une limite X ; par un argument classique (théorème de Skorokhod, voir par exemple Dudley [37]), on peut supposer que tous les X^n sont définis sur le même espace probabilisé (mais dont la filtration varie avec n) et que $\sup_{s \leq t} \text{dist}(X_s^n, X_s)$ tend vers zéro p.s. pour chaque t .

Pour montrer que X est une martingale (dans sa filtration naturelle), nous allons appliquer la caractérisation de Darling 4.8; nous avons donc un ouvert relativement compact $U \subset V$, une fonction C^2 et à support compact, convexe au voisinage de \bar{U} , et un instant s ; nous posons $T = \inf \{t \geq s : X_t \notin U\}$ et il s'agit de démontrer que $f \circ X^T$ est une sous-martingale sur $[s, \infty[$.

Gardant s et f fixés, nous allons tout d'abord remplacer U par un ouvert un peu plus gros. Pour $r > 0$ assez petit, l'ouvert $U_r = \{x \in V : \text{dist}(x, U) < r\}$ vérifie les mêmes propriétés que U ; les temps d'arrêt $T_r = \inf \{t \geq s : X_t \notin U_r\}$ croissent avec r et la fonction $r \mapsto \mathbb{E}[\exp(-T_r)]$ est décroissante. Nous choisissons pour r un point de continuité de cette fonction; ceci entraîne la continuité à droite presque sûre $T_r = \inf_{\rho > 0} T_{r+\rho}$ (la continuité à gauche résulte de la définition de T_r). Nous démontrerons que le processus $f \circ X^{T_r}$ est une sous-martingale, le cas de $f \circ X^T$ s'en déduira par arrêt.

Posons $Y = X^{T_r}$, $T_r^n = \inf \{t \geq s : X_t^n \notin U_r\}$ et $Y^n = (X^n)^{T_r^n}$. Presque sûrement, Y^n tend vers Y uniformément sur tout compact : cela se vérifie ω par ω , en utilisant la propriété de continuité de T_r et le fait que la trajectoire $X^n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$ uniformément sur tout compact. Pour $s \leq u \leq v$, pour tous $u_1, \dots, u_q \in [0, u]$ et pour toute fonction h continue et bornée sur V^q , la sous-martingale $f \circ Y^n$ vérifie

$$\mathbb{E}[h(X_{u_1}^n, \dots, X_{u_q}^n) f(Y_v^n)] \geq \mathbb{E}[h(X_{u_1}^n, \dots, X_{u_q}^n) f(Y_u^n)];$$

passant à la limite en n , on en tire par convergence dominée l'inégalité

$$\mathbb{E}[h(X_{u_1}, \dots, X_{u_q}) f(Y_v)] \geq \mathbb{E}[h(X_{u_1}, \dots, X_{u_q}) f(Y_u)]$$

qui montre que $f \circ Y$ est une sous-martingale pour la filtration naturelle de X . ■

Tous les ingrédients sont en place; nous commençons l'étude de la détermination des martingales par leurs valeurs finales.

DÉFINITION. — Soit V une variété munie d'une connexion. On appellera *séparante* sur V toute fonction ϕ de $V \times V$ dans \mathbb{R}_+ , convexe pour la connexion produit, et telle que, pour tous points x et y de V , on ait $\phi(x, y) = 0$ si $x = y$ et $\phi(x, y) > 0$ si $x \neq y$.

Une séparante est donc une distance, dans laquelle on a remplacé l'axiome du triangle par la convexité. C'est cette convexité qui justifie le nom de séparante : si ϕ est une séparante et si γ' et γ'' sont deux géodésiques, (γ', γ'') est une géodésique de $V \times V$ par 3.15, et $\phi(\gamma'(t), \gamma''(t))$ est une fonction convexe de t ; en d'autres termes, vues par ϕ , les géodésiques tendent à se séparer. De même, si X' et X'' sont deux martingales dans V , (X', X'') est une martingale dans $V \times V$ par 3.15, et $\phi(X', X'')$ est une sous-martingale locale par 4.1 si ϕ est au moins C^2 , et par 4.13 si V est au moins C^3 ; vues par ϕ , les martingales aussi tendent à se séparer. Ces propriétés sont la clé de l'utilisation des séparantes; il est bon de leur donner un numéro :

LEMME 4.17. — Soit ϕ une séparante sur V . Si γ' et γ'' sont deux géodésiques de V , la fonction $t \mapsto \phi(\gamma'(t), \gamma''(t))$ est convexe.

On suppose maintenant ϕ de classe C^2 ou V de classe C^3 . Si X' et X'' sont deux martingales dans V (pour la même filtration), $\phi(X', X'')$ est une sous-martingale locale.

Nous allons être conduits à nous intéresser à l'existence d'une séparante sur une variété donnée. On peut montrer (voir [45] p. 52) que, localement, il en existe toujours. Kendall a montré dans [67] que si V est un hémisphère ouvert (à un nombre quelconque de dimensions) muni de sa connexion riemannienne (les géodésiques sont les arcs de grands cercles, parcourus à vitesse angulaire constante), alors V n'a pas de séparante mais tout ouvert relativement compact de V en a une; et plus généralement que si V est une « boule géodésique régulière » dans une variété riemannienne, les ouverts relativement compacts de V ont une séparante. J'avais conjecturé dans [47] que si deux points quelconques de V sont toujours liés par une géodésique et une seule, alors tout ouvert relativement compact de V a une séparante. Cette conjecture est fautive; elle est réfutée par un superbe exemple de Kendall [70].

Dans les deux définitions ci-dessous, l'axe des temps \mathbb{R}_+ est remplacé par $[0, 1]$; les processus X , X^n et Y sont définis pour $t \in [0, 1]$ seulement et les variables aléatoires X_1 , X_1^n , Y_1 sont les *valeurs finales* de ces processus.

DÉFINITION. — On dira que la variété V a la *propriété de détermination finale* si pour tout espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, 1]})$ et toutes martingales X et Y dans V définies sur cet espace filtré et ayant (p.s.) même valeur finale $X_1 = Y_1$, on a l'égalité entre processus $X = Y$.

DÉFINITION. — On dira que la variété V a la *propriété robuste de détermination finale* si pour tout espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, 1]})$, pour toute martingale Y dans V définie sur cet espace filtré, et pour toute suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de martingales dans V définies sur cet espace filtré, dont les valeurs finales X_1^n convergent en probabilité vers Y_1 , les processus X^n convergent vers Y uniformément en probabilité (et, donc, par 4.11, au sens des semimartingales).

La propriété robuste de détermination finale est plus forte que la propriété de détermination finale (prendre $X^n = X$ pour tout n). J'ignore si elle est strictement plus forte; mais nous verrons très bientôt (théorème 4.19) que, sous une hypothèse de convergence des martingales, les deux propriétés sont équivalentes.

Alors que, pour les martingales réelles ou vectorielles, on peut retrouver X_0 à partir de X_1 et de \mathcal{F}_0 seulement, la propriété de détermination finale dans une variété est un peu plus faible et demande que l'on puisse retrouver X_0 à partir de X_1 et de toute la filtration.

PROPOSITION 4.18. — *Soit ϕ une séparante bornée sur V . Si ϕ est de classe C^2 ou si V est de classe C^3 , V a la propriété de détermination finale.*

DÉMONSTRATION. — Nous avons vu en 4.17 que $\phi(X, Y)$ est une sous-martingale locale; elle est en outre positive et bornée par $\sup \phi$, c'est donc une vraie sous-martingale. Sa valeur finale $\phi(X_1, Y_1)$ étant nulle, elle est identiquement nulle, et, ϕ étant séparante, $X = Y$. ■

Le théorème qui suit rassemble en un seul énoncé plusieurs résultats de Kendall [66], [68] et [69].

THÉORÈME 4.19. — *La variété V étant au moins de classe C^3 , les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *tout ouvert relativement compact de V a une séparante;*
- (ii) *tout ouvert relativement compact de V a la propriété robuste de détermination finale.*
- (iii) *tout ouvert relativement compact de V a la propriété de détermination finale, et toute martingale à valeurs dans un compact de V converge à l'infini.*

Observer que la première condition est purement géométrique alors que les deux autres concernent le comportement des martingales.

Remarquer aussi que dans (iii) la propriété de détermination finale est relative à des martingales indexées par le fermé $[0, 1]$, alors que la convergence à l'infini fait intervenir des martingales définies sur \mathbb{R}_+ (ou, par changement de temps, sur l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4.19. — (i) \Rightarrow (ii). Soit U un ouvert relativement compact de V ; supposant (i), nous allons montrer que U possède la propriété robuste de détermination finale. Il existe un ouvert relativement compact U' tel que $\bar{U} \subset U' \subset V$. L'hypothèse (i) dit que U' admet une séparante ϕ ; elle est continue sur $U' \times U'$ par 4.12, donc bornée sur le compact $\bar{U} \times \bar{U}$. Soient X^n et Y des martingales dans U (indexées par $[0, 1]$ et pour une même filtration) telles que $X_1^n \rightarrow Y_1$ en probabilité. Pour chaque n , le processus $Z^n = \phi(X^n, Y)$ est une sous-martingale locale. Les Z^n forment une suite uniformément bornée de sous-martingales positives telles que Z_1^n tend vers 0 en probabilité, donc dans L^2 . L'inégalité de Doob $\|\sup_t Z_t^n\|_{L^2} \leq 2 \|Z_1^n\|_{L^2}$ implique que $\sup_t Z_t^n$ tend vers zéro dans L^2 .

Pour vérifier que X^n tend vers Y uniformément sur $[0, 1]$ en probabilité, il suffit d'établir que, si f est une fonction C^p sur V , $\sup_t |f(X_t^n) - f(Y_t)|$ tend vers zéro en probabilité. Soit donc $\varepsilon > 0$. Continue et strictement positive sur le compact

$\{(y, z) \in \bar{U} \times \bar{U} : |f(y) - f(z)| \geq \varepsilon\}$, la fonction ϕ y est minorée par un $\delta > 0$. Ceci permet d'écrire

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t \in [0,1]} |f(X_t^n) - f(Y_t)| \geq \varepsilon\right] \leq \mathbb{P}\left[\sup_{t \in [0,1]} \phi(X_t^n, Y_t) \geq \delta\right]$$

et il ne reste qu'à remarquer que le membre de droite tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

(ii) \Rightarrow (iii). Puisque la propriété robuste entraîne la propriété non robuste, il suffit d'établir que si K est un compact de V et X une martingale (dans V) à valeurs dans K , la limite X_∞ existe. Par compacité, le fermé aléatoire

$$C = \bigcap_t \overline{X([t, \infty[)}$$

des points limites de X est presque sûrement non vide; il s'agit de démontrer que $|C| = 1$ p.s. Munissons V d'une distance par plongement propre dans un espace euclidien; la notation $B(x, r)$ désignera la boule ouverte de rayon r . Nous allons envisager deux cas.

1^{er} cas. Pour tous x et y de V tels que $x \neq y$, il existe $r(x, y) > 0$ tel que

$$\mathbb{P}[C \text{ rencontre } B(x, r(x, y)) \text{ et } B(y, r(x, y))] = 0.$$

En ce cas, $\mathbb{P}[C \times C \text{ rencontre } B(x, r(x, y)) \times B(y, r(x, y))] = 0$. Mais les produits $B(x, r(x, y)) \times B(y, r(x, y))$ forment un recouvrement ouvert de $K \times K$ privé de la diagonale Δ ; comme cet ensemble est une union dénombrable de compacts, il a un sous-recouvrement dénombrable, et il existe donc des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans K telles que $x_n \neq y_n$ et

$$\bigcup_n [B(x_n, r(x_n, y_n)) \times B(y_n, r(x_n, y_n))] \supset (K \times K) \setminus \Delta.$$

Puisque $\mathbb{P}[C \times C \text{ rencontre } B(x_n, r(x_n, y_n)) \times B(y_n, r(x_n, y_n))] = 0$ pour chaque n , on en déduit $\mathbb{P}[C \times C \text{ rencontre } (K \times K) \setminus \Delta] = 0$; donc $C \times C$ est inclus dans la diagonale, et C est un singleton : c'est terminé.

(L'analogie avec la démonstration par Doob de la convergence des martingales réelles en contrôlant le nombre des montées n'est évidemment pas fortuite; dans le cas où $V = \mathbb{R}$, l'existence de $r(x, y)$ pour tous x et y dit exactement que le nombre de montées de X sur tout intervalle est p.s. fini.)

2^e cas. Il existe deux points distincts x et y tels que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'événement

$$A_\varepsilon = \{C \text{ rencontre } B(x, \varepsilon) \text{ et } B(y, \varepsilon)\}$$

vérifie $\mathbb{P}[A_\varepsilon] > 0$. Nous allons montrer que dans ce cas, l'hypothèse (ii) est violée; comme les deux cas épuisent toutes les possibilités, ceci achèvera la démonstration de (ii) \Rightarrow (iii). Fixons ε . La martingale $M_t = \mathbb{P}[A_\varepsilon | \mathcal{F}_t]$ converge vers $\mathbb{1}_{A_\varepsilon}$; il existe donc un instant s tel que $\mathbb{P}[M_s > 1 - \varepsilon] > 0$. Introduisons le temps d'arrêt

$$T = \inf \{t \geq s : X_t \in B(x, \varepsilon)\}.$$

Si l'on avait $M_T \leq 1 - \varepsilon$, on en déduirait $M_s = \mathbb{E}[M_T | \mathcal{F}_s] \leq 1 - \varepsilon$, ce qui contredirait la définition de s ; ainsi l'événement $B = \{M_T > 1 - \varepsilon\}$ n'est pas négligeable. Sur $\{T = \infty\}$, on a $M_\infty = \mathbb{1}_{A_\varepsilon} = 0$, d'où $M_T = 0$; on a donc $T < \infty$ sur B .

Le processus $X'_t = X_{T+t}$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{T+t}$ et pour la loi $\mathbb{Q} = \mathbb{P}[\cdot|B]$. De l'inégalité

$$\mathbb{Q}[A_\varepsilon] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{P}[A_\varepsilon \cap B | \mathcal{F}_T]]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_B \mathbb{P}[A_\varepsilon | \mathcal{F}_T]]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_B M_T]}{\mathbb{P}[B]} > 1 - \varepsilon,$$

on tire $\mathbb{Q}[\exists t X'_t \in B(y, \varepsilon)] > 1 - \varepsilon$; le temps d'arrêt $T' = \inf \{t : X'_t \in B(y, \varepsilon)\}$ vérifie donc $\mathbb{Q}[T' < \infty] > 1 - \varepsilon$, et $\mathbb{Q}[T' < u] > 1 - 2\varepsilon$ pour un réel u convenable. Pour la filtration $\mathcal{G}'_t = \mathcal{G}_{ut}$ et la probabilité \mathbb{Q} , le processus $Y_t = X'_{ut \wedge T'}$ est une martingale dans K , vérifiant $Y_0 \in B(x, \varepsilon)$ et $\mathbb{Q}[Y_1 \in B(y, \varepsilon)] > 1 - 2\varepsilon$. Tout ceci, processus, filtration, probabilité, dépend de ε ; prenant $\varepsilon = 1/n$, nous avons une suite de martingales Y^n dans K , chacune définie sur son propre espace probabilisé filtré, et telles que, en loi, Y_0^n tend vers x et Y_1^n vers y quand n tend vers l'infini.

Sur un espace probabilisé convenable, considérons une suite indépendante $(Z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de processus ayant respectivement les lois de Y^n . Chacun d'eux est une martingale dans K pour sa filtration naturelle, donc aussi, par grossissement indépendant, pour la filtration engendrée par tous les Z^n . Les variables aléatoires Z_0^n (respectivement Z_1^n) convergent en loi vers x (respectivement y); ces limites étant déterministes, les convergences ont lieu en probabilité. Mais il existe une martingale M telle que $M_1 = y$ et $M_0 \neq x$, la martingale constante égale à y . La condition (ii) n'est donc pas satisfaite.

(iii) \Rightarrow (i). Soit U un ouvert relativement compact de V ; sous l'hypothèse (iii), nous devons construire une séparante sur U . Pour x et y dans U , posons

$$\phi(x, y) = \inf_{\substack{X \text{ et } Y \text{ martingales} \\ X_0 = x ; Y_0 = y}} \mathbb{P}[X_1 \neq Y_1].$$

Dans cette formule, l'infimum porte sur tous les $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F}, X, Y)$ tels que X et Y soient pour \mathcal{F} des martingales à valeurs dans U , vérifiant $X_0 = x$ et $Y_0 = y$. Nous allons montrer que ϕ est une séparante sur U . En considérant des martingales constantes, on voit immédiatement que $\phi(x, x) = 0$. Pour vérifier la convexité, considérons une géodésique γ dans le produit $U \times U$, définie sur un intervalle contenant $[0, 1]$; nous devons établir pour $0 \leq \lambda \leq 1$ l'inégalité

$$\phi(\gamma(\lambda)) \leq (1 - \lambda)\phi(\gamma(0)) + \lambda\phi(\gamma(1)).$$

Soit Z^0 une martingale dans $U \times U$, issue du point $\gamma(0)$, et qui réalise à ε près l'inf dans la définition de $\phi(\gamma(0))$; la probabilité pour que Z^0_1 soit sur la diagonale Δ est $\phi(\gamma(0)) + \varepsilon$. De même, soit Z^1 une martingale dans $U \times U$, issue de $\gamma(1)$, telle que $\mathbb{P}[Z^1_1 \in \Delta] \leq \phi(\gamma(1)) + \varepsilon$. Soit enfin M une martingale continue à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $M_0 = \lambda$ et $M_1 \in \{0, 1\}$; par exemple, si B est un mouvement brownien issu de λ et arrêté au premier instant où il atteint $\{0, 1\}$, le processus $M_t = B_{t/(1-t)}$ convient. Les trois processus Z^0 , Z^1 et M ont été définis en loi; on peut les choisir indépendants.

Le processus égal à $\gamma \circ M$ sur l'intervalle $[0, 1]$ est une martingale dans $U \times U$; sa valeur au temps 1 est $\gamma(0)$ avec probabilité $1 - \lambda$ et $\gamma(1)$ avec probabilité λ . En le prolongeant sur l'intervalle $[1, 2]$ par Z^0_{t-1} si $M_1 = 0$ et par Z^1_{t-1} si $M_1 = 1$, on obtient une martingale continue W dans $U \times U$, issue de $\gamma(\lambda)$, indexée par $[0, 2]$, telle que

$$\mathbb{P}[W_2 \in \Delta] \leq (1 - \lambda) [\phi(\gamma(0)) + \varepsilon] + \lambda [\phi(\gamma(1)) + \varepsilon].$$

L'existence de ce processus W , et la définition de $\phi(\gamma(\lambda))$, fournissent, à ε près, l'inégalité de convexité annoncée.

Il reste à vérifier que ϕ ne s'annule que sur la diagonale; c'est ici que nous allons utiliser l'hypothèse (iii).

Soit $(x, y) \in U \times U$ tel que $\phi(x, y) = 0$; nous voulons montrer que $x = y$. Fixons une structure riemannienne g de classe C^{p-1} sur $V \times V$ et notons dist la distance associée (g et dist proviennent par exemple d'un plongement propre de $V \times V$ dans \mathbb{R}^q). Puisque $\phi(x, y) = 0$, il existe une suite de martingales Z^n dans $U \times U$, chacune avec son propre Ω et sa filtration, telles que $Z_0^n = (x, y)$ et que $\mathbb{P}[Z_1^n \in \Delta] \rightarrow 1$. Pour chaque n , soit A^n la variation quadratique riemannienne $2 \int \langle g, \mathcal{D}Z^n \rangle$; les variations totales sont les v. a. A_1^n , presque sûrement finies. La proposition 4.14 fournit, par changement de temps à partir de Z^n , une martingale M^n , constante sur $\llbracket A_1^n, \infty \llbracket$, et de variation quadratique riemannienne $t \wedge A_1^n$; en outre $\mathbb{P}[M_{A_1^n}^n \in \Delta] \rightarrow 1$. C'est le moment d'appliquer le critère de tension 4.15 : puisque toutes les martingales M^n prennent leurs valeurs dans le compact $\bar{U} \times \bar{U}$, la proposition 4.16 permet, quitte à extraire une sous-suite, de supposer que de plus les M^n sont définies sur un même espace probabilisé (mais pas nécessairement pour la même filtration!) et convergent vers une limite M , au sens où $\sup_{s \leq t} \text{dist}(M_s^n, M_s) \rightarrow 0$ presque sûrement pour chaque t .

Puisque les lois des M^n sont tendues, et puisque les variables aléatoires A_1^n sont à valeurs dans le compact $[0, \infty]$, donc de lois tendues, les lois des couples (M^n, A_1^n) sont tendues elles aussi, et, quitte à extraire encore une sous-suite, on peut supposer que la suite de variables aléatoires A_1^n a une limite presque sûre $B \leq \infty$. Sur $\{B < t\}$, $A_1^n < t$ pour tout n assez grand, donc $M_t^n = M_\infty^n$ pour tout n assez grand, puis $M_t = M_\infty$; ainsi, M est constante sur $\llbracket B, \infty \llbracket$.

Nous allons maintenant établir que B est presque sûrement finie. Pour tout $z \in \bar{U} \times \bar{U}$, appelons h^z la fonction $\text{dist}^2(z, \cdot)$; pour $\varepsilon > 0$ assez petit (fixé dans la suite), il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout z dans le compact $\bar{U} \times \bar{U}$, la minoration $c \text{Hess } h^z \geq 2g$ ait lieu sur toute la boule ouverte $B(z, \varepsilon)$. Posons $\sigma_s^n = A_1^n \wedge s$ et $\tau_s^n = A_1^n \wedge \inf \{t \geq s : \text{dist}(M_s^n, M_t^n) \geq \varepsilon\}$. En prenant l'espérance des deux côtés de l'inégalité

$$\tau_s^n - \sigma_s^n = \int_{\sigma_s^n}^{\tau_s^n} 2 \langle g, \mathcal{D}M_u^n \rangle \leq c \int_{\sigma_s^n}^{\tau_s^n} \langle \text{Hess } h^{M_{\sigma_s^n}^n}, \mathcal{D}M_u^n \rangle,$$

on obtient

$$\mathbb{E}[\tau_s^n - \sigma_s^n] \leq c \mathbb{E} \left[\int_{\sigma_s^n}^{\tau_s^n} \langle \text{Hess } h^{M_{\sigma_s^n}^n}, \mathcal{D}M_u^n \rangle \right] = c \mathbb{E} [h^{M_{\sigma_s^n}^n}(M_{\tau_s^n}^n)] \leq c \varepsilon^2.$$

On en déduit $\mathbb{P}[\tau_s^n > s+c] \leq \mathbb{P}[\tau_s^n > \sigma_s^n + c] \leq c \varepsilon^2 / c = \varepsilon^2$. Introduisant la variable aléatoire $S_s^n = \sup_{t \in [s, s+c]} \text{dist}(M_s^n, M_t^n)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A_1^n > s+c] &\leq \mathbb{P}[A_1^n > s+c \text{ et } S_s^n < \varepsilon] + \mathbb{P}[S_s^n \geq \varepsilon] \\ &\leq \mathbb{P}[\tau_s^n > s+c] + \mathbb{P}[S_s^n \geq \varepsilon] \leq \varepsilon^2 + \mathbb{P}[S_s^n \geq \varepsilon]. \end{aligned}$$

Par ailleurs, lorsque n tend vers l'infini, S_s^n converge presque sûrement vers $S_s = \sup_{s \leq t \leq s+c} \text{dist}(M_s, M_t)$. L'hypothèse (iii) de convergence des martingales dans \bar{U} , appliquée aux deux composantes de M dans $\bar{U} \times \bar{U}$, entraîne que M converge; donc S_s tend vers zéro quand s tend vers l'infini, et en choisissant s assez grand, on aura $\mathbb{P}[S_s \geq \frac{1}{2}\varepsilon] \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Pour tout n assez grand, on a par conséquent $\mathbb{P}[S_s^n \geq \varepsilon] \leq \varepsilon$; reportant ceci dans la majoration ci-dessus, on a établi

$$\forall \varepsilon \text{ assez petit } \exists c \exists s \exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad \mathbb{P}[A_1^n > s+c] \leq \varepsilon^2 + \varepsilon.$$

Il en résulte que $B = \lim_n A_1^n$ est presque sûrement finie.

Pour chaque t , sur l'événement $\{B < t\}$, on a $A_1^n < t$ pour n assez grand ; sur cet événement, $M_\infty^n = M_t^n$ tend en probabilité vers $M_t = M_\infty$. Puisque B est p.s. fini, ceci établit que M_∞^n converge en probabilité vers M_∞ , et la propriété $\mathbb{P}[M_\infty^n \in \Delta] \rightarrow 1$ devient à la limite $\mathbb{P}[M_\infty \in \Delta] = 1$. Comme M est une semimartingale jusqu'à l'infini (corollaire 4.4), on peut par un changement de temps déterministe ramener ∞ en 1, et on a ainsi une martingale N dans $\bar{U} \times \bar{U}$ telle que $N_0 = (x, y)$ et $N_1 \in \Delta$. La propriété (iii) de détermination finale, appliquée dans un voisinage de \bar{U} , implique $x = y$. ■

Chapitre 5

MOUVEMENTS BROWNIENS ET APPLICATIONS HARMONIQUES

[...] il a découvert la science de l'harmonie et les rapports harmoniques.

JAMBLIQUE, *Vie de Pythagore*

Ce court chapitre présente en 5.5 un exemple, très élémentaire mais typique, d'application des martingales à une question d'analyse dans les variétés; il s'agit du comportement des applications harmoniques (ce sont les solutions d'une certaine équation aux dérivées partielles) d'une variété dans une autre.

1. — Variétés riemanniennes et mouvements browniens

Rappelons qu'une variété riemannienne est une variété équipée d'un champ g de codiffuseurs purement d'ordre deux, définis positifs. Dans une carte locale $(v^i)_{1 \leq i \leq d}$, g s'écrit $g_{ij} dv^i dv^j$, où les fonctions g_{ij} sont définies dans le domaine de la carte, de classe C^{p-1} , et forment en chaque point du domaine une matrice symétrique définie positive.

Partant d'une variété riemannienne, la première chose que font les géomètres, c'est la munir d'une connexion (dite connexion canonique, ou encore connexion de Levi-Civita; c'est l'unique connexion sans torsion pour laquelle $\nabla g = 0$). Ce serait indispensable si l'on voulait explorer les propriétés géométriques liées à g , mais tel n'est pas notre propos, et nous ne le ferons pas : nous nous donnerons sur V une structure riemannienne g et une connexion Γ *sans postuler aucune relation entre ces deux structures*. Comme nous utiliserons très peu la géométrie liée à g , ceci sera sans conséquence; mais les auditeurs devront toutefois se rappeler que *les mouvements browniens, fonctions harmoniques, applications harmoniques définies dans ce chapitre diffèrent un peu de ceux que l'on considère habituellement* : pour retrouver la définition usuelle (qui est la seule raisonnable), il faut se restreindre au cas où la connexion dont on munit V est la connexion canoniquement associée à g .

Étant donnée une structure riemannienne g sur une variété V , chacun des espaces tangents $T_x V$ est pourvu par la forme quadratique $\mathbf{Q}g(x)$ (voir 1.9) d'une structure d'espace euclidien (espace de Hilbert réel, de dimension finie); ceci permet d'identifier $T_x V$ et son dual $T_x^* V$, et d'identifier TV et T^*V (cette identification respecte leurs structures de variétés de classe C^{p-1}). Si f est une fonction sur V , le vecteur tangent correspondant au covecteur $df(x)$ est appelé *gradient de f en x* , et noté $\nabla f(x)$. Si A et B sont dans $T_x V$, leur produit scalaire euclidien sera noté $\langle A|B \rangle$, et la norme euclidienne $\sqrt{\langle A|A \rangle}$ de A sera notée $\|A\|$. La structure euclidienne de $T_x V$ permet aussi de parler de la trace de toute forme bilinéaire ou quadratique

sur $T_x V$; si θ est un codiffuseur en x purement d'ordre deux (c'est-à-dire tel que $\mathbf{R}\theta = 0$), nous noterons $\text{Tr}\theta$ la trace de la forme quadratique associée à θ par la proposition 1.9. Dans une carte locale $(v^i)_{1 \leq i \leq d}$, si l'on note g^{ij} les coefficients de la matrice inverse de la matrice formée par les g_{ij} , le produit scalaire s'écrit $\langle A|B \rangle = g_{ij}A^iB^j$, le gradient ∇f vaut $g^{ij}D_i f D_j$ et la trace de $\theta = \theta_{ij} dv^i \cdot dv^j$ est $\text{Tr}\theta = g^{ij}\theta_{ij}$.

Une convention de notation nous sera utile dans tout ce chapitre : Si U est un processus, nous noterons $\int U dt$ le processus dont la valeur à l'instant t est $\int_0^t U_s ds$; en d'autres termes, avec les notations de 2.1 et en appelant I l'application identique de \mathbb{R}_+ dans lui-même, $\int U dt$ n'est autre que $\int U dI$.

LEMME 5.1 ET DÉFINITION. — Soit X une semimartingale à valeurs dans une variété riemannienne (V, g) . Il y a équivalence entre :

(i) pour toute fonction f dans $C^p(V)$,

$$[f \circ X, f \circ X] = \int \|\nabla f\|^2 \circ X dt ;$$

(ii) pour toutes fonctions f et h dans $C^p(V)$,

$$[f \circ X, h \circ X] = \int \langle \nabla f | \nabla h \rangle \circ X dt ;$$

(iii) pour tout processus Θ de codiffuseurs purement d'ordre deux, au-dessus de X , prévisible et localement borné,

$$\int \langle \Theta, \mathcal{D}X \rangle = \frac{1}{2} \int \text{Tr}\Theta dt .$$

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que la semimartingale X est normale.

Lorsque V est l'espace \mathbb{R}^d muni de sa structure riemannienne canonique, une semimartingale X est normale si et seulement si $[X^i, X^j]_t = \delta^{ij}t$ pour tout t . Plus généralement, si V a une carte globale $(v^i)_{1 \leq i \leq d}$, X est normale si et seulement si $[v^i \circ X, v^j \circ X] = \int g^{ij} \circ X dt$.

DÉMONSTRATION. — (iii) \Rightarrow (i) s'obtient en prenant $\Theta = (df \cdot df) \circ X$; (i) \Rightarrow (ii) résulte de la formule de polarisation $2df \cdot dh = d(f+h) \cdot d(f+h) - df \cdot df - dh \cdot dh$, et de la formule analogue pour les crochets de semimartingales.

(ii) \Rightarrow (iii). Si la formule (iii) est vraie pour Θ , elle est aussi vraie pour $H\Theta$, où H est n'importe quel processus réel, prévisible et localement borné. Cette remarque, jointe à la linéarité en Θ , permet de se ramener au cas où Θ est nul quand X est hors d'un compact inclus dans le domaine d'une carte locale. Dans ce cas, il suffit d'écrire $\Theta = \Theta_{ij} dv^i \cdot dv^j$, où les processus Θ_{ij} sont prévisibles et localement bornés, et d'appliquer l'hypothèse (ii) à v^i et v^j . ■

EXERCICE. — La variation quadratique riemannienne d'une semimartingale normale vaut $d \times t$ (où d est la dimension); si $d = 1$, la réciproque est vraie : toute semimartingale de variation quadratique riemannienne t est normale.

PROPOSITION 5.2 ET DÉFINITION. — Soit V une variété munie d'une structure riemannienne g et d'une connexion Γ . Si X est une semimartingale dans V , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) X est une martingale (pour Γ) et X est normale (pour g);
- (ii) pour toute fonction $f \in C^2(V)$, le processus $f \circ X - f(X_0) - \frac{1}{2} \int \text{Tr Hess } f \circ X dt$ est une martingale locale.

Les semimartingales vérifiant ces conditions sont appelées des mouvements browniens.

Lorsque Γ est la connexion canoniquement associée à g , l'opérateur différentiel $f \mapsto \text{Tr Hess } f$ est appelé laplacien sur (V, g) , ou opérateur de Laplace-Beltrami sur (V, g) , et traditionnellement noté Δ . Mais dans le cadre moins contraignant où nous nous plaçons, il est préférable de le laisser sous la forme Tr Hess , pour rappeler que la connexion est arbitraire, et aussi pour bien mettre en évidence les rôles de g (via la trace) et de Γ (via la hessienne) dans sa définition. En coordonnées locales, cet opérateur s'écrit bien sûr $g^{ij}(D_{ij} - \Gamma_{ij}^k D_k)$. C'est un opérateur elliptique, et la théorie des diffusions, ou un argument d'équations différentielles stochastiques, permet de démontrer l'existence (sur un espace filtré convenable) et l'unicité en loi du mouvement brownien issu d'un point donné, mais avec une très importante restriction : le temps d'arrêt prévisible ζ où le processus quitte tout compact de V peut être fini, et le mouvement brownien n'est défini que sur l'intervalle $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$ (penser par exemple au cas où V est un ouvert strict de \mathbb{R}^d).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.2. — (i) \Rightarrow (ii). Puisque X est une martingale, l'intégrale d'Itô $\int \langle df, d_\Gamma X \rangle$ est une martingale locale, et la formule d'Itô 3.5 s'écrit

$$f \circ X - f(X_0) = \text{martingale locale} + \int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle .$$

Puisque X est normale, 5.1.(iii) donne $\int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle = \frac{1}{2} \int \text{Tr Hess } f \circ X dt$, d'où (ii).

(ii) \Rightarrow (i). Pour toute fonction f ,

$$\text{Tr Hess}(f^2) = \text{Tr} (2f \text{ Hess } f + 2 df \cdot df) = 2f \text{ Tr Hess } f + 2 \|\nabla f\|^2 ;$$

on en tire

$$f^2 \circ X - f^2(X_0) = \text{martingale locale} + \int (f \text{ Tr Hess } f) \circ X dt + \int \|\nabla f\|^2 \circ X dt .$$

Mais par ailleurs

$$\begin{aligned} f^2 \circ X - f^2(X_0) &= 2 \int (f \circ X) d(f \circ X) + [f \circ X, f \circ X] \\ &= \text{martingale locale} + \int (f \circ X)(\text{Tr Hess } f \circ X) dt + [f \circ X, f \circ X] ; \end{aligned}$$

comparant ces deux formules, on obtient l'égalité entre processus croissants

$$\int \|\nabla f\|^2 \circ X dt = [f \circ X, f \circ X]$$

qui montre que X est normale. L'égalité 5.1.(iii) fournit

$$\int \langle \text{Hess } f, \mathcal{D}X \rangle = \frac{1}{2} \int \text{Tr Hess } f \circ X dt ,$$

et X est une martingale d'après 3.6. ■

2. — Applications harmoniques

DÉFINITION. — Soient (V, g, Γ) une variété munie d'une structure riemannienne et d'une connexion, et $(W, \bar{\Gamma})$ une variété munie d'une connexion. Une application $h \in C^2(V, W)$ est *harmonique* si l'on a

$$\text{Tr} [h^* \overline{\text{Hess}} f] = \text{Tr} \text{Hess}(f \circ h)$$

pour toute $f \in C^2(W)$, où le symbole $\overline{\text{Hess}}$ désigne la hessienne sur W pour la connexion $\bar{\Gamma}$, Tr et Hess provenant de g et Γ .

En comparant cette formule avec 3.11, on voit que toute application affine de (V, Γ) dans $(W, \bar{\Gamma})$ est harmonique (pour n'importe quelle g), mais la réciproque est fautive (sauf si V est unidimensionnelle). Alors qu'il n'existe en général pas, même localement, d'application affine non constante de V dans W , il n'en va pas de même pour les applications harmoniques : si l'on se fixe un point x dans V , un point y dans W et une application linéaire ϕ de $T_x V$ dans $T_y W$, il existe toujours au moins une (et souvent une infinité d') application harmonique h définie au voisinage de x , telle que $h(x) = y$ et que $h_{*x} = \phi$.

Le cas qui suscite le plus d'intérêt de la part des géomètres est celui où V et W sont toutes deux riemanniennes, et munies de leurs connexions canoniques ; les applications harmoniques sont alors, localement, les extrémales d'une certaine fonctionnelle d'énergie.

EXERCICE. — En coordonnées locales (v^i sur V , w^α sur W), et en posant $h^\alpha = w^\alpha \circ h$, l'équation des applications harmoniques est

$$g^{ij} (D_{ij} h^\alpha - \Gamma_{ij}^k D_k h^\alpha + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \circ h D_i h^\alpha D_j h^\beta) = 0 ;$$

remarquer le terme non-linéaire lié à la connexion $\bar{\Gamma}$. Lorsque W est la droite \mathbb{R} pourvue de la connexion plate, $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = 0$, ce terme non-linéaire disparaît, et h est harmonique si et seulement si $\text{Tr} \text{Hess} h = 0$. Vérifier directement cette propriété sur la définition de l'harmonicité, sans passer en coordonnées.

PROPOSITION 5.3. — Soient V une variété munie d'une structure riemannienne g et d'une connexion Γ , et W une variété munie d'une connexion $\bar{\Gamma}$. Une application $h \in C^2(V, W)$ est harmonique si et seulement si, pour tout mouvement brownien X dans V , défini sur un intervalle stochastique prévisible $\llbracket 0, \zeta \llbracket$, la semimartingale $h \circ X$ est une martingale sur $\llbracket 0, \zeta \llbracket$.

REMARQUE. — Nous n'avons pas rigoureusement introduit les notions de semimartingales, intégrales stochastiques, martingales, définies seulement sur un intervalle prévisible $\llbracket 0, \zeta \llbracket$ (la démonstration de 2.10 est déjà bien assez pénible comme ça!) ; mais toute la théorie s'étend sans difficulté à cette situation. Pour éviter d'avoir à tout réécrire, le plus simple est de ramener le cas ζ quelconque au cas $\zeta \equiv \infty$ par un changement de temps. Pour référence ultérieure, en voici un énoncé formel (nous admettrons ce résultat de théorie générale des processus).

LEMME 5.4. — Sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$, soit ζ un temps d'arrêt prévisible strictement positif. Il existe un processus croissant (adapté) continu A , à valeurs dans $[0, \infty]$, fini et strictement croissant sur $\llbracket 0, \zeta \llbracket$, issu de 0 et tel que $\lim_{t \uparrow \zeta} A_t = \infty$.

Bien entendu, les mouvements browniens ne sont pas stables par changement de temps, et, pour utiliser ce lemme, il faudra travailler simultanément dans les deux échelles de temps : l'échelle « vraie », dans laquelle sont définis les semimartingales normales et les mouvements browniens, et une échelle « fictive », dans laquelle le temps d'explosion ζ est repoussé à l'infini. Nous verrons un exemple de multiples allers-retours entre ces deux échelles dans la démonstration de 5.5.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 5.3. — Remarquons tout d'abord que si X est un mouvement brownien dans V , défini sur $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$, et si f est une fonction C^2 sur W , en posant $Y = h \circ X$, on a toujours sur $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$

$$\frac{1}{2} \int \text{Tr}(h^* \overline{\text{Hess}} f) \circ X dt = \int \langle h^* \overline{\text{Hess}} f, \mathcal{D}X \rangle = \int \langle \overline{\text{Hess}} f, \mathcal{D}Y \rangle ,$$

où la première égalité n'est autre que 5.1.(iii) et la seconde vient de 2.11.

Si maintenant h est harmonique, et si X est un brownien dans V avec temps d'explosion ζ , soit $f \in C^2(W)$. La semimartingale $f \circ Y = (f \circ h) \circ X$ sur $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$ a pour partie à variation finie

$$\frac{1}{2} \int \text{Tr} \text{Hess}(f \circ h) \circ X dt = \frac{1}{2} \int \text{Tr}(h^* \overline{\text{Hess}} f) \circ X dt = \int \langle \overline{\text{Hess}} f, \mathcal{D}Y \rangle ;$$

prenant la différence avec $f \circ Y$ et appliquant la formule d'Itô 3.5, on voit que l'intégrale d'Itô $\int \langle df, d_{\Gamma} Y \rangle$ est une martingale locale, et Y est une martingale sur $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$ par la proposition 3.6.

Réciproquement, si h transforme les mouvements browniens en martingales, soient x un point de V et X un mouvement brownien issu de x , défini sur $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$. Pour toute fonction $f \in C^2(W)$,

$$\frac{1}{2} \int \text{Tr}(h^* \overline{\text{Hess}} f) \circ X dt = \int \langle \overline{\text{Hess}} f, \mathcal{D}Y \rangle$$

est sur $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$ la partie à variation finie de la semimartingale $f \circ Y$, c'est-à-dire de $(f \circ h) \circ X$, d'où

$$\frac{1}{2} \int \text{Tr}(h^* \overline{\text{Hess}} f) \circ X dt = \frac{1}{2} \int \text{Tr} \text{Hess}(f \circ h) \circ X dt \quad \text{sur } \llbracket 0, \zeta \rrbracket .$$

En posant $g = \text{Tr}(h^* \overline{\text{Hess}} f - \text{Hess}(f \circ h))$, ceci devient $\int g \circ X dt = 0$ sur $\llbracket 0, \zeta \rrbracket$. Pour presque tout ω , on a donc $\int_0^t g(X_s) ds = 0$ pour tout t assez petit. Fixant un tel ω et dérivant en $t = 0$, on obtient par continuité $g(x) = 0$; comme x est arbitraire, h est harmonique. ■

Voici un exemple de résultat non probabiliste obtenu à l'aide de la théorie des martingales dans les variétés. C'est un théorème de Kendall [65] et [66], qui montre comment une hypothèse de nature potentialiste (toutes les fonctions harmoniques bornées sur V sont constantes) a des conséquences sur les applications harmoniques de V dans une autre variété.

THÉORÈME 5.5. — *Soit V une variété pourvue d'une structure riemannienne g et d'une connexion Γ . On suppose que les fonctions $u : V \rightarrow \mathbb{R}$ harmoniques (c'est à dire vérifiant $\text{Tr} \text{Hess} u = 0$) et bornées sont constantes.*

Soit W une variété munie d'une connexion $\bar{\Gamma}$. On suppose que pour tout $y \in W$, il existe une fonction C^2 et convexe $\phi : W \rightarrow [0, 1]$ telle que $\{\phi = 0\} = \{y\}$. On suppose aussi que toutes les martingales à valeurs dans W convergent p.s.

Toute application harmonique de V dans W est constante.

REMARQUES. — a) En taxant de potentialiste l'hypothèse de constance des fonctions harmoniques bornées sur V , j'exagère un peu. En effet, ce qui sera utilisé dans la démonstration, c'est que toutes les fonctions réelles bornées qui transforment les mouvements browniens sur V en martingales (appelons ces fonctions « finement harmoniques ») sont constantes, qu'elles soient ou non C^2 . Cela est en réalité sans conséquence, car il est vrai que ces fonctions sont automatiquement C^p . Mais, si l'auditeur ne désire pas admettre ce résultat, le plus simple est sans doute de remplacer simplement « harmoniques » par « finement harmoniques » dans l'hypothèse sur V , qui devient alors de nature probabiliste, et en apparence plus forte, bien qu'en fait équivalente.

b) De même, et pour la même raison, on peut renforcer la conclusion, en y remplaçant « application harmonique » par « application finement harmonique », c'est-à-dire application non nécessairement C^2 , mais transformant les mouvements browniens en martingales. Comme dans le cas des fonctions réelles, on n'a en réalité rien gagné, car les applications finement harmoniques sont C^p , et la proposition 5.3 entraîne alors qu'elles sont harmoniques. Ce théorème de régularité des applications finement harmoniques est dû à Kendall [71]; pour une démonstration entièrement probabiliste, voir aussi Arnaudon, Li et Thalmaier [10].

c) L'hypothèse selon laquelle chaque point de W est l'unique minimum d'une fonction convexe bornée est toujours localement réalisée : dans une variété avec connexion, tout point a un voisinage ouvert W ayant cette propriété. Cette hypothèse est une façon d'exiger que la variété W ne soit pas trop grande; par exemple, Kendall établit dans [67] que cette condition est satisfaite lorsque W est un ouvert relativement compact dans un hémisphère de dimension d , mais ne l'est pas si W est un hémisphère ouvert de dimension d . Plus généralement, il établit que dans une variété riemannienne pourvue de sa connexion canonique, toute boule $B(x, r)$ ne rencontrant pas le cut-locus de x et sur laquelle toutes les courbures sectionnelles κ vérifient $\kappa r < \frac{1}{2}\pi$, remplit cette condition d'existence de fonctions convexes. C'est le cas, par exemple, de tout ouvert W relativement compact dans une variété de Cartan-Hadamard.

Il est clair que cette hypothèse est toujours vérifiée si W admet une séparante bornée ψ (poser alors $\phi(z) = \psi(y, z)$); on peut se demander si la réciproque est vraie.

d) Enfin, la seconde hypothèse sur W , la convergence des martingales, est presque une conséquence de la première : selon la proposition 4.2.(iv), la convergence des martingales a lieu dès qu'il existe une fonction définie-convexe sur une variété dans laquelle W est relativement compacte.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.5. — Soit h une application harmonique de V dans W .

À tout point x de V , on peut associer un mouvement brownien X à valeurs dans V , issu de x , défini jusqu'à son temps d'explosion ζ ; la loi du couple (ζ, X) ne dépend que de x . Le processus $M = h \circ X$ est défini sur l'intervalle $\llbracket 0, \zeta \llbracket$ et est une martingale dans W sur cet intervalle. L'hypothèse de convergence des martingales dans W permet d'affirmer que la limite $M_\zeta = \lim_{t \uparrow \zeta} M_t$ existe p.s. (il suffit de renvoyer ζ à l'infini à l'aide du lemme 5.4).

Si l'on fixe un borélien A de W , la probabilité $\mathbb{P}[M_\zeta \in A]$ ne dépend que de la loi de (ζ, X) ; c'est donc une fonction de x , que nous noterons $u^A(x)$.

Si T est un temps d'arrêt tel que $T < \zeta$, la propriété forte de Markov pour la diffusion X donne $u^A \circ X_T = \mathbb{P}[M_\zeta \in A | \mathcal{F}_T]$. Ceci entraîne que $\mathbb{E}[u^A \circ X_T] = u^A(x)$, donc $u^A \circ X$ est une martingale locale sur $\llbracket 0, \zeta \llbracket$ (rappelons qu'un processus adapté N sur $\llbracket 0, \infty \llbracket$ est une martingale si $\mathbb{E}[N_S]$ est constante lorsque S décrit les temps d'arrêt bornés; on se ramène à ce critère par le changement de temps 5.4). En conséquence, la fonction u^A est harmonique; l'hypothèse faite sur V entraîne qu'elle est constante.

Ceci a deux conséquences. D'abord, la loi de M_ζ ne dépend pas de x ; ensuite, pour $T < \zeta$, $\mathbb{P}[M_\zeta \in A | \mathcal{F}_T] = \mathbb{P}[M_\zeta \in A]$; en prenant une suite de temps d'arrêt qui annonce ζ , on obtient à la limite $\mathbb{1}_A \circ M_\zeta = \mathbb{P}[M_\zeta \in A]$, et la variable aléatoire M_ζ est déterministe. Il existe donc un point y de W tel que $M_\zeta = y$ p.s.; et cet y ne dépend pas de x .

Nous savons qu'il existe sur W une fonction ϕ convexe, C^2 , bornée, nulle au point y et strictement positive sur $W \setminus \{y\}$. Le processus $\phi \circ M$ est d'après 4.1.b) une sous-martingale locale positive sur $\llbracket 0, \zeta \llbracket$, de limite $M_\zeta = \phi(y) = 0$. Le changement de temps du lemme 5.4 le transforme en une sous-martingale bornée, positive et de limite nulle, donc identiquement nulle. Sa valeur initiale, $\phi(h(x))$ est zéro; comme ϕ ne s'annule qu'en y , on en tire $h(x) = y$, et h est constante. ■

RÉFÉRENCES

Et tout le reste est littérature.

P. VERLAINE, *Jadis et naguère*

La liste ci-dessous contient bien sûr tous les renvois du cours, mais aussi d'autres références : j'ai essayé d'y faire figurer tous les travaux utilisant, d'une façon ou d'une autre, le formalisme de la géométrie différentielle d'ordre 2, ainsi que tous ceux où interviennent des martingales à valeurs dans des variétés. Une telle prétention à l'exhaustivité est évidemment chimérique, et j'espère que l'on ne me tiendra pas rigueur des inévitables omissions dues à l'ignorance ou à l'oubli.

En revanche, je n'ai pas cherché à y inclure les ouvrages ou articles traitant des mouvements browniens dans une variété riemannienne (sauf les renvois du cours et ceux qui utilisent le langage d'ordre 2 ou les martingales dans les variétés); cela aurait certainement décuplé la longueur de la liste!

- [1] D. Applebaum & S. Cohen. Stochastic parallel transport along Lévy flows of diffeomorphisms. *J. Math. Anal. Appl.* 207, 496–505, 1997.
- [2] M. Arnaudon. Connexions et martingales dans les groupes de Lie. *Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Mathematics 1526*, Springer, 1992.
- [3] M. Arnaudon. Caractéristiques locales des semi-martingales et changements de probabilités. *Ann. Inst. Henri Poincaré* 29, 251–267, 1993.
- [4] M. Arnaudon. Semi-martingales dans les espaces homogènes. *Ann. Inst. Henri Poincaré* 29, 269–288, 1993.
- [5] M. Arnaudon. Dédoublage des variétés à bord et des semi-martingales. *Stochastics and Stochastics Reports* 44, 43–63, 1993.
- [6] M. Arnaudon. Propriétés asymptotiques des semi-martingales à valeurs dans les variétés à bord continu. *Séminaire de Probabilités XXVII, Lecture Notes in Mathematics 1557*, Springer, 1993.
- [7] M. Arnaudon. Espérances conditionnelles et \mathcal{C} -martingales dans les variétés. *Séminaire de Probabilités XXVIII, Lecture Notes in Mathematics 1583*, Springer, 1994.
- [8] M. Arnaudon. Barycentres convexes et approximations des martingales continues dans les variétés. *Séminaire de Probabilités XXIX, Lecture Notes in Mathematics 1613*, Springer, 1995.
- [9] M. Arnaudon. Differentiable and analytic families of continuous martingales in manifolds with connection. *Probability Theory and Related Fields* 108, 219–257, 1997.
- [10] M. Arnaudon, X.-M. Li & A. Thalmaier. Manifold-valued martingales, change of probabilities, and smoothness of finely harmonic maps. Prépublication.
- [11] M. Arnaudon & A. Thalmaier. Stability of stochastic differential equations in manifolds. *Séminaire de Probabilités XXXII, Lecture Notes in Mathematics 1686*, Springer, 1998.
- [12] M. Arnaudon & A. Thalmaier. Complete lifts of connections and stochastic Jacobi fields. *J. Math. Pures et Appliquées* 77, 283–315, 1998.

- [13] Y. Belopolskaya & Y. Dalecky. Stochastic Equations and Differential Geometry. Kluwer Academic Publisher, 1990.
- [14] M. Berger et B. Gostiaux. Géométrie différentielle. Armand Colin, 1972.
- [15] J.-M. Bismut. Mécanique aléatoire. *Lecture Notes in Mathematics 866*, Springer, 1981.
- [16] H. Cartan. Calcul différentiel. Hermann, 1967.
- [17] P. J. Catuogno. Second order connections and stochastic calculus. Prépublication, Instituto de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Brésil.
- [18] S. Cohen. Some Markov properties of stochastic differential stochastic equations with jumps. *Séminaire de Probabilités XXIX, Lecture Notes in Mathematics 1613*, Springer, 1995.
- [19] S. Cohen. Géométrie différentielle stochastique avec sauts. I. *Stochastics and Stochastics Reports 56*, 179–203, 1996.
- [20] S. Cohen. Géométrie différentielle stochastique avec sauts. II. Discrétisation et applications des EDS avec sauts. *Stochastics and Stochastics Reports 56*, 205–225, 1996.
- [21] J. M. Corcuera & W.S. Kendall. Riemannian barycentres and geodesic convexity. Preprint, Warwick University, 1998.
- [22] M. Cranston, W.S. Kendall & Y. Kifer. Gromov’s hyperbolicity and Picard’s little theorem for harmonic maps. *Stochastic Analysis and Applications. Proceedings of the Fifth Gregynog Symposium*. World Scientific, 1996.
- [23] R.W.R. Darling. Martingales on Manifolds and Geometric Itô Calculus. Ph. D. Thesis, University of Warwick, 1982.
- [24] R.W.R. Darling. Martingales in manifolds — Definition, examples and behaviour under maps. *Séminaire de Probabilités XVI bis, Lecture Notes in Mathematics 921*, Springer, 1982.
- [25] R.W.R. Darling. A martingale on the imbedded torus. *Bull. London Math. Soc. 15*, 221–225, 1983.
- [26] R.W.R. Darling. Convergence of martingales on a Riemannian manifold. *Publ. R.I.M.S. Kyoto University 19*, 753–763, 1983.
- [27] R.W.R. Darling. Approximating Itô integrals of differential forms and geodesic deviation. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 65*, 563–572, 1984.
- [28] R.W.R. Darling. On the convergence of Gangolli processes to Brownian motion on a manifold. *Stochastics 12*, 277–301, 1984. Correction, *Stochastics 15*, 247, 1985.
- [29] R.W.R. Darling. Convergence of martingales on manifolds of negative curvature. *Ann. Inst. Henri Poincaré 21*, 157–175, 1985.
- [30] R.W.R. Darling. Exit probability estimates for martingales in geodesic balls. *Probability Theory and Related Fields 93*, 137–152, 1992.
- [31] R.W.R. Darling. Differential Forms and Connections. Cambridge University Press, 1994.
- [32] R.W.R. Darling. Constructing gamma-martingales with prescribed limit, using backward SDE, *Ann. Prob. 23*, 1234–1261, 1995.
- [33] R.W.R. Darling. Martingales on noncompact manifolds: maximal inequalities and prescribed limits. *Ann. Inst. Henri Poincaré 32*, 1–24, 1996.
- [34] R.W.R. Darling. Intrinsic location parameter of a diffusion process. Preprint, Berkeley, 1997.
- [35] C. Dellacherie, B. Maisonneuve & P. A. Meyer. Probabilités et Potentiel. Volume 5. Hermann, 1992.
- [36] C. Dellacherie & P. A. Meyer. Probabilités et Potentiel. (4 volumes.) Hermann, 1975, 1980, 1983 et 1987.
- [37] R.M. Dudley. Distances of probability measures and random variables. *Ann. Math. Statist. 39*, 1563–1572, 1968.

- [38] T.E. Duncan. Stochastic integrals in Riemannian manifolds. *J. Multivariate Anal.* 6, 397–413, 1976.
- [39] T.E. Duncan. Some geometric methods for stochastic integration in manifolds. *Geometry and Identification 63–72, Lie Groups: Hist., Frontiers and Appl. Ser B, 1*, Math. Sci. Press, Brookline, 1983.
- [40] K.D. Elworthy. Geometric aspects of diffusions on manifolds. *École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XV–XVII, 1985–87, Lecture Notes in Mathematics 1362*, Springer, 1988.
- [41] K.D. Elworthy. Stochastic Differential Equations on Manifolds. *L. M. S. Lecture Notes Series 70*, Cambridge University Press, 1982.
- [42] M. Émery. En marge de l'exposé de Meyer : « Géométrie différentielle stochastique ». *Séminaire de Probabilités XVI bis, Lecture Notes in Mathematics 921*, Springer, 1982.
- [43] M. Émery. Convergence des martingales dans les variétés. *Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz, Volume 2, Astérisque 132*, Société Mathématique de France, 1985.
- [44] M. Émery. En cherchant une caractérisation variationnelle des martingales. *Séminaire de Probabilités XXII, Lecture Notes in Mathematics 1321*, Springer, 1988.
- [45] M. Émery. Stochastic Calculus in Manifolds. With an appendix by P. A. Meyer. *Universitext*, Springer, 1989.
- [46] M. Émery. On two transfer principles in stochastic differential geometry. *Séminaire de Probabilités XXIV, Lecture Notes in Mathematics 1426*, Springer, 1990. (Corrigendum dans le *Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Mathematics LNM 1526*, Springer, 1992.)
- [47] M. Émery & G. Mokobodzki. Sur le barycentre d'une probabilité dans une variété. *Séminaire de Probabilités XXV, Lecture Notes in Mathematics 1485*, Springer, 1991. (Addendum dans le *Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Mathematics LNM 1526*, Springer, 1992.)
- [48] M. Émery & W.A. Zheng. Fonctions convexes et semimartingales dans une variété. *Séminaire de Probabilités XVIII, Lecture Notes in Mathematics 1059*, Springer, 1984.
- [49] A. Estrade. Calcul stochastique discontinu sur les groupes de Lie. *Thèse de Doctorat*, Université d'Orléans, 1990.
- [50] A. Estrade. Exponentielle stochastique et intégrale stochastique discontinues. *Ann. Inst. Henri Poincaré* 28, 107–129, 1992.
- [51] R.E. Greene & H. Wu. On the subharmonicity and plurisubharmonicity of geodesically convex functions. *Indiana University Math. J.* 22, 641–653, 1973.
- [52] A. Grorud & M. Pontier. Calcul anticipatif d'ordre deux. *Stochastics and Stochastics Reports* 42, 1–23, 1993.
- [53] A. Grorud & M. Pontier. Calcul stochastique d'ordre deux et équation différentielle anticipative sur une variété. *Japan J. Math.* 21, 441–470, 1995.
- [54] A. Grorud & M. Pontier. Équation différentielle anticipative sur une variété et approximations. *Mathematics and Computers in Simulation* 38, 51–61, 1995.
- [55] W. Hackenbroch & A. Thalmaier. Stochastische Analysis. Eine Einführung in die Theorie der stetigen Semimartingale. Teubner, 1994.
- [56] M. Hakim-Dowek & D. Lépingle. L'exponentielle stochastique des groupes de Lie. *Séminaire de Probabilités XX, Lecture Notes in Mathematics 1204*, Springer, 1986.
- [57] S.W. He, J.A. Yan & W.A. Zheng. Sur la convergence des semimartingales continues dans \mathbb{R}^n et des martingales dans les variétés. *Séminaire de Probabilités XVII, Lecture Notes in Mathematics 986*, Springer, 1983.
- [58] S.W. He & W.A. Zheng. Remarques sur la convergence des martingales dans les variétés. *Séminaire de Probabilités XVIII, Lecture Notes in Mathematics 1059*, Springer, 1984.

- [59] H. Huang & W.S. Kendall. Correction note to “Martingales on manifolds and harmonic maps”. *Stochastics and Stochastics Reports* 37, 253–257, 1991.
- [60] N. Ikeda & S. Watanabe. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North-Holland, 1981.
- [61] W.S. Kendall. Stochastic differential geometry, a coupling property, and harmonic maps. *J. London Math. Soc.* 33, 554–566, 1986.
- [62] W.S. Kendall. Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property. *Stochastics* 19, 111–129, 1986
- [63] W.S. Kendall. Stochastic differential geometry. *Proceedings of the First World Congress of the Bernoulli Society, Vol. 1*, 515–524, VNU Sci. Press, Utrecht, 1987.
- [64] W.S. Kendall. Stochastic differential geometry: an introduction. *Acta Appl. Math.* 9, 29–60, 1987.
- [65] W.S. Kendall. Martingales on manifolds and harmonic maps. *Geometry of random motion, Contemp. Math.* 73, 121–157, 1988.
- [66] W.S. Kendall. Probability, convexity, and harmonic maps with small images. I. Uniqueness and fine existence. *Proc. London Math. Soc.* 61, 371–406, 1990.
- [67] W.S. Kendall. Convexity and the hemisphere. *J. London Math. Soc.* 43, 567–576, 1991.
- [68] W.S. Kendall. Convex geometry and nonconfluent Γ -martingales. I. Tightness and strict convexity. *Stochastic Analysis, L.M.S. Lecture Notes Series 167*, Cambridge University Press, 1991.
- [69] W.S. Kendall. Convex geometry and nonconfluent Γ -martingales. II. Well-posedness and Γ -martingale convergence. *Stochastics and Stochastics Reports* 38, 135–147, 1992.
- [70] W.S. Kendall. The propeller: a counterexample to a conjectured criterion for the existence of certain harmonic functions. *J. London Math. Soc.* 46, 364–374, 1992.
- [71] W.S. Kendall. Probability, convexity, and harmonic maps with small images. II. Smoothness via probabilistic gradient inequalities. *J. Funct. Anal.* 126, 228–257, 1994.
- [72] W.S. Kendall. The radial part of a Γ -martingale and a non-implosion theorem. *Ann. Prob.* 23, 479–500, 1995.
- [73] S. Kobayashi & K. Nomizu. Foundations of Differential Geometry. (2 volumes.) Wiley, 1963 et 1969.
- [74] H. Kunita. Lectures on Stochastic Flows and Applications. Springer, 1986.
- [75] J.T. Lewis. Brownian motion on a submanifold of Euclidean space. *Bull. London Math. Soc.* 18, 616–620, 1986.
- [76] P. Malliavin. Géométrie différentielle intrinsèque. Hermann, 1972.
- [77] P. A. Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques. *Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Mathematics 511*, Springer, 1976.
- [78] P. A. Meyer. Géométrie stochastique sans larmes. *Séminaire de Probabilités XV, Lecture Notes in Mathematics 850*, Springer, 1981.
- [79] P. A. Meyer. A differential geometric formalism for the Itô calculus. *Stochastic Integrals, Proceedings of the L.M.S. Durham Symposium, Lecture Notes in Mathematics 851*, Springer, 1981.
- [80] P. A. Meyer. Géométrie différentielle stochastique (bis). *Séminaire de Probabilités XVI bis, Lecture Notes in Mathematics 921*, Springer, 1982.
- [81] P. A. Meyer. Le théorème de convergence des martingales dans les variétés riemanniennes, d’après R.W. Darling et W.A. Zheng. *Séminaire de Probabilités XVII, Lecture Notes in Mathematics 986*, Springer, 1983.

- [82] P. A. Meyer. Géométrie différentielle stochastique. *Colloque en l'honneur de Laurent Schwartz, Volume 1, Astérisque 131*, Société Mathématique de France, 1985.
- [83] P. A. Meyer. Qu'est-ce qu'une différentielle d'ordre n ? *Exposition. Math.* 7, 249–264, 1989.
- [84] J.R. Norris. A complete differential formalism for stochastic calculus in manifolds. *Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Mathematics 1526*, Springer, 1992.
- [85] X. Pennec. L'incertitude dans les problèmes de reconnaissance et de recalage. Application en imagerie médicale et biologie moléculaire. Thèse, École Polytechnique, 1996.
- [86] J. Picard. Martingales sur le cercle. *Séminaire de Probabilités XXIII, Lecture Notes in Mathematics 1372*, Springer, 1989.
- [87] J. Picard. Martingales on Riemannian manifolds with prescribed limits. *J. Funct. Anal.* 99, 223–261, 1991.
- [88] J. Picard. Calcul stochastique avec sauts sur une variété. *Séminaire de Probabilités XXV, Lecture Notes in Mathematics 1485*, Springer, 1991.
- [89] J. Picard. Barycentres et martingales sur une variété. *Ann. Inst. Henri Poincaré* 30, 647–702, 1994.
- [90] M. Pontier & A. Estrade. Relèvement horizontal d'une semimartingale càdlàg. *Séminaire de Probabilités XXVI, Lecture Notes in Mathematics 1526*, Springer, 1992.
- [91] R. Rebolledo. La méthode des martingales appliquée à la convergence en loi des processus. *Mémoire S.M.F.* 62, 1979.
- [92] G. de Rham. Variétés différentiables; formes, courants, formes harmoniques. Hermann, 1960.
- [93] L.C.G. Rogers & D. Williams. Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Volume 2: Itô Calculus. Wiley, 1987.
- [94] L. Schwartz. Semi-martingales sur des variétés et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. *Lecture Notes in Mathematics 780*, Springer, 1980.
- [95] L. Schwartz. Géométrie différentielle du 2^e ordre, semimartingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle. *Séminaire de Probabilités XVI bis, Lecture Notes in Mathematics 921*, Springer, 1982.
- [96] L. Schwartz. Semimartingales and their Stochastic Calculus on Manifolds. Presses de l'Université de Montréal, 1984.
- [97] L. Schwartz. Construction directe d'une diffusion sur une variété. *Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Mathematics 1123*, Springer, 1985.
- [98] L. Schwartz. Les gros produits tensoriels en analyse et en probabilités. *Aspects of Mathematics and its Applications*, Collected Papers in Honour of Leopoldo Nachbin, 689–725, 1986.
- [99] L. Schwartz. Compléments sur les martingales conformes. *Osaka J. Math.* 23, 77–116, 1986.
- [100] L. Schwartz. Les différentielles de semimartingales vraies, sections de fibrés vectoriels. *J. Geom. Phys.* 5, 137–148, 1988.
- [101] L. Schwartz. Calcul infinitésimal stochastique. *Analyse mathématique et applications. Contributions en l'honneur de Jacques-Louis Lions*. Gauthier-Villars, 1988.
- [102] M. Spivak. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry (5 volumes). Second edition. Publish or Perish Inc., 1979.
- [103] D.W. Stroock & S.R.S. Varadhan. Multidimensional Diffusion Processes. Springer, 1979.
- [104] A. Thalmaier. Martingales on Riemannian manifolds and the nonlinear heat equation. *Stochastic Analysis and Applications. Proceedings of the Fifth Gregynog Symposium*. World Scientific, 1996.
- [105] A. Thalmaier. Brownian motion and the formation of singularities in the heat flow for harmonic maps. *Probability Theory and Related Fields* 105, 335–367, 1996.
- [106] K. Yano & S. Ishihara. Tangent and Cotangent Bundles. Marcel Dekker Inc., 1973.
- [107] W.A. Zheng. Sur le théorème de convergence des martingales dans une variété riemannienne. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 63, 511–515, 1983.