



HAL
open science

Une construction de paires duales dans les algèbres de Lie réelles.

Josiane Nervi

► **To cite this version:**

| Josiane Nervi. Une construction de paires duales dans les algèbres de Lie réelles.. 1998. hal-00129578

HAL Id: hal-00129578

<https://hal.science/hal-00129578>

Preprint submitted on 8 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex

UNE CONSTRUCTION DE PAIRES DUALES DANS LES ALGÈBRES DE LIE REELLES

par
JOSIANE NERVI

AMS Classification: 17B20, 17B70.

Mots clés: Paires duales, sous-algèbres C-admissibles.

Une construction de paires duales dans les algèbres de Lie réelles.

0. Introduction.

Deux sous-algèbres \mathfrak{a} et \mathfrak{b} d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} forment une paire duale si

- \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont réductives dans \mathfrak{g} et si

- le centralisateur $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ de \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} est égal à \mathfrak{b} et vice-versa.

Les sous-algèbres \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont alors appelées sous-algèbres de Howe.

La classification des paires duales d'une algèbre de Lie complexe sous une certaine condition d'irréductibilité a été obtenue par Hubert Rubenthaler ([Ru 1]). Il a montré que dans la plupart des cas l'une au moins des algèbres \mathfrak{a} et \mathfrak{b} est ce qu'on appelle une sous-algèbre C-admissible. Les sous-algèbres C-admissibles et plus généralement admissibles sont associées à certains espaces préhomogènes de type parabolique correspondant à des parties Γ bien précises d'une base Ψ du système de racines de \mathfrak{g} par rapport à une sous-algèbre de Cartan. Autrement dit, dans le cas complexe, les sous-algèbres de Howe sont essentiellement classifiées par des diagrammes de Dynkin à poids (la convention étant d'encercler les racines de $\Psi \setminus \Gamma$).

Dans cet article nous abordons le problème de la classification des paires duales dans les algèbres de Lie simples réelles en proposant une construction des sous-algèbres "admissibles" qui fournit la liste de toutes les paires duales $(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{R}})$ d'une algèbre de Lie simple réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ telles que $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ soit déployée et telle que la complexifiée \mathfrak{a} de $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre C-admissible de la complexifiée \mathfrak{g} de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Les paires duales que nous obtenons sont classifiées par des diagrammes de Satake à poids.

Dans les paragraphes 1 et 2 sont introduites les notations et rappelés des résultats nécessaires à la construction des sous-algèbres admissibles.

Dans le paragraphe 3, on construit une classe de sous-algèbres dites admissibles d'une algèbre de Lie simple réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Ces algèbres admissibles qui sont toujours déployées sont classifiées par des diagrammes de Satake à poids qui constituent la table 1 à la fin de l'article.

Le résultat principal du paragraphe 4 est que parmi les sous-algèbres admissibles du paragraphe précédent, celles qui sont C-admissibles sont toujours des sous-algèbres de Howe, autrement dit des membres de paires duales. Les paires duales obtenues constituent la table 2 en fin d'article .

Si Δ est un système de racines fini, irréductible et réduit, Bermann et Moody ([BM]), puis Benkart et Zelmanov ([BZ]) ont introduit la notion d'algèbre de Lie graduée par Δ . Nous montrons dans le paragraphe 5 que nos constructions fournissent naturellement des Δ -graduations de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ où Δ est le système de racines de la sous-algèbre de Howe déployée construite précédemment.

1. Préliminaires.

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie complexe simple et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ une forme réelle de \mathfrak{g} .

Définition 1.1. *Une sous-algèbre de Lie \mathfrak{l} de l'algèbre \mathfrak{g} est scindée suivant $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ si $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$*

est une forme réelle de \mathfrak{l} .

Le résultat suivant est bien connu.

Proposition 1.2. *Soit σ la conjugaison de \mathfrak{g} associée à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. La sous-algèbre \mathfrak{l} est scindée suivant $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ si et seulement si σ stabilise \mathfrak{l} .*

On considère la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ associée à une forme réelle compacte $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$.

Soient $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ un sous-espace vectoriel abélien maximal dans \mathfrak{p} et \mathfrak{j} une sous-algèbre abélienne maximale dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ contenant $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. On a alors $\mathfrak{j} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ avec $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{k} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ et $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$.

La complexifiée \mathfrak{h} de \mathfrak{j} est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

Soit \mathcal{R} (respectivement Σ) le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (respectivement $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$). Il existe une base Ψ de \mathcal{R} adaptée à $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. Cela signifie que l'ordre induit sur \mathcal{R} par la base Ψ est compatible avec l'ordre induit sur Σ par la base Π de Σ obtenue en prenant les restrictions non nulles à $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ des éléments de Ψ . Si nous notons ρ l'opération de restriction, $\Pi = \rho(\Psi) \setminus \{0\}$ et toute restriction non nulle d'une racine positive de \mathcal{R} est une racine positive de Σ .

L'ensemble des racines de \mathcal{R} s'annulant sur $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ est noté \mathcal{R}_0 et Ψ_0 est l'ensemble $\mathcal{R}_0 \cap \Psi$ (ce sont les racines "noires" des *diagrammes de Satake* de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$).

Soit Γ une partie de la base Ψ . **Nous imposerons à Γ les conditions suivantes:**

$$\Psi_0 \subset \Gamma \text{ et } \Gamma = \rho^{-1}(\rho(\Gamma)) \cap \Psi$$

En d'autres termes et si l'on adopte les conventions utilisées dans les diagrammes de Satake, Γ contient les racines noires et Γ est stable par fléchage.

Nous noterons E l'ensemble des restrictions non nulles des racines de Γ , c'est-à-dire $E = \rho(\Gamma) \setminus \{0\}$.

Les notations et conventions utilisées dans ce qui suit ont été empruntées à H. Rubenthaler notamment ([Ru1]).

On note \mathfrak{h}_{Γ} l'orthogonal de Γ dans \mathfrak{h} . Le centralisateur \mathfrak{l}_{Γ} de \mathfrak{h}_{Γ} dans \mathfrak{g} est une algèbre réductive de centre \mathfrak{h}_{Γ} .

On désigne par H_{Γ} l'unique élément de \mathfrak{h} vérifiant le système d'équations:

$$\begin{cases} \alpha(H_{\Gamma}) = 0 \quad \forall \alpha \in \Gamma \\ \alpha(H_{\Gamma}) = 2 \quad \forall \alpha \in \Psi \setminus \Gamma \end{cases}$$

Remarque 1.3. L'élément H_{Γ} appartient à la sous-algèbre réelle de \mathfrak{h} , $\sum_{\alpha \in \Psi} \mathbb{R}H_{\alpha} = i\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$.

Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose $d_p(\Gamma) = \{X \in \mathfrak{g}, [H_{\Gamma}, X] = 2pX\}$.

Les sous-espaces $d_p(\Gamma)$ définissent une \mathbb{Z} -graduation de \mathfrak{g} appelée graduation de type parabolique, et la représentation de $\mathfrak{l}_\Gamma = d_0(\Gamma)$ dans $d_1(\Gamma)$ sera notée $(\mathfrak{l}_\Gamma, d_1(\Gamma))$.

Nous noterons $\Omega_1(\Gamma)$ l'ensemble des racines α de \mathcal{R} s'écrivant $\alpha = \gamma + \langle \Gamma \rangle$ avec $\gamma \in \Psi \setminus \Gamma$, $\langle \Gamma \rangle$ désignant une combinaison linéaire d'éléments de Γ . On a alors de manière évidente $d_1(\Gamma) = \sum_{\alpha \in \Omega_1(\Gamma)} \mathfrak{g}^\alpha$.

Nous noterons $\omega_1(E)$ l'ensemble des racines λ de E s'écrivant $\lambda = \gamma + \langle E \rangle$ avec $\gamma \in \Pi \setminus E$. On pose $d_1(E) = \sum_{\lambda \in \omega_1(E)} \mathfrak{g}_\mathbb{R}^\lambda$. Nous désignerons par \mathfrak{a}_E l'ensemble des éléments de $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ qui annulent toutes les racines de E et par $\mathcal{Z}(\mathfrak{a}_E)$ le centralisateur de \mathfrak{a}_E dans $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$.

On rappelle le résultat suivant:

Proposition 1.4. (voir par exemple [Ru2]) *La représentation $(\mathfrak{l}_\Gamma, d_1(\Gamma))$ est irréductible si et seulement si $\text{card}(\Psi \setminus \Gamma) = 1$.*

Soient G le groupe adjoint de \mathfrak{g} et L_Γ le centralisateur de H_Γ dans le groupe G . Nous noterons $(L_\Gamma, d_1(\Gamma))$ la représentation de L_Γ dans $d_1(\Gamma)$ dont la dérivée est la représentation $(\mathfrak{l}_\Gamma, d_1(\Gamma))$.

Théorème 1.5. [Vi] *L'espace $(L_\Gamma, d_1(\Gamma))$ est un espace préhomogène.*

Ce type d'espace préhomogène est appelé préhomogène de type parabolique. Rappelons que les espaces préhomogènes de ce type sont classifiés par leurs *diagrammes* obtenus en encerclant tout simplement sur le diagramme de Dynkin de \mathfrak{g} les racines de $\Psi \setminus \Gamma$.

Théorème 1.6. [Ru2] *Supposons $(L_\Gamma, d_1(\Gamma))$ irréductible. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i) $(L_\Gamma, d_1(\Gamma))$ est régulier
- (ii) H_Γ est l'élément semi-simple d'un sl_2 -triplet, (Y, H_Γ, X) où $Y \in d_{-1}(\Gamma)$ et $X \in d_1(\Gamma)$.

2. Formes réelles des espaces préhomogènes.

Soit $(L_\Gamma, d_1(\Gamma))$ un espace préhomogène de type parabolique.

Définition 2.1. *On appelle forme réelle de la représentation $(\mathfrak{l}_\Gamma, d_1(\Gamma))$ la donnée d'une forme réelle $\mathfrak{l}_{\Gamma_\mathbb{R}}$ de la sous-algèbre \mathfrak{l}_Γ et d'une forme réelle $d_1(\Gamma)_\mathbb{R}$ du sous-espace $d_1(\Gamma)$ telle que $[\mathfrak{l}_{\Gamma_\mathbb{R}}, d_1(\Gamma)_\mathbb{R}] \subset d_1(\Gamma)_\mathbb{R}$.*

Théorème 2.2. ([Ru1] Th. 4.3. p.12) *Les notations ayant été fixées dans ce qui précède, la représentation $(\mathcal{Z}(\mathfrak{a}_E), d_1(E))$ est une forme réelle de $(\mathfrak{l}_\Gamma, d_1(\Gamma))$.*

Théorème 2.3. ([Ru1] Th. 5.3. p.27) *Si \mathfrak{g} est simple et si $\text{card}(\Psi \setminus \Gamma) = 1$ alors toutes les formes réelles (à conjugaison par L_Γ près) des représentations $(\mathfrak{l}_\Gamma, d_1(\Gamma))$ proviennent, à l'exception de l'espace préhomogène associé au diagramme C_3 , des formes*

réelles de \mathfrak{g} par le processus du théorème 2.2.

Proposition 2.4. *L'élément H_Γ est dans $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$.*

Considérons l'application de \mathcal{R} dans \mathfrak{h}^* , définie par

$$\alpha \mapsto \alpha^\sigma : H \mapsto \overline{(\alpha \circ \sigma)(H)}$$

Cette application est semi-linéaire et le résultat suivant est bien connu:

Rappel 2.5. *Pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, α^σ est une racine et $\mathfrak{g}^{\alpha^\sigma} = \sigma \mathfrak{g}^\alpha$. La coracine H_{α^σ} de α^σ est σH_α .*

Lemme 2.6. *\mathfrak{l}_Γ est scindée suivant $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$.*

Démonstration: On sait que $\mathfrak{l}_\Gamma = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{\langle \Gamma \rangle}$. La conjugaison σ stabilise \mathfrak{h} par définition. Il suffit de montrer que σ stabilise $\mathfrak{g}^{\langle \Gamma \rangle}$ soit encore que pour toute racine $\alpha \in \langle \Gamma \rangle$, la racine $\alpha^\sigma \in \langle \Gamma \rangle$.

Soit une racine $\alpha \in \langle \Gamma \rangle$.

- Si $\alpha \in \Psi_0$, on a $\alpha^\sigma = -\alpha$ et $\alpha^\sigma \in \langle \Gamma \rangle$ ([Wa] p.23).

- Si $\alpha \in \Psi \setminus \Psi_0$, on a $\alpha^\sigma = \beta + \langle \Psi_0 \rangle$ les deux racines α et β ayant la même restriction à $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$. La stabilité de Γ par fléchage et le fait que Γ contienne Ψ_0 permettent de conclure que $\alpha^\sigma \in \langle \Gamma \rangle$ ([Wa] p.23).

- Si α n'est pas une racine simple, α s'écrit $\alpha = \sum_{\alpha_i \in \Gamma} n_i \alpha_i$ n_i entier. On a alors $\alpha^\sigma = \sum_{\alpha_i \in \Gamma} n_i \alpha_i^\sigma$. On en conclut, d'après ce qui précède, que $\alpha^\sigma \in \langle \Gamma \rangle$. La conjugaison σ stabilise $\mathfrak{g}^{\langle \Gamma \rangle}$ et \mathfrak{l}_Γ est scindée suivant $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$. □

Posons $\mathfrak{l}_\Gamma \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{l}_{\Gamma\mathbb{R}}$; la sous-algèbre \mathfrak{l}_Γ est la complexifiée de $\mathfrak{l}_{\Gamma\mathbb{R}}$.

Lemme 2.7. *Le centre de $\mathfrak{l}_{\Gamma\mathbb{R}}$ est une forme réelle de \mathfrak{h}_Γ .*

Démonstration: Notons $\mathfrak{h}_{\Gamma\mathbb{R}}$ ce centre. Montrons que la complexifiée de $\mathfrak{h}_{\Gamma\mathbb{R}}$ est le centre de \mathfrak{l}_Γ , donc est égal à \mathfrak{h}_Γ .

De manière évidente tout élément de $\mathfrak{h}_{\Gamma\mathbb{R}} + i\mathfrak{h}_{\Gamma\mathbb{R}}$ commute avec tout élément de \mathfrak{l}_Γ . Réciproquement, soit $H \in \mathfrak{h}_\Gamma$, $H = H_1 + iH_2$ où $H_1, H_2 \in \mathfrak{j}$. Soit $X \in \mathfrak{l}_{\Gamma\mathbb{R}}$ $[H, X] = [H_1, X] + i[H_2, X] = 0$; puisque $[H_1, X], [H_2, X] \in \mathfrak{g}_\mathbb{R}$, on en déduit que ces crochets sont nuls et que H_1, H_2 sont éléments du centre de $\mathfrak{l}_{\Gamma\mathbb{R}}$. □

Lemme 2.8. *L'élément H_Γ est dans $\mathfrak{h}_{\Gamma\mathbb{R}}$.*

Démonstration: Puisque $H_\Gamma \in \mathfrak{h}_\Gamma$, écrivons $H_\Gamma = H_1 + iH_2$ où $H_i \in \mathfrak{h}_{\Gamma\mathbb{R}}$. Pour tout $Y \in d_1(E)$, on a $[H_\Gamma, Y] = 2Y = [H_1, Y] + i[H_2, Y]$. Les éléments $2Y$, et $[H_j, Y]$ $j = 1, 2$ sont dans $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout $Y \in d_1(E)$, $[H_2, Y] = 0$. Notamment, pour tout $\lambda \in \Pi \setminus E$ on a $[H_2, X_\lambda] = \lambda(H_2)X_\lambda = 0$. Puisque $H_2 \in \mathfrak{h}_\Gamma$ par définition, on en déduit que pour tout $\lambda \in \Pi$, $\lambda(H_2) = 0$ et donc que H_2 est nul. Par conséquent H_Γ est dans $\mathfrak{h}_{\Gamma\mathbb{R}}$; c'est-à-dire que $H_\Gamma \in (i\mathfrak{a}_\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}_\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$. Ceci termine la démonstration de la proposition 2.4.

□

Remarque 2.9. L'involution de Cartan θ transforme H_Γ en $-H_\Gamma$.

3. Sous-algèbres admissibles.

Soit Γ une partie de Ψ . Les racines de $\Psi \setminus \Gamma$ sont notées $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. La partie Γ est identifiée à un sous-graphe de Dynkin dans lequel on ne considère que les sommets associés aux éléments de Ψ et les arêtes qui les joignent. Il est alors possible de parler des composantes connexes d'une telle partie.

Pour $\gamma_i \in \Psi \setminus \Gamma$, nous noterons Ψ_i la composante connexe de $\Gamma \cup \{\gamma_i\}$ contenant γ_i . On définit:

$$\Gamma_i = \Psi_i \setminus \{\gamma_i\}, \quad \mathfrak{h}_i = \sum_{\alpha \in \Psi_i} \mathbb{C}H_\alpha, \quad \mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Psi_i \rangle} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{h}_{\Gamma_i} = \{H \in \mathfrak{h}_i, \alpha(H) = 0, \forall \alpha \in \Gamma_i\}.$$

Soit H_i l'unique élément de \mathfrak{h}_{Γ_i} vérifiant $\gamma_i(H_i) = 2$. On pose: $\mathfrak{l}_{\Gamma_i} = \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_i}(H_i) = d_0(\Gamma_i)$ et $d_1(\Gamma_i) = \{X \in \mathfrak{g}_i, (H_i, X) = 2X\} = \sum_{\alpha \in \gamma_i + \langle \Gamma_i \rangle} \mathfrak{g}^\alpha$.

Nous imposerons dans ce qui suit la condition supplémentaire suivante: les racines de $\Psi \setminus \Gamma$ sont non fléchées dans le diagramme de Satake de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$.

Proposition 3.1. \mathfrak{g}_i est scindée suivant $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$.

Nous noterons $\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R}$.

Lemme 3.2. La sous-algèbre \mathfrak{g}_i est stable sous σ si et seulement si pour tout $\alpha \in \Psi_i$, on a $\alpha^\sigma \in \langle \Psi_i \rangle$.

Démonstration: On sait que $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Psi_i \rangle} \mathfrak{g}^\alpha$.

Si \mathfrak{g}_i est stable sous σ alors pour tout $\alpha \in \langle \Psi_i \rangle$, $\sigma \mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}^{\alpha^\sigma} \subset \mathfrak{g}_i$. Par conséquent, $\alpha^\sigma \in \langle \Psi_i \rangle$.

Réciproquement, soit $\alpha \in \langle \Psi_i \rangle$ α s'écrit $\alpha = \sum_{\beta \in \Psi_i} n_\beta \beta$ n_β entier et $\alpha^\sigma = \sum_{\beta \in \Psi_i} n_\beta \beta^\sigma$. Si pour tout $\beta \in \Psi_i$, on a $\beta^\sigma \in \langle \Psi_i \rangle$ alors $\alpha^\sigma \in \langle \Psi_i \rangle$ et $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{g}^{\alpha^\sigma} \subset \mathfrak{g}_i$.

Par ailleurs, puisque $\mathfrak{h}_i = \sum_{\alpha \in \langle \Psi_i \rangle} \mathbb{C}H_\alpha$, que pour tout $\alpha \in \langle \Psi_i \rangle$, $\sigma H_\alpha = H_{\alpha^\sigma}$ et $\alpha^\sigma \in \langle \Psi_i \rangle$, on a $\sigma H_\alpha \in \mathfrak{h}_i$ et la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h}_i de \mathfrak{g}_i est stable sous σ . □

Lemme 3.3. *Pour tout $\alpha \in \Psi_i$, on a $\alpha^\sigma \in \langle \Psi_i \rangle$.*

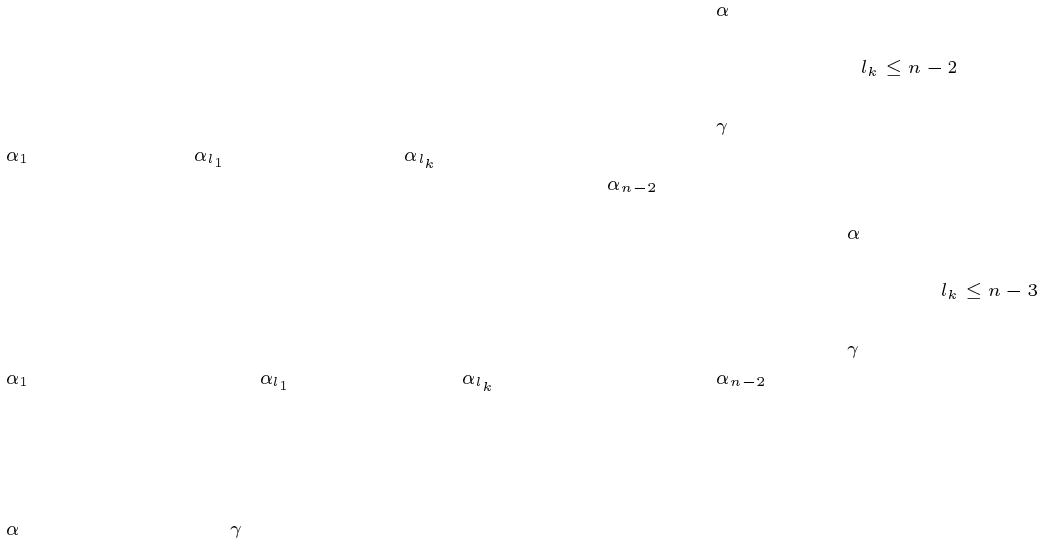
Démonstration: Considérons une racine $\alpha \in \Psi_i$.

Si $\alpha \in \mathcal{R}_0 \cap \Psi_i$, alors $\alpha^\sigma = -\alpha \in \langle \Psi_i \rangle$.

Si $\alpha \in \Psi_i \setminus (\mathcal{R}_0 \cap \Psi_i)$, deux éventualités se présentent:

- Soit α est non fléchée et on a $\alpha^\sigma = \alpha + \sum n_j \alpha_j$ où les n_j sont des entiers positifs et les α_j des racines “noires”(voir la démonstration du lemme 2.6.). Le support dans le diagramme de Dynkin de la racine α^σ est connexe. Puisque $\alpha \in \Psi_i$ toute partie connexe du diagramme ne contenant que α et des racines “noires” (qui sont par convention des éléments de Γ), est par construction incluse dans Ψ_i , d'où $\alpha^\sigma \in \langle \Psi_i \rangle$.

- Soit α est fléchée (et $\alpha \notin \Psi \setminus \Gamma$). On a $\alpha^\sigma = \gamma + \sum n_j \alpha_j$ où les n_j sont des entiers positifs et les α_j des racines “noires”. Les racines α et γ ont même restriction à \mathfrak{a}_p ; en d'autres termes, α et γ sont liées par une flèche (voir la démonstration du lemme 2.6.). Si l'on sélectionne dans la liste des formes réelles des algèbres de Lie simples de dimension finie ([Wa] p.53) celles contenant des racines fléchées et tenant compte de notre exigence de n'encercler que des racines blanches non fléchées, si l'on élimine de cette liste les paraboliques maximaux (une seule racine encerclée), le résultat étant dans ce cas-là acquis par le th. 2.3., il reste à examiner les formes $D_{n,I}$, $D_{n,III}$ et $E_{6,II}$ (dans la notation de [Wa]).



Dans les trois cas α et γ sont dans la même composante connexe et on conclut comme précédemment. □

Proposition 3.4. *La décomposition $\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$.*

Remarque 3.5. *La sous algèbre $\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$ est égale à $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$ si et seulement si l'unique prolongement \mathbb{C} -linéaire à \mathfrak{g} , $\tilde{\theta}$, de l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ stabilise \mathfrak{g}_i .*

On notera $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{k}_i = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$.

Lemme 3.6. *L'unique prolongement \mathbb{C} -linéaire à \mathfrak{g} , $\tilde{\theta}$, de l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ stabilise \mathfrak{g}_i .*

Démonstration: On sait d'après la démonstration du lemme 3.4. que σ stabilise \mathfrak{h}_i . Pour tout $\alpha \in \Psi$, $H_\alpha \in i\mathfrak{u}$ (où \mathfrak{u} est la forme réelle compacte $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$). Soit τ , la conjugaison par rapport à \mathfrak{u} , on a $\tau(H_\alpha) = -H_\alpha$ et par conséquent la conjugaison τ stabilise \mathfrak{h}_i . Puisque $\tilde{\theta} = \sigma\tau$, $\tilde{\theta}$ stabilise \mathfrak{h}_i .

Prouvons que pour tout $\gamma \in \langle \Psi_i \rangle$, on a $\tilde{\theta}(\mathfrak{g}^\gamma) \subset \mathfrak{g}_i$.

Soient $X_\gamma \in \mathfrak{g}^\gamma$ et $H \in \mathfrak{h}_i$. $[H, \tilde{\theta}X_\gamma] = \tilde{\theta}[\tilde{\theta}H, X_\gamma] = (\gamma \circ \tilde{\theta})(H) \cdot \tilde{\theta}X_\gamma$. Puisque $\tilde{\theta}$ est involutive, $\tilde{\theta}X_\gamma$ est non nul si $X_\gamma \neq 0$, donc $\gamma \circ \tilde{\theta}$ est une racine.

Prouvons que si $\alpha \in \Psi_i$, alors $\alpha \circ \tilde{\theta} \in \langle \Psi_i \rangle$.

On peut écrire $\alpha \circ \tilde{\theta} = (\alpha^\tau)^\sigma$, or $\alpha^\tau = -\alpha$ (puisque τ est la conjugaison associée à la forme compacte \mathfrak{u}) et $-\alpha^\sigma \in \langle \Psi_i \rangle$. □

Pour achever la démonstration de la proposition 3.4., il reste à montrer que la forme de Killing $\mathcal{B}_{i\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$ est définie strictement positive (resp. négative) sur \mathfrak{p}_i (resp. \mathfrak{k}_i).

Puisque la sous-algèbre \mathfrak{g}_i est simple la forme de Killing \mathcal{B}_i de \mathfrak{g}_i est colinéaire à la restriction $\mathcal{B}|_{\mathfrak{g}_i}$, il existe une constante c_i telle que $\mathcal{B}_i = c_i \mathcal{B}|_{\mathfrak{g}_i}$.

Soit $\alpha \in \Psi_i$, $H_\alpha \in \mathfrak{h}_i$, $\mathcal{B}_i(H_\alpha, H_\alpha) > 0$ et $\mathcal{B}(H_\alpha, H_\alpha) > 0$. Par conséquent $c_i > 0$. Puisque $\mathcal{B}_i|_{\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}} = \mathcal{B}_{i\mathbb{R}}$ et que \mathcal{B} est définie positive sur \mathfrak{p} et définie négative sur \mathfrak{k} , la proposition 3.4 est démontrée. □

Proposition 3.7. *La sous-algèbre $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i$ est abélienne maximale dans \mathfrak{p}_i .*

Les inclusions suivantes montrent que $\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}$.

$$\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{j} \cap \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i} \cap \mathfrak{p}_i.$$

Réciproquement, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i} \cap \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} \cap \mathfrak{p} \subset \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{p}_i$.

La sous-algèbre $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i} \cap \mathfrak{p}_i$ est évidemment abélienne dans \mathfrak{p}_i .

De la même manière on montre que $\mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{k}_i = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}_i}$. Si l'on note $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}_i}$ ce sous-espace, puisque \mathfrak{h}_i est scindée suivant $\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$, on a:

$$\mathfrak{h}_{i\mathbb{R}} = \mathfrak{h}_i \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}_i} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}$$

Lemme 3.8. *Si l'on désigne par $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}^\perp$ l'orthogonal dans $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ de la sous-algèbre $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}$ relativement à la forme de Killing $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, on a $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}^\perp] = 0$.*

Soit $X \in \mathfrak{g}_i$, $X = h + \sum_{\alpha \in \langle \Psi_i \rangle} X_\alpha$ avec $h \in \mathfrak{h}_i$.

Puisque \mathfrak{h}_i commute avec $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, il suffit de prouver que $\forall \alpha \in \Psi_i, [X_\alpha, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}^\perp] = 0$.

Soient $a \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}^\perp$ et $\alpha \in \langle \Psi_i \rangle$, $[a, X_\alpha] = \alpha(a)X_\alpha = c\mathcal{B}_i(a, H_\alpha)X_\alpha$ où \mathcal{B}_i est la forme de Killing de \mathfrak{g}_i , c est un réel strictement positif et H_α la coracine de α dans \mathfrak{h}_i . Puisque H_α est élément de $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}_i} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}$, on peut poser $H_\alpha = iH_1 + H_2$ ($H_1 \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}_i}$, $H_2 \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}$). On a $\mathcal{B}_i(a, H_\alpha) = i\mathcal{B}_i(a, H_1) + \mathcal{B}_i(a, H_2)$. Or, $\mathcal{B}_i(a, H_2) = 0$ par définition de $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}^\perp$, et $\mathcal{B}_i(a, H_1) = 0$ car $\mathcal{B}_i(\mathfrak{k}_i, \mathfrak{p}_i) = 0$.

□

Démonstration de la proposition 3.7.

Puisque $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i} \cap \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}^\perp = \{0\}$, on a $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}^\perp$. Soit $X \in \mathfrak{p}_i$ tel que $[X, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}] = 0$. D'après le lemme 3.8. on sait que $[X, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}^\perp] = 0$ et on en déduit que $[X, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}] = 0$. Puisque $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ est maximale dans \mathfrak{p} , $X \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, et puisque $X \in \mathfrak{p}_i$, on a $X \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}$ et par conséquent $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}$ est maximale dans \mathfrak{p}_i .

□

Proposition 3.9. *Soit Σ_i le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i})$. La base Ψ_i de $(\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}, \mathfrak{h}_i)$ est adaptée à $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}$, et le diagramme de Satake de $\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$ est la restriction du diagramme de Satake de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, obtenue en prenant la composante connexe contenant la racine γ_i (au sens précédemment défini) de la partie $\Gamma \cup \{\gamma_i\}$.*

Il est évident que si $\alpha \in \Psi_i$ et si $\alpha|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}} = 0$ alors $\alpha|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}} = 0$. Il suffit de prouver que pour tout $\alpha \in \Psi_i$, $\alpha|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}} = 0 \Rightarrow \alpha|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}} = 0$.

Soit $\alpha \in \Psi_i$ tel que $\alpha|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}} = 0$ et soit $H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}^\perp$. On a $\alpha(H) = c\mathcal{B}_i(H, H_\alpha)$ où c est une constante strictement positive et H_α est la coracine de α dans \mathfrak{h}_i .

Puisque $H_\alpha \in i\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}_i} \oplus \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}$, posons $H_\alpha = iH_1 + H_2$. On a alors $\alpha(H) = ci\mathcal{B}_i(H, H_1) + c\mathcal{B}_i(H, H_2)$. Puisque $\alpha(H)$, $\mathcal{B}_i(H, H_1)$, $\mathcal{B}_i(H, H_2)$ sont réels, on en déduit que $\mathcal{B}_i(H, H_1)$ est nul. Puisque $H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}^\perp$ et $H_2 \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}$, on a $\mathcal{B}_i(H, H_2) = 0$ et par conséquent $\alpha(H) = 0$.

□

Nous définissons $E_i = \rho(\Gamma_i) \setminus \{0\}$, $\mathfrak{a}_{E_i} = \{a \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_i}, \lambda(a) = 0, \forall \lambda \in E_i\}$

Proposition 3.10.

(i) \mathfrak{l}_{Γ_i} est scindée suivant $\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{l}_{\Gamma_i} \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} = \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}}(H_i)$.

(ii) \mathfrak{h}_{Γ_i} est scindée suivant $\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$, $\mathfrak{h}_{\Gamma_i} \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} = \mathfrak{a}_{E_i} = \mathcal{Z}(\mathfrak{l}_{\Gamma_i} \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}})$ et $H_i \in \mathfrak{a}_{E_i}$.

(iii) $d_1(\Gamma_i) \cap \mathfrak{g}_{i\mathbb{R}} = d_1(E_i)$ et $d_1(\Gamma_i) = d_1(E_i) + id_1(E_i)$.

Ces résultats découlent immédiatement de la prop.3.9., du paragraphe 2 et du cor.3.2.3.([Ru1]).

Définition 3.11. ([Ru2]) *Le couple (Ψ, Γ) est dit admissible si et seulement si pour tout i , $(\mathfrak{l}_{\Gamma_i}, d_1(\Gamma_i))$ est un espace préhomogène régulier. Le couple (Ψ, Γ) est dit C -admissible si pour tout i , $(\mathfrak{l}_{\Gamma_i}, d_1(\Gamma_i))$ est un espace préhomogène irréductible régulier commutatif.*

Nous supposons dans ce qui suit que le couple (Ψ, Γ) est admissible c'est-à-dire qu'il existe $X_i \in d_1(\Gamma_i)$ et $Y_i \in d_{-1}(\Gamma_i)$ tels que (Y_i, H_i, X_i) soit un sl_2 -triplet (voir th. 1.6.).

Les éléments H_i , $i = 1, \dots, n$ forment une base de \mathfrak{h}_{Γ} , l'orthogonal de Γ dans \mathfrak{h} ([Ru2]).

Proposition 3.12. *Il existe $X_i \in d_1(E_i)$ et $Y_i \in d_{-1}(E_i)$ tels que (Y_i, H_i, X_i) soit un sl_2 -triplet.*

Démonstration: Il existe $X_i \in d_1(E_i)$ qui est élément de l'orbite ouverte complexe de $G_i = \exp \text{ad } \mathfrak{g}_i$ dans $d_1(\Gamma_i)$. Un tel élément peut être complété en un sl_2 -triplet (Y, H_i, X_i) avec $Y \in d_{-1}(\Gamma_i)$. On pose $Y = Y_1 + Y_2$ avec $Y_i \in d_{-1}(E_i)$. Il est facile de montrer que (Y_1, H_i, X_i) est un sl_2 -triplet. □

Soit \mathfrak{g}_{Γ} la sous-algèbre complexe simple engendrée par les sl_2 -triplets (Y_i, H_i, X_i) , $i = 1, \dots, n$ choisis comme dans la proposition 3.12. précédente.

Soit Λ_{Γ} la sous-algèbre réelle engendrée par les sl_2 -triplets (Y_i, H_i, X_i) , $i = 1 \dots, n$.

Remarque 3.13. La sous-algèbre réelle Λ_{Γ} est liée au choix des éléments X_i dans $d_1(E_i)$ (voir l'exemple 4.7.).

Proposition 3.14. *La sous-algèbre \mathfrak{g}_{Γ} est scindée suivant $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{g}_{\Gamma} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \Lambda_{\Gamma}$. La sous-algèbre réelle Λ_{Γ} est simple et c'est une forme déployée de \mathfrak{g}_{Γ} .*

Démonstration: Les éléments Y_i, H_i, X_i sont dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, par conséquent \mathfrak{g}_{Γ} est stable sous σ et $\mathfrak{g}_{\Gamma} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle de \mathfrak{g}_{Γ} .

Par définition, $\Lambda_{\Gamma} \subset \mathfrak{g}_{\Gamma} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et $\Lambda_{\Gamma} \oplus i\Lambda_{\Gamma} \subset \mathfrak{g}_{\Gamma}$.

Soit X un élément de \mathfrak{g}_{Γ} , on a $X = \sum_{k \in K} (a_k + ib_k) \text{ad}Z_{j_k} \circ \text{ad}Z_{j_{-1}k} \circ \dots \circ \text{ad}Z_{j_2}(Z_{j_1})$ où pour tout l , Z_{j_l} est un un éléments des sl_2 -triplets. Par conséquent, $X \in \Lambda_{\Gamma} \oplus i\Lambda_{\Gamma}$ et Λ_{Γ} est une forme réelle de \mathfrak{g}_{Γ} incluse dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Donc $\mathfrak{g}_{\Gamma} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \Lambda_{\Gamma}$.

La sous-algèbre réelle Λ_Γ est simple comme forme réelle de l'algèbre simple \mathfrak{g}_Γ .

Montrons à présent que Λ_Γ est déployée dans \mathfrak{g}_Γ .

Le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_\Gamma, \mathfrak{h}_\Gamma)$ est noté \mathcal{R}_Γ . L'ensemble \mathcal{R}_Γ est inclus dans l'ensemble des racines de \mathcal{R} restreintes à \mathfrak{h}_Γ .

Considérons une base de Chevalley de \mathfrak{g}_Γ $((X_{-\alpha}, H_\alpha, X_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{R}_\Gamma}$ ([Bou8] p.84).

L'ensemble $\mathfrak{u}_\Gamma = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_\Gamma} \mathbb{R}iH_\alpha + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_\Gamma} \mathbb{R}i(X_\alpha + X_{-\alpha}) + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_\Gamma} \mathbb{R}(X_\alpha - X_{-\alpha})$ est une forme réelle

compacte de \mathfrak{g}_Γ ([He] Th.6.3 p.156).

Si l'on note τ_Γ la conjugaison de \mathfrak{g}_Γ associée à \mathfrak{u}_Γ , on a $\tau_\Gamma(H_\alpha) = -H_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}_\Gamma$.

Il existe un automorphisme d'algèbre de Lie ϕ tel que la forme réelle compacte $\phi\mathfrak{u}_\Gamma$ de \mathfrak{g}_Γ est invariante sous σ_Γ , conjugaison de \mathfrak{g}_Γ relative à Λ_Γ et restriction de σ .

L'automorphisme d'algèbre de Lie $N = \sigma_\Gamma\tau_\Gamma$ est autoadjoint pour la forme hermitienne $\mathcal{B}_{\tau_\Gamma}$ définie sur \mathfrak{g}_Γ par $\mathcal{B}_{\tau_\Gamma}(X, Y) = -\mathcal{B}_\Gamma(X, \tau_\Gamma Y)$. N est diagonalisable et ses valeurs propres sont des réels non nuls. Pour tout réel t , l'automorphisme $(N^2)^t$ est défini et l'on montre que l'automorphisme $\phi = (N^2)^{1/4}$ convient. ([He] Th.6.3. p.156)

Par conséquent, $\Lambda_\Gamma = \mathfrak{k}_\Gamma \oplus \mathfrak{p}_\Gamma$ où $\mathfrak{k}_\Gamma = \Lambda_\Gamma \cap \phi\mathfrak{u}_\Gamma$ et $\mathfrak{p}_\Gamma = \Lambda_\Gamma \cap i\phi\mathfrak{u}_\Gamma$ et on obtient ainsi une décomposition de Cartan de Λ_Γ .

Par définition, $H_i \in \Lambda_\Gamma \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Les éléments H_i sont les coracines d'une base du système \mathcal{R}_Γ par conséquent pour tout i , $H_i \in \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_\Gamma} \mathbb{R}H_\alpha$ et $H_i \in i\mathfrak{u}_\Gamma$.

Puisque $\phi(H_i) = H_i$ (car $N^2(H_i) = H_i$), on a $H_i \in \phi(i\mathfrak{u}_\Gamma) = i\phi(\mathfrak{u}_\Gamma)$. On en déduit que $H_i \in i\phi(\mathfrak{u}_\Gamma) \cap \Lambda_\Gamma$. En conclusion, $\forall i, H_i \in \mathfrak{p}_\Gamma$.

Soit $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_\Gamma}$ la sous-algèbre abélienne maximale dans \mathfrak{p}_Γ contenant les H_i . Soit j_Γ une sous-algèbre maximale de Λ_Γ contenant $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_\Gamma}$, sa complexifiée est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_Γ de même dimension sur \mathbb{C} que \mathfrak{h}_Γ , soit de dimension n . Puisque la dimension sur \mathbb{R} de $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_\Gamma} \geq n$, $j_\Gamma = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}_\Gamma}$ et Λ_Γ est déployée dans \mathfrak{g}_Γ .

La liste de ces formes réelles constitue la table 1.

□

4. Etude du cas C-admissible.

Dans ce paragraphe nous supposons que le couple (Ψ, Γ) est **C-admissible** (voir déf. 3.11.) et vérifie les conditions énoncées dans les parties 1 et 3 à savoir: Γ **contient les racines noires et les racines de $\Psi \setminus \Gamma$ ne sont pas fléchées.**

Définition 4.1. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie réductive. Un couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de sous-algèbres de \mathfrak{g} est appelé *paire duale* si :

- 1) les sous-algèbres \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont réductives dans \mathfrak{g} .
- 2) le centralisateur de \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} est \mathfrak{b} et vice-versa.

Nous dirons alors que \mathfrak{a} (resp. \mathfrak{b}) est une sous-algèbre de Howe de \mathfrak{g} .

Nous rappelons le résultat essentiel suivant:

Théorème 4.2. ([Ru3] Th 4.1. p.27) *Soit (Ψ, Γ) un couple C -admissible et \mathfrak{g}_Γ la sous-algèbre C -admissible correspondante, alors \mathfrak{g}_Γ est une sous-algèbre de Howe de \mathfrak{g} .*

Remarque 4.3. Si le couple (Ψ, Γ) est C -admissible, alors il existe $X_i \in d_1(E_i)$ tel que $(\theta(X_i), H_i, X_i)$ soit un sl_2 -triplet (θ désignant l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ associée à la forme réelle compacte \mathfrak{u}) ([Bo-Ru]).

Lemme 4.4. *La décomposition $\Lambda_\Gamma = \mathfrak{k} \cap \Lambda_\Gamma \oplus \mathfrak{p} \cap \Lambda_\Gamma$ est une décomposition de Cartan de l'algèbre Λ_Γ .*

Démonstration : La sous-algèbre Λ_Γ est de manière évidente stabilisée par θ l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ associée à la décomposition $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$.

Il suffit donc de prouver que la forme de Killing $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}_\Gamma}$ de \mathfrak{g}_Γ , est définie positive (resp. définie négative) sur $\mathfrak{k} \cap \Lambda_\Gamma$ (resp. sur $\mathfrak{p} \cap \Lambda_\Gamma$).

L'algèbre \mathfrak{g}_Γ est simple, par conséquent il existe une constante c telle que $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}_\Gamma} = c\mathcal{B}|_{\mathfrak{g}_\Gamma}$, où $\mathcal{B}|_{\mathfrak{g}_\Gamma}$ désigne la restriction à \mathfrak{g}_Γ de la forme de Killing de \mathfrak{g} .

L'élément H_Γ gradue \mathfrak{g} . Si l'on considère une base constituée de vecteurs choisis dans les espaces propres $d_p(\Gamma)$, la matrice dans cette base de $(adH_\Gamma)^2$ est diagonale et tous les éléments diagonaux sont des entiers pairs positifs non tous nuls. On en déduit que $\mathcal{B}(H_\Gamma, H_\Gamma) = Tr(adH_\Gamma)^2 > 0$.

Par ailleurs, on sait que pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$ $\alpha(H_\Gamma) \in \mathbb{R}$ (puisque $H_\Gamma \in \mathfrak{a}_\mathfrak{p}$) et que \mathcal{R}_Γ est constitué de racines restreintes. Par conséquent, la matrice de $(adH_\Gamma)^2$ relativement à une base de \mathfrak{g}_Γ est diagonale, les éléments diagonaux sont des réels positifs non tous nuls et $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}_\Gamma}(H_\Gamma, H_\Gamma) > 0$. On en conclut que $c > 0$.

Puisque $\mathcal{B}|_{\mathfrak{g}_\Gamma} < 0$ sur \mathfrak{k} et $\mathcal{B}|_{\mathfrak{g}_\Gamma} > 0$ sur \mathfrak{p} , on a le résultat attendu.

□

Théorème 4.5. *Si le couple (Ψ, Γ) est C -admissible, la sous-algèbre Λ_Γ est une sous-algèbre de Howe de l'algèbre $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$.*

Lemme 4.6. *Si le couple de sous-algèbres $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est une paire duale et si la sous-algèbre \mathfrak{a} est scindée suivant $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, alors \mathfrak{b} est scindée suivant $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ et le couple de sous-algèbres de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R}, \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R})$ est une paire duale de l'algèbre $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$.*

Démonstration : Posons $\mathfrak{a}_\mathbb{R} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R}$. Il suffit de prouver que σ stabilise \mathfrak{b} .

Soit $b \in \mathfrak{b}$, pour tout $a \in \mathfrak{a}$, $[a, \sigma b] = \sigma[\sigma a, b] = 0$ puisque σ stabilise \mathfrak{a} .

Notons $\mathfrak{b}_\mathbb{R}$ le centre de $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$. La sous-algèbre \mathfrak{b} est la complexifiée de $\mathfrak{b}_\mathbb{R}$.

Si $X, Y \in \mathfrak{b}_\mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathfrak{a}_\mathbb{R}$, $[X + iY, a] = [X, a] + i[Y, a] = 0$ d'où $X + iY \in \mathfrak{b}$.

Soit $Z \in \mathfrak{b}$, $Z = X + iY$ avec $X, Y \in \mathfrak{g}_\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathfrak{a}_\mathbb{R}$, $[Z, a] = [X, a] + i[Y, a] = 0$.

Chacun des crochets étant dans $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, on en déduit que $X, Y \in \mathfrak{b}_\mathbb{R}$.

D'après ce qui précède, on a $\mathfrak{b}_\mathbb{R} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R}$. La symétrie de \mathfrak{a} et \mathfrak{b} dans la paire duale permet de conclure.

□

La démonstration du théorème découle du fait que \mathfrak{g}_Γ est une sous-algèbre de Howe et

que Λ_Γ est scindée suivant $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$.

Ces résultats permettent d'établir une liste de paires duales réelles $(\mathfrak{a}_\mathbb{R}, \mathfrak{b}_\mathbb{R})$ dont le premier membre est une algèbre simple réelle (table 2). *Il faut noter cependant que la sous-algèbre $\mathfrak{b}_\mathbb{R} = \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_\mathbb{R})$ dépend du choix des X_i dans les différentes orbites ouvertes de $L_{\Gamma\mathbb{R}}$ dans $d_1(E_i)_\mathbb{R}$. Un choix différent n'affecte pas la classe d'isomorphisme de $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ mais peut induire un changement de la classe d'isomorphisme de $\mathfrak{b}_\mathbb{R}$ comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 4.7. On considère l'algèbre de Lie symplectique réelle $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ des matrices de type $(2n, 2n)$ de la forme $\begin{pmatrix} A & X \\ Y & -{}^tA \end{pmatrix}$ où A est une matrice réelle quelconque de type (n, n) et X et Y des matrices symétriques. La complexifiée de cette algèbre est l'algèbre symplectique complexe $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$.

Considérons la sous-algèbre de cartan \mathfrak{h} constituée des matrices diagonales de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$. Le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est de type C_n et une base de ce système est constituée des racines $\Psi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ où α_i associe à la matrice $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n)$ le réel $\lambda_i - \lambda_{i+1}$ si $1 \leq i \leq n-1$ et le réel $2\lambda_n$ si $i = n$.

La sous-algèbre réelle \mathfrak{j} des matrices diagonales de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de Cartan. C'est une forme réelle de \mathfrak{h} et $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ est une forme déployée de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$.

Considérons la matrice $H_0 = diag(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$. L'élément H_0 est l'unique solution dans \mathfrak{h} du système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha_i(H_0) = 0 & 1 \leq i \leq n-1 \\ \alpha_n(H_0) = 2 \end{cases}$$

L'élément H_0 est dans \mathfrak{j} et induit dans $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$) une \mathbb{Z} -graduation courte (c'est-à-dire que seuls les espaces d'indice $-1, 0$ et 1 sont non nuls). On posera $\Psi \setminus \Gamma = \{\alpha_n\}$. Le centralisateur \mathfrak{l}_Γ (resp. $\mathfrak{l}_{\Gamma\mathbb{R}}$) de H_0 dans $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$), est l'ensemble des matrices complexes (resp. réelles) de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix}$

L'espace $d_1(\Gamma)$ (resp. $d_1(E)$) est l'ensemble des matrices complexes (resp. réelles) de la forme $\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où X est une matrice symétrique.

L'espace $d_{-1}(\Gamma)$ (resp. $d_{-1}(E)$) est l'ensemble des matrices complexes (resp. réelles) de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix}$ où Y est une matrice symétrique.

Le groupe L_Γ des matrices complexes de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$ (A inversible), a pour algèbre de Lie \mathfrak{l}_Γ . Posons $g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. L'action adjointe de L_Γ sur l'espace $d_1(\Gamma)$ se réduit à l'action de $GL(n, \mathbb{C})$ sur l'espace des matrices symétriques complexes et $Ad(g).x = \begin{pmatrix} 0 & A.X = AX{}^tA \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le groupe L_Γ n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $d_1(\Gamma)$ caractérisées par le rang de la forme quadratique associée à la matrice symétrique X et en particulier, il existe une orbite ouverte

constituée des matrices $\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où X est symétrique inversible. Si pour $x = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

élément de l'orbite ouverte nous posons $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ alors (y, H_0, x) est un sl_2 -triplet.

L'espace $(L_\Gamma, d_1(\Gamma))$ est donc un espace préhomogène de type parabolique irréductible, régulier et commutatif.

La représentation $(\mathfrak{l}_{\Gamma\mathbb{R}}, d_1(E))$ est une forme réelle de la représentation $(\mathfrak{l}_\Gamma, d_1(\Gamma))$.

L'action adjointe du groupe $L_{\Gamma\mathbb{R}}$ des matrices $g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix}$ (A inversible réelle) sur

$d_1(E)$ est donnée par : $Ad(g).x = \begin{pmatrix} 0 & AX^t A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Les orbites *ouvertes* de $L_{\Gamma\mathbb{R}}$ dans $d_1(E)$ sont donc classifiées par la signature des formes quadratiques *non dégénérées* associées aux matrices symétriques de rang n . Les $n + 1$ matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & I_{pq} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où $0 \leq p \leq n$, $p + q = n$, et $I_{pq} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ I_p (resp. I_q) désignant la matrice identité de rang p (resp. q), sont des représentants de chacune de ces orbites.

Considérons le sl_2 -triplet $x = \begin{pmatrix} 0 & I_{pq} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $H_0, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{pq} & 0 \end{pmatrix}$. La sous-algèbre \mathbb{C} -admissible complexe $\mathfrak{g}_\Gamma \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ engendrée par ce sl_2 -triplet est une sous-algèbre de Howe de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$. La sous-algèbre réelle Λ_Γ engendrée par ce même sl_2 -triplet est une forme déployée de \mathfrak{g}_Γ ; c'est une sous-algèbre de Howe de $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Le second membre de la paire duale ainsi obtenue (à savoir le centralisateur dans $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ de Λ_Γ) est l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^t A \end{pmatrix}$ où A vérifie $AI_{pq} + I_{pq}^t A = 0$. On en conclut que ce second membre est isomorphe à $\mathfrak{so}(p, q)$ et ces algèbres lorsque p décrit $\{0, \dots, [n/2]\}$ ne sont pas isomorphes.

□

Calcul du second membre de la paire duale

A l'exception des cas répertoriés ci-dessous, dans chacune des formes réelles $(\mathfrak{l}_{\Gamma\mathbb{R}}, d_1(E))$ des représentations des espaces préhomogènes réguliers correspondant à un couple (Ψ, Γ) \mathbb{C} -admissible, les sous-algèbres $\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, k$), construites par le procédé de la proposition 3.1. et dont les diagrammes de Satake sont obtenus par le procédé de la proposition 3.9., sont telles que pour $i = 1, \dots, k - 1$, $\mathfrak{g}_{i\mathbb{R}}$ est de type A_{2p-1} (l'entier $p \geq 1$ ne dépendant que de $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$) et la sous-algèbre $\mathfrak{g}_{k\mathbb{R}}$ est de type A_n, B_n, C_n, D_n ou E_7 .

Cas 1

Cas 2

Cas 3

Soient $(Y_1, H_1, X_1) \dots, (Y_k, H_k, X_k)$ les sl_2 -triplets réels choisis conformément à la proposition 3.12. La sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ engendrée par ces sl_2 -triplets est une forme réelle déployée de la sous-algèbre C-admissible complexe et c'est une sous-algèbre de Howe. On sait que $\mathfrak{l}_{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ est réductive, que son centre est $\bigoplus_{i=1}^k \mathbb{R}H_i$ et que le deuxième membre de la paire duale est le centralisateur dans $\mathfrak{l}'_{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ (la sous-algèbre dérivée semi-simple de $\mathfrak{l}_{\Gamma_{\mathbb{R}}}$) de $X_1 + \dots + X_k$. La sous-algèbre $\mathfrak{l}_{\Gamma_i \mathbb{R}}$ est réductive de centre $\mathbb{R}H_i$ et nous noterons $\mathfrak{l}'_{\Gamma_i \mathbb{R}}$ sa partie semi-simple. On a $\mathfrak{l}'_{\Gamma_{\mathbb{R}}} = \sum_{i=1}^k \mathfrak{l}'_{\Gamma_i \mathbb{R}}$ et cette somme n'est pas directe.

Proposition 4.8. *A l'exception des cas 1, 2, 3 précédents, le second membre de la paire duale construite par le procédé du théorème 4.3. est isomorphe au centralisateur dans $\mathfrak{l}'_{\Gamma_k \mathbb{R}}$ de X_k .*

Démonstration : Notons $\mathfrak{b}_{\mathbb{R}}$ ce second membre.

La démonstration est triviale dans le cas où $p = 1$, on a alors $\mathfrak{l}'_{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ isomorphe à $\mathfrak{l}'_{\Gamma_k \mathbb{R}}$ et puisque l'action de $\mathfrak{l}_{\Gamma_{\mathbb{R}}}$ sur X_i se réduit à celle de $\mathfrak{l}_{\Gamma_i \mathbb{R}}$ pour tout $i = 1, \dots, k$, on en déduit que pour tout g de $\mathfrak{l}'_{\Gamma_{\mathbb{R}}}$,

$$[g, X_1 + \dots + X_k] = [g, X_k]$$

et $g \in \mathfrak{b}_{\mathbb{R}}$ si et seulement si $g \in \mathcal{Z}_{\mathfrak{l}'_{\Gamma_k \mathbb{R}}}(X_k)$.

□

Pour $p \geq 2$, nous distinguerons le type A_n des autres types.

Dans le cas A_n , tout élément g de $\mathfrak{l}'_{\Gamma_k \mathbb{R}}$ s'écrit $g = g_1 + \dots + g_{k+1}$ avec $g_i \in \mathfrak{gl}(p-1, \mathbb{R})$ et $g_i + g_{i+1} \in \mathfrak{l}'_{\Gamma_i \mathbb{R}}$
 $[g, X_1 + \dots + X_k] = [g_1 + g_2, X_1] + \dots + [g_k + g_{k+1}, X_k] = (g_1 X_1 - X_1 g_2) + \dots + (g_k X_k - X_k g_{k+1})$
avec pour tout i , $X_i \in M(p-1, \mathbb{R})$ et $g_i X_i - X_i g_{i+1} \in d_1(E_i)$. On rappelle que l'élément X_i est générique dans l'une des deux orbites ouvertes de la représentation $(\mathfrak{l}_{\Gamma_i \mathbb{R}}, d_1(E_i))$. La somme étant directe on en déduit que $g \in \mathfrak{b}_{\mathbb{R}}$ si et seulement si pour tout i , $g_i X_i - X_i g_{i+1} = 0$ soit encore pour tout i , $g_i = X_i g_{i+1} X_i^{-1}$.

Soit ψ_i l'isomorphisme d'algèbre de Lie de $gl(p-1, \mathbb{R})$ dans lui-même défini par $\psi_i(g_i) = X_i g_i X_i^{-1}$ pour $i = 2, \dots, k$. D'après ce qui précède on a :
 $\mathcal{Z}_{\Gamma_{\mathbb{R}}'}(X_1 + \dots + X_k) = \{(g_1, \dots, g_{k+1}) \text{ où } g_k + g_{k+1} \in \mathcal{Z}_{\Gamma_{k\mathbb{R}}'}(X_k) \text{ et } g_{i-1} = \psi_i(g_i)\}$. On en déduit que la sous-algèbre $\mathfrak{b}_{\mathbb{R}}$ est isomorphe à $\mathcal{Z}_{\Gamma_{k\mathbb{R}}'}(X_k)$.

Dans les autres cas, tout élément g de $\mathfrak{l}_{\Gamma_{k\mathbb{R}}}'$ s'écrit :

$$g = g_1 + \dots + g_k \text{ avec pour tout } i \in \{1, \dots, k-1\} \quad g_i + g_{i+1} \in \mathfrak{l}_{\Gamma_{i\mathbb{R}}}' \text{ et } g_k \in \mathfrak{l}_{\Gamma_{k\mathbb{R}}}' \text{ et}$$

$$[g, X_1 + \dots + X_k] = [g_1 + g_2, X_1] + \dots + [g_k + g_{k+1}, X_k] = (g_1 X_1 - X_1 g_2) + \dots + (g_{k-1} X_{k-1} - X_{k-1} g_k) + [g_k, X_k]$$

On a alors $g \in \mathfrak{b}_{\mathbb{R}}$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$ $g_i = X_i g_{i+1} X_i^{-1}$ et $g_k \in \mathcal{Z}_{\Gamma_{k\mathbb{R}}}'(X_k)$.

En considérant le même isomorphisme d'algèbre de Lie ψ_i de $gl(p-1, \mathbb{R})$ dans lui-même, d'après ce qui précède on a :

$\mathcal{Z}_{\Gamma_{\mathbb{R}}}'(X_1 + \dots + X_k) = \{(g_1, \dots, g_k) \text{ où } g_k \in \mathcal{Z}_{\Gamma_{k\mathbb{R}}}'(X_k) \text{ et } g_{i-1} = \psi_i(g_i)\}$. On en déduit que la sous-algèbre $\mathfrak{b}_{\mathbb{R}}$ est isomorphe à $\mathcal{Z}_{\Gamma_{k\mathbb{R}}}'(X_k)$.

□

4.9. Etude des cas exceptionnels.

On remarquera que les cas "exceptionnels" 2 et 3, se déduisent du cas 1 en utilisant l'argument de la première partie de la démonstration de la proposition 4.8. Etudions donc le cas 1.

Le cas déployé :

Nous avons $\mathfrak{g}_{1\mathbb{R}} \simeq \mathfrak{so}(5, 5)$, $\mathfrak{g}_{2\mathbb{R}} \simeq \mathfrak{so}(5, 5)$ et $\mathfrak{l}_{\Gamma_{\mathbb{R}}}' \simeq \mathfrak{so}(4, 4)$ (de type D_4). On peut identifier $\mathfrak{l}_{\Gamma_{\mathbb{R}}}'$ à $\mathfrak{so}(4, 4)$ de sorte que la représentation de $\mathfrak{l}_{\Gamma_{\mathbb{R}}}'$ sur $d_1(E_1)$ soit la représentation naturelle de $\mathfrak{so}(4, 4)$.

Soit X_1 un élément générique de $d_1(E_1)$. Le centralisateur de X_1 dans $\mathfrak{so}(4, 4)$ s'identifie alors à $\mathfrak{so}(3, 4)$ et $\mathfrak{b}_{\mathbb{R}}$ en est une sous-algèbre. Or cette sous-algèbre $\mathfrak{b}_{\mathbb{R}}$ est une forme réelle de G_2 (voir pour les calculs dans le cas complexe [Ru 3] p.32). Supposons la compacte. La dimension de $\mathfrak{b}_{\mathbb{R}}$ serait alors 14. La sous-algèbre compacte maximale incluse dans $\mathfrak{so}(3, 4)$ est $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(4)$ dont la dimension est 9. Par conséquent $\mathfrak{b}_{\mathbb{R}}$ est une forme déployée de G_2 .

Dans le cas :

la sous-algèbre $\mathfrak{b}_{\mathbb{R}}$ est compacte car $\mathfrak{b}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{so}(8)$.

La table 2 en fin d'article donnant la liste des paires duales obtenues par le procédé de la proposition 4.8., a été établie à partir de la table p. 153 ([FG]).

5- Δ -graduation de l'algèbre réelle.

Dans ce paragraphe nous montrons que dans les paires duales $(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{b}_{\mathbb{R}})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ que nous venons de construire, l'algèbre $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ est la sous-algèbre déployée d'une Σ_{Γ} -graduation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, au sens de Bermann-Moody ([B-M]). Rappelons la définition d'une algèbre de Lie graduée par un système de racines fini.

Soit \mathfrak{m} une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique nulle. Soient Δ un système de racines fini, irréductible, réduit et $\overset{\circ}{Q}$ le réseau entier engendré par Δ .

Définition 5.1. ([BM]) *On dit que l'algèbre \mathfrak{m} est graduée par Δ si*

(i) *\mathfrak{m} admet une $\overset{\circ}{Q}$ -graduation, $\mathfrak{m} = \bigoplus_{\alpha \in \overset{\circ}{Q}} V_{\alpha}$ où $V_{\alpha} \neq \{0\}$ si et seulement si $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$.*

(ii) *L'algèbre simple déployée $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ dont le système de racines est Δ est réalisée comme une sous-algèbre de \mathfrak{m} et vérifie relativement à une sous-algèbre de Cartan $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ la condition $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}^{\alpha} \subset V_{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$, où $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}^{\alpha}$ désigne l'espace radiciel associé à α . L'algèbre \mathfrak{m} est appelée sous-algèbre déployée de la Δ -graduation.*

(iii) *Pour tout $h \in \overset{\circ}{\mathfrak{h}}$, $ad_{\mathfrak{m}}h$ agit scalairement sur V_{α} avec la valeur propre $\alpha(h)$.*

(iv) *L'algèbre \mathfrak{m} est engendrée par les espaces V_{α} , pour $\alpha \in \Delta$.*

Proposition 5.2. ([Ner] Prop.3.1.1.) *Le système de racines \mathcal{R}_{Γ} de la sous-algèbre complexe C -admissible \mathfrak{g}_{Γ} gradue l'algèbre complexe \mathfrak{g} .*

Si \overline{Q} désigne le réseau entier engendré par \mathcal{R}_{Γ} , les sous-espaces $U_{\overline{\alpha}}$ de la \mathcal{R}_{Γ} -graduation sont définis par:

Pour tout $\overline{\alpha} \in \mathcal{R}_{\Gamma} \cup \{0\}$, $U_{\overline{\alpha}} = \bigoplus_{\alpha | \mathfrak{h}_{\Gamma} = \overline{\alpha}} \mathfrak{g}^{\alpha} = \{X \in \mathfrak{g}, [H_i, X] = \alpha(H_i)X \text{ pour tout}$

$i \in \{1, \dots, n\}\}$

$U_{\overline{\alpha}} = \{0\}$ sinon.

Nous rappelons (lemme 4.2.) que la décomposition $\Lambda_{\Gamma} = \mathfrak{k} \cap \Lambda_{\Gamma} \oplus \mathfrak{p} \cap \Lambda_{\Gamma}$ est une décomposition de Cartan de la sous-algèbre Λ_{Γ} , que le sous-espace $\mathfrak{a}_{\Gamma} = \sum_{i=1}^n \mathbb{R}H_i$ est un sous-espace vectoriel abélien maximal dans $\mathfrak{p} \cap \Lambda_{\Gamma}$ contenant les éléments H_i et que $\mathfrak{h}_{\Gamma} = \mathfrak{a}_{\Gamma} \oplus i\mathfrak{a}_{\Gamma}$.

Nous noterons Σ_{Γ} le système de racines de $(\Lambda_{\Gamma}, \mathfrak{a}_{\Gamma})$. L'application $\overline{\rho}$ de \mathfrak{h}_{Γ}^* dans \mathfrak{a}_{Γ}^* qui à toute forme linéaire associe sa restriction à \mathfrak{a}_{Γ} est bijective et $\overline{\rho}(\mathcal{R}_{\Gamma}) = \Sigma_{\Gamma}$. Nous adopterons la même notation pour désigner une racine de \mathcal{R}_{Γ} et sa restriction à \mathfrak{a}_{Γ} soit $\overline{\alpha}$.

Proposition 5.3. *Le système de racines Σ_{Γ} gradue l'algèbre réelle $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ et Λ_{Γ} est la sous-algèbre déployée associée à cette graduation.*

Pour tout $\overline{\alpha} \in \overline{Q}$ nous poserons:

$V_{\overline{\alpha}} = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, [H_i, X] = \overline{\alpha}(H_i)X, \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\} = U_{\overline{\alpha}} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \text{ si } \overline{\alpha} \in \Sigma_{\Gamma} \cup \{0\} \text{ et}$
 $V_{\overline{\alpha}} = \{0\}$ sinon.

Lemme 5.4. Pour tout $\bar{\alpha} \in \overline{Q}$, le sous-espace $U_{\bar{\alpha}}$ est scindé suivant $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$.

Remarque 5.5. Le sous-espace $U_{\bar{0}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{<\Gamma>} = \mathfrak{l}_{\Gamma}$ est scindé suivant $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ (lemme 2.5.)

Remarque 5.6. Si la racine α est “noire” ($\alpha \in \mathcal{R}_0$) alors par définition $\alpha|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}} = 0$ d’où $\alpha|_{\mathfrak{h}_{\Gamma}} = 0$ et par conséquent si $\bar{\alpha} \in \Sigma_{\Gamma}$, $U_{\bar{\alpha}} = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_0, \alpha|_{\mathfrak{h}_{\Gamma}} = \bar{\alpha}} \mathfrak{g}^{\alpha}$.

Démonstration du lemme 5.4.: Prouvons que pour tout $\bar{\alpha} \in \mathcal{R}_{\Gamma}$, $\sigma U_{\bar{\alpha}} \subset U_{\bar{\alpha}}$. Il suffit pour cela de prouver que pour tout $\alpha \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_0$, on a $\alpha|_{\mathfrak{h}_{\Gamma}} = \alpha^{\sigma}|_{\mathfrak{h}_{\Gamma}}$.

- Si $\alpha \in \Psi$, on a $\alpha^{\sigma} = \beta + \sum n_j \alpha_j$ où n_j entier et $\alpha_j \in \mathcal{R}_0 \cap \Psi$. Si α est non fléchée, on a $\beta = \alpha$, si α est fléchée on a $\alpha|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}} = \beta|_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}}$. Dans tous les cas $\alpha|_{\mathfrak{h}_{\Gamma}} = \alpha^{\sigma}|_{\mathfrak{h}_{\Gamma}}$.
- Si α n’est pas simple alors $\alpha = \sum n_j \alpha_j$ où les n_j sont des entiers de même signe et les α_j des racines simples. On a $\alpha^{\sigma} = \sum n_j \alpha_j^{\sigma}$. D’où la conclusion.

□

Par conséquent $U_{\bar{\alpha}} \cap \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = V_{\bar{\alpha}}$ est une forme réelle de $U_{\bar{\alpha}}$.

Démonstration de la proposition:

- Par définition des espaces $V_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha} \in \overline{Q}$, \mathfrak{g} admet une \overline{Q} -gradation.
- Pour tout $\bar{\alpha} \in \Sigma_{\Gamma} \cup \{0\}$, $\Lambda_{\Gamma}^{\bar{\alpha}} = \{X \in \Lambda_{\Gamma}, [a, X] = \bar{\alpha}(a)X, \text{ pour tout } a \in \mathfrak{a}_{\Gamma}\} \subset V_{\bar{\alpha}}$.
- Puisque \mathfrak{a}_{Γ} est une sous-algèbre de Cartan de Λ_{Γ} , pour tout $a \in \mathfrak{a}_{\Gamma}$, $ad_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}(a)$ agit scalairement sur $V_{\bar{\alpha}}$ avec la valeur propre $\bar{\alpha}(a)$.

Il reste à prouver que $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est engendrée par les espaces $V_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha} \in \Sigma_{\Gamma}$. Il suffit de prouver que $V_{\bar{0}}$ est engendré par les espaces $V_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha} \in \Sigma_{\Gamma}$.

Soit X un élément de $V_{\bar{0}}$, X s’écrit comme une somme finie d’éléments de la forme $W_k = [Z_k, [Z_{k-1}, [\dots [Z_2, Z_1] \dots]]$ où pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $Z_j = T_j + S_j \in V_{\bar{\alpha}_j} \oplus iV_{\bar{\alpha}_j}$, $\bar{\alpha}_j \in \Sigma_{\Gamma}$.

On en déduit que $W_k = X_k + iY_k$ où X_k et Y_k appartiennent à la sous-algèbre engendrée par les $V_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha}_j \in \Sigma_{\Gamma}$. Puisque $W_k \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, on a $Y_k = 0$ d’où le résultat.

□

Table 1 : Formes réelles des représentations $(l_\Gamma, d_1(\Gamma))$

Dans le cadre figure le diagramme de Dynkin associé à la représentation complexe $(l_\Gamma, d_1(\Gamma))$ ainsi que le type de l'algèbre admissible et la mention de l'éventuelle C-admissibilité du couple (Ψ, Γ) .

Suivent les diagrammes de Satake des différentes formes réelles de $(l_\Gamma, d_1(\Gamma))$.

Type A_n La sous-algèbre admissible est de type A_k (Ψ, Γ) est C-admissible

$n \geq 1$
 $p \geq 1$
 $n + 1 = (k + 1)p$

α_1 α_p α_{2p} α_{kp} α_n

Type B_n La sous-algèbre admissible est de type B_k (Ψ, Γ) est C-admissible si $p = 1$

$n \geq 2$
 $p \geq 1$
 $(2k + 1)p \leq 2n + 1$

α_1 α_p α_{kp} α_n

$kp \leq l \leq n$

α_1 α_p α_{kp} α_l α_n

Type C_n

Type $C_{n,1}$

L'algèbre admissible est de type B_k

p pair

α_1 α_p α_{kp} α_n $(2k+1)p \leq 2n$

α_1 α_p α_{kp} α_n

α_1 α_p α_{kp} α_{2l} $2l \leq n-2$

α_1 α_p α_{kp} α_n *n pair*

Type $C_{n,2}$

L'algèbre admissible est de type C_{k+1} (Ψ, Γ) est C-admissible

$(k+1)p = n$

α_1 α_p α_{kp} α_n

α_1 α_p α_{kp} α_n

n pair

α_1 α_p α_{kp} α_n

Type $D_{n,1}$

La sous-algèbre admissible est de type B_k (Ψ, Γ) est C-admissible si $p = 1$



Type $D_{n,2}$ La sous-algèbre admissible est de type C_{k+1} (Ψ, Γ) est C-admissible



Type E_6

1. La sous-algèbre admissible est de type A_1
2. La sous-algèbre admissible est de type A_1

3. La sous-algèbre admissible est de type A_2

(Ψ, Γ) est C-admissible

4. La sous-algèbre admissible est de type G_2

(Ψ, Γ) est C-admissible

Type E_7

1. La sous-algèbre admissible est de type A_1

2. La sous-algèbre admissible est de type A_1

3. La sous-algèbre admissible est de type A_1

4. La sous-algèbre admissible est de type A_1

5. La sous-algèbre admissible est de type A_1

6. La sous-algèbre admissible est de type A_1

7. La sous-algèbre admissible est de type A_1
 (Ψ, Γ) est C-admissible

8. La sous-algèbre admissible est de type B_2

9. La sous-algèbre admissible est de type G_2
 (Ψ, Γ) est C-admissible

10. La sous-algèbre admissible est de type G_2

11. La sous-algèbre admissible est de type C_3
(Ψ, Γ) est C-admissible

12. La sous-algèbre admissible est de type F_4

Type E_8

1. La sous-algèbre admissible est de type A_1

2. La sous-algèbre admissible est de type A_1

3. La sous-algèbre admissible est de type A_1

4. La sous-algèbre admissible est de type A_1

5. La sous-algèbre admissible est de type A_1

6. La sous-algèbre admissible est de type A_1

7. La sous-algèbre admissible est de type B_2

8. La sous-algèbre admissible est de type G_2
 (Ψ, Γ) est C-admissible

9. La sous-algèbre admissible est de type G_2

10. La sous-algèbre admissible est de type F_4
 (Ψ, Γ) est C-admissible

Type F_4

1. La sous-algèbre admissible est de type A_1
2. La sous-algèbre admissible est de type A_1

3. La sous-algèbre admissible est de type A_1
4. La sous-algèbre admissible est de type G_2
(Ψ, Γ) est C-admissible

Type G_2

La sous-algèbre admissible est de type A_1

Table 2 : Liste des paires duales dont le premier membre est une forme déployée d'une sous-algèbre C-admissible.

Type A_n

$$n \geq 1$$

$$p \geq 1$$

$$\alpha_1$$

$$\alpha_p$$

$$\alpha_{kp}$$

$$\alpha_n$$

$$n + 1 = (k + 1)p$$

Paire duale : $(\mathfrak{sl}(k, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(p - 1, \mathbb{R}))$

p pair

$$n + 1 = (k + 1)p$$

$$\alpha_1$$

$$\alpha_p$$

$$\alpha_{kp}$$

$$\alpha_n$$

Paire duale : $(\mathfrak{sl}(k, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(p, \mathbb{H}))$

$$\alpha_1$$

$$\alpha_p$$

$$\alpha_{2p-1}$$

Paires duales : $(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{su}(r, q))$

$$r + q = p \quad r = 0, \dots, p$$

Type B_n

				$0 \leq l \leq m$
				$m \geq 2$
α_1	α_k	α_{k+l}	α_{k+m}	$k \geq 1$
Paires duales :				
Si $k \geq 2$	$l \geq 2$	$(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(l-1, 2m-l+1))$	ou	$(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(l, 2m-l))$
	$l = 1$	$(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(1, 2m-1))$	ou	$(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(2m))$
	$l = 0$	$(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(2m))$		
Si $k = 1$	On remplacera dans les paires duales précédentes le premier membre par $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.			

Type C_n

				$p \geq 2$
				$k \geq 0$
α_1	α_p	α_{kp}	$\alpha_{(k+1)p}$	
Paires duales :				
Si $k \geq 1$		$(\mathfrak{sp}(k+1, \mathbb{R}), \mathfrak{so}(r, q))$	$r+q=p$	$r=0, \dots, p$
Si $k = 0$	On remplacera dans les paires duales précédentes le premier membre par $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$			
				p pair
				$p \geq 2$
				$k \geq 0$
α_1	α_p	α_{kp}	α_n	
Paires duales :				
Si $k \geq 1$		$(\mathfrak{sp}(k+1, \mathbb{R}), \mathfrak{so}^*(p))$		
Si $k = 0$		$(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{so}^*(p))$		

Type D_n

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & k \geq 1 \\
 & & & & & & \alpha_{k+m-1} \\
 & & & & & & k + m \geq 4 \\
 & & & & & & m \geq 2 \\
 \alpha_1 & & \alpha_k & & & & \alpha_{k+m}
 \end{array}$$

Si $k \geq 2$ $(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(m-1, m))$ ou $(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(m, m-1))$

Si $k = 1$ On remplacera dans les paires duales précédentes le premier membre par $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \alpha_{k+m-1} & 1 \leq k \\
 & & & & & & & 0 \leq l \leq m-2 \\
 \alpha_1 & & \alpha_k & & \alpha_{k+l} & & \alpha_{k+m} & k + m \geq 4
 \end{array}$$

Paires duales :

Si $k \geq 2$ $l \geq 2$ $(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(l-1, 2m-l))$ ou $(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(l, 2m-l-1))$

$l = 1$ $(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(1, 2m-2))$ ou $(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(2m-1))$

$l = 0$ $(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(2m-1))$

Si $k = 1$ On remplacera dans les paires duales précédentes le premier membre par $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & \alpha_{k+m-1} & 1 \leq k \leq k+m-2 \\
 & & & & & & & k + m \geq 4 \\
 \alpha_1 & & \alpha_k & & & & \alpha_{k+m}
 \end{array}$$

Paires duales :

Si $k \geq 2$ $(\mathfrak{so}(k, k+1), \mathfrak{so}(m-2, m+1))$ ou $(B_k, \mathfrak{so}(m-1, m))$

Si $k = 1$ On remplacera dans les paires duales précédentes le premier membre par $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

			$\alpha_{(k+1)p}$	
				$p \geq 2$
				p pair
α_1	α_p	α_{kp}	$\alpha_{(k+1)p-1}$	$k \geq 0$

Paires duales :

Si $k \geq 1$ $(\mathfrak{sp}(k+1, \mathbb{R}), \mathfrak{sp}(p/2, \mathbb{R}))$

Si $k = 0$ On remplacera dans la paire duale précédente le premier membre par $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

			$\alpha_{(k+1)p}$	
				$p \geq 2$
				p pair
α_1	α_p	α_{kp}	$\alpha_{(k+1)p-1}$	$k \geq 0$

Paires duales :

Si $k \geq 1$ $(\mathfrak{sp}(k+1, \mathbb{R}), \mathfrak{su}(r, q, \mathbb{H}))$ $r + q = p$ $r = 0, \dots, p$

Si $k = 0$ On remplacera dans les paires duales précédentes le premier membre par $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

Remarque: Dans les tableaux qui suivent, les formes réelles des algèbres complexes de type F_4 et G_2 sont caractérisées par leur indice de Cartan mentionné entre parenthèses (voir [He] p.354).

Type E_6

Paire duale :
 $(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}), G_2(2))$

Paire duale :
 $(\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R}), G_2(-14))$

Paire duale :
 $((G_2(2), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$

Paires duales :
 $(G_2(2), \mathfrak{su}(r, q))$ $r + q = 3$ $r = 0, \dots, 3$

Type E_7

Paire duale :

$$(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), F_4(4))$$

Paires duales

$$(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), F_4(-52))$$

ou

$$(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), F_4(-20))$$

Paire duale :

$$(G_2(2), \mathfrak{sp}(3, \mathbb{R}))$$

Paires duales :

$$(G_2(2), \mathfrak{su}(r, q, \mathbb{H}))$$

$$r + q = 6$$

$$r = 0, \dots, 6$$

Paire duale :

$$(\mathfrak{sp}(3, \mathbb{R}), G_2(2))$$

Paire duale :

$$(\mathfrak{sp}(3, \mathbb{R}), G_2(-14))$$

Type E_8

Paire duale :

$$(G_2(2), F_4(4))$$

Paires duales :

$$(G_2(2), F_4(-52))$$

ou

$$(G_2(2), F_4(-20))$$

Paire duale :
 $(F_4(4), G_2(2))$

Paire duale :
 $(F_4(4), G_2(-14))$

Type F_4

Paires duales :
 $(G_2(2), \mathfrak{so}(r, q))$ $r + q = 3$
 $r = 0, \dots, 3$

Références

- [BM] S. BERMAN - R. MOODY. *Lie algebras graded by finite root systems*, Inv. Math. 108, p. 323-347, 1992.
- [Bo-Ru] N. BOPP - H. RUBENTHALER. *Une fonction zêta associée à certaines familles d'espaces symétriques réels*, C.R. Acad. Sci. Paris, t 325, Série I, p.355-360, 1997.
- [FG] J. FARAUT - S. GINDIKIN. *Pseudo-Hermitian Symmetric Spaces of Tube Type*, p.123-154, *Prog. Nonlinear Differential Equations Appl.*, 20, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996
- [He] S. HELGASON. *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press New York and London 1962.
- [Ner] J. NERVI *Algèbres de Lie semi-simples graduées par un système de racines*, Preprint IRMA. ULP, Strasbourg
- [Ru1] H. RUBENTHALER. *Formes réelles des espaces préhomogènes irréductibles de type parabolique*, Annales de l'Institut Fourier de l'Univ. de Grenoble. Tome XXXVI-Fascicule 1, 1986.
- [Ru2] H. RUBENTHALER. *Espaces préhomogènes de type parabolique*, Thèse, Université de Strasbourg 1982.
- [Ru3] H. RUBENTHALER. *Les paires duales dans les algèbres de Lie réductives*, Astérisque n° 219, 1994.
- [Vi] E.B. VINBERG. *On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras*, Soviet Math. Dokl. 16, 1975, p. 1517-1520.
- [Wa] G. WARNER. *Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1972.

JOSIANE NERVI
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
F-67084 Strasbourg cédex
e-mail: nervi@math.u-strasbg.fr