



HAL
open science

Invariants en géométrie symplectique via les courbes holomorphes.

Michèle Audin

► **To cite this version:**

Michèle Audin. Invariants en géométrie symplectique via les courbes holomorphes.. Panoramas et synthèses, 2001, 11, pp.1-59. hal-00129629

HAL Id: hal-00129629

<https://hal.science/hal-00129629>

Submitted on 8 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INVARIANTS EN GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE VIA LES COURBES HOLOMORPHES

par

Michèle Audin

... sem falar que o número é de todas as coisas que há no mundo a menos exacta, diz-se quinhentos tijolos, diz-se quinhentos homens, e a diferença que há entre tijolo e homem é a diferença que se julga não haver entre quinhentos e quinhentos, quem isto não entender à primeira vez não merece que lho expliquem segunda.

(... sans compter que le nombre est de toutes les choses qu'il y a au monde la moins exacte, on dit cinq cents briques, on dit cinq cents hommes et la différence qu'il y a entre brique et homme est la différence qu'on croit ne pas y avoir entre cinq cents et cinq cents, celui qui ne comprend pas ceci la première fois ne mérite pas qu'on l'explique une deuxième.) [64]

Résumé. Dans ce texte, je survole le problème des invariants des variétés symplectiques en m'attachant particulièrement à ceux qu'on obtient en « comptant » les courbes pseudo-holomorphes, les invariants de Gromov-Witten.

Abstract. In this survey text, I discuss the problem of finding invariants for symplectic manifolds. I emphasize on the invariants that “count” holomorphic curves, namely on Gromov-Witten invariants.

En géométrie et topologie aujourd'hui, les invariants affluent. Plus ou moins faciles à définir, ils sont en général difficiles à calculer.

Dans cet article, je vais présenter les invariants de Gromov-Witten. Même s'ils s'organisent de façon plus sophistiquée, ces invariants sont, en fin de compte, des *nombres*. Ici on compte des courbes pseudo-holomorphes. Par exemple, le nombre de droites du plan passant par deux points est un invariant de Gromov-Witten. En général, il s'agit d'évaluer une classe de cohomologie — dans cet exemple, celle représentée par un couple de points du plan — sur la classe fondamentale d'un espace de courbes — dans cet exemple, l'espace des droites du plan.

Le plan dont il est question dans cet exemple simple est le plan projectif complexe $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, une des variétés symplectiques les plus simples qu'on puisse imaginer. Pour définir des nombres analogues dans une variété symplectique plus générale, il faudra d'abord avoir un analogue de la structure de variété complexe de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, pour pouvoir considérer des courbes « holomorphes » comme le sont les droites du plan. S'il y a toujours beaucoup de ces structures presque complexes, il n'y en a pas en général de meilleure que les autres. S'il y a aussi, localement, beaucoup de ces courbes pseudo-holomorphes, il n'est pas toujours vrai qu'elles forment de beaux espaces lisses et compacts comme celui des droites du plan. Quiconque a assisté à la convergence d'une famille de coniques lisses vers une conique dégénérée peut commencer à imaginer le problème.

Classification mathématique par sujets (1991). 53C15, 14H15, 32G15, 53C23.

Mots clefs. variétés symplectiques, variétés projectives complexes, courbes holomorphes, pseudo-holomorphes, espaces de modules des courbes, espaces de modules d'applications stables, invariants de Gromov-Witten.

Notes pour les journées *État de la recherche*, Clermont-Ferrand, 15 au 18 septembre 1999.

Les techniques de courbes pseudo-holomorphes initiées par Gromov dans [29], l'idée de Witten des invariants [75] et l'idée de Kontsevich des espaces d'applications stables [40], convenablement raffinées, permettent de se tirer de bien des mauvais pas et de définir, maintenant pour toutes les variétés symplectiques, des « invariants de Gromov-Witten » qui sont, en effet, des invariants du type de déformation de la variété symplectique.

Je vais essayer d'expliquer, dans l'introduction, pourquoi on a besoin d'aller chercher des invariants si compliqués : il n'y a pas d'invariant local, pas d'invariant élémentaire global fin. J'expliquerai ensuite les remarques ci-dessus : il n'est pas si facile de compter les courbes pseudo-holomorphes... mais le faire fournit effectivement des invariants pour les variétés symplectiques.

Ce texte. La théorie est assez ardue dans sa réalisation. Il n'était donc pas question de donner des démonstrations complètes de résultats souvent très techniques. Pour ce survol, j'ai essayé de donner quelques idées, notamment des difficultés du sujet et de stratégies possibles pour les surmonter. J'ai donné des références assez nombreuses et, je l'espère, complètes. Une grande partie de la littérature sur le sujet est assez rébarbative⁽¹⁾, surtout pour les jeunes lecteurs. J'espère en particulier que les nombreuses figures⁽²⁾ présentes dans ce texte les aideront à comprendre les principaux exemples et problèmes, leur permettant ainsi d'accéder plus facilement à la compréhension des articles originaux.

Remerciements. Je remercie Sylvie Paycha pour sa lecture attentive d'une première version de ce texte, Daniel Bennequin, Philippe Eyssidieux, Pierre Vogel, Jean-Yves Welschinger et tous les participants des journées de Clermont-Ferrand pour leurs questions, remarques ou commentaires.

Je remercie toutes celles et ceux qui m'aideront à améliorer encore cette version préliminaire.

Note bibliographique. Il y a de nombreux livres de géométrie symplectique sur le marché [46, 52, 3, 7] par exemple. Pour une introduction rapide, efficace et inspirée, je conseille vivement [1]. Une référence commode et assez complète pour les propriétés de base des courbes holomorphes dans les variétés symplectiques et presque complexes est le livre [7], que je cite donc systématiquement, mais j'aime bien aussi [51]. J'ai aussi beaucoup utilisé (et même pillé) les articles [43, 4, 5], dont je remercie les auteurs pour leur aide involontaire.

Notations, dimensions. Toutes les variétés différentielles dont il est question dans ce texte ont une dimension paire. Beaucoup d'entre elles sont complexes. C'est une source de confusion pour les dimensions. J'appelle *dimension* la dimension comme variété différentielle (réelle, donc). Quand j'utilise la dimension complexe, je l'appelle toujours *dimension complexe*, de sorte qu'il ne devrait pas y avoir d'ambiguïté. Par contre, toutes les *courbes* sont des courbes complexes — c'est-à-dire de dimension 2. On appelle « courbe rationnelle » une courbe de genre 0, c'est-à-dire une sphère ou un $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Table des matières

| | |
|---|----|
| 1. Introduction : invariants, invariants mous, invariants grossiers | 3 |
| 2. Les courbes pseudo-holomorphes, une introduction aux invariants de Gromov-Witten | 6 |
| 3. Les espaces de modules d'applications stables | 14 |
| 4. Propriétés et calculs d'invariants, enfin | 28 |
| 5. Autres applications, autres invariants | 37 |
| 6. Appendice : les espaces projectifs et leur famille | 38 |
| Références | 39 |

⁽¹⁾La concurrence échevelée qui est de règle dans ce domaine n'a pas favorisé la parution d'articles bien écrits.

⁽²⁾Certains auteurs semblent mettre un point d'honneur, après avoir raisonné longuement sur une figure, à remplacer celle-ci, dans leur texte, par une explication obscure. J'espère notamment que les figures 11, 12 et 13 seront éclairantes.

1. Introduction : invariants, invariants mous, invariants grossiers

Une *variété symplectique* (W, ω) est une variété W munie d'une forme différentielle ω , de degré 2 qui est fermée et non-dégénérée, toutes propriétés qu'on résume en disant que ω est une *forme symplectique*.

Les premiers exemples sont

- D'abord \mathbf{R}^{2n} avec une forme bilinéaire alternée non dégénérée, qui, dans une base convenable, peut toujours s'écrire $\omega_0 = \sum dx_i \wedge dy_i$
- et plus généralement les fibrés cotangents des variétés.
- Toutes les surfaces orientables munies de formes volumes : toutes les 2-formes sur les surfaces sont fermées !
- Toutes les variétés kählériennes et notamment toutes les variétés projectives complexes (j'utiliserai beaucoup les espaces projectifs complexes, voir le § 6 pour ces exemples)
- et il y en a bien d'autres (kähleriennes ou non).

1.1. Invariants ? Appelons *difféomorphisme symplectique*⁽³⁾ un difféomorphisme $\varphi : W_1 \rightarrow W_2$ qui préserve les formes symplectiques, c'est-à-dire, vérifie $\varphi^* \omega_2 = \omega_1$.

On va s'intéresser ici à des invariants du type de difféomorphisme symplectique. Autant supposer la variété W comme fixée et considérer les formes symplectiques qu'elle admet, à difféomorphisme près. On considère donc l'ensemble \mathcal{W} des formes symplectiques sur W . C'est un ouvert (condition de non-dégénérescence) de l'espace vectoriel⁽⁴⁾ des 2-formes fermées.

Le groupe $\text{Diff}(W)$ des difféomorphismes de W opère sur \mathcal{W} . Un invariant à valeurs dans un espace topologique E est une application continue

$$\mathcal{W} / \text{Diff}(W) \longrightarrow E.$$

Par exemple l'application identique... mais ça ne fait pas avancer la science. L'idée est plutôt de prendre pour E un espace plus simple que $\mathcal{W} / \text{Diff}(W)$. Autre extrême, pas plus productif, toute application constante est un invariant.

Ici on utilisera des espaces discrets, notamment \mathbf{Z} . Un invariant à valeurs dans un espace discret (dit « invariant discret ») est constant sur les composantes connexes de $\mathcal{W} / \text{Diff}(W)$, on dit que c'est un invariant du type de déformation de la variété symplectique. Concrètement : deux formes ω_0 et ω sont dans la même classe de déformation s'il existe un difféomorphisme φ de W et un chemin ω_t ($t \in [0, 1]$) de formes symplectiques tels que $\varphi^* \omega = \omega_1$.

L'exemple trivial de l'invariant constant montre qu'à la difficulté de construire des invariants peut s'ajouter celle de montrer qu'ils ne sont pas triviaux, qu'ils peuvent effectivement distinguer deux formes symplectiques.

1.2. Pas d'invariant local. Localement, toutes les variétés symplectiques d'une dimension donnée sont identiques : le théorème de Darboux affirme qu'elles possèdent, au voisinage de chaque point, des coordonnées locales dans lesquelles la forme symplectique s'écrit $\omega = \sum dx_i \wedge dy_i$.

Théorème 1.2.1 (Darboux). Soit (W, ω) une variété symplectique de dimension $2n$ et soit x un point de W . Il existe un voisinage U de x et un difféomorphisme symplectique de $(U, \omega|_U)$ dans un ouvert de $(\mathbf{R}^{2n}, \omega_0)$.

Il n'y a donc pas d'invariant *local* du type de difféomorphisme symplectique d'une variété symplectique (W, ω) , comme l'est la courbure pour une variété riemannienne. Par exemple, si la courbure de la sphère empêche de dessiner des cartes « isométriques » de la Terre⁽⁵⁾, il n'y a rien qui empêche

⁽³⁾C'est ce que la plupart des auteurs appellent un « symplectomorphisme ».

⁽⁴⁾muni, par exemple, de la topologie \mathcal{C}^∞ .

⁽⁵⁾De la Lune non plus, d'ailleurs, remarque irrésistible en cet été 1999.

de dessiner des cartes (locales) dans lesquelles les *aires* sont exactes, ces cartes sont dites « équivalentes ».

1.3. Structures presque complexes et invariants mous. Pour une topologue classique, pensant en termes de groupes structurels, il n’y a pas de grande différence entre une 2-forme non dégénérée et une structure presque complexe.

– Dire qu’une variété est munie d’une 2-forme non dégénérée, c’est dire que le groupe structurel de son fibré tangent (qui est, *a priori* $GL(2n; \mathbf{R})$) se réduit à $Sp(2n; \mathbf{R})$

– alors que dire qu’elle est presque complexe, c’est dire qu’il se réduit à $GL(n; \mathbf{C}) \subset GL(2n; \mathbf{R})$.

Or, ces deux sous-groupes de $GL(2n; \mathbf{R})$ ont la même composante compacte, à savoir le groupe unitaire $U(n)$, qui est d’ailleurs leur intersection.

Un autre éclairage sur cette question est celui du géomètre kählérien. Une variété kählérienne est une variété analytique complexe sur laquelle est donnée une métrique hermitienne $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle_x$, que l’on peut décomposer en

$$\langle X, Y \rangle_x = g_x(X, Y) - i\omega_x(X, Y)$$

expression dans laquelle

– la partie réelle g est une métrique riemannienne sur la variété (réelle sous-jacente)

– et ω_x est une forme bilinéaire (réelle) alternée : ω est une 2-forme différentielle.

Je laisse les lecteurs vérifier que $\omega(X, iY) = g(X, Y)$ et que la multiplication par i est une isométrie (de g comme de ω).

En géométrie kählérienne, on peut donc jouer à la fois avec une métrique riemannienne, une forme symplectique et une structure complexe. En géométrie symplectique, on ne dispose que de la forme symplectique ω . On introduit des *ersatz* de i en copiant ces propriétés. On appellera structure presque complexe *calibrée* par une forme ω sur la variété W une section J de $\text{End}(TW)$ telle que :

– On a $J_x^2 = -\text{Id}_{T_x W}$ en tout point x de W : c’est dire que J définit une structure de fibré vectoriel complexe sur TW (penser à la multiplication par i dans un espace vectoriel complexe).

– L’application $(X, Y) \mapsto \omega(X, JY)$ définit une métrique riemannienne sur W pour laquelle J est une isométrie.

Il y a beaucoup de structures presque complexes calibrées par une forme symplectique. Il n’y a pas en général de choix naturel d’une telle structure. Une des idées fécondes de Gromov dans [29] est justement de considérer l’ensemble de toutes ces structures. Il n’est pas difficile de démontrer la proposition suivante (c’est essentiellement la remarque, faite ci-dessus, que le groupe $Sp(2n; \mathbf{R})$ se rétracte sur $U(n)$, voir, par exemple, [2]).

Proposition 1.3.1. *L’espace de toutes les structures presque complexes sur la variété W qui sont calibrées par la forme symplectique ω n’est pas vide et est contractile.*

Notons qu’en particulier, cet espace est connexe. Tous les invariants discrets de la variété presque complexe (W, J) (J calibrée par ω) se trouvent donc être, naturellement, des invariants⁽⁶⁾ de la variété symplectique (W, ω) . C’est le cas par exemple des classes de Chern du fibré vectoriel complexe (TW, J) . En particulier, une variété symplectique a des classes de Chern — ne dépendant pas de la structure presque complexe adaptée choisie.

Remarque 1.3.2. La raison essentielle pour laquelle ces invariants sont dits « mous⁽⁷⁾ », c’est qu’on n’utilise jamais, pour construire les structures presque complexes qui leur donnent naissance, le fait que la forme symplectique est *fermée*.

⁽⁶⁾À condition toutefois qu’ils soient définis pour *toute* structure presque complexe. Voir la remarque 4.3.6.

⁽⁷⁾Le qualificatif « mou » s’oppose à « dur », en anglais “soft” vs “hard”, la distinction est due à Gromov [30].

1.4. Un invariant bien grossier, le volume. L'exemple des cartes de la Terre au § 1.2 est un exemple de dimension 2. Dans cette dimension, il n'y a pas de différence entre une forme volume et une forme symplectique. En toute généralité, sur une variété symplectique (W, ω) de dimension $2n$, la forme $\omega^{\wedge n}$ est une forme volume (c'est précisément ce que dit la condition de non-dégénérescence) et donc les difféomorphismes symplectiques préservent le volume total de la variété.

On peut donc conclure que le volume total de la variété symplectique est un invariant de son type de difféomorphisme symplectique. Par exemple, il n'y a pas de difféomorphisme symplectique d'une grosse boule de \mathbf{R}^{2n} dans une boule plus petite. . . mais cet invariant est bien grossier.

La « géométrie du volume » n'est pas très rigide. En voici deux illustrations.

- Un théorème classique de Moser [55] affirme que deux formes volume sur une variété sont difféomorphes si et seulement si elles donnent le même volume à cette variété.
- Si U et V sont deux ouverts connexes de \mathbf{R}^n et si $\text{vol}(U) < \text{vol}(V)$, alors on peut plonger U dans V en préservant la forme volume.

La « largeur » de Gromov. La situation en géométrie symplectique est beaucoup plus rigide. Un des premiers effets de l'introduction des courbes pseudo-holomorphes par Gromov (j'anticipe un peu sur le § suivant) est un résultat de géométrie symplectique complètement opposé : un exemple d'un ouvert de volume fini (une grosse boule) qu'on ne peut pas plonger dans un autre, dont le volume est pourtant infini (un cylindre infini mais fin).

Théorème 1.4.1 (Gromov). *S'il existe un plongement symplectique de la boule B_R^{2n+2} dans le cylindre $B_r^2 \times \mathbf{R}^{2n}$, alors le rayon R de la boule est au plus égal à celui, r , du cylindre.*

En fait, Gromov a défini un *invariant symplectique* plus fin que le volume, la *largeur*, qui est R pour la boule, r pour le cylindre et qui interdit le plongement quand $R > r$.

On peut comprendre ce théorème comme un « principe d'incertitude » en mécanique classique. C'est un point de vue que C. Viterbo défend dans un joli article grand public qui reste une introduction très recommandable à la topologie symplectique [72], point de vue repris dans un autre article grand public plus généraliste [6].

1.5. « Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds ». Classes de Chern, volume, on en était plus ou moins là en 1985, lorsque Gromov a montré, dans l'article [29] éponyme de ce paragraphe, qu'en étudiant les courbes pseudo-holomorphes qu'elles contiennent, on pouvait en apprendre beaucoup plus sur les variétés symplectiques⁽⁸⁾. Le théorème 1.4.1 n'est qu'une des manifestations de l'efficacité de ce nouvel outil.

En géométrie analytique complexe, on fait un grand usage des fonctions holomorphes. En général, sur une variété presque complexe (W, J) , il y a peu, voire pas, de fonctions holomorphes (même locales). Une fonction f sur un ouvert U de W est holomorphe si sa différentielle est, en tout point de U , une forme linéaire *complexe* :

$$\forall w \in W, \quad \forall X \in T_w W, \quad (df)_w(JX) = i(df)_w(X).$$

De façon heuristique, disons que s'il y avait beaucoup de fonctions holomorphes, on pourrait en faire des cartes locales analytiques, J serait *intégrable* et la variété serait analytique complexe.

La grande idée de Gromov, c'est que, par contre, une variété presque complexe contient toujours beaucoup de courbes holomorphes.

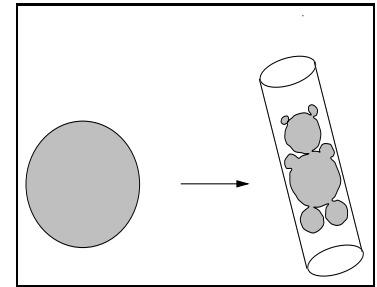


Figure 1 : une grosse boule dans un fin cylindre

⁽⁸⁾L'utilisation des courbes dans une variété pour comprendre la géométrie de cette variété fait penser au programme de Mori pour la classification des variétés algébriques, voir [14] (et sa bibliographie).

Si Σ est une surface de Riemann (sa structure complexe j est fixée), une application $u : \Sigma \rightarrow W$ est dite *J-holomorphe* (ou pseudo-holomorphe ou plus simplement holomorphe si on ne tient pas à préciser pour quelle structure) si son application tangente est linéaire sur \mathbf{C} , c'est à dire si

$$T_z u \circ j(\zeta) = J \circ T_z u(\zeta), \quad \forall z \in \Sigma, \quad \forall \zeta \in T_z \Sigma.$$

C'est la même condition que pour une fonction, à cela près que la variété est devenue l'espace but.

Espace de courbes. Ce sont les espaces de modules des courbes pseudo-holomorphes qui recèlent les *invariants de Gromov-Witten*, qui font l'objet de ce texte. Déjà présents dans [29], ces espaces de modules ont été tout de suite utilisés avec succès par McDuff pour classifier les variétés symplectiques de dimension 4 qui sont des fibrés en $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ [50, 44]. Des formes précoces ont été définies et utilisées par Ruan [60] pour distinguer des formes symplectiques sur une variété symplectique de dimension 6 (voir le § 2.5). Ils jouent la vedette en cohomologie quantique et donc en théorie des champs. Mentionnons enfin que les courbes pseudo-holomorphes ont aussi des applications en analyse complexe (voir par exemple [37]).

2. Les courbes pseudo-holomorphes, une introduction aux invariants de Gromov-Witten

Dans cette partie, je vais essayer de convaincre les lecteurs que les courbes pseudo-holomorphes peuvent être utiles en géométrie symplectique, en indiquant comment on les utilise pour interdire à la grosse boule de se plonger dans le fin cylindre. Ce schéma de la démonstration du théorème 1.4.1 met en effet en jeu les propriétés les plus importantes des espaces de courbes pseudo-holomorphes. Je l'utilise donc ici comme introduction aux idées les plus simples de la construction des invariants de Gromov-Witten — que je n'analyserai plus précisément qu'au § 3.

2.1. Existence locale. J'ai mentionné le fait qu'il y avait beaucoup de courbes holomorphes dans une variété presque complexe. En coordonnées locales

$$u : z = x + iy \in \Sigma \longmapsto (u_1(x, y), \dots, u_{2n}(x, y)) \in W,$$

la condition d'holomorphicité s'écrit

$$\frac{\partial u_j}{\partial y} = \sum_{k=1}^{2n} J_{j,k}(u(x, y)) \frac{\partial u_k}{\partial x} \quad (1 \leq j \leq 2n).$$

C'est un système différentiel de $2n$ équations aux dérivées partielles en $2n$ fonctions inconnues.

Si la variété W est analytique réelle et si J est une section analytique réelle de $\text{End}(TW)$, le théorème de Cauchy-Kowalevskaya implique l'existence locale de solutions analytiques. Ceci reste vrai avec des hypothèses C^∞ parce que le système est quasi-linéaire et elliptique. En effet, le système linéarisé n'est autre que le système des équations de Cauchy-Riemann, qui est elliptique. Voir aussi le § 2.4.

Les courbes pseudo-holomorphes jouissent de toutes les propriétés de régularité des solutions d'un système elliptique. Voir par exemple [67].

2.2. Application à la boule dans le cylindre. Donnons ici une idée de la façon dont on peut utiliser les courbes pseudo-holomorphes pour démontrer le théorème 1.4.1 : les deux propriétés essentielles attendues des espaces de modules des courbes pseudo-holomorphes, à savoir lissité et compacité, sont en effet présentes dans cette démonstration.

On utilise une variété symplectique produit $W = S^2 \times V$, que je préfère⁽⁹⁾ écrire $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times V$, où l'on suppose que V est une variété symplectique « sans sphères », c'est-à-dire telle que $\pi_2(V) = 0$. Dans les applications, ce sera un tore. On démontre d'abord le théorème suivant.

⁽⁹⁾À partir d'ici, je vais faire un grand usage des espaces projectifs avec leurs structures complexe, kählérienne, etc. usuelles. En cas de besoin, consulter le § 6.

Théorème 2.2.1 (Gromov [29]). Soit (V, σ) une variété symplectique compacte sans sphères et soit J une structure presque complexe sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times V$ calibrée par la forme symplectique $\omega \oplus \sigma$. Tout point (x, v) de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times V$ est contenu dans exactement une J -sphère de la classe d'homologie de la fibre $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \{v\}$ de v .

Voir la figure 2 pour une explication de cet énoncé : si la structure presque complexe J est le produit de structures presque complexes sur les facteurs, les fibres de la projection $\mathbf{P}^1 \times V \rightarrow V$ sont, évidemment les J -sphères dont l'énoncé affirme l'existence... pour toute structure J .

Voici une idée de la démonstration. On considère l'ensemble \mathcal{C} des couples (u, J) où J est une structure presque complexe calibrée et u une J -sphère de W dans la classe d'homologie de la fibre. On peut munir \mathcal{C} d'une structure de variété modelée sur une suite convenable d'espaces de Hölder ou de Sobolev (voir [31] et [12]).

Soit p la projection de \mathcal{C} sur l'espace \mathcal{J} des structures presque complexes calibrées. Le point clef est de montrer que p est surjective. Comme nous savons depuis la proposition 1.3.1 que \mathcal{J} est connexe, il suffit de montrer que l'image de \mathcal{C} est ouverte, fermée et non vide.

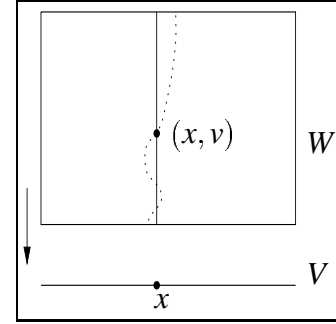


Figure 2

- (1) On a déjà remarqué que $p(\mathcal{C})$ n'est pas vide : si J est une structure produit, elle est l'image de n'importe quel couple (u, J) où u représente une fibre.
- (2) On montre que $p(\mathcal{C})$ est ouverte parce qu'elle se linéarise en une application surjective. Il faut utiliser là un théorème d'annulation et un calcul d'indice (voir [29], [49]) basé sur le théorème de Riemann-Roch. Voir le § 2.4.
- (3) Enfin, $p(\mathcal{C})$ est fermée grâce à un théorème de compacité, basé sur une propriété générale d'équicontinuité [29, 56]. Remarquons quand même que l'espace des applications pseudo-holomorphes $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow W$ n'est pas compact : le groupe de reparamétrage $PGL(2; \mathbf{C})$ n'est pas compact ! On ne peut même pas espérer que l'espace des courbes J -holomorphes (non paramétrées) soit compact. Penser à une famille de coniques planes convergeant vers la réunion de deux droites (voir la figure 5). En fait c'est ce qui peut se produire de pire. Je reviendrai longuement sur cet exemple et sur le théorème de compacité aux §§ 3.2 et 3.3. En tout cas ici, comme la classe d'homologie des fibres ne peut pas se décomposer, ce pire ne peut pas se produire et on a, effectivement, compacité. \square

Avec le même schéma de démonstration, on peut montrer, par exemple, un autre résultat impressionnant d'existence de courbes sur lequel je reviendrai au § 5.3.

Théorème 2.2.2 (Gromov [29]). Soit J une structure presque complexe calibrée par la forme de Kähler usuelle de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Par deux points de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ passe une et une seule J -courbe de la classe d'homologie des droites projectives. \square

Démonstration du théorème 1.4.1. Armés du théorème 2.2.1, montrons donc qu'on ne peut pas plonger la grosse boule dans le fin cylindre. Supposons, au contraire, que ce soit possible. Soit

$$\varphi : B_R^{2n+2} \hookrightarrow B_r^2 \times \mathbf{R}^{2n}$$

un plongement symplectique. La stratégie est, d'abord, de remplacer $B_r^2 \times \mathbf{R}^{2n}$ par une variété de la forme $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times V$ pour pouvoir appliquer le théorème 2.2.1.

Considérons une boule fermée $\bar{B} = \bar{B}_R^{2n+2}$ contenue dans B_R^{2n+2} . Comme $\varphi(\bar{B})$ est compacte, elle est contenue dans un produit

$$B_r^2 \times \left] -\frac{A}{2}, \frac{A}{2} \right[^{2n} \text{ pour } A > 0 \text{ assez grand.}$$

Remplaçons donc \mathbf{R}^{2n} par $[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]^{2n}$, ou, mieux, par le tore $T^{2n} = \mathbf{R}^{2n}/AZ^{2n}$. La forme symplectique de \mathbf{R}^{2n} étant invariante par translation, elle définit une forme symplectique σ sur T^{2n} .

On a donc un plongement symplectique de la boule ouverte $B_{R'}^{2n+2}$ dans $B_r^2 \times T^{2n}$. Le tore va être le V du théorème 2.2.1. Remplaçons maintenant le disque B_r^2 par $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

On vérifie directement que le disque B_r^2 est « symplectomorphe » au complémentaire d'un point dans la sphère de même volume, c'est-à-dire ici de rayon $r/2$. Munissons donc $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de la forme symplectique ω qui lui donne le volume πr^2 . On a maintenant un plongement symplectique de $B_{R'}^{2n+2}$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times T^{2n}$.

Prenons une boule de rayon R'' encore plus petit. Soit J_0 la structure complexe *standard* de $\mathbf{R}^{2n+2} = \mathbf{C}^{n+1}$. Comme φ est un plongement symplectique, elle définit une structure complexe $\varphi_*(J_0)$ sur l'image $\varphi(\overline{B_{R''}})$, qui est calibrée par la restriction de la forme symplectique $\omega \oplus \sigma$ de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times T^{2n}$. La proposition 1.3.1 ou une version relative permet de prolonger cette structure calibrée à tout $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times T^{2n}$. On applique maintenant le théorème 2.2.1 : il existe une courbe C holomorphe (pour cette structure bizarre) qui est homologue à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \{\star\}$ et passe par l'image $\varphi(0)$ du centre de la boule. On a

$$\int_C \omega \oplus \sigma = \langle \omega \oplus \sigma, [C] \rangle = \langle \omega \oplus \sigma, [\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \{\star\}] \rangle = \langle \omega, [\mathbf{P}^1(\mathbf{C})] \rangle = \pi r^2$$

par définition de ω . Pour l'intersection $C' = C \cap \varphi(\overline{B_{R''}})$, on a donc

$$\pi r^2 \geq \int_{C'} \omega \oplus \sigma = \int_{\varphi^{-1}(C')} \omega_0$$

puisque ω est symplectique.

Maintenant $\varphi^{-1}(C')$ est une courbe holomorphe pour la structure complexe standard de \mathbf{R}^{2n+2} (elle a été construite pour ça) et son bord est contenu dans la sphère de rayon R'' . Maintenant, toute courbe complexe d'une variété kählérienne est minimale. Les sous-variétés minimales vérifient une propriété de monotonie, ici

$$\text{vol}(\overline{B_{R''}^{2n+2}} \cap \varphi^{-1}(C')) \geq \text{vol}(\overline{B_{R''}^2}) = \pi R''^2$$

(c'est, par exemple le théorème 3.2.4 de [42]). On a donc $R'' < r$, ceci pour tout $R'' < R'$ et tout $R' < R$, donc $R \leq r$, la conclusion cherchée. \square

2.3. Invariants de Gromov-Witten, introduction. On considère donc une variété symplectique (W, ω) et une structure presque complexe J calibrée par ω .

On va considérer des espaces de courbes J -holomorphes. Une courbe (paramétrée) $u : \Sigma \rightarrow W$ définit une classe d'homologie $A = u_*[\Sigma] \in H_2(W; \mathbf{Z})$. L'idée est de compter les courbes d'une classe d'homologie donnée satisfaisant certaines conditions d'incidence.

2.3.1. L'exemple des droites du plan. Explicitons la différence entre « courbe » et « courbe paramétrée » sur un exemple simple. Considérons le cas où W est le plan projectif complexe (muni de sa structure complexe habituelle) et choisissons la classe d'homologie représentée par les droites projectives, c'est-à-dire le générateur L de $H_2(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$. Les courbes holomorphes qui représentent cette classe sont les courbes algébriques de degré 1 et donc, effectivement, les droites. Elles se laissent donc paramétrer par les applications « linéaires »

$$u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C}).$$

- L'espace de ces applications est dimension complexe 5 : on donne u en donnant trois polynômes homogènes de degré 1 (ce qui fait six coefficients), à multiplication par un même scalaire près.
- L'espace des courbes non paramétrées est l'espace des droites de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, la grassmannienne $G_2(\mathbf{C}^3)$ (une autre version du plan projectif !), de dimension complexe 2.

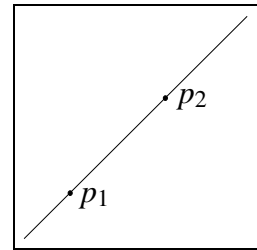


Figure 3 : par deux points

La différence est le groupe de reparamétrage, le groupe des automorphismes de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ ici, à savoir $PGL(2; \mathbf{C})$, qui est bien de dimension complexe 3, le compte est bon.

Toujours sur cet exemple simple, donnons aussi un exemple de condition d'incidence. Traduisons « par deux points passe une droite et une seule » en termes homologiques. On considère l'espace de modules \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = \{(u, z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}), z_1 \neq z_2, u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C}), u_*[\mathbf{P}^1] = L\} / PSL(2; \mathbf{C})$$

... c'est un fibré sur $G_2(\mathbf{C}^3)$ dont les fibres sont les couples de points distincts dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Donc la dimension complexe de \mathcal{M} est 4.

Cet espace porte en lui une application d'évaluation

$$\begin{aligned} \mathcal{M} & \xrightarrow{\text{év}} \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \\ (u, z_1, z_2) & \longmapsto (u(z_1), u(z_2)). \end{aligned}$$

On remarquera que source et but ont la même dimension. L'assertion « par deux points... » est équivalente au fait que l'application év est de degré 1 : étant donné un point général⁽¹⁰⁾ (p_1, p_2) de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, son image inverse $\text{év}^{-1}(p_1, p_2)$ est constituée d'un unique élément (figure 3). En mentionnant le degré, j'ai passé sous silence le problème de compacité. Voir le § 2.4.

Retenons de cet exemple que « compter » les courbes satisfaisant certaines conditions d'incidence peut être, simplement, « calculer le degré » d'une application d'évaluation définie sur un espace de modules... l'idée est proche de celle utilisée par Donaldson [18] pour définir ses polynômes.

2.3.2. Espaces de modules et évaluation. Revenons au cas général. On donne donc une classe $A \in H_2(W; \mathbf{Z})$ et des sous-variétés $Z_1, \dots, Z_m \subset W$ et on veut donner un sens au « nombre de courbes de genre g de la classe A coupant Z_1, \dots, Z_m quelque part » (figure 4).

Comme dans l'exemple simple des droites de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, la stratégie est de définir un espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A)$ convenable, espace de courbes complexes de genre g avec m points marqués :

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A) = \{(u, (z_1, \dots, z_m))\} / G,$$

G désignant bien sûr le groupe d'automorphismes de la situation.

Les points z_1, \dots, z_m de Σ servent à construire les applications d'évaluation qui vont permettre d'imposer les conditions d'incidence :

$$\begin{aligned} \text{év}_m : \overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A) & \longrightarrow W^m \\ (u, (z_1, \dots, z_m)) & \longmapsto (u(z_1), \dots, u(z_m)). \end{aligned}$$

Appelons ξ_1, \dots, ξ_m les classes de cohomologie duales à Z_1, \dots, Z_m , notre invariant devrait être

$$\Psi_{g,A}^J(\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_m) = \left\langle (\text{év}_m)^*(\xi_1 \otimes \dots \otimes \xi_m), \left[\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A) \right] \right\rangle \in \mathbf{Z}.$$

La difficulté est de construire ces espaces de modules $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A)$... et de démontrer que ceux-ci ont, sous certaines hypothèses, des classes fondamentales.

2.4. Quelques problèmes. Ce sont, rapidement dit, la dépendance en J et les (graves) problèmes liés à l'existence d'une classe fondamentale : lissité, orientabilité, compacité, que je vais passer en revue dans ce §.

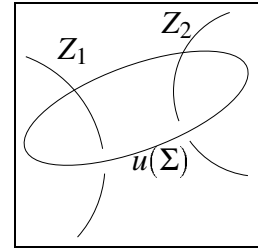


Figure 4

⁽¹⁰⁾ici, deux points p_1 et p_2 distincts dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$

2.4.1. *La dépendance en J .* On s'intéresse au nombre de courbes J -holomorphes de genre g dans la classe d'homologie $A \in H_2(W; \mathbf{Z})$, mais on aimerait que le résultat ne dépende que de la forme symplectique et pas du choix de la structure presque complexe J que celle-ci calibre,

- soit parce que ce qu'on cherche, c'est un invariant de la forme symplectique,
- soit parce qu'il y a une structure complexe meilleure que les autres et que ce sont les courbes de celle-ci qu'on veut compter.

Un exemple naturel de cette dernière situation est celui de la géométrie énumérative des courbes planes ayant telle ou telle propriété d'incidence. Il s'agit ici de courbes holomorphes dans la variété (complexe !) $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et d'un problème très respectable (nombre de droites passant par deux points donnés, nombre de coniques passant pas cinq points, *etc.*). Aucune géomètre algébriste ne se contentera d'un énoncé comme « Pour une structure presque complexe générique sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, par deux points il passe une et une seule J -droite ». Ce qu'elle veut savoir, c'est combien de vraies droites pour la vraie structure complexe de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ il peut bien passer par ces deux points. Voir le § 3.4.3.

2.4.2. *L'orientabilité.* Dans l'exemple de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ avec sa structure complexe usuelle et plus généralement d'une variété munie d'une structure complexe intégrable, l'espace de modules est, quand il est défini, complexe, donc le problème d'orientabilité ne se pose pas. Dans le cas non intégrable, il possède une structure presque complexe *stable*⁽¹¹⁾ naturelle, qui définit son orientation (voir [49]).

2.4.3. *La lissité.* Il y a d'abord un problème lié au fait que l'espace de modules est un *quotient*, mais ce problème n'est pas très grave, dès lors qu'on accepte des singularités du type *orbifold*, c'est-à-dire des quotients de variétés par des groupes finis. La seule retombée de cette tolérance est qu'alors la classe fondamentale est dans $H_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W,A); \mathbf{Q})$ et que les invariants obtenus sont *a priori*, rationnels.

Il y a surtout un problème de régularité, pour que l'espace des applications holomorphes soit lisse. Si J est une structure presque complexe sur W , on peut considérer la partie anti- \mathbf{C} -linéaire de du :

$$\bar{\partial}_J u = \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j)$$

comme un élément de $\Omega^{0,1}(u^*TW)$ c'est à dire de $C^\infty(\Lambda^{0,1}T^*\Sigma \otimes_J u^*TW)$.

Les courbes J -holomorphes sont les zéros (dans l'ensemble $\mathcal{X}(A)$ de toutes les applications représentant A) de $\bar{\partial}_J$ (c'est une autre façon d'écrire l'« équation de Cauchy-Riemann »). On peut considérer le « fibré vectoriel » $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}(A)$ dont la fibre \mathcal{E}_u en $u \in \mathcal{X}(A)$ est $\Omega^{0,1}(u^*TW)$; $\bar{\partial}_J$ est alors une section de \mathcal{E} , et l'espace des courbes J -holomorphes de la classe A est l'ensemble des zéros de cette section. On peut alors se demander si cette section est transverse à la section nulle, en d'autres termes si la composition D_u^J

$$C^\infty(u^*TW) = T_u\mathcal{X} \xrightarrow{T_u(\bar{\partial}_J)} T_{(u,0)}\mathcal{E} = T_u\mathcal{X} \oplus \mathcal{E}_u \xrightarrow{\text{proj}} \mathcal{E}_u = \Omega^{0,1}(u^*TW)$$

est une application linéaire surjective pour toute solution u de $\bar{\partial}_J u = 0$.

C'est un fait que D_u^J est Fredholm. Elle n'est pas en général linéaire sur \mathbf{C} (elle l'est quand J est intégrable), mais sa partie antilinéaire est un opérateur d'ordre 0 (s'exprimant à l'aide du tenseur de Nijenhuis de J). On peut donc homotoper D_u^J , parmi les opérateurs de Fredholm, à sa partie \mathbf{C} -linéaire, un opérateur $\bar{\partial}$, qui définit une structure holomorphe sur u^*TW . L'indice de D_u^J est alors donné par le théorème de Riemann-Roch (voir par exemple [25]) :

$$\text{Ind } D_u^J = 2\langle c_1, A \rangle + 2n(1 - g),$$

c'est la *dimension virtuelle* ou *attendue* de l'espace des courbes J -holomorphes de genre g dans la classe A .

⁽¹¹⁾C'est dire que son fibré tangent, auquel on ajoute un certain fibré trivial, possède une structure de fibré vectoriel complexe.

Exemple 2.4.4. Pour $W = \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, $A = L$ et $g = 0$, la formule donne une dimension virtuelle 10 pour l'espace des applications holomorphes de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ de la classe des droites. C'est cohérent avec l'évaluation faite ci-dessus au § 2.3.1 : pour la structure complexe usuelle, la dimension complexe était 5.

Il n'est pas vrai en général que l'on ait une propriété de régularité assurant que l'espace des courbes J -holomorphes soit une variété de la dimension attendue. Illustrons ce problème par un exemple (ou plutôt un contre-exemple) simple.

Exemple 2.4.5. Considérons l'espace $\tilde{\mathbf{P}}^2(\mathbf{C})$ obtenu en éclatant un point dans le plan projectif complexe $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et la classe E du diviseur exceptionnel (voir si nécessaire le § 6). La formule de Riemann-Roch appliquée à la classe $2E$, à la structure complexe usuelle et aux courbes de genre nul ($\Sigma = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$) de cette classe donne une dimension virtuelle égale à 8. Mais les applications holomorphes de degré 2 de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans lui-même forment un espace de dimension (réelle) 10 : on donne deux polynômes homogènes de degré 2 soit six coefficients complexes, à multiplication par un même scalaire près, donc la dimension complexe est 5. Donc, pour toute structure complexe J assez proche de la structure standard, il y a une famille de dimension au moins 10 de courbes J -holomorphes rationnelles dans la classe $2E$. Le problème vient de l'existence de courbes qui sont des revêtements multiples (et ne se pose que pour des classes A de la forme mB pour $m \geq 2$). Voir aussi, pour cet exemple, les §§ 3.4.15 et 4.4.

Le problème des revêtements multiples. Considérons une classe d'homologie $A \in H_2(W; \mathbf{Z})$ d'une variété symplectique W de dimension $2n$ qui contient des courbes J -holomorphes rationnelles. Supposons la structure presque complexe calibrée J régulière pour la classe A , de sorte que la dimension de l'espace de ces courbes rationnelles (non paramétrées) est sa dimension virtuelle $2\langle c_1, A \rangle + 2n - 6$. Comme on a supposé que la classe A contient vraiment des courbes rationnelles, ce nombre est positif. Donc on a $\langle c_1, A \rangle \geq 3 - n$.

L'espace des courbes rationnelles J -holomorphes de la classe mA n'est pas vide non plus : en composant une courbe de la classe A avec une application de degré m de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans lui-même, on voit qu'il est de dimension au moins $4m + 2$ (l'espace des applications de degré m de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans lui-même est de dimension complexe $2m + 1$).

Or, la dimension virtuelle de cet espace est $2m\langle c_1, A \rangle + 2n - 6$, de sorte que, si l'on suppose $\langle c_1, A \rangle < 0$, on arrive à une catastrophe : pour m assez grand, cet espace, qui a une assez grande dimension, a une dimension virtuelle négative. *Aucune* structure presque complexe ne peut être régulière pour la classe mA .

2.4.6. La compacité. J'ai un peu triché en parlant du degré de l'application d'évaluation dans l'exemple des droites du plan. L'espace \mathcal{M} que j'ai utilisé n'est, en effet, pas compact. C'est un fibré sur la grassmannienne, de fibre le complémentaire de la diagonale dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$: on a demandé que les deux points z_1 et z_2 soient distincts ! Le remède est très simple dans ce cas : on compactifie \mathcal{M} brutalement en autorisant les deux points à coïncider. Le degré obtenu est bien 1 : l'image inverse $\text{év}^{-1}(p_1, p_2)$ ne rencontre pas la partie ajoutée pour compactifier.

Mais le problème peut être beaucoup plus sérieux. J'ai déjà évoqué le cas des coniques⁽¹²⁾ planes. Regardons le plus en détail. Chacun comprend que la suite de coniques lisses $xy = \alpha$ converge, quand

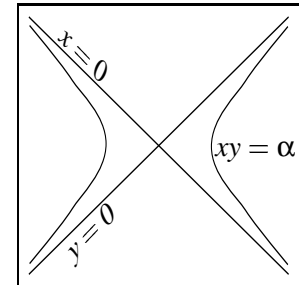


Figure 5 : conique dégénérant

⁽¹²⁾Exemple tout aussi inévitable que celui des droites passant par deux points *supra* et que celui de la cubique dégénérant *infra*.

α tend vers 0, vers la réunion des deux droites $xy = 0$ (figure 5). Explicitons le phénomène en termes d'applications. Soit, pour $\alpha \neq 0$,

$$u_\alpha : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \longmapsto \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$$

$$[x, y] \longmapsto [x^2, \alpha y^2, xy]$$

(en coordonnées homogènes). Le point $[0, 1]$ est envoyé sur $[0, 1, 0]$, point à l'infini de l'axe des y , et ceci pour tout $\alpha \neq 0$. Tous les autres points $[x, y]$ avec $x \neq 0$ sont envoyés sur les $[1, \alpha t, t]$. Quand α tend vers 0, ces points tendent vers ceux de l'axe des x .

Il n'y a *pas* d'application de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ qui paramètre la réunion de deux droites. Je reviendrai de façon plus précise sur ce phénomène au § 3.3 : c'est ce qu'on appelle la formation de « bulles ».

On voit que, pour compactifier raisonnablement l'espace des applications de degré 2 de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, il faut lui ajouter des applications définies sur la réunion de deux droites sécantes, ce que les topologues (réels) aiment dessiner comme sur la figure 6, justifiant ainsi la terminologie « bulle ».

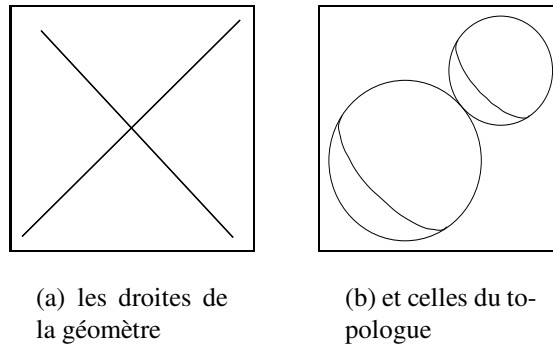


Figure 6 : pourquoi « bulles » ? deux points de vue sur deux droites sécantes

Des courbes, disons rationnelles, d'une classe d'homologie A , peuvent très bien converger vers des courbes décomposées, quand la classe A elle-même se décompose en somme $A = B + C$ de classes contenant des J -courbes rationnelles.

Le problème des revêtements multiples (suite). Aux problèmes de régularité soulevés par les revêtements multiples s'ajoutent des problèmes de compacité. Je viens d'évoquer le fait que, pour compactifier l'espace des courbes J -holomorphes d'une classe A décomposée en $A = B + C$ où les classes B et C contiennent des J -courbes, il faudrait rajouter des courbes des classes B et C .

Supposons que $A = B + mC$. La dimension virtuelle des J -courbes rationnelles de la classe A est

$$2\langle c_1, B \rangle + 2m\langle c_1, C \rangle + 2n - 6.$$

Dans l'adhérence, il doit y avoir des courbes avec une composante de la classe B et une de la classe mC (et notamment des revêtements d'ordre m d'une courbe de la classe C). Donc, pour compactifier, il faut ajouter — entre autres choses — un espace de dimension au moins égale à

$$[2\langle c_1, B \rangle + 2n - 6] + [2\langle c_1, C \rangle + 2n - 6 + 4m + 2].$$

En faisant croître m , on s'aperçoit que, si $\langle c_1, C \rangle < 0$, la dimension de cette composante du « bord » devient rapidement plus grande que la dimension de l'espace lui-même.

2.5. Oui, ce sont des invariants du type de déformation. À titre de motivation pour la construction, je vais montrer, selon Ruan [60], un exemple dans lequel ces invariants permettent effectivement de distinguer deux formes symplectiques qui ont les mêmes invariants mous.

La variété, de dimension 6, est de la forme $W = V \times \Sigma$ où V est une surface algébrique complexe et Σ une surface de Riemann. La stratégie est la suivante.

- On utilise d'abord un résultat classique sur les variétés de dimension 6. Si V_1 et V_2 sont des surfaces complexes et si $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ est une équivalence d'homotopie telle que $\phi^*c_1(V_2) = c_1(V_1)$, alors il existe un *difféomorphisme*

$$\tilde{\phi} : V_1 \times \Sigma \longrightarrow V_2 \times \Sigma$$

vérifiant $\tilde{\phi}^*c_1(V_2 \times \Sigma) = c_1(V_1 \times \Sigma)$ (c'est une conséquence de résultats de Wall, voir [74]). D'après la classification des structures presque complexes sur les variétés de dimension 6 (un théorème de Wu [76]), les structures presque complexes sur $V_1 \times \Sigma$ et $V_2 \times \Sigma$ sont alors homotopes.

- Reste à choisir les V_i de façon que les invariants de Gromov-Witten distinguent $V_1 \times \Sigma$ et $V_2 \times \Sigma$. C'est ce que j'explique rapidement dans la suite de ce paragraphe.

Soit donc V une surface complexe et soit $E \subset V$ une courbe « exceptionnelle », c'est-à-dire telle que $E \cdot E = -1$. Une telle courbe est vraiment exceptionnelle au sens où elle est seule de son espèce dans son entourage : dans un voisinage de E , il n'y a aucune courbe de la même classe d'homologie (deux courbes complexes se coupent avec une intersection positive), on ne peut donc pas déformer E . Considérons sa classe d'homologie dans $V \times \Sigma$:

$$A = [E] \in H_2(V; \mathbf{Z}) = H_2(V) \otimes H_0(\text{pt}; \mathbf{Z}) \subset H_2(V \times \Sigma; \mathbf{Z}).$$

On munit $V \times \Sigma$ de sa structure complexe naturelle et on considère un espace de modules que je note (en anticipant un peu sur le § 3) $\overline{\mathcal{M}}_{0,1}(V \times \Sigma, A)$. Il s'agit de l'espace des applications holomorphes $u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow V \times \Sigma$ telles que

- $u_*[\mathbf{P}^1(\mathbf{C})] = A$,
- avec en plus un point « marqué » sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$
- et modulo le quotient par le groupe de reparamétrage.

Il s'agit donc ici des courbes rationnelles de la classe A avec un point marqué. Dans ce cas, c'est très simple : la dimension complexe attendue de cet espace est 2 et, de fait, il s'identifie à $E \times \Sigma$. Considérons en effet une application u représentant la classe A . C'est un paramétrage d'une courbe $E \times \{s\}$ pour un certain point s de Σ et l'isomorphisme envoie le point marqué dans E et l'application sur le point s . L'application d'évaluation

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,1}(V \times \Sigma, A) \xrightarrow{\text{év}} V \times \Sigma$$

n'est autre que l'inclusion naturelle

$$E \times \Sigma \longrightarrow V \times \Sigma.$$

Pour la classe $\xi \in H^4(V \times \Sigma; \mathbf{Z})$ duale à $E \times \{\text{pt}\}$, on évalue

$$\Psi_{0,1}^A(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \text{év}^* \xi, [\overline{\mathcal{M}}_{0,1}(V \times \Sigma, A)] \rangle = (E \times \Sigma) \cdot (E \times \{\text{pt}\}) = E \cdot E = -1$$

(et ceci pour la structure complexe donnée mais donc aussi pour toute structure presque complexe J assez proche).

Soit maintenant V_1 une surface complexe obtenue en éclatant k points dans une surface V assez générale (V n'est ni $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ni un fibré en $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$). En utilisant les théorèmes de classification de Mori [54] et McDuff [50], on montre que les seules classes A de V qui vérifient

$$\langle c_1, A \rangle = 1, \quad A \cdot A = -1 \text{ et } \Psi_{0,1}^A \neq 0$$

sont précisément les classes des k diviseurs exceptionnels.

D'autre part, si V_2 est obtenue en éclatant k points dans une surface réglée non rationnelle, il y a au plus k classes distinctes A_1, \dots, A_k telles que

$$\langle c_1, A_i \rangle = 1, \quad A_i \cdot A_j = 0 \text{ et } \Psi_{0,1}^{A_j} \neq 0.$$

Récapitulons. On choisit

- une surface V non minimale et la surface V_1 obtenue en éclatant k points dans V
- une surface V' réglée, non rationnelle et la surface V_2 obtenue en éclatant k points dans V'

et ceci de façon qu'il y ait une équivalence d'homotopie de V dans V' préservant la première classe de Chern. C'est effectivement possible [60]. Ainsi, d'après les remarques préliminaires à la construction, $V_1 \times \Sigma$ et $V_2 \times \Sigma$ sont des variétés presque complexes du même type de déformation.

On vérifie pour conclure, en utilisant les calculs ci-dessus que dans $V_1 \times \Sigma$, il y a plus de k classes exceptionnelles, contrairement à ce qui se passe dans $V_2 \times \Sigma$. Donc ces deux variétés symplectiques ne sont pas du même type de déformation.

Remarque 2.5.1. L'invariant utilisé ici pour distinguer les structures symplectiques sur $W = V_1 \times \Sigma$ est donc une application

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &\longrightarrow \text{Hom}(H_2(W; \mathbf{Z}) \otimes H^4(W; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}) \\ \omega &\longmapsto \left((A, \xi) \mapsto \Psi_{0,1}^A(\xi) \right). \end{aligned}$$

Remarque 2.5.2. L'ensemble des formes de Kähler sur une variété complexe est un cône convexe. Il n'y a donc qu'une classe de déformation de formes de Kähler. Or les formes symplectiques utilisées sur W dans les exemples de Ruan sont kählériennes. Contradiction ? Non ! Les structures complexes sont homotopes... seulement parmi les structures presque complexes.

3. Les espaces de modules d'applications stables

On veut donc construire un espace de modules pour les applications J -holomorphes qui tienne compte des problèmes de dégénérescence et de compacité évoqués ci-dessus. La riche idée, c'est l'espace de modules d'applications stables de Kontsevich [40], à quoi nous amenaient les considérations précédentes. On remarquera qu'au cours de la partie précédente, on est passé insensiblement du « qu'est-ce qu'on compte ? » au « comment on le compte ? ».

Dans cette partie, je définis les espaces de modules d'applications stables de Kontsevich, avec quelques exemples simples. Je décris leur topologie, évoque leur compacité et m'interroge sur leur lisibilité.

3.1. Espaces d'applications stables. Soit W une variété symplectique munie d'une structure presque complexe J calibrée par sa forme symplectique.

- On appelle *application stable* un paquet (Σ, \vec{z}, u) , dans lequel
- Σ est une courbe complexe de genre g , peut-être singulière mais avec, au pire des points doubles ordinaires, c'est-à-dire des singularités représentées (au choix) comme sur la figure 6.
 - la notation $\vec{z} = (z_1, \dots, z_m)$ désigne une suite ordonnée de m points distincts de Σ (qu'on appelle des « points marqués »)
 - et $u : \Sigma \rightarrow W$ est une application J -holomorphe.

Les points singuliers et les points marqués sont regroupés sous le qualificatif commun de « spéciaux ». Le genre utilisé ici est le genre *arithmétique*, dont je rappelle une définition topologique. À la surface Σ , on associe un graphe Γ_Σ :

- les sommets correspondent aux composantes de Σ ,
- on relie deux sommets par une arête quand les composantes de Σ correspondantes se coupent.

Le genre *arithmétique* de Σ est, par définition, la somme des genres des composantes plus la dimension de $H_1(\Gamma_\Sigma)$. Par exemple, la figure 7 représente une courbe de genre arithmétique 2 (avec deux points marqués et trois points singuliers).

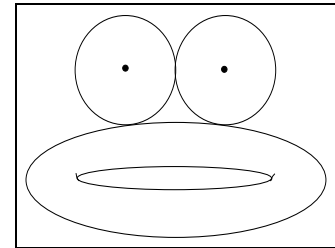


Figure 7

Il faut expliquer maintenant la notion de stabilité. Elle vient de la théorie de Deligne-Mumford des espaces de modules de courbes marquées stables.

Courbes marquées stables. Une courbe marquée stable est un paquet (Σ, \vec{z}) comme ci-dessus, sauf qu'il n'y a pas d'application. La condition de stabilité sert à fabriquer l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}$ des classes d'isomorphisme de courbes marquées : on dit que (Σ, \vec{z}) est *stable* si son groupe d'automorphisme est discret.

Exemples 3.1.1

- En genre 0. Un automorphisme de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est déterminé par les images de trois points distincts. Les automorphismes de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ qui fixent deux points ou moins forment un sous-groupe non discret de $PGL(2; \mathbf{C})$. Donc
 - La courbe marquée $(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), z_1, \dots, z_m)$ est stable si et seulement si $m \geq 3$.
 - L'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ est un point. On trouvera une description de $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ au § 4.3.
- En genre 1. Une courbe lisse de genre 1 est, au choix près d'une origine, une courbe elliptique, c'est-à-dire un tore \mathbf{C}/Λ . En particulier, elle a un groupe d'automorphismes de dimension 1... et donc, si Σ est de genre 1, $(\Sigma, z_1, \dots, z_m)$ est stable si et seulement si $m \geq 1$.
- En genre plus grand. Les courbes de genre $g \geq 2$ ont un groupe d'automorphismes fini, ces courbes sont donc toujours stables.

Une façon courte d'exprimer la condition de stabilité est donc : $m + 2g \geq 3$.

Remarque 3.1.2. J'utiliserai surtout $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}$, la compactification de Deligne-Mumford-Knudsen de l'espace des classes d'isomorphisme de m points distincts ordonnés dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Voir [39, 38, 13, 32] pour des propriétés de ces espaces.

Applications stables. Imposons à nos « applications » (Σ, \vec{z}, u) une condition de stabilité analogue. Il faut commencer par préciser la notion d'isomorphisme. On dit que deux applications stables (Σ, \vec{z}, u) et (Σ', \vec{z}', u') sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma'$ tel que $\varphi(z_i) = z'_i$ pour tout i et que $u' \circ \varphi = u$.

On demande que les paquets n'aient pas d'automorphisme infinitésimal. C'est exactement demander que les composantes de Σ sur lesquelles u est constante soient des courbes *stables* au sens ci-dessus.

Plus concrètement, en pensant aux exemples 3.1.1,

- Si u est constante sur une composante de genre 0, cette composante doit porter au moins trois points spéciaux (singuliers ou marqués),
- de même, si u est constante sur une composante de genre 1, celle-ci doit porter un point spécial.

L'espace de modules des applications stables. L'ensemble des classes d'isomorphisme des applications stables des courbes de genre g avec m points marqués représentant la classe A dans la variété presque complexe (W, J) sera noté $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A)$.

Remarque 3.1.3. Ce qu'on regarde ici n'est pas la courbe image dans W , mais ce n'est pas non plus tout à fait la courbe paramétrée puisqu'on quotiente par le groupe d'automorphismes.

Remarque 3.1.4. On est obligé de considérer des courbes sources qui sont singulières, comme on l'a vu à propos des coniques au § 2.4. Les singularités de la courbe source sont des points doubles ordinaires, mais cela n'empêche pas la courbe image d'être éventuellement très singulière. On pensera aux exemples représentés sur la figure 8, les applications

- $t \mapsto (t^2, t^3)$, paramétrage d'une cubique cuspidale, la courbe source est une droite projective (lisse !),
- $t \mapsto (t^2, 0)$, paramétrage d'une conique dégénérée en une droite double qui n'est injectif ni même immersif en aucun point.

Remarque 3.1.5. La dimension attendue de $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A)$ est $2\langle c_1, A \rangle + 2n(1 - g) + 2m - \dim G$ (où G est le groupe d'automorphismes des courbes de genre g).

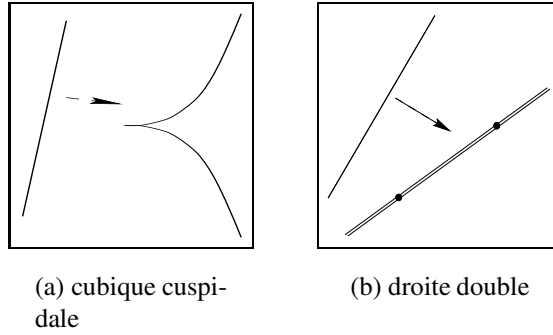


Figure 8 : applications singulières

3.2. Exemples d'espaces d'applications stables. Dans ce paragraphe, je donne quelques exemples simples, dans les cas où W est un point, une droite ou un plan projectif. Je ne mentionnerai pas la structure presque complexe dans la notation (écrivant, donc $\overline{\mathcal{M}}$ pour $\overline{\mathcal{M}}^J$) dans ces cas, où les variétés ont une structure complexe préférable, qui sera utilisée et sous-entendue.

Le cas du point. Quand W est un point, l'application u est constante et on retrouve l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}$ des courbes marquées stables (rappelons que la condition de stabilité est $m + 2g \geq 3$).

Le cas de la classe nulle. La classe d'homologie $A = 0$ ne peut être représentée que par des applications *constantes*. C'est une conséquence du lemme élémentaire suivant.

Lemme 3.2.1. *Soit ω une forme symplectique sur W et soit A une classe d'homologie. Si A peut être représentée par une application holomorphe pour une structure presque complexe calibrée par ω , alors on a $\langle \omega, A \rangle \geq 0$, avec égalité si et seulement si l'application holomorphe est constante.*

Démonstration. Fixons la structure presque complexe J et considérons une application J -holomorphe $u : \Sigma \rightarrow W$. Sa différentielle est linéaire sur \mathbf{C} . On a donc, pour tout $z \in \Sigma$ et tout $\alpha \in T_z \Sigma$,

$$(u^* \omega)_z(\alpha, i\alpha) = \omega_{u(z)}(T_z u(\alpha), J T_z u(\alpha)) \geq 0.$$

Comme ω calibre J , $X \mapsto \omega(X, JX)$ est une métrique riemannienne, ainsi

$$\langle \omega, A \rangle = \langle u^* \omega, [\Sigma] \rangle \geq 0.$$

De plus, si u n'est pas constante, on peut trouver un ouvert $U \subset \Sigma$ et un champ de vecteurs non nul α sur U tels que $(u^* \omega)_z(\alpha, i\alpha) > 0$ pour $z \in U$. Donc $\langle \omega, A \rangle > 0$. \square

Si $A = 0$, on voit que l'application u est constante et donc l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, 0)$ s'identifie à $\overline{\mathcal{M}}_{g,m} \times W$.

Applications de degré 1. Un autre exemple très simple est celui de l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), L)$: c'est l'espace des applications de degré 1

$$u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}).$$

À isomorphisme près, il n'y a qu'une seule telle application, l'application identique, de sorte que l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), L)$ est un point.

Remarque 3.2.2. On peut considérer plus généralement la classe dL , toujours dans l'homologie de la droite projective complexe $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. L'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), dL)$ est une compactification de l'espace de Hurwitz des polynômes de degré d . On peut aussi remplacer $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$: il est clair que $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), L)$ est la grassmannienne $G(2, \mathbf{C}^{n+1})$ des droites de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ (comme on l'a déjà remarqué dans le cas $n = 2$ au § 2.3).

3.2.3. *Coniques planes.* Considérons maintenant l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), 2L)$ des applications stables de degré 2 dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Il est constitué de quatre parties :

- (1) L'espace des coniques lisses. Une conique propre est paramétrée par une application de degré 2

$$u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C}).$$

C'est un espace de dimension complexe 5 (trois polynômes homogènes de degré 2 à multiplication par un même scalaire près, modulo les automorphismes de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$: $9 - 1 - 3 = 5$).

- (2) L'espace des applications de degré 2 de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ dont l'image est une droite. Sa dimension complexe est 4 (la droite et les deux points de ramification de l'application : $2 + 2 = 4$).
- (3) L'espace des applications $C \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, où C désigne la réunion de deux droites sécantes et l'image de u est aussi constituée de deux droites sécantes. La dimension complexe est encore 4 (deux droites dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$: $2 \times 2 = 4$).
- (4) L'espace des applications $C \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, où C est (encore) la réunion de deux droites sécantes mais où cette fois l'image est formée d'une droite double. La dimension complexe de cet espace est 3 (une droite dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ et un point sur cette droite : $2 + 1 = 3$).

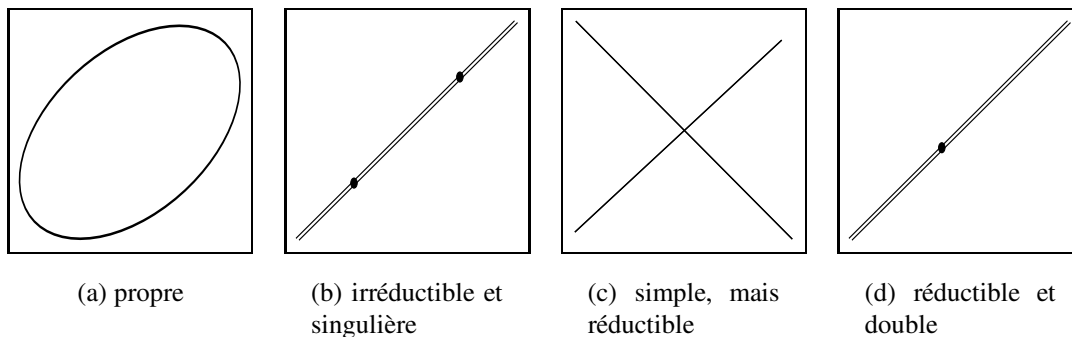


Figure 9 : coniques

3.2.4. *Courbes rationnelles planes de degré d .* Une description des espaces de courbes de grand degré dans le plan serait assez compliquée (voir le cas des coniques ci-dessus). Mentionnons quand même le cas célèbre des courbes *rationnelles* de degré d .

Une courbe lisse de degré d n'est jamais rationnelle quand $d \geq 3$. Son genre est $(d-1)(d-2)/2$. Mais il y a quand même des courbes rationnelles de tout degré. Par exemple, une cubique plane singulière est toujours rationnelle (les cubiques lisses sont des courbes de genre 1, en accord avec la formule du genre), comme l'est la cubique cuspidale de la figure 8 : on abaisse le genre en ajoutant des singularités.

Naïvement et selon un décompte déjà utilisé plusieurs fois dans ces notes, pour donner une application de degré d de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, il faut donner trois polynômes de degré d à un coefficient près, on marque m points et on quotiente par $PGL(2; \mathbf{C})$, le résultat de l'opération est une dimension complexe égale à $3d + 2 + m - 3$. C'est d'ailleurs la dimension attendue, comme on le vérifiera sans mal⁽¹³⁾.

L'espace de modules et le but $(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}))^m$ de l'évaluation ont même dimension si et seulement si $m = 3d - 1$. Le degré de l'application d'évaluation

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,3d-1}(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), dL) \longrightarrow (\mathbf{P}^2(\mathbf{C}))^m$$

⁽¹³⁾ Voir le § 3.4.3 pour une justification.

est le nombre N_d de courbes rationnelles de degré d passant par $3d - 1$ points du plan (une droite par deux points, $N_1 = 1$, une conique par cinq points, $N_2 = 1 \dots$).

Ces nombres sont calculés par récurrence grâce à une formule, due à Kontsevich [40] (ici le théorème 4.3.5), qui est un des plus anciens et un des plus beaux succès de la théorie.

3.3. Topologie et compacité. Il est dans la nature de l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W,A)$ d'être relié à la fois à la variété W et à l'espace des courbes stables $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}$ par, respectivement

- l'évaluation des applications aux points marqués (à valeurs dans W^m)
- l'oubli de l'application.

Pour être utilisables, c'est bien le moins que ces applications soient continues : on se souvient sans doute que des calculs cohomologiques sont en vue (depuis le § 2.3). Pour l'instant, ce que nous avons défini n'est qu'un ensemble.

On se doute que cet ensemble peut être muni d'une structure plus riche. C'est le cas en effet. Sous certaines hypothèses, c'est même une variété projective complexe. Ce n'est certainement pas le cas en général, notamment quand la structure J n'est pas intégrable. Mais c'est, toujours, un espace topologique : on peut le munir d'une variante de la topologie \mathcal{C}^k (pour tout k).

Cette topologie est un peu compliquée, mais le jeu en vaut la chandelle :

- C'est pour cette topologie que s'exprime la propriété dite « de compacité » (voir [29] et [56]), ici le théorème 3.3.7.
- La définition de la topologie confirme et explicite la remarque faite ci-dessus qu'avec les classes d'isomorphisme d'applications stables, on est quelque part entre les applications et leurs images.

Topologie de $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W,A)$. Voici une description d'une base de voisinages de la classe de l'application stable (Σ, \vec{z}, u) . Fixons un nombre réel $\varepsilon > 0$, un voisinage U des points singuliers de Σ , un voisinage V de l'ensemble des points marqués et une métrique μ sur chaque composante lisse de Σ . Le voisinage que ces données définissent est formé des (classes d') applications stables (Σ', \vec{z}', u') telles que :

- Il existe une application continue $\sigma : \Sigma' \rightarrow \Sigma$, qui est un difféomorphisme en dehors des points singuliers et telle que l'image inverse de chaque point double soit, soit un point double de Σ' , soit un anneau de module $\geq 1/\varepsilon$, ne contenant aucun point de \vec{z}' (voir la figure 10). Rappelons qu'un anneau complexe est conformément équivalent à $S^1 \times]0, L[$ pour un unique $L > 0$, son *module* : du point de vue conforme, être très long, c'est être très mince.
- Appelons J_Σ la structure complexe de Σ , considérée comme un automorphisme de $T\Sigma$ (la multiplication par i) et de même $J_{\Sigma'}$ celle de Σ' . On demande que $\|J_\Sigma - \sigma_*^{-1} J_{\Sigma'}\|_{\mathcal{C}^k} < \varepsilon$. Cette condition sur J_Σ et $J_{\Sigma'}$ exprime le fait que Σ et Σ' sont proches l'une de l'autre dans l'espace de modules des courbes.
- On demande bien sûr aussi que les points marqués de Σ' soient proches de ceux de Σ : $\sigma(z'_i) \in V$.
- On demande que u et u' soient proches l'une de l'autre : $\|u - u' \circ \sigma^{-1}\|_{\mathcal{C}^k} < \varepsilon$ en dehors de U .
- On demande, enfin, que $|\text{aire}(u) - \text{aire}(u')| < \varepsilon$.

Les normes utilisées pour exprimer ces conditions sont calculées grâce à la métrique μ fixée sur Σ et à la métrique définie par ω et J sur W .

Exemples 3.3.1

- (1) Après les droites et les coniques (§ 3.2), l'exemple le plus classique et le plus instructif est celui d'une famille de cubiques planes lisses convergeant vers une cubique rationnelle. On considère par exemple la cubique C_1 d'équation $y^2 = 4x^3 - x - 1$ et l'application $u_\alpha : C_1 \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ induite par $(x, y) \mapsto (\alpha^2 x, \alpha^3 y)$. L'image est la cubique d'équation $y^2 = 4x^3 - \alpha^4 x - \alpha^6$, qui devient singulière et rationnelle pour $\alpha = 0$. Le phénomène est décrit, du point de vue des applications

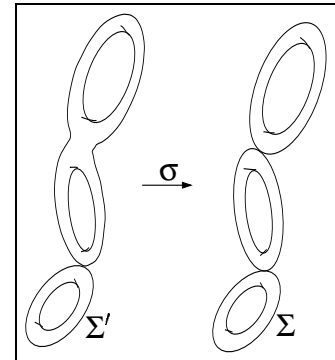


Figure 10

stables, sur la figure 11. La courbe limite est constituée d'une composante de genre 1 avec une

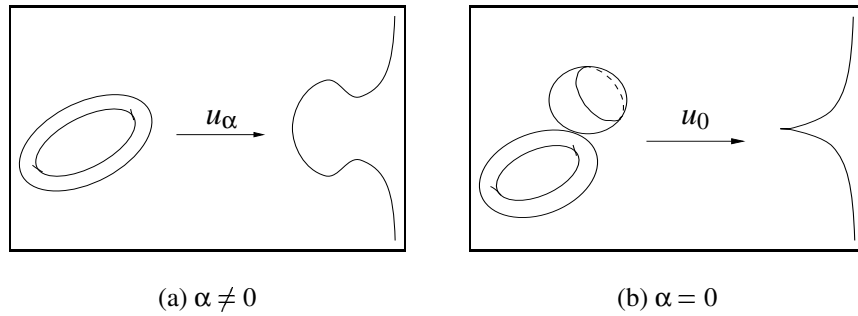


Figure 11

bulle. L'application stable limite

- est constante sur la composante de genre 1 (et l'envoie sur le point singulier)
- et paramètre la cubique cuspidale par la composante de genre 0.

Ce qu'on voit dans l'image, c'est la bulle.

- (2) Voici un exemple que j'ai appris dans [23] et qui confirme le phénomène observé ci-dessus... et qui confirme aussi que la convergence peut être un peu compliquée. L'exemple image est

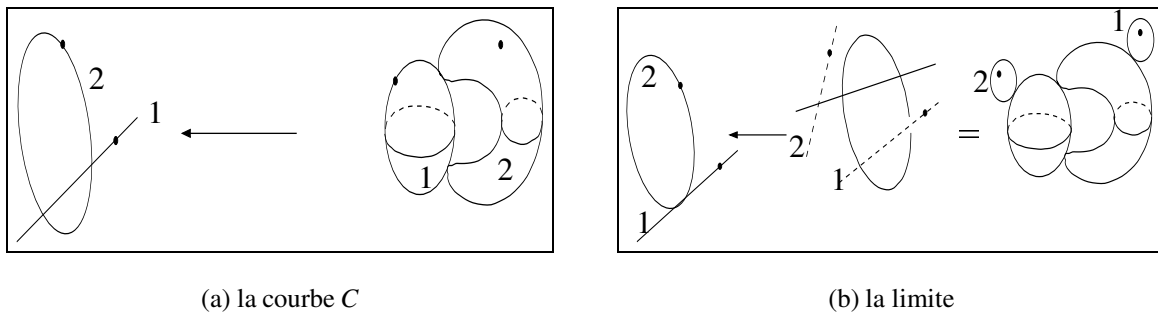


Figure 12

très simple : il s'agit d'une cubique plane dégénérée C constituée d'une droite et d'une conique sécantes (figure 12). Il y a donc deux composantes rationnelles se coupant en deux points. Le genre arithmétique est 1. Il y a deux points doubles et on met un point marqué sur chacune des composantes.

On veut maintenant représenter par des applications stables, dans $\overline{\mathcal{M}}_{1,2}(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), 3L)$, le passage à une situation limite où la droite devient tangente à la conique.

On considère donc une famille $u_\alpha : C \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ où u_1 est l'inclusion et, quand α tend vers 0, la droite se rapproche d'une tangente à la conique.

Comme dans l'exemple ci-dessus, la courbe source est fixée : la figure est unique à automorphisme près puisque chaque composante est un $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ avec trois points spéciaux. À la limite, à la source, il se crée deux bulles (les droites en pointillés sur la figure 12) qui vont paramétrer la courbe image limite, les autres composantes étant écrasées sur le point singulier.

- (3) Dans l'exemple suivant, que m'a donné Jean-Claude Sikorav, on voit que les bulles peuvent très bien avoir elles-mêmes des points doubles.

Soit Σ_1 la cubique plane d'équation homogène $y^3 = x^3 - xz^2$ et soit $u_\alpha : \Sigma_1 \rightarrow \mathbf{P}^2$ l'application $[x, y, z] \mapsto [x, \alpha y, \alpha^2 z]$, dont l'image est la courbe Σ_α d'équation $\alpha y^3 = \alpha^6 x^3 - xz^2$. Faisons tendre α vers 0. La courbe limite $xz^2 = 0$ est formée de deux droites dont l'une est double.

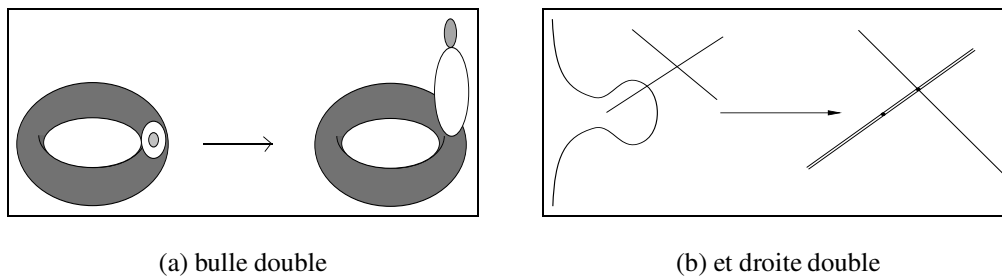


Figure 13

L'application u_α converge vers l'application constante $u([x, y, z]) = [1, 0, 0]$ en dehors du point d'inflexion $[0, 0, 1]$. Donc une courbe rationnelle se forme, au point $z = [0, 0, 1]$, mais elle est réductible et formée de deux composantes dont l'une est un revêtement double. Une des composantes rationnelles est envoyée sur la droite double par une application de degré 2, avec donc deux points de ramification (comme sur la figure 9). La composante de genre 1 est écrasée sur un des points de ramification, l'autre composante rationnelle paramètre une droite passant par le deuxième point de ramification.

Remarque 3.3.2. On trouvera de nombreux exemples de familles de cubiques planes convergeant vers des cubiques singulières dans [47]. Un bon exercice pourrait être de décrire ces exemples en termes de convergence dans un espace de modules d'applications stables.

Évaluation et contraction. Décrivons maintenant les deux applications naturelles :

– d'évaluation

$$\begin{aligned} \text{év}_m : \overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A) &\longrightarrow W^m \\ (\Sigma, \vec{z}, u) &\longmapsto (u(z_1), \dots, u(z_m)) \end{aligned}$$

(pour $m \geq 1$),

– et de contraction

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,m}$$

(pour $m + 2g \geq 3$).

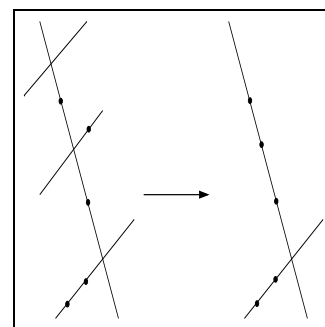


Figure 14 : contraction

La définition de l'évaluation est claire. La contraction est essentiellement l'application qui « oublie » u . Il y a toutefois là une petite difficulté technique que je vais expliquer. Si on essaie d'envoyer la classe d'isomorphisme de l'application stable (Σ, \vec{z}, u) sur celle de la courbe (Σ, \vec{z}) , on peut être gêné si (Σ, \vec{z}) a des composantes instables : celles-ci étaient autorisées dès que u n'y était pas constante. La solution est simple : on contracte ces composantes instables en des points, comme le montre la figure 14. C'est ce qui justifie le nom de « contraction » que porte cette application. La topologie que nous avons définie est assez bonne pour qu'on ait :

Proposition 3.3.3. Les deux applications d'évaluation aux points marqués $\text{év}_m : \overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A) \rightarrow W^m$ et de contraction $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,m}$ sont continues. \square

Compacité. Voici la propriété essentielle :

Proposition 3.3.4. L'espace $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A)$ est compact.

Idée de la démonstration. Comme l'application de contraction est continue, le résultat est une conséquence de la compacité de la base $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}$ (voir [39]) et de celle des fibres. Cette dernière est une conséquence du théorème de compacité de Gromov, que je vais rappeler maintenant. \square

Je donne deux versions du théorème de compacité de Gromov, pour lesquelles je renvoie à [29] et à [56]. D'autres démonstrations du théorème de Gromov se trouvent dans [77] ou [57]. À toutes celles et ceux qui douteraient que les énoncés proposés ici assurent la compacité d'un espace d'applications stables, je conseille la lecture de [23]. La relation entre la notion de stabilité et la séparation de l'espace de modules y est notamment examinée.

Théorème 3.3.5. *Soit W une variété riemannienne compacte munie d'une structure presque complexe J . Soit $u_n : \Sigma \rightarrow W$ une suite de courbes J -holomorphes d'aires bornées. Il existe une sous-suite convergeant vers une courbe J -holomorphe $u : \Sigma' \rightarrow W$ où Σ' est obtenue à partir de Σ en contractant quelques courbes fermées simples.*

Remarques 3.3.6

- (1) Les structures presque complexes utilisées pourraient aussi dépendre de n (voir [29, 56]). Même avec cette modification, le résultat énoncé n'est qu'un cas particulier du théorème de Gromov, parce que j'ai fixé la courbe Σ .
- (2) Le genre arithmétique de la courbe Σ' est égal au genre de Σ .
- (3) Pour n assez grand, la classe d'homologie représentée par les u_n d'une sous-suite convergeant vers u est constante égale à celle représentée par u .
- (4) Dans le cas qui nous intéresse, où W est une variété symplectique, J une structure presque complexe calibrée par la forme symplectique ω et où la métrique riemannienne est $\omega(\cdot, J\cdot)$, la condition d'aire bornée est automatique si les u_n représentent la même classe d'homologie A : cette aire est $\langle \omega, A \rangle$. On utilise ici de façon décisive le fait que ω est *fermée*.
- (5) Les bulles peuvent provenir de disques ou d'anneaux. Par exemple, la figure 13 montre deux bulles dont l'une provient d'un disque et l'autre d'un anneau.

La version « graphes » de ce théorème affirme qu'une limite de graphes est encore un graphe, à quelques bulles verticales près (voir la figure 15). La voici.

Théorème 3.3.7. *Soient (W, ω) une variété riemannienne compacte munie d'une structure presque complexe J et Σ une courbe complexe. Soit $u_n : \Sigma \rightarrow W$ une suite d'applications holomorphes d'aires bornées. Il existe une partie finie $\Gamma \subset \Sigma$ telle que :*

- une sous-suite de la suite des graphes $\tilde{u}_n : \Sigma \rightarrow \Sigma \times W$ converge vers le graphe \tilde{u} d'une application J -holomorphe $u : \Sigma \rightarrow W$ en dehors de Γ .
- Si, pour $z \in \Gamma$, $\tilde{u}_n(z)$ ne converge pas vers $\tilde{u}(z)$, alors il y a une courbe rationnelle non triviale

$$\varphi_z : C_z \longrightarrow \{z\} \times W$$

passant par $u(z)$.

- Pour n assez grand, on a $u_n^*[\Sigma] = u_*[\Sigma] + \sum_{z \in \Gamma} (\varphi_z)_* [C_z] \in H_2(X; \mathbf{Z})$.

□

Remarquons pour finir que la conclusion homologique dit, notamment, que la classe A est décomposée en classe de la courbe limite plus classes des bulles. Quand A ne peut pas se décomposer en somme $A = A_1 + A_2$ avec $\langle \omega, A_1 \rangle > 0$ et $\langle \omega, A_2 \rangle > 0$ (la classe A est alors dite « simple »), on a un vrai théorème de compacité. C'est ce qui se passe par exemple avec la classe des fibres de la projection $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times V \rightarrow V$ (dans le théorème 2.2.1) avec celle des droites dans le plan projectif... et qui ne se passe pas avec celle des coniques.

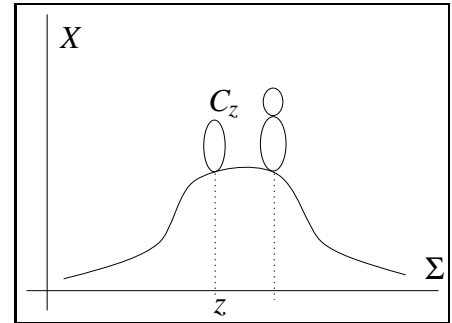


Figure 15

Le « bord » peut être trop gros. Une autre raison qui complique la situation est le fait que l'espace de modules peut être considéré comme trop gros aussi parce qu'il est plus gros que la simple adhérence de l'espace des applications holomorphes stables $\Sigma \rightarrow X$ dont la source Σ est irréductible. Le cas le plus simple où le problème se pose est celui des cubiques planes

de genre 1. L'espace $\overline{\mathcal{M}}_{1,0}(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), 3L)$ est de dimension complexe 10. Il contient toutes les applications $u : C \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, où C est une courbe de genre 1 coupant $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ en un point, u est constante sur C et de degré 3 sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. En d'autres termes, en utilisant les points marqués supplémentaires pour assembler les courbes, il contient un exemplaire de $\overline{\mathcal{M}}_{1,1} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,1}(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), 3L)$... espace, lui aussi, de dimension complexe 10.

On comprend facilement qu'une application $u : C \cup \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ n'est dans l'adhérence de l'ensemble des applications $\Sigma \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ (où Σ est irréductible) que si u a une singularité au point où les deux composantes se coupent : on l'a déjà dit, ajouter des singularités fait baisser le genre. La figure 16 montre un contre-exemple : la composante rationnelle $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est envoyée sur une cubique cuspidale par une application de degré 3, celle-ci envoie le point double sur un point régulier de la cubique et écrase la composante de genre 1.

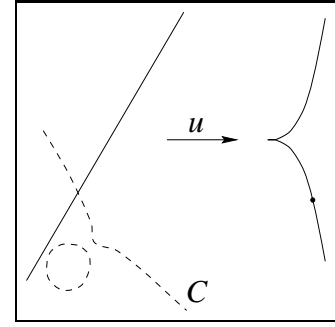


Figure 16

Pour les questions énumératives, c'est un problème sérieux : on pourrait bien, en fin de compte (!) ne pas avoir compté ce que l'on pensait.

3.4. Lissité. On a vu (exemple 2.4.5) qu'on ne peut pas espérer que $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W,A)$ soit, en général, une variété (même en acceptant les orbifolds) de la dimension attendue. C'est quand même parfois le cas, comme je vais l'expliquer ci-dessous. Au § 3.5, j'expliquerai quelques stratégies possibles pour définir, en toute généralité, une classe fondamentale (virtuelle !) pour ces espaces.

Un énoncé de régularité. À cause de l'exemple des revêtements multiples évoqué à deux reprises au § 2.4, il faut faire une hypothèse qui permette d'éviter le problème. On peut se restreindre, suivant [49], aux courbes *simples*, c'est-à-dire qui sont « injectives quelque part ». L'exemple le plus classique d'énoncé de régularité est la proposition 3.4.2 ci-dessous (voir [29, 51]).

Remarque 3.4.1. McDuff a montré (dans [49]) qu'une courbe qui n'est pas simple est composée d'une courbe simple et d'un revêtement. Les classes d'homologie qui ne sont *pas* des multiples ne contiennent donc que des courbes simples.

Proposition 3.4.2. Soit (W, ω) une variété symplectique compacte de dimension $2n$ et soit $c_1 \in H^2(W; \mathbf{Z})$ sa première classe de Chern. Il existe une partie $\mathcal{J}_{\text{rég}}(A)$ dans l'espace \mathcal{J} des structures presque complexes calibrées par ω , qui contient une intersection dénombrable d'ouverts denses et telle que

- (1) Si $J \in \mathcal{J}_{\text{rég}}(A)$, l'espace $\mathcal{M}_g^A(J)$ des courbes J -holomorphes simples de la classe A est une variété (lisse) orientée de dimension $2\langle c_1, A \rangle + 2n(1 - g)$.
- (2) Si J_0 et $J_1 \in \mathcal{J}_{\text{rég}}(A)$, il existe une partie dense $\mathcal{J}_{\text{rég}}(J_0, J_1)$ dans l'espace des homotopies de J_0 à J_1 telle que, pour toute homotopie $(J_t)_{t \in [0,1]}$ dans cette partie, l'espace

$$\mathcal{M}_g^A((J_t)_{t \in [0,1]}) = \left\{ (t, u) \mid u \in \mathcal{M}_g^A(J_t) \right\}$$

soit une variété orientée dont le bord orienté est $\mathcal{M}_g^A(J_1) - \mathcal{M}_g^A(J_0)$.

Cette proposition est illustrée sur la figure 17, où l'ouvert dense $\mathcal{J}_{\text{rég}}(A)$ est le complémentaire des hypersurfaces représentées en pointillés. Elle se démontre par les méthodes Fredholm évoquées au § 2.4.

3.4.3. Régularité de structures complexes usuelles. Compter des courbes dans le plan est une activité humaine classique. Dans ce cas, j'ai déjà signalé qu'il était important de savoir si on peut

- effectivement compter ces courbes en calculant des invariants de Gromov-Witten
- utiliser les espaces de modules d'applications holomorphes pour la structure complexe usuelle pour calculer ces invariants.

La question est donc de savoir si la structure complexe usuelle du plan $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ (et plus généralement d'une variété projective) est régulière pour telle ou telle classe.

Dans ce §, je vais mettre en évidence des conditions, sur une variété *projective complexe* W , qui garantissent que sa structure complexe est régulière pour les classes des courbes rationnelles et même que l'espace de modules de Kontsevich est, lui-même, une variété projective, peut-être pas lisse mais avec des singularités assez douces.

Le $\bar{\partial}$. On a déjà signalé au § 2.4 que, pour une structure complexe intégrable J , l'opérateur linéarisé D_u^J n'était autre que le $\bar{\partial}$ de Dolbeault. En particulier, D_u^J est surjective si et seulement si on a

$$\text{Im} \left(\bar{\partial} : C^\infty(u^*TW) \longrightarrow \Omega^{0,1}(u^*TW) \right) = \Omega^{0,1}(u^*TW).$$

Comme Σ est une courbe, c'est équivalent à demander que $H_{\bar{\partial}}^{0,1}(u^*TW) = 0$.

Supposons maintenant que Σ soit rationnelle ($\Sigma = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$). Alors, grâce au théorème de Birkhoff⁽¹⁴⁾, nous savons que le fibré u^*TW , comme tous les fibrés sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, se décompose en une somme de fibrés en droites. Pour tout fibré en droites $L \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, on a

$$H_{\bar{\partial}}^{0,1}(L) = \left(H_{\bar{\partial}}^{1,0}(L^*) \right)^* = \left(H^0(L^*(-2)) \right)^*,$$

les différentes étoiles désignant les duaux et le « -2 » venant du fibré cotangent ou canonique $\mathcal{O}(-2)$ de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Ainsi $\bar{\partial}$ est surjective si et seulement si pour chaque fibré en droites L apparaissant dans u^*TW , le fibré $L^*(-2)$ n'a pas de section holomorphe, c'est à dire si $c_1(L^*(-2)) < 0$, ou encore si $c_1(L) > -2$:

Proposition 3.4.4. *Soit $u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow W$ une courbe J -holomorphe avec J intégrable. Pour que D_u^J soit surjective, il faut et il suffit que tous les fibrés en droites apparaissant dans la décomposition de u^*TW aient une classe de Chern $c_1 \geq -1$.*

Exemple 3.4.5. Considérons l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ avec sa structure complexe naturelle J et la classe L des droites projectives. Soit $u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ une courbe holomorphe de la classe L (c'est à dire une droite). Alors $u^*T\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) = \mathcal{O}(1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(1)$, D_u^J est surjective (ceci pour tout u) et J est régulière pour L .

Corollaire 3.4.6. *Supposons J intégrable et le fibré tangent TW engendré par ses sections holomorphes. Alors J est régulière pour toutes les classes contenant des courbes rationnelles.*

En dimension 4, grâce à la formule d'adjonction, on déduit de la proposition 3.4.4 un critère simple et efficace :

⁽¹⁴⁾ Voir par exemple [58].

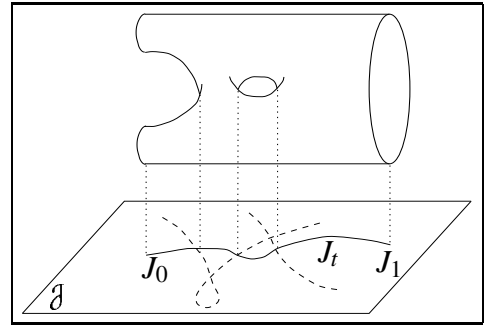


Figure 17

Proposition 3.4.7. *Soit J une structure complexe (intégrable) sur une variété W de dimension 4. Soit $A \in H_2(X; \mathbf{Z})$ une classe qui contient une sphère J -holomorphe plongée. Alors J est régulière pour A si et seulement si $A \cdot A \geq -1$.*

Exemple 3.4.8. Il y a des contre-exemples très simples. En voici une famille. Il s'agit de la variété différentielle $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ ou $\tilde{\mathbf{P}}^2(\mathbf{C})$, vue comme espace total du fibré $\mathbf{P}(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathbf{1}) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, $k \geq 0$ (une « surface de Hirzebruch »)⁽¹⁵⁾. Elle possède une sphère holomorphe plongée d'auto-intersection $-k$ (la section nulle du fibré $\mathcal{O}(-k)$). Pour $k \neq 0, 1$, la structure complexe n'est pas régulière pour cette classe.

Variétés projectives convexes et lissité. On va maintenant s'intéresser au « bord » de l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(W, A)$, c'est-à-dire aux décompositions $A = A_1 + \dots + A_k$ de la classe A en somme de classes représentables par des courbes rationnelles. On veut que les différentes strates de l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,0}(W, A)$ soient lisses, c'est-à-dire que la structure J soit régulière pour toutes les classes A_j . On veut aussi éviter les problèmes dûs aux revêtements multiples évoqués au § 2.4 et donc forcer une propriété de positivité des $\langle c_1, A_i \rangle$.

Définition 3.4.9. La variété W est convexe pour la classe A , ou A -convexe si, pour toute décomposition

$$A = A_1 + \dots + A_k$$

dans laquelle chaque A_j se représente par une courbe rationnelle, et pour toute application $u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow W$ telle que $u_*[\mathbf{P}^1(\mathbf{C})] = A_j$ pour un certain j , on a

$$u^*TW = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(m_i)$$

avec $m_i \geq 0$ pour tout i .

Il est clair que cette condition assure la régularité de la structure complexe pour chacune des classes A_j : on a vu dans la proposition 3.4.4 qu'il suffisait que tous les m_i soient ≥ -1 . Avoir les $m_i \geq 0$ garantit la positivité de la première classe de Chern :

Lemme 3.4.10. *Si W est A -convexe, pour toute décomposition $A = A_1 + \dots + A_k$ dans laquelle aucun des A_j n'est nul et tous sont représentables par des courbes rationnelles, on a $\langle c_1, A_j \rangle \geq 2$.*

Démonstration. Par définition de la A -convexité, pour toute application holomorphe $u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow W$ représentant une classe A_j , on a

$$u^*TW = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}(m_i) \text{ avec } m_i \geq 0 \text{ pour tout } i.$$

Mais, si A_j n'est pas nulle, u n'est pas constante et donc sa différentielle est injective (comme morphisme de faisceaux) et envoie un champ de vecteurs sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ avec deux zéros sur une section non nulle de u^*TW avec au moins deux zéros. Donc au moins un des m_i est supérieur ou égal à 2. \square

Avec l'hypothèse de A -convexité, on peut démontrer :

Théorème 3.4.11. *Si W est A -convexe, $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W, A)$ est une variété projective localement normale et est localement le quotient d'une variété lisse par l'action d'un groupe fini. Sa dimension complexe est $\dim W + m - 3 + \langle c_1, A \rangle$.*

⁽¹⁵⁾Du point de vue différentiel, il n'y a que deux classes d'isomorphisme de fibrés en $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, parce que $\pi_1(PGL(2; \mathbf{C})) \cong \mathbf{Z}/2$. La variété $\mathbf{P}(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathbf{1})$ est donc difféomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ quand k est pair et à $\tilde{\mathbf{P}}^2(\mathbf{C})$ quand k est impair.

Il y a une très belle démonstration dans [24], dont voici un peu du parfum⁽¹⁶⁾. Les auteurs considèrent d'abord le cas où W est l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Ils ajoutent des points marqués aux courbes de l'espace des applications stables, les points où ces courbes rencontrent les hyperplans de coordonnées (en supposant ces points distincts des points spéciaux déjà présents sur ces courbes). La figure 18 représente l'effet de cette opération sur une conique plane avec deux points marqués. Il faut ordonner

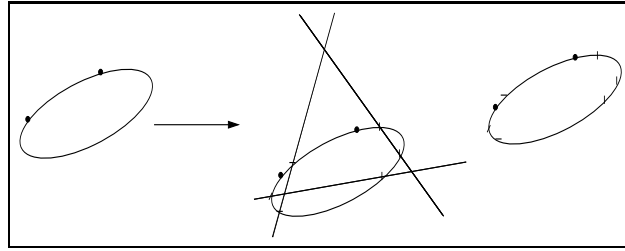


Figure 18

les nouveaux points marqués, c'est ce qui va ensuite donner lieu aux quotients par des groupes finis présents dans l'énoncé. Les courbes avec tous ces points marqués sont ensuite considérées comme des courbes marquées stables abstraites.

On remarquera que la donnée des points d'intersection de la courbe avec les hyperplans de coordonnées permet presque de reconstituer l'application stable, et précisément, permet de la reconstituer à l'action près du gros tore $(\mathbf{C}^*)^n$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. On a donc établi une relation assez précise entre un gros ouvert de $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), A)$ et un sous-espace ouvert⁽¹⁷⁾ d'un espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,N}$ (je laisse aux volontaires le plaisir d'évaluer N).

En considérant différents choix d'hyperplans de coordonnées sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, on a un recouvrement de $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^n(\mathbf{C}), A)$ par de tels ouverts. On conclut en utilisant les propriétés de $\overline{\mathcal{M}}_{0,N}$. On passe enfin à une variété projective plus générale. \square

Remarque 3.4.12. Les auteurs de [24] montrent aussi que $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W, A)$ est un espace de modules au sens de la géométrie algébrique, c'est-à-dire qu'il représente un certain foncteur. Il y a aussi une « application stable universelle » (au moins au-dessus de l'espace des applications stables qui n'ont pas d'automorphisme du tout), c'est-à-dire un espace

$$\mathcal{U}_{0,m} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W, A)$$

qui ressemble beaucoup à $\overline{\mathcal{M}}_{0,m+1}(W, A)$ (la fibre au point (Σ, \vec{z}, u) est la courbe Σ elle-même) et qui est muni d'une « application universelle » à valeurs dans W , l'évaluation au $(m+1)$ -ième point

$$(\Sigma, \vec{z}, u, z) \longmapsto u(z).$$

Définition 3.4.13. On dit d'une variété projective W qu'elle est *convexe* si elle est convexe pour toutes les classes contenant des courbes rationnelles.

Remarque 3.4.14. Cette propriété est équivalente à la suivante :

$$\forall u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow W, \quad H^1(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}); u^*TW) = 0.$$

Remarquons aussi que cette propriété est vraie pour *toutes* les applications $u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow W$. On en déduit que les degrés des facteurs de u^*TW sont ≥ 0 (si l'un d'eux était ≤ -1 , en composant avec une application de degré 2 de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans lui-même, on obtiendrait un fibré de degré < -1 ... et une contradiction).

Exemples 3.4.15. Il y a de nombreux exemples de variétés projectives convexes, notamment toutes celles dont le fibré tangent est engendré par ses sections holomorphes globales.

⁽¹⁶⁾ Voir plus généralement [15].

⁽¹⁷⁾ Que l'image soit un ouvert est due au genre nul.

- (1) Tous les espaces homogènes G/P où G est un groupe linéaire algébrique et P un sous-groupe parabolique, en particulier
- les espaces projectifs $GL(n; \mathbf{C})/GL(1; \mathbf{C}) \times GL(n-1; \mathbf{C})$,
 - les grassmanniennes $GL(n; \mathbf{C})/GL(k; \mathbf{C}) \times GL(n-k; \mathbf{C})$
 - et plus généralement les variétés de drapeaux, complètes — c'est-à-dire les espaces homogènes $GL(n; \mathbf{C})/GL(1; \mathbf{C}) \times \cdots \times GL(1; \mathbf{C})$ — ou pas.
- (2) Il y a aussi beaucoup d'exemples de variétés non convexes. C'est le cas notamment de presque toutes les surfaces de Hirzebruch (voir l'exemple 3.4.8), les surfaces réglées ou espaces totaux des fibrés $\mathbf{P}(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathbf{1}) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. On a dit qu'une telle surface contient une sphère plongée C d'auto-intersection $-k$, la section nulle du fibré vectoriel. Pour un plongement $u : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathbf{1})$ d'image C , on a

$$\langle c_1(u^*TW), [\mathbf{P}^1(\mathbf{C})] \rangle = -k + 2.$$

Donc, si $u^*TW = \mathcal{O}(m_1) \oplus \mathcal{O}(m_2)$, $m_1 + m_2 = -k + 2$. Si $k \geq 2$, au moins un des m_i est ≤ -2 . Si $k = 1$, en considérant la composition de u avec une application de degré 2 de \mathbf{P}^1 dans lui-même, on arrive à la même conclusion. Donc la surface de Hirzebruch $\mathbf{P}(\mathcal{O}(-k) \oplus \mathbf{1})$ est convexe si et seulement si $k = 0$.

- (3) Par exemple, pour $k = 1$, la surface de Hirzebruch est $\tilde{\mathbf{P}}^2(\mathbf{C})$, le plan éclaté en un point. Ré-examinons donc l'exemple 2.4.5. La classe E du diviseur exceptionnel est représentée par une courbe rationnelle isolée. En composant avec une fraction rationnelle de degré 2, on obtient une courbe rationnelle de la classe $2E$. Comme on l'a déjà dit, les fractions rationnelles de degré 2 forment un espace de dimension complexe 5, ainsi

$$\dim_{\mathbf{C}} \overline{\mathcal{M}}_{0,3}(\tilde{\mathbf{P}}^2, 2E) \geq 5.$$

La dimension complexe attendue... et promise par le théorème 3.4.11 est 4, ce qui confirme la non-convexité de $\tilde{\mathbf{P}}^2(\mathbf{C})$.

3.5. Classes fondamentales virtuelles. En général, l'opérateur D_u^J ne définit pas une section transverse à la section nulle et on n'a pas un espace de modules lisse de la dimension attendue.

Positivité, monotonie. Pour éviter les nombreux problèmes évoqués ci-dessus à propos des revêtements multiples, on a commencé par définir les invariants de Gromov-Witten pour les variétés symplectiques *monotones*, celles pour lesquelles, $c_1 = \lambda[\omega]$ pour un $\lambda > 0$, condition⁽¹⁸⁾ qui assure la positivité de $\langle c_1, A \rangle$ pour toutes les classes A contenant des courbes pseudo-holomorphes. Bien que le domaine d'application de cette théorie soit limité, c'est celle qui fait l'objet de l'exposé le plus lumineux, celui de McDuff et Salamon dans [51].

Perturbation, semi-positivité. Les variétés symplectiques monotones étant somme toute assez rares, on a essayé d'étendre la construction à des variétés plus générales. En utilisant une méthode de perturbation due à Gromov (dans [29] encore), Ruan et Tian [61] ont élargi notablement le champ d'application de la théorie. Il s'agit de remplacer la condition de J -holomorphic

$$\frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j) = 0$$

par la condition perturbée

$$\frac{1}{2}(du_z + J \circ du_z \circ j) = v(z, u(z))$$

⁽¹⁸⁾ Pour une variété kählérienne, la condition est que la classe c_1 soit dans le cône des classes de Kähler. La variété est alors dite *de Fano*.

pour une certaine (petite) section anti- \mathbf{C} -linéaire v de $\text{Hom}(T\Sigma, TW) \rightarrow \Sigma \times W$. La ruse est que la courbe

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\tilde{u}} & \Sigma \times W \\ z & \longmapsto & (z, u(z)) \end{array}$$

est alors J_v -holomorphe pour une certaine structure presque complexe (proche de la structure produit). Remarquons que ces courbes \tilde{u} sont des graphes et ne sont jamais, même à la limite, des revêtements multiples.

Pour faire fonctionner cette approche, il faut remplacer la condition de positivité ci-dessus par une autre, plus faible mais néanmoins encore restrictive. On demande que pour toute classe d'homologie A telle que $\langle \omega, A \rangle > 0$ et $\langle c_1, A \rangle \geq 3 - n$, on ait $\langle c_1, A \rangle \geq 0$. On remarquera que c'est exactement la condition qui empêche le problème évoqué au §2.4 de se produire. On remarquera aussi que cette condition est automatiquement vérifiée par toutes les variétés symplectiques de dimension ≤ 6 (c'est-à-dire telles que $n \leq 3$).

Fibré excès. Les constructions de classes fondamentales virtuelles sont basées sur l'idée du fibré « excès ». C'est une idée utilisée en topologie depuis quelques décennies (voir par exemple [59]). Supposons que X et Y soient deux sous-variétés d'une variété W se coupant le long d'une sous-variété lisse Z .

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & W \end{array}$$

On ne suppose pas que l'intersection est transverse mais on suppose que Z est lisse (ce que Quillen appelle dans [59] une intersection « propre »). On s'intéresse aux propriétés homologiques qu'aurait l'intersection transverse.

Sur la sous-variété Z , il y a un fibré vectoriel qui mesure le défaut de transversalité, le fibré excès $E = TW/TX + TY$ (qui serait nul si l'intersection était transversale). Alors l'intersection homologique de X et Y se représente par les zéros d'une section transverse de E .

Un cas particulier de cette situation est celui d'un fibré vectoriel $W \rightarrow X$ muni d'une section s . On appelle X la section nulle et Y l'image $s(X)$. On s'intéresse aux zéros de s , c'est-à-dire à l'intersection Z de X et de Y . Quand s est transverse à la section nulle, ses zéros représentent une classe d'homologie $[Z]$ duale à la classe d'Euler du fibré $W \rightarrow X$. Si Z est lisse sans que l'intersection soit transverse, on considère le fibré excès $E \rightarrow Z$. La classe duale à sa classe d'Euler est une classe $[Z]^{\text{vir}} \in H_m(Z; \mathbf{Z})$, où m est, précisément, la dimension $\dim X - \text{rg } W$ qu'aurait l'espace des zéros d'une section transverse... la dimension virtuelle de Z , en quelque sorte. On peut utiliser cette classe pour faire des calculs homologiques.

Le cas des espaces de modules des applications stables est plus compliqué. Une des raisons est qu'on ne joue pas là avec des variétés et des fibrés de dimension ou de rang fini(e), ni même de rang constant.

Excès en géométrie algébrique. Dans la construction algébro-géométrique de la classe fondamentale virtuelle, on se restreint au cas des variétés projectives lisses. L'obtention d'un cycle de la bonne dimension est réalisée grâce à une « théorie d'obstruction cotangente » (voir les articles de Behrend et Fantechi [11] et de Li et Tian [45]). Il faut noter que cette théorie, bien que très abstraite, permet effectivement de calculer des invariants de Gromov-Witten (voir [28, 68]).

Dans cette approche algébro-géométrique, la bonne notion d'espace est celle de « champ algébrique ». C'est une théorie, certes abstraite encore une fois, mais dans laquelle les quotients sont indolores, c'est pourquoi elle est d'usage courant dans la théorie des espaces de modules.

Excès simplifié. Une famille d'exemples relevant de la géométrie algébrique et dans laquelle la théorie de l'excès s'applique simplement est celle des sous-variétés de variétés projectives convexes dont le fibré normal est « convexe » (une idée de Kontsevich [40] déjà exploitée par Givental [27]). J'en

donnerai un exemple au § 4.4. Du point de vue pratique, ce cas, bien que très simple, est important : il contient notamment les variétés qui sont des intersections complètes dans des produits d'espaces projectifs.

Excès en géométrie symplectique. Dans le cadre symplectique, où il n'y a pas de structure presque complexe meilleure que les autres, le rôle du champ algébrique est joué par une notion elle aussi assez sophistiquée, celle de « structure de Kuranishi ». Voir les travaux de Siebert [65] et de Fukaya et Ono [23].

L'approche de [65] utilise très directement la technique de l'excès. Quand on essaie d'appliquer cette technique aux sections Fredholm de fibrés banachiques sur des variétés banachiques (celles et ceux du § 2.4.3), tout se passe bien tant qu'on n'a pas besoin de changer la courbe source. Dès qu'on se met à considérer des bulles, les difficultés techniques sérieuses apparaissent. Siebert les surmonte, en fait, assez directement.

Il faut encore vérifier que le résultat obtenu ne dépend pas de la structure complexe utilisée pour l'obtenir. Voir, toujours, [65].

Relations. Si l'approche symplectique est plus flexible, l'approche algébrique a l'avantage de ne jamais toucher à la structure complexe, ce qui est important pour les questions énumératives. Comme la plupart des variétés symplectiques utilisées dans la vie courante sont des variétés projectives complexes, les deux approches y coexistent. Il est donc nécessaire, aussi, de vérifier que les deux approches donnent les mêmes invariants. C'est bien le cas, comme l'a montré Siebert [66].

En pratique, on peut donc calculer les invariants de Gromov-Witten « symplectiques » (des variétés projectives) par la géométrie algébrique.

4. Propriétés et calculs d'invariants, enfin

Suivant Kontsevich et Manin [41], les invariants de Gromov-Witten devraient satisfaire un certain nombre de propriétés, que je vais examiner dans cette partie. Je donnerai notamment une idée de ce qu'est la célèbre règle de décomposition. Je montrerai aussi comment on peut l'utiliser pour calculer (récursivement) certains invariants de Gromov-Witten, les nombres N_d de courbes rationnelles de degré d passant par $3d - 1$ points du plan. Je montrerai aussi un exemple relativement simple de calcul d'invariants à l'aide d'une classe fondamentale virtuelle, s'appliquant notamment au cas du plan éclaté en un point.

4.1. Propriétés. On définit donc des invariants

$$\Psi_{g,m}^A \in \text{Hom}(H^*(W)^{\otimes m}; \mathbf{Q})$$

en intégrant sur la classe fondamentale (quelle qu'elle soit) :

$$\Psi_{g,m}^A(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m) = \langle \text{év}_m^* \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m, [\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W, A)] \rangle.$$

Notations. Je n'ai pas fait figurer le J dans la notation puisque le résultat n'en dépend pas, comme on l'a signalé au § 3.5. Le m est souvent inutile aussi : on voit bien sur quelle classe on calcule l'invariant. Quand le genre sera nul, je ne le ferai pas figurer non plus. Donc $\Psi_A(\xi^{\otimes m})$ signifiera, si $\xi \in H^*(W)$, la même chose que $\Psi_{0,m}^A(\xi^{\otimes m})$.

Voici une liste de propriétés qu'ils satisfont. Je donne des démonstrations avec classes fondamentales naïves ou des idées de démonstrations seulement.

Symétrie. Il s'agit de l'invariance par le groupe symétrique permutant les facteurs dans W et les points marqués des courbes sources. Il est clair que cette propriété est vérifiée dans les cas où les approches directes ou naïves sont suffisantes. Elle se vérifie aussi facilement dans les approches sophistiquées évoquées au § 3.5 puisque le groupe symétrique est fini.

Dimension. On a $\Psi_{g,m}^A(\xi) = 0$ si le degré de la classe de cohomologie ξ ne coïncide pas avec la dimension virtuelle de $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}^J(W,A)$.

Unité. Appelons $1 \in H^0(W)$ l'unité du cup-produit.

Proposition 4.1.1. *On a $\Psi_{g,m}^A(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{m-1} \otimes 1) = 0$ sauf si $(g,m) = (0,3)$ et $A = 0$, cas où l'on a plus généralement*

$$\Psi_{0,3}^0(\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \xi_3) = \langle \xi_1 \smile \xi_2 \smile \xi_3, [W] \rangle.$$

Démonstration. Supposons d'abord $m \geq 3$ ou $g \neq 0$ et considérons le cas où $A = 0$. On a vu au § 3.2 que, pour la classe nulle, on a

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(W,0) = \overline{\mathcal{M}}_{g,m} \times W.$$

On a dit aussi que l'application d'évaluation n'est autre que

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_{g,m} \times W &\longrightarrow W^m \\ (\Sigma, \vec{z}, x) &\longmapsto (x, x, \dots, x). \end{aligned}$$

Donc, si $p : \overline{\mathcal{M}}_{g,m} \times W \rightarrow W$ est la projection,

$$\begin{aligned} \langle (\text{é}v_m)^*(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_m), [\overline{\mathcal{M}}_{g,m} \times W] \rangle &= \langle p^*\xi_1 \smile \cdots \smile p^*\xi_m, [\overline{\mathcal{M}}_{g,m} \times W] \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } m > 3 \\ \langle \xi_1 \smile \xi_2 \smile \xi_3, [W] \rangle & \text{si } m = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

puisque $\overline{\mathcal{M}}_{g,m}$ a une dimension strictement positive sous nos hypothèses.

Considérons maintenant l'unité $1 \in H^0(W)$ du cup-produit, c'est-à-dire la classe de cohomologie duale à la classe fondamentale, ou à l'inclusion $W \subset W$. Imposer qu'un des points marqués soit envoyé dans cette sous-variété, c'est ne rien imposer du tout. Formalisons cette remarque. Remarquons d'abord qu'on a, par définition

$$\Psi_{g,m}^A(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{m-1} \otimes 1) = \langle (\text{é}v_m)^*(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{m-1} \otimes 1), [\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(W,A)] \rangle.$$

Si $g \neq 0$, ou $g = 0$ et $m \geq 4$, ou $A \neq 0$, il y a une application bien définie

$$\theta : \overline{\mathcal{M}}_{g,m}(W,A) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,m-1}(W,A),$$

qui oublie le dernier point marqué (et contracte les composantes devenues instables). Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{M}}_{g,m}(W,A) & \xrightarrow{\text{é}v_m} & W^m \\ \downarrow \theta & & \downarrow p \\ \overline{\mathcal{M}}_{g,m-1}(W,A) & \xrightarrow{\text{é}v_{m-1}} & W^{m-1} \end{array}$$

dans lequel la projection p oublie le dernier facteur. Comme $\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{m-1} \otimes 1 = p^*(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{m-1})$, on a

$$\begin{aligned} \langle (\text{é}v_m)^*(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{m-1} \otimes 1), [\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(W,A)] \rangle &= \langle \theta^*(\text{é}v_{m-1})^*(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{m-1}), [\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(W,A)] \rangle \\ &= \langle (\text{é}v_{m-1})^*(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_{m-1}), \theta_*[\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(W,A)] \rangle. \end{aligned}$$

Comme $\dim \overline{\mathcal{M}}_{g,m-1}(W,A) < \dim \overline{\mathcal{M}}_{g,m}(W,A)$, la classe $\theta_*[\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(W,A)]$ vit dans un groupe d'homologie trivial et donc elle est nulle. \square

Classes de degré 2. Comme les classes d'homologie des courbes jouent un rôle assez primordial dans la construction des invariants de Gromov-Witten, il n'est pas étonnant que les classes de cohomologie de degré 2 jouent aussi un rôle particulier. C'est l'« axiome des diviseurs » de [41]. Voici la propriété précise. Pour la démonstration, je me placerai dans le cas d'une variété convexe.

Proposition 4.1.2. *Soit ξ une classe de cohomologie de degré 2. Pour toute classe de cohomologie $\alpha \in H^*(W^{\otimes m})$, on a*

$$\Psi_{g,m+1}^A(\alpha \otimes \xi) = \langle \xi, A \rangle \Psi_{g,m}^A(\alpha).$$

Soit Z un cycle de codimension 2 dual à la classe ξ . Les deux invariants qui apparaissent dans l'énoncé de la proposition sont

- D'une part, $\Psi_{g,m}^A(\alpha)$, qui compte les courbes de genre g de la classe A avec m points marqués envoyés dans les cycles duaux aux α .
- D'autre part, l'invariant $\Psi_{g,m+1}^A(\alpha \otimes \xi)$ qui compte les mêmes courbes de genre g de la même classe A avec les mêmes conditions d'incidence, plus le fait qu'un point marqué supplémentaire est envoyé dans Z .

Dans les deux décomptes, les courbes sont exactement les mêmes. Il reste à choisir le $(m+1)$ -ième point marqué. On doit le prendre en un des points d'intersection de la courbe et de Z . Idéalement, il y a $\langle \xi, A \rangle$ tels points (figure 19), ce qui explique la formule, ce qui en donne aussi la démonstration dans le cas projectif complexe convexe, par exemple. \square

Exemple 4.1.3. L'invariant de Gromov-Witten $\Psi_{0,3}^L(p^n \otimes p^n \otimes p)$ dans $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ compte les droites passant par deux points généraux et coupant un hyperplan assez général. Toute droite coupe un hyperplan général en un point donc la dernière condition n'ajoute rien. On a donc

$$\Psi_{0,3}^L(p^n \otimes p^n \otimes p) = \langle p, L \rangle \Psi_{0,2}^L(p^n \otimes p^n) \quad (= 1).$$

Règles de décomposition. La propriété la plus difficile, à énoncer comme à démontrer, est la célèbre règle de décomposition. Je vais l'explicitier plus bas dans le cas du genre nul.

4.2. Potentiel de Gromov-Witten et cohomologie quantique. On peut organiser formellement les invariants de Gromov-Witten de genre 0 en une somme infinie, le *potentiel de Gromov-Witten* :

$$\Psi(\xi) = \sum_{m \geq 3} \frac{1}{m!} \sum_A \Psi_A(\xi^{\otimes m}) q^A,$$

dont il n'est pas question de discuter la convergence ici. Dans cette formule

- ξ désigne une classe de cohomologie, $\xi \in H^*(W)$,
- la sommation porte sur toutes les classes $A \in H_2(X; \mathbf{Z})$,
- le symbole $\Psi_A(\xi^{\otimes m})$ est l'invariant de Gromov-Witten obtenu en évaluant $\text{év}_m^* \xi^{\otimes m}$ sur la classe fondamentale de $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}^J(W, A)$,
- q^A désigne la classe A vue multiplicativement dans l'anneau du groupe $H_2(W; \mathbf{Z})/\text{Torsion}$. On peut considérer $q = (q_1, \dots, q_r)$ comme une variable formelle, si A_1, \dots, A_r désigne une base du groupe abélien libre $H_2(W; \mathbf{Z})/\text{Torsion}$ et si $A = a_1 A_1 + \dots + a_r A_r$, alors $q^A = q_1^{a_1} \dots q_r^{a_r}$.

Les dérivées troisièmes de Ψ permettent de définir, modulo, toujours, les questions de convergence, le *produit quantique* sur la cohomologie de W . On décrit la classe de cohomologie $\alpha \star_{\xi, q} \beta$ produit de α et β en l'évaluant sur une classe d'homologie c :

$$\begin{aligned} \langle (\alpha \star_{\xi, q} \beta), c \rangle &= (d^3 \Psi)_\xi(\alpha, \beta, \gamma) \\ &= \sum_{m \geq 0} \frac{1}{m!} \sum_A \Psi_A(\xi^{\otimes m} \otimes \alpha \otimes \beta \otimes \gamma) q^A, \end{aligned}$$

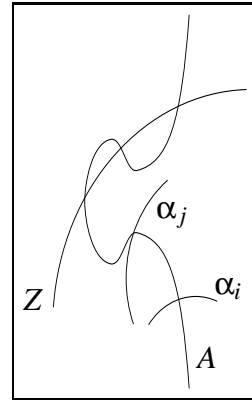


Figure 19

expression dans laquelle γ désigne la classe de cohomologie duale à c .

Les propriétés du produit quantique cachées dans les propriétés dont j'ai fait la liste au § 4.1 sont

- sa commutativité (invariance par le groupe symétrique)
- le fait qu'il ait la même unité $1 \in H^0(W)$ que le cup-produit.

La règle de décomposition, quant à elle, exprime son associativité. Elle dit aussi que le potentiel de Gromov-Witten satisfait les équations dites WDVV, ou que la cohomologie munie du produit quantique est une variété de Frobenius (voir par exemple [16, 20, 33, 62, 48, 5, 63]).

4.3. La règle de décomposition en genre 0. La version en genre 0 de la règle de décomposition concerne une sphère avec quatre points marqués qui dégénère sur un bouquet de deux sphères, chacune gardant deux des points marqués. Les démonstrations symplectiques sont basées sur un argument de recollement : il faut montrer que, près d'un bouquet de deux sphères J -holomorphes, il y a une sphère J -holomorphe. Je renvoie à [51] ou à [61] pour des explicitations de cet argument.

La démonstration dont je donne une idée ici vaut dans le cas projectif complexe. Elle fonctionne très bien pour les variétés convexes et vient de [24]. Bien que non symplectique, elle trouve sa place ici parce qu'elle est basée sur un argument géométrique finalement très simple qui en explique bien la raison d'être.

Fixons une base $(\partial_1, \dots, \partial_N)$ de $H^*(W)$. Appelons g la métrique définie sur $H^*(W)$ par le cup-produit. Dans la base (∂_i) ,

$$g_{i,j} = \langle \partial_i \smile \partial_j, [W] \rangle.$$

Notons $(g^{i,j})$ l'inverse de $(g_{i,j})$. On veut montrer :

Théorème 4.3.1. *Pour toute classe ξ et tous indices i, j, r et s , on a*

$$\begin{aligned} \sum \frac{1}{m_1! m_2!} \Psi_{A_1}(\xi^{m_1} \partial_i \partial_j \partial_k) g^{k,n} \Psi_{A_2}(\xi^{m_2} \partial_r \partial_s \partial_n) q^{A_1 + A_2} \\ = \sum \frac{1}{m_1! m_2!} \Psi_{A_1}(\xi^{m_1} \partial_r \partial_j \partial_k) g^{k,n} \Psi_{A_2}(\xi^{m_2} \partial_i \partial_s \partial_n) q^{A_1 + A_2}. \end{aligned}$$

On veut décrire ce qui se passe dans l'homologie de $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W, A)$ quand la classe A se décompose. Il faut donc considérer des courbes qui ont deux composantes, dont chacune contient une partie des points marqués. Voir la figure 21. On réduira finalement le calcul homologique au même problème dans l'espace de modules de « quatre points sur une droite », $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$.

Quatre points sur une droite. Regardons donc d'un peu plus près l'espace de Deligne-Mumford $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$. C'est une compactification de l'espace $\mathcal{M}_{0,4}$ des classes d'isomorphisme des ensembles de quatre points ordonnés sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Mais quatre points distincts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ à isomorphisme près, c'est un point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{\infty, 0, 1\}$, leur birapport : une unique homographie envoie z_1 sur ∞ , z_2 sur 0 et z_3 sur 1, elle envoie z_4 sur le birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$. Ainsi on a

$$\mathcal{M}_{0,4} \cong \mathbf{P}^1 - \{\infty, 0, 1\}.$$

La compactification de Deligne-Mumford est un processus très impressionnant : on compactifie un espace de points distincts... en les gardant distincts. Quand deux points se rapprochent, ils créent une nouvelle composante rationnelle sur laquelle ils se retrouvent, toujours distincts. C'est ce que montre la figure 20.

Que peut bien être la compactification $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) - \{\infty, 0, 1\}$? C'est $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, bien sûr. On doit ajouter des courbes rationnelles réductibles constituées de deux droites sécantes contenant chacune deux des quatre points marqués. Il y a trois classes d'isomorphisme : à isomorphisme près, on ne voit que les numéros des points sur les composantes, lesquelles composantes sont d'ailleurs indistinguables.

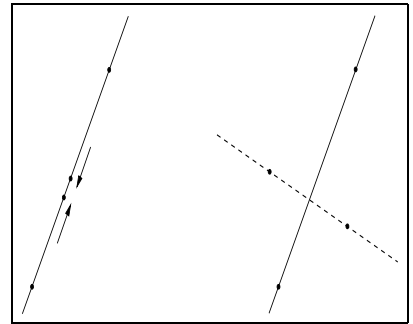


Figure 20

En utilisant le birapport, les trois points ajoutés $(14 | 23)$, $(24 | 13)$ et $(34 | 12)$ correspondent à ∞ , 0 et 1 respectivement.

Démonstration du théorème 4.3.1. En identifiant les coefficients des puissances de q , on est amené à comprendre — dans l'homologie de $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W,A)$ — ce qui se passe quand A se décompose en $A_1 + A_2$ (figure 21). Écrivons $\{1, \dots, m\} = E_1 \cup E_2$ (et supposons $\#E_i \geq 2$).

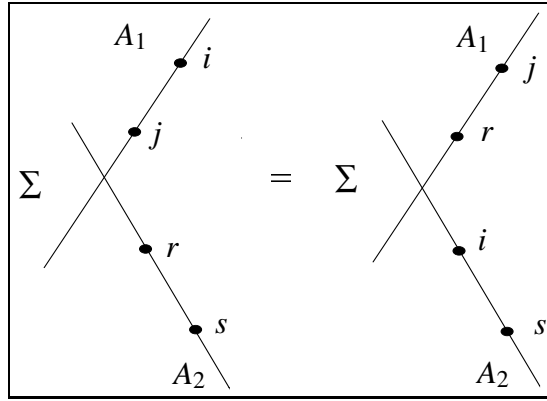


Figure 21

Fixons les décompositions de A et de $\{1, \dots, m\}$, on obtient un plongement

$$j: \overline{\mathcal{M}}_{0,E_1 \cup \{z_0\}}(W, A_1) \times_W \overline{\mathcal{M}}_{0,E_2 \cup \{z_0\}}(W, A_2) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W, A)$$

avec des notations que j'espère évidentes. Écrivons pour simplifier

$$M_i = \overline{\mathcal{M}}_{0,E_i \cup \{z_0\}}(W, A_i), \quad M = \overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W, A) \quad \text{et} \quad D_{E_1, E_2}(A_1, A_2) = M_1 \times_W M_2.$$

Comme $\dim_{\mathbb{C}} M_i = n + \#E_i - 2 + \langle c_1, A_i \rangle$, la dimension complexe de $D_{E_1, E_2}(A_1, A_2)$ est $\dim_{\mathbb{C}} M - 1$, c'est un diviseur de notre espace de modules. Appelons i l'inclusion $D_{E_1, E_2}(A_1, A_2) \subset M_1 \times M_2$. Si un point marqué porte le numéro p , appelons e_p l'application d'évaluation en ce point.

Lemme 4.3.2. *Pour toute classe de cohomologie $\eta = \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_m$ dans $H^*(W)$, on a*

$$i_* j^* (\text{é}v_m)^*(\eta) = \sum_{k,n} g^{k,n} \left[\left(\prod_{p \in E_1} e_p^*(\eta_p) \right) e_{z_0}^*(\partial_k) \right] \times \left[\left(\prod_{q \in E_2} e_q^*(\eta_q) \right) e_{z_0}^*(\partial_n) \right].$$

La démonstration est un calcul direct, que je laisse pour plus tard. On en déduit l'égalité

$$\sum_{\substack{a,b \in E_1 \\ c,d \in E_2}} g^{k,n} \Psi_{A_1} \left(\left(\bigotimes_{p \in E_1} \eta_p \right) \otimes \partial_k \right) \Psi_{A_2} \left(\left(\bigotimes_{q \in E_2} \eta_q \right) \otimes \partial_n \right) = \sum_{\substack{a,b \in E_1 \\ c,d \in E_2}} \langle \text{é}v_m^*(\eta), [D_{E_1, E_2}(A_1, A_2)] \rangle.$$

Posons

$$\begin{cases} \eta_1 = \dots = \eta_{m-4} = \xi \\ \eta_{m-3} = \partial_i, \eta_{m-2} = \partial_j, \eta_{m-1} = \partial_r, \eta_m = \partial_s \\ a = m-3, b = m-2, c = m-1, d = m \end{cases}$$

dans le membre de gauche. Ce membre de gauche devient

$$\sum C(m_1, m_2) g^{k,n} \Psi_{A_1} (\xi^{m_1-2} \partial_i \partial_j \partial_k) \Psi_{A_2} (\xi^{m_2-2} \partial_r \partial_s \partial_n)$$

où $C(m_1, m_2)$ est le nombre de décompositions de $\{1, \dots, m\}$ en $E_1 \cup E_2$ avec $\#E_i = m_i$ et on fait la somme sur toutes les décompositions telles que $m_1 \geq 2$ et $m_2 \geq 2$. Finalement ce membre de gauche vaut

$$m! \sum_{\substack{m_1, m_2 \geq 0 \\ m_1 + m_2 = m-4}} \frac{1}{m_1! m_2!} g^{k,n} \Psi_{A_1} (\xi^{m_1} \partial_i \partial_j \partial_k) \Psi_{A_2} (\xi^{m_2} \partial_r \partial_s \partial_n).$$

Lemme 4.3.3. Dans $H_* (\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W,A))$, si a, b, c et d sont quatre éléments distincts de $\{1, \dots, m\}$, on a

$$\sum_{\substack{a,b \in E_1 \\ c,d \in E_2}} [D_{E_1,E_2}(A_1,A_2)] = \sum_{\substack{c,b \in E_1 \\ a,d \in E_2}} [D_{E_1,E_2}(A_1,A_2)].$$

C'est précisément ce dont nous avons besoin pour finir la démonstration du théorème 4.3.1. \square

Démonstration du lemme 4.3.3. C'est le cœur géométrique et la plus belle partie de la démonstration. L'idée est que $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ n'est autre que $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (comme on l'a dit ci-dessus) et que deux points quelconques de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ représentent la même classe d'homologie.

Considérons la contraction composée

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W,A) \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,\{a,b,c,d\}}.$$

Le diviseur $\sum_{\substack{a,b \in E_1 \\ c,d \in E_2}} D_{E_1,E_2}(A_1,A_2)$ est l'image inverse du point $(a,b | c,d)$. Le diviseur

$$\sum_{\substack{c,b \in E_1 \\ a,d \in E_2}} D_{E_1,E_2}(A_1,A_2),$$

quant à lui, est l'image de $(c,b | a,d)$. Comme les deux points de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sont équivalents, il en est de même des diviseurs dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W,A)$. \square

Remarque 4.3.4. Ce résultat s'exprime par les figures familières aux physiciens (figure 22). Voir [16].

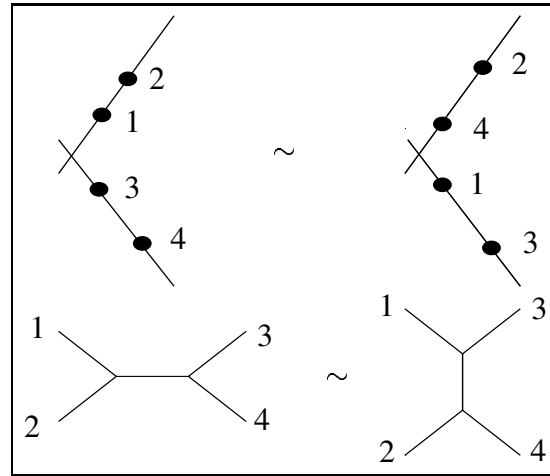


Figure 22

Démonstration du lemme 4.3.2. C'est un calcul direct. On commence par contempler le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{j} & D_{E_1,E_2}(A_1,A_2) & \xrightarrow{i} & M_1 \times M_2 \\ \text{é}v_m \downarrow & & \varepsilon \downarrow & & \downarrow \text{é}v_{m_1+1} \times \text{é}v_{m_2+1} \\ W^m & \xleftarrow{\text{proj}} & W^{m+1} & \xrightarrow{\Delta} & W^{m+2} \end{array}$$

dans lequel on voit qu'on a

$$\begin{aligned} i_* j^* (\text{é}v_m)^* (\eta) &= i_* \varepsilon^* \text{proj}^* (\eta) \\ &= i_* \varepsilon^* (\eta \otimes D[W]) \\ &= (\text{é}v_{m_1+1} \times \text{é}v_{m_2+1})^* \Delta_* (\eta \otimes D[W]) \\ &= (\text{é}v_{m_1+1} \times \text{é}v_{m_2+1})^* (\eta \otimes D[\Delta]). \end{aligned}$$

On remarque maintenant que la classe duale à la diagonale dans $W \times W$ est

$$D[\Delta] = \sum_{k,n} g^{k,n} \partial_k \otimes \partial_n.$$

On a enfin

$$\begin{aligned} i_* j^* (\text{év}_m)^* (\eta) &= \sum_{k,n} g^{k,n} (\text{év}_{m_1+1} \times \text{év}_{m_2+1})^* (\eta \otimes \partial_k \otimes \partial_n) \\ &= \sum_{k,n} g^{k,n} \left[\left(\prod_{p \in E_1} e_p^*(\eta_p) \right) e_{z_0}^*(\partial_k) \right] \times \left[\left(\prod_{q \in E_2} e_q^*(\eta_q) \right) e_{z_0}^*(\partial_n) \right], \end{aligned}$$

la relation qu'on voulait démontrer. \square

Les courbes rationnelles de degré d . La cohomologie de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est l'anneau $\mathbf{Z}[p]/\langle p^3 \rangle$ où p désigne la classe duale à une droite.

Écrivons donc $\xi = \xi_0 + \xi_1 p + \xi_2 p^2$ pour les éléments de $H^*(\mathbf{P}^2)$, de sorte que le potentiel de Gromov-Witten

$$\Psi(\xi) = \sum_{m \geq 3} \frac{1}{m!} \sum_{d \geq 0} \Psi_{dL}(\xi^{\otimes m})$$

s'écrive

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{2} (\xi_0^2 \xi_2 + \xi_0 \xi_1^2) + \sum_{d > 0} \sum_{m \geq 3} \frac{1}{m!} \Psi_{dL}(\xi^{\otimes m}).$$

En utilisant la proposition 4.1.2, comme p est une classe de degré 2, on peut réécrire cette somme comme

$$\sum_{m \geq 3} \sum_{d > 0} \Psi_{dL}((p^2)^{\otimes m}) \frac{\xi_2^m}{m!} \exp\langle \xi_1 p, dL \rangle.$$

On a déjà fait au § 3.2.4 le calcul de dimension qui montre que l'invariant $\Psi_{dL}((p^2)^{\otimes m})$ ne peut être non nul que si $m = 3d - 1$, auquel cas cet invariant est le nombre N_d de courbes rationnelles de degré d passant par $3d - 1$ points du plan en position générale. On peut donc réécrire le potentiel de Gromov-Witten dans le cas du plan sous la forme

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{2} (\xi_0^2 \xi_2 + \xi_0 \xi_1^2) + \sum_{d \geq 1} N_d e^{d\xi_1} \frac{\xi_2^{3d-1}}{(3d-1)!}.$$

Dans cette dimension, la règle de décomposition (ou l'associativité du produit quantique ou les équations WDVV) équivaut à l'équation

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi_2^3} = \left(\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2} \right)^2 - \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi_1^3} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^2}.$$

On identifie les coefficients de $e^{d\xi_1} \xi_2^{3d-4}$ dans les deux membres et on obtient :

Théorème 4.3.5 (Kontsevich [40]). *Le nombre N_d de courbes rationnelles planes de degré d passant par $3d - 1$ points généraux est donné par la formule récursive*

$$N_d + \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1, d_2 \geq 1}} d_1^3 d_2 \binom{3d-4}{3d_1-1} N_{d_1} N_{d_2} = \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1, d_2 \geq 1}} d_1^2 d_2^2 \binom{3d-4}{3d_1-2} N_{d_1} N_{d_2}$$

et la valeur initiale $N_1 = 1$. \square

Cette relation permet théoriquement de calculer les N_d de proche en proche en commençant par $N_1 = 1$. On trouve $N_2 = 1$ (rien de neuf, une conique par cinq points en position générale), $N_3 = 12$, $N_4 = 620$ (ces deux nombres, moins populaires que N_1 et N_2 étaient néanmoins connus des spécialistes), $N_5 = 87\,304$ (à partir de là, on obtient des résultats qui n'étaient pas connus avant le théorème de Kontsevich), $N_6 = 26\,312\,976 \dots$

Remarque 4.3.6. En utilisant des techniques proches de celles évoquées par la figure 17, on peut vérifier de façon assez simple (sans utiliser les techniques du § 3.5) que ce nombre N_d est le même pour toute structure presque complexe générique calibrée par la forme symplectique standard de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Pour une démonstration et beaucoup de jolis résultats sur les courbes J -holomorphes planes et leurs singularités, voir [10].

4.4. Une classe fondamentale virtuelle mais simple. On a déjà eu l'occasion de mentionner que les approches directes ne pouvaient pas fonctionner pour calculer les invariants Ψ_{2E} de $\tilde{\mathbf{P}}^2(\mathbf{C})$: la classe $2E$ n'est régulière pour aucune structure presque complexe (voir les §§ 2.4.5 et 3.4.15). Dans ce cas pourtant, et plus généralement dans le cas des intersections complètes dans un produit d'espaces projectifs, il y a une version assez élémentaire de la classe fondamentale virtuelle (voir [40, 27]) qui permet le calcul de certains des invariants.

4.4.1. Fibrés vectoriels convexes. Soit W une variété projective complexe convexe (voir la définition 3.4.13) et soit $V \rightarrow W$ un fibré vectoriel complexe. On dit que V est convexe s'il est engendré par ses sections holomorphes globales, c'est-à-dire si $H^1(W; V) = 0$.

Examinons maintenant l'ensemble Y des zéros d'une section holomorphe de V transverse à la section nulle : c'est une sous-variété de W dont le fibré normal est la restriction du fibré V à Y :

$$j : Y \subset W, \quad \nu_j = j^*V.$$

Il n'y a pas de raison pour que Y soit convexe. L'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(Y, A)$ peut donc être très mauvais. Voilà comment on peut faire fonctionner l'idée du fibré excès dans ce cas :

- L'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W, j_*A)$ (j désigne l'inclusion $Y \subset W$), lui, est bon : la variété W est supposée convexe. On montre qu'il porte un fibré vectoriel \mathcal{V} dont la fibre au point représenté par $u : C \rightarrow X$ est $H^0(C, u^*V)$. Pour ceci, on peut utiliser le fait que $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(X, j_*A)$ est un espace de modules au sens de la géométrie algébrique, avec une application stable universelle (voir le § 3.4.3).
- Pour tout $\alpha \in H^*(W)^{\otimes m}$, on pose

$$\Psi_A((j^m)^*\alpha) = \langle (\text{év}_m)^*\alpha \smile e(\mathcal{V}), [\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(W, j_*A)] \rangle.$$

Attention, je n'aurai ainsi défini les invariants que sur les classes de cohomologie provenant de la cohomologie de la variété ambiante W . Cette réserve mise à part, c'est donc la classe duale à la classe d'Euler de \mathcal{V} qui joue le rôle de classe fondamentale.

Remarques 4.4.2

- (1) On vérifie facilement que si la variété Y est A -convexe, la définition donnée coïncide avec la définition précédente de $\Psi_A((j^m)^*\alpha)$.
- (2) On vérifie aussi que le résultat ne dépend pas du choix du plongement de Y dans la variété convexe.
- (3) À cause de la multiplicativité de la classe d'Euler, on peut aussi vérifier que ces invariants satisfont la règle de décomposition 4.3.

Le plan éclaté en un point. On va appliquer cette stratégie au cas où Y est la variété $\tilde{\mathbf{P}}^2(\mathbf{C})$ obtenue en éclatant $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ en un point. Comme on l'a déjà signalé par exemple en § 3.4.3, si E est la classe du diviseur exceptionnel, Y n'est pas $2E$ -convexe.

On commence par plonger Y dans une variété convexe. C'est l'hypersurface de bidegré $(1, 1)$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, en d'autres termes c'est le lieu des zéros d'une section du fibré vectoriel convexe $V = \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1)$:

$$Y = \{(\ell, d) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid d \subset \ell \oplus \mathbf{C}\} = \{([a, b], [x, y, z]) \mid ay - bx = 0\}.$$

La cohomologie de Y est engendrée par des classes ambiantes, de sorte que la recette ci-dessus permet théoriquement de calculer tous les invariants de Gromov-Witten de Y . Ici nous allons nous intéresser à Ψ_{2E} .

La classe image j_*E est la classe F d'une fibre $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \{\text{pt}\}$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. On doit donc considérer l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}), 2F)$.

Comme les applications de la classe $2F$ ont une projection constante sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, on a

$$\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}), 2F) \cong \overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), 2L) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}).$$

Pour la même raison, le fibré \mathcal{V} que nous considérons est de la forme

$$\mathcal{V} \cong \mathcal{V}' \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}(1) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), 2L) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$$

où $\mathcal{V}' \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), 2L)$ est un fibré vectoriel qui a pour fibre — au point de l'espace de modules représenté par l'application $u' : C \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ — l'espace $H^0(C, u'^*\mathcal{O}(1))$. Le rang du fibré vectoriel complexe \mathcal{V}' est 3 et

$$e(\mathcal{V}) = c_3(\mathcal{V}') \otimes 1 + c_2(\mathcal{V}') \otimes t + c_1(\mathcal{V}') \otimes t^2 \in H^6(\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}), 2F))$$

(ici $t = c_1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2(\mathbf{C})}(1))$ est le générateur de $H^2(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}))$).

Remarquons pour finir que \mathcal{V}' a deux sections partout indépendantes, de sorte que $c_3(\mathcal{V}') = 0$, $c_2(\mathcal{V}') = 0$ et $e(\mathcal{V}) = c_1(\mathcal{V}') \otimes t^2$. Pour le vérifier, choisissons deux éléments indépendants s_1 et s_2 dans l'espace vectoriel $H^0(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})}(1))$, qui est de dimension 2. Définissons deux sections \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 de \mathcal{V}' par

$$\tilde{s}_i(C, \vec{z}, u) = s_i \circ u.$$

Si $\lambda \tilde{s}_1 + \mu \tilde{s}_2$ s'annule en un point de $\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), 2L)$ représenté par (C, \vec{z}, u) ,

$$(\lambda s_1 + \mu s_2) \circ u \equiv 0.$$

L'image de u doit donc être contenue dans l'ensemble des zéros de $\lambda s_1 + \mu s_2$, qui est un point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Donc u doit être constante, une contradiction puisqu'elle est de degré 2. Les sections \tilde{s}_1 et \tilde{s}_2 sont donc bien partout indépendantes.

On en déduit un résultat d'annulation pour les invariants Ψ_{2E} :

Proposition 4.4.3. *Si $\alpha \in H^*((\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}))^m)$ est divisible par t , alors $\Psi_{2E}((j^m)^* \alpha) = 0$.*

Démonstration. L'hypothèse sur la classe α est que, si on la décompose en

$$\alpha = \sum_i \alpha_1^i \otimes \cdots \otimes \alpha_m^i,$$

alors, pour tout i , un des α_j^i est de la forme $a \otimes bt$ pour un certain $a \in H^*(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$, $b \in H^*(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}))$. On veut donc vérifier que

$$\Psi_{2E}((j^m)^*(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{m-1} \otimes (a \otimes bt))) = 0$$

pour tous les $\alpha_i \in H^*(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}))$, $a \in H^*(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$, $b \in H^*(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}))$. Cet invariant a été défini comme

$$\langle \text{év}_m^*(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_{m-1} \otimes (a \otimes bt)) \smile (c_1(\mathcal{V}') \otimes t^2), [\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), 2L) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C})] \rangle.$$

L'application

$$\text{év}_m : \overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}), 2F) \longrightarrow (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}))^m \cong (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^m \times (\mathbf{P}^2(\mathbf{C}))^m$$

coïncide avec

$$\text{év}'_m \times \Delta : \overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), 2L) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \longrightarrow (\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^m \times (\mathbf{P}^2(\mathbf{C}))^m.$$

Ainsi notre invariant est-il une somme de termes de la forme

$$\langle [\text{év}'_m(a' \otimes a) \otimes (b' \smile bt)] \smile (c_1(\mathcal{V}') \otimes t^2), [\overline{\mathcal{M}}_{0,m}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}), 2L)] \otimes [\mathbf{P}^2(\mathbf{C})] \rangle$$

qui sont tous nuls puisque $t^3 = 0$ dans $H^*(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}))$. □

5. Autres applications, autres invariants

Dans cette partie, je vais être très rapide et imprécise, renvoyant les lecteurs aux références citées.

5.1. Invariants équivariants, symétrie miroir. J'ai déjà signalé au § 4.2 que les invariants de Gromov-Witten et le produit quantique qu'ils définissent permettent de munir l'espace vectoriel complexe $H^*(W, \mathbf{C})$ d'une structure de variété de Frobenius. Les espaces de déploiements de singularités fournissent d'autres exemples de variétés de Frobenius. Une façon élégante et impressionnante [26] d'exprimer la « conjecture des miroirs » (voir [73]) est de postuler une équivalence entre ces deux types de variétés de Frobenius. Ce programme est réalisé par Givental [27] qui démontre cette conjecture en utilisant des invariants de Gromov-Witten équivariants.

5.2. Homologie de Floer, conjecture d'Arnold. La conjecture d'Arnold met une borne inférieure au nombre de points fixes de certains difféomorphismes symplectiques. On sait depuis longtemps que les courbes holomorphes peuvent jouer un rôle dans une démonstration de cette conjecture, c'est ainsi que Floer l'avait démontrée pour les variétés symplectiques monotones⁽¹⁹⁾ [22], fixant les bases de l'homologie qui porte son nom (voir aussi [34]).

Toujours dans [40], Kontsevich a suggéré que les nouveaux espaces de modules pourraient aussi être utilisés pour démontrer la conjecture sur une variété symplectique générale. C'est ce que Fukaya et Ono font dans [23].

5.3. Lien avec Seiberg-Witten. Pour les variétés de dimension 4, les invariants de Gromov-Witten sont liés à ceux de Seiberg-Witten (voir le texte de Morgan [53]), comme l'a montré Taubes (voir l'annonce générale de ces beaux résultats dans [69]).

Une conséquence étonnante : ce sont des invariants du type de *difféomorphisme* de la variété, contrairement à ce qui se passe en dimension 6 (voir le § 2.5).

Une autre conséquence : l'unicité de la structure symplectique sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$. Précisément, si ω_0 et ω sont des formes symplectiques sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, il existe un réel $\lambda \neq 0$ et un difféomorphisme φ tel que $\varphi^*\omega = \lambda\omega_0$.

- En s'appuyant sur le théorème d'existence de J -droites (ici le théorème 2.2.2), on montre que, si pour une structure presque complexe J calibrée par une forme symplectique ω sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, on peut faire passer une unique droite par deux points distincts, alors $(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}), \omega)$ est difféomorphe à $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ avec un multiple de la forme symplectique standard.
- Ce résultat de Gromov dans [29] a attendu dix ans le résultat complémentaire de Taubes dans [70]. Celui-ci montre la non-nullité d'un invariant de Seiberg-Witten, et l'égalité de cet invariant avec un invariant de Gromov-Witten. Ce dernier n'est donc pas nul, mais un invariant de Gromov-Witten non nul, c'est un résultat global d'existence de courbe holomorphe, ici de J -droites passant par deux points. D'où l'unicité de la structure symplectique de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$.

5.4. Nouveaux invariants en dimension 4. Cette construction d'Auroux et Katzarkov [9] est basée sur un théorème d'Auroux [8]⁽²⁰⁾, qui affirme que toute variété symplectique de dimension 4 est un revêtement de $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ramifié le long d'une surface symplectique Σ . En regardant cette surface critique comme un revêtement ramifié de degré d de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, les auteurs construisent des invariants des variétés symplectiques de dimension 4, qui sont

- une factorisation dans le groupe des tresses à d brins de la tresse Δ^2 (celle où on fait tourner tous les brins en même temps)

⁽¹⁹⁾ Voir le § 3.5.

⁽²⁰⁾ ... lui-même basé sur une technique de Donaldson [19].

- et une représentation de monodromie $\pi_1(\mathbf{P}^2(\mathbf{C}) - \Sigma) \rightarrow \mathfrak{S}_n$ (ici n est le degré du revêtement $W \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$).

Ce sont des invariants complets du type de déformation de la variété symplectique... les pessimistes en déduiront sans doute qu'ils sont inutilisables.

5.5. Homologie de contact. Si V est une variété de contact — l'analogue, en dimension impaire, d'une variété symplectique — on peut considérer les courbes pseudo-holomorphes de la variété « symplectifiée » $W \cong V \times \mathbf{R}$. Les espaces de modules correspondants sont les principaux personnages d'une nouvelle théorie fascinante en cours d'élaboration par Eliashberg avec Givental, Hofer... mais dont on ne trouve pour l'instant de trace écrite que dans le très bref [21].

5.6. Capacités. La largeur de Gromov dont il a été question aux §§ 1.4 et 2.2 fait partie d'une famille d'invariants pour les variétés symplectiques non compactes. En concurrence avec les courbes holomorphes, les systèmes hamiltoniens fournissent des invariants de ce type, les « capacités », ce sont les travaux, notamment, d'Ekeland, Floer, Hofer, Viterbo, Zehnder. Voir les survols dans [71, 35].

6. Appendice : les espaces projectifs et leur famille

Dans cet appendice, je décris « la » forme de Kähler de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ utilisée tout au long de ces notes. Elle provient, bien sûr, d'une façon ou d'une autre, de la forme de Kähler de \mathbf{C}^n ou de \mathbf{C}^{n+1} .

La forme de Kähler de \mathbf{C}^n . C'est simplement la forme symplectique standard $\omega = \sum dx_j \wedge dy_j$. Comme c'est aussi, au signe près, la partie imaginaire de la structure hermitienne canonique de \mathbf{C}^n , il est bien clair que c'est, en effet une forme de Kähler (voir le § 1.3).

Une autre façon de la décrire est d'utiliser les opérateurs d' et d'' de Dolbeault

$$d'f = \sum \frac{\partial f_j}{\partial z_j} dz_j \quad d''f = \sum \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j.$$

On définit ω par la formule $\omega = id'd''f$, dans laquelle f désigne la fonction $f : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $f(v) = \log(1 + \|v\|^2)$. C'est la même forme ω , j'en laisse la vérification aux lectrices.

La forme de Kähler sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Utilisons les cartes $\varphi_k : U_k \rightarrow \mathbf{C}^n$ ($0 \leq k \leq n$) habituelles de $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$:

$$U_k = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_k \neq 0\} \quad \varphi_k([x_0, \dots, x_n]) = \left(\frac{x_i}{x_k} \right)_{i \neq k} \in \mathbf{C}^n = \{(X_k)_{i \neq k}\}.$$

Écrivons $\omega_k = \varphi_k^* \omega$, où ω est la forme de Kähler sur \mathbf{C}^n décrite ci-dessus. Ainsi, on a

$$\omega_k = id'd'' \log \frac{\sum |x_i|^2}{|x_k|^2}.$$

On vérifie sans trop de mal que ω_k et ω_l coïncident sur $U_k \cap U_l$, de sorte que les ω_k ($0 \leq k \leq n$) définissent bien une forme de Kähler sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$.

Une autre façon de décrire la même forme est d'utiliser un quotient, c'est un cas particulier du célèbre procédé de « réduction symplectique ». On considère donc l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ comme ce qu'il est vraiment, c'est-à-dire comme le quotient

$$\mathbf{P}^n(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} / z \sim \lambda z \text{ pour } \lambda \in \mathbf{C}^*,$$

ou encore, puisque toutes les droites complexes contiennent un cercle de vecteurs unitaires, comme le quotient de la sphère unité $S^{2n+1}/z \sim \lambda z$ pour $\|\lambda\| = 1$. On regarde l'inclusion et la projection :

$$\begin{array}{ccc} j: & S^{2n+1} & \subset \mathbf{C}^{n+1} \\ & \downarrow p & \\ & \mathbf{P}^n(\mathbf{C}) & \end{array}$$

La restriction $j^*\omega$ de la forme symplectique de \mathbf{C}^{n+1} à la sphère a un noyau. Au point $z \in S^{2n+1}$, c'est simplement la droite réelle engendrée par iz . Le quotient tue précisément cette droite, de sorte qu'il y a une unique forme *symplectique*, disons σ , sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ vérifiant

$$j^*\omega = p^*\sigma.$$

C'est la même forme que celle construite par les cartes ci-dessus, j'en laisse aux lecteurs la vérification.

Sous-variétés. Les variétés kählériennes sont légion : tout produit de variétés kählériennes, toute sous-variété complexe d'une variété kählérienne sont kählériennes, en particulier toutes les variétés projectives complexes sont kählériennes.

C'est le cas en particulier de l'espace $\tilde{\mathbf{P}}^2(\mathbf{C})$ obtenu en éclatant un point dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, tout simplement parce que c'est une sous-variété complexe d'un produit d'espaces projectifs, comme on le voit en écrivant

$$\tilde{\mathbf{P}}^2(\mathbf{C}) = \{(\ell, d) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^2(\mathbf{C}) \mid d \subset \ell \oplus \mathbf{C}\} = \{([a, b], [x, y, z]) \mid ay - bx = 0\}.$$

La projection sur le deuxième facteur est l'éclatement, le diviseur exceptionnel E est la fibre de $[0, 0, 1]$.

Références

- [1] V. I. ARNOLD et A. B. GIVENTAL – « Symplectic geometry », *Dynamical systems, Encyclopædia of Math. Sci.*, Springer (1985).
- [2] M. AUDIN – « Symplectic and almost complex manifolds », in [7], p. 41–74.
- [3] ——— *The topology of torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Math., Birkhäuser, paru d'abord en français aux publications de l'IRMA, 1991.
- [4] ——— « Cohomologie quantique », *Séminaire Bourbaki, 1995-96, Astérisque* **241** (1997), p. 29–58.
- [5] ——— « An introduction to Frobenius manifolds, moduli spaces of stable maps and quantum cohomology », *preprint non publié* (1997).
- [6] M. AUDIN et P. IGLÉSIAS – « Optique, géométrie et topologie symplectique », *Images des mathématiques*, Supplément au *Courrier du C.N.R.S.* (1995).
- [7] M. AUDIN et J. LAFONTAINE (éds.) – *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Math., Birkhäuser, 1994.
- [8] D. AUROUX – « Symplectic 4-manifolds as Branched Coverings of CP^2 », *Invent. Math.*, à paraître.
- [9] D. AUROUX et L. KATZARKOV – « Branched Coverings of CP^2 and Invariants of Symplectic 4-manifolds », *preprint* (1999).
- [10] J.-F. BARRAUD – « Courbes pseudo-holomorphes équisingulières en dimension 4 », *thèse, Université de Toulouse* (1998).
- [11] K. BEHREND et B. FANTECHI – « The intrinsic normal cone », *Invent. Math.* **128** (1997), p. 45–88.
- [12] D. BENNEQUIN – « Problèmes elliptiques, surfaces de Riemann et structures symplectiques, Séminaire Bourbaki », *Astérisque* **145-146** (1987), p. 111–136.
- [13] X. BUFF, J. FEHRENBACH, P. LOCHAK, L. SCHNEPS et P. VOGEL – *Espaces de modules des courbes, groupes modulaires et théorie des champs*, Panoramas et Synthèses, 7, Société Mathématique de France, 1999.

- [14] H. CLEMENS, J. KOLLÁR et S. MORI – « Higher-dimensional complex geometry », *Astérisque* **166** (1988).
- [15] M. CORNALBA – « A simple proof of the projectivity of Kontsevich's space of maps », *Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A* **129** (1995), p. 111–119.
- [16] P. DI FRANCESCO et C. ITZYKSON – « Quantum intersection rings », in [17].
- [17] R. DIJKGRAAF, C. FABER et G. VAN DER GEER (éds.) – *The moduli space of curves*, Progress in Math. 129, Birkhäuser, 1995.
- [18] S. DONALDSON – « The orientation of Yang-Mills moduli spaces and 4-manifold topology », *J. Differential Geom.* **26** (1987), p. 397–428.
- [19] ——— « Symplectic submanifolds and almost-complex geometry », *J. Differential Geom.* **44** (1996), p. 666–705.
- [20] B. DUBROVIN – « Geometry of 2D topological field theories », *Lecture Notes in Math.* **1620** (1995).
- [21] Y. ELIASHBERG – « Invariants in contact topology », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*, vol. 1998, p. 327–338.
- [22] A. FLOER – « Symplectic fixed points and holomorphic spheres », *Comm. Math. Phys.* **120** (1989), p. 575–611.
- [23] K. FUKAYA et K. ONO – « Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant », *Topology* **38** (1999), p. 933–1048.
- [24] W. FULTON et R. PANDHARIPANDE – « Notes on stable maps and quantum cohomology », Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, p. 45–96.
- [25] P. GAUDUCHON – « Connexions linéaires, classes de Chern, théorème de Riemann-Roch », in [7].
- [26] A. B. GIVENTAL – « Homological geometry and mirror symmetry », *I.C.M. Zürich (1994)*, Birkhäuser (1995), p. 473–480.
- [27] ——— « Equivariant Gromov-Witten invariants », *Internat. Math. Res. Notices* **13** (1996), p. 613–663.
- [28] T. GRABER et R. PANDHARIPANDE – « Localization of virtual classes », *preprint* (1997).
- [29] M. GROMOV – « Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds », *Invent. Math.* **82** (1985), p. 307–347.
- [30] ——— « Soft and hard symplectic geometry », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986)* (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, p. 81–98.
- [31] R. HAMILTON – « The inverse function theorem of Nash and Moser », *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), p. 65–222.
- [32] J. HARRIS et I. MORRISON – *Moduli of curves*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [33] N. HITCHIN – « Lectures on Frobenius manifolds », *Séminaire de Mathématiques Supérieures de Montréal, Kluwer* (1997).
- [34] H. HOFER et D. SALAMON – « Floer homology and Novikov rings », in [36].
- [35] H. HOFER et E. ZEHNDER – « Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics », in [36].
- [36] H. HOFER, C. H. TAUBES, A. WEINSTEIN et E. ZEHNDER (éds.) – *The Floer memorial volume*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [37] S. IVASHKOVICH et V. SHEVCHISHIN – « Structure of the moduli space in a neighborhood of a cuspcurve and meromorphic hulls », *Invent. Math.* **136** (1999), p. 571–602.
- [38] S. KEEL – « Intersection theory of moduli space of stable n -pointed curves of genus 0 », *Trans. Amer. Math. Soc.* **330** (1992), p. 545–574.
- [39] F. KNUDSEN – « Projectivity of the moduli space of stable curves II », *Math. Scand.* **52** (1983), p. 1225–1265.
- [40] M. KONTSEVICH – « Enumeration of rational curves via torus actions », in [17].
- [41] M. KONTSEVICH et Y. MANIN – « Gromov-Witten classes, quantum cohomology and enumerative geometry », *Commun. Math. Phys.* **164** (1994), p. 525–562.
- [42] J. LAFONTAINE – « Some relevant Riemannian geometry », in [7].

- [43] J. LAFONTAINE et M. AUDIN – « Applications of pseudo-holomorphic curves to symplectic topology », *in* [7], p. 1–14.
- [44] F. LALONDE et D. MCDUFF – « The classification of ruled symplectic 4-manifolds », *Math. Res. Letters* **3** (1996), p. 769–778.
- [45] J. LI et G. TIAN – « Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of algebraic varieties », *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), p. 119–174.
- [46] P. LIBERMANN et C. M. MARLE – *Symplectic geometry and analytic mechanics*, Reidel, Boston, 1987.
- [47] V. LIZAN – « Thèse », *Université de Toulouse* (1996).
- [48] Y. I. MANIN – « Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces (chapters I, II, III) », *preprint* (1996).
- [49] D. MCDUFF – « Examples of symplectic structures », *Invent. Math.* **89** (1987), p. 1–36.
- [50] _____ « The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds », *Journ. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), p. 679–712.
- [51] D. MCDUFF et D. SALAMON – *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, Amer. Math. Soc., 1994, 2nd printing, 1995.
- [52] _____ *Introduction to symplectic topology*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, Oxford Science Publications.
- [53] J. MORGAN – « ? », *Cette session des actes de la recherche* (1999).
- [54] S. MORI – « Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective », *Ann. of Math.* **116** (1982), p. 133–176.
- [55] J. MOSER – « On the volume elements on a manifold », *Trans. Amer. Math. Soc.* **120** (1965), p. 286–294.
- [56] P. PANSU – « Compactness », *in* [7].
- [57] T. H. PARKER et J. G. WOLFSON – « Pseudo-holomorphic maps and bubble trees », *J. Geom. Anal.* **3** (1993), p. 63–98.
- [58] A. PRESSLEY et G. SEGAL – *Loop groups*, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986, Oxford Science Publications.
- [59] D. QUILLEN – « Elementary proofs of some results of cobordim theory using Steenrod operations », *Advances in Math.* **7** (1971), p. 29–56.
- [60] Y. RUAN – « Symplectic topology on algebraic 3-folds », *Journal Diff. Geom.* **39** (1994), p. 215–227.
- [61] Y. RUAN et G. TIAN – « A mathematical theory of quantum cohomology », *Journal Diff. Geom.* **42** (1995), p. 259–367.
- [62] C. SABBABH – « Frobenius manifolds : isomonodromic deformations and infinitesimal period mappings », *Expo. Math.* **16** (1998), p. 1–57.
- [63] _____ *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, à paraître, 2000.
- [64] J. SARAMAGO – *Memorial do Convento*⁽²¹⁾, Caminho, Lisboa, 1982.
- [65] B. SIEBERT – « Gromov-Witten invariants for general symplectic manifolds », *preprint* (1996).
- [66] _____ « Algebraic and symplectic Gromov-Witten invariants coincide », *preprint* (1998).
- [67] J.-C. SIKORAV – « Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds », *in* [7].
- [68] H. SPIELBERG – « A formula for the Gromov-Witten invariants of toric varieties », *Thèse, Strasbourg* (1999).
- [69] C. H. TAUBES – « The Seiberg-Witten and Gromov invariants », *Math. Res. Lett.* **2** (1995), p. 221–238.
- [70] _____ « $sw \rightarrow gr$: from the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves », *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), p. 845–918.
- [71] C. VITERBO – « Capacités symplectiques et applications (d’après Ekeland-Hofer, Gromov) », *Astérisque* (1989), no. 177-178, p. Exp. No. 714, 345–362, Séminaire Bourbaki, Vol. 1988/89.

⁽²¹⁾ Traduit en français sous le titre « Le Dieu manchot », éditions du Seuil.

- [72] _____ « Une introduction à la topologie symplectique », *Gazette des Mathématiciens* **54** (1992), p. 81–96.
- [73] C. VOISIN – *Symétrie miroir*, Panoramas et Synthèses, 2, Société Mathématique de France, 1996.
- [74] C. T. C. WALL – « Classification problems in differential topology of 6-manifolds », *Invent. Math.* **1** (1966), p. 335–374.
- [75] E. WITTEN – « Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space », *Surveys in differential geometry* (Cambridge, MA, 1990), Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991, p. 243–310.
- [76] W. T. WU – « Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques », *Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann (1952).
- [77] R. YE – « Gromov’s compactness theorem for pseudo holomorphic curves », *Trans. Amer. Math. Soc.* **342** (1994), p. 671–694.

Version du 21 septembre 1999

MICHÈLE AUDIN, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS,
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France • *E-mail* : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr
Url : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin>