



HAL
open science

Locally Symetric Finsler Spaces In Negative Curvature.

Patrick Foulon

► **To cite this version:**

| Patrick Foulon. Locally Symetric Finsler Spaces In Negative Curvature.. 1997. hal-00129571

HAL Id: hal-00129571

<https://hal.science/hal-00129571>

Preprint submitted on 8 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LES ESPACES DE FINSLER LOCALEMENT SYMÉTRIQUES À COURBURE NÉGATIVE

LOCALLY SYMETRIC FINSLER SPACES IN NEGATIVE CURVATURE

Patrick FOULON

Abstract . In 1926 E. CARTAN introduced the Riemannian locally symmetric spaces, as the one whose curvature tensor is parallel. They also howe their name to the fact that for each point the geodesic reflexion is a local isometry. The aim of this note is to announce a strong rigidity result for Finsler spaces. Namely we show that a negatively curved locally symmetric (in the first above sense) Finsler space is isometric to a Riemann locally symmetric space.

Résumé . En 1926 E. CARTAN a introduit les espaces riemanniens localement symétriques comme étant ceux dont la courbure est parallèle. En fait leur dénomination tient en une caractérisation équivalente, en chaque point la symétrie géodésique est une isométrie locale. Le but de cette note est d'annoncer un résultat de rigidité pour les espaces de Finsler. On montre qu'en courbure négative les espaces de Finsler compacts, localement symétriques (dans le sens premier précédent) sont isométriques à des espaces riemanniens localement symétriques.

Version Francaise Abrégée. Une **métrique de Finsler** est la donnée d'une application $F : TM \mapsto \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in M$, l'application $F_x = F|_{T_x M}$ est positivement homogène de degré 1, i.e pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^{*,+}$ et tout $v \in T_x M$, $F_x(\lambda v) = \lambda F_x(v)$ et de plus la boule tangente unité $B_x := \{v \in T_x M \mid F_x(v) \leq 1\}$ est strictement convexe. On dit que la métrique est **réversible** si les boules tangentes unités sont symétriques i.e $F(x, v) = F(x, -v)$. Cette dénomination provient du fait que l'antipodie $\sigma(x, v) = (x, -v)$ conjugue alors le flot géodésique à son inverse. Ce qui correspond la notion de réversibilité habituelle aux physiciens. La métrique est C^k si la restriction de F au fibré tangent privé de la section nulle $\overset{\circ}{TM}$ est C^k .

Pour des métriques suffisamment différentiables la dynamique du flot gédésique conduit naturellement a introduire comme dans [Fo1] une notion de courbure notée \mathring{K} et une connection (voir aussi [B.C]) notée ici \mathcal{D}_X . La caractérisation des espaces à courbure constante, c'est à dire dont l'opérateur de courbure est un multiple de l'identité a été étudié notamment par P. FUNK [Fun]. Il apparait à la différence du cas riemannien que la description locale même en petite dimension est difficile et assez peu éclairante du fait d'un important module de déformations. Cette situation perdue y compris sous des hypothèses supplémentaires fortes comme d'être projectivement plat, ce qui signifie localement l'existence d'une carte où toute les géodésiques sont des droites.

Une C^k -métrique de Finsler F sur une n -variété sera dite **parallèle** si et seulement si la courbure est parallèle, $\mathcal{D}_X \mathbf{R} = 0$. Par exemple sur \mathbb{R}^n les normes L^p , $p > 2$ sont des métriques parallèles car elles sont plates.

Voici un exemple de géométrie de P.FINSLER(1918) réversible que nous devons à D. HILBERT (1894). Soit \mathcal{C} un ouvert convexe borné dans \mathbb{R}^n euclidien de bord $\partial\mathcal{C}$. A toute paire de points distincts (a, b) de $\mathcal{C} \times \mathcal{C} - \Delta$, on associe le quadruplet ordonné $\{x, a, b, y\}$ où x et y sont les intersections de la droite orientée (a, b) avec $\partial\mathcal{C}$. La distance de Hilbert des points (a, b) est définie a l'aide du birapport

par $d(a, b) = 1/2 \cdot \log[a, b, x, y]$. (Rappelons que le cas où \mathcal{C} est la boule unité euclidienne ouverte, il s'agit de l'espace hyperbolique $\mathbb{R}H^n$). Quand le bord est strictement convexe et lisse (au moins C^3) P. FUNK [Fun] pour les surfaces puis D. EGLOFF [Eg 1] ont montré que c'est un exemple où la courbure est constante et égale à moins un. Signalons que la preuve utilise de manière essentielle (voir[Fo1] prop V.2) le fait que la courbure peut être plus généralement définie, pour une équation différentielle du second ordre.

Présentation des résultats : Comme dans le cas riemannien une métrique de Finsler sera dite **localement symétrique** si et seulement si la symétrie géodésique par rapport à un point quelconque est une isométrie locale. Observons tout d'abord que,

Proposition. — *Une C^3 métrique de Finsler réversible localement symétrique est parallèle.*

A la différence du cas riemannien, la réciproque est fautive. Par exemple D. EGLOFF [Eg 3] prouve qu'une géométrie de Hilbert est localement symétrique si et seulement si elle est riemannienne. Il y a de nombreux travaux sur les métriques localement symétriques, indiquons seulement que BUSEMANN et PHADKE [B.P] ont démontré (sans hypothèse de différentiabilité) que sur le revêtement universel, les réflexions géodésiques s'étendent en des isométries globales.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal.

Théorème A. — *Sur une variété compacte sans bord, une C^∞ -métrique de Finsler à courbure négative, parallèle et réversible est isométrique à une métrique riemannienne localement symétrique.*

Remarque : C'est évidemment faux dans le cas plat. Notons qu'il existe des exemples sur des variétés fermées (compactes sans bord) de métriques de Finsler localement symétriques en rang supérieur, à courbure négative ou nulle. Ces exemples sont très intéressants notamment du point de vue de l'entropie volumique voir [Ver], [Pla]. Dans [AkZ] AKBAR-ZADEH a, avec des méthodes différentes, déjà démontré le théorème A dans le cas à courbure négative constante. Le cas de la courbure positive constante est résolu pour les 2-sphères par R.L BRYANT [Bry] où il montre qu'il existe des métriques de Finsler à courbure $R = 1$ qui ne sont pas isométriques à des métriques riemanniennes. Cependant la seule qui soit réversible et projectivement plate est riemannienne.

Il y a quelques années j'avais donné dans [Fo2] une généralisation aux métriques de Finsler d'un théorème de R. OSSERMANN et P. SARNAK [O.S], sans pouvoir interpréter complètement le cas d'égalité. Ce résultat nous fournit une minoration fine de l'entropie de Liouville d'une variété fermée de Finsler à courbure négative. En réunissant [Fo2] et le théorème A nous obtenons.

Théorème B. — *L'entropie de Liouville h_μ du flot géodésique d'une variété de Finsler compacte réversible (M, F) à endomorphisme de Jacobi négatif R admet la minoration*

$$h_\mu \geq \int_{HM} \text{Tr}((-R)^{1/2}).d\mu .$$

Avec égalité si et seulement si (M, F) est isométrique à un espace riemannien localement symétrique à courbure négative.

Une autre belle application concerne la rigidité forte des ouverts convexes bornés de \mathbb{R}^n .

Corollaire C. — *Soit \mathcal{C} un ouvert convexe borné dans \mathbb{R}^n à bord strictement convexe et lisse. Supposons qu'il existe un sous-groupe $\Gamma \subset PGL(\mathbb{R}^n)$ qui laisse \mathcal{C} invariant et tel que $\Gamma \setminus \mathcal{C}$ est une variété compacte alors \mathcal{C} est l'intérieur d'un ellipsoïde.*

Le résultat avait déjà été obtenu par BENZÉCRI [Ben]. Cependant le corollaire C admet une reformulation avec un sous-groupe quelconque du sous-groupe des isométries de la métrique de Hilbert. On pourrait aussi déduire ce corollaire du théorème de Akbar-Zadeh déjà cité.

English Version. A reversible C^k Finsler space is a manifold M equipped with a field of norms $F : TM \mapsto \mathbb{R}$ such that the unit bundle UM is a C^k submanifold with strictly convex (positive) fibers. As in riemannian geometry one may introduce [Fo1], [B.C] (and others) some usefull local tools such as a “connexion” \mathcal{D}_X and a curvature \mathbf{R} . See also the French version of this paper for miscellaneous comments.

We will adopt a new terminology needed in Finsler geometry. A smooth reversible Finsler metric is **parallel** if and only if $\mathcal{D}_X \mathbf{R} = 0$ i.e. the curvature is parallel. We reserve the word **locally symmetric** to metrics such that for any choosen point the geodesic reflection is a local isometry. There are many examples of non riemannian parallel Finsler spaces, for instance \mathbb{R}^n with a L^p norm $p \neq 2$. But these cases are flat Finsler spaces. The most famous negatively curved symmetric Finsler space was invented by Hilbert in 1894. It is well known as the Hilbert geometry of bounded convex sets in \mathbb{R}^n . Given a bounded convex open set \mathcal{C} with boundary $\partial\mathcal{C}$ the distance of two different points a, b in \mathcal{C} is given by a $d(a, b) = 1/2 \cdot \log[a, b, x, y]$, where $[a, b, x, y]$ denotes the cross ratio of the quadruple of ordered points $\{y, a, b, x\}$, y, x being the ends of the affine line (a, b) on the boundary $\partial\mathcal{C}$. The real hyperbolic space $\mathbb{R}H^n$ corresponds to the case where \mathcal{C} is the unit open ball.

Results . We first observe that

Proposition. — *A reversible, locally symmetric, C^3 Finsler metric is parallel.*

A contrario from the riemannian case the converse is not true in general. For instance D. EGLOFF [Eg3] shows that, a Hilbert geometry is locally symmetric if and only if it is riemannian. There are several important works for the locally symmetric metrics that I will not investigate or use here. Let me just mention that BUSEMANN and PHADKE [B.P] proved (without differentiability assumptions) that on the universal cover the geodesic reflections extend to global isometries.

We can now state the main rigidity theorem.

Theorem A. — *A compact parallel Finsler space with negative curvature is isometric to a locally symmetric negatively curved Riemannian space.*

Let us remark that there exists compact continuous ”locally symmetric” Finsler spaces (see the nice examples in [Ver]) which are not isometric to riemannian models. In [AkZ] this was proven for the constant negative curvature case. The constant positive curvature case is solved for the 2-sphere by R.L BRYANT [Bry]. He shows the existence of non riemannian metrics with $R = 1$ but the only one which is reversible and projectively flat is riemannian.

This theorem brings a complete answer to a precedent result that I obtain in [Fo2] and which extends to the Finsler setting a result of R. OSSERMAN and P. SARNAK [O.S]. This result provides an estimate from below for the metric entropy of a closed(compact without boundary) negatively curved manifold. I can now state it in a complete version, including the analysis of the equality case.

Theorem B. — *The Liouville entropy h_μ of the geodesic flow of a compact reversible Finsler space (M, F) with negative Jacobi endomorphism R satisfies the following inequality,*

$$h_\mu \geq \int_{HM} Tr \left((-R)^{1/2} \right) . d\mu, \tag{1}$$

with equality if and only if (M, F) is isometric to a riemannian locally symmetric space of negative curvature.

An other very nice application concerns the strong rigidity of convex sets in \mathbb{R}^n . It can also be deduced from the theorem of Akbar-Zadeh previously quoted.

Corollary C. — Let \mathcal{C} be a convex bounded set in \mathbb{R}^n with smooth (strictly positive) boundary $\partial\mathcal{C}$. Assume furthermore, there is a subgroup $\Gamma \subset PGL(\mathbb{R}^n)$ that let \mathcal{C} invariant and such that $\Gamma \backslash \mathcal{C}$ is a closed manifold.

Then \mathcal{C} is the interior of an ellipsoid.

Preliminaries.

Finsler geometry.- Here, I just want to give a very short summand of the local Finsler geometry needed for this paper. The point of view that we will adopt can be found in [Fo2], [Eg1]. The geodesic flow ϕ_t of a smooth Finsler metric F given on a manifold M is a one parameter group of diffeomorphisms of the tangent bundle TM . One can restrict it, to the F -unit bundle or equivalently to the homogeneous bundle $HM = \mathring{T}/\mathbb{R}^{+,*}$ of tangent half lines. Then, its generator $X : HM \mapsto THM$ is a very special vector field on HM . It is a second order differential equation on M . This implies that there exists a 1-order differential operator \mathcal{D}_X acting on τHM the smooth sections of the bundle $\pi_{HM} : THM \mapsto HM$. That is,

$$\forall \zeta \in \tau HM, f \in C^1(HM, \mathbb{R}), D_X(f\zeta) = fD_X(\zeta) + (X.f).\zeta$$

And there exists a \mathcal{D}_X - parallel splitting of the tangent bundle THM , in $THM = \mathbb{R}X \oplus V \oplus H$, where V is the vertical bundle, and $\mathbb{R}X \oplus H$ the horizontal bundle and a pseudo complex \mathcal{D}_X -parallel structure $J^X : V \mapsto H \mapsto V$. The lack of integrability of horizontal distribution is measured by curvature. The Jacobi endomorphism or Flag curvature [B.C] is defined for any horizontal vector as $R(h) = J^X(p_v[X, \tilde{h}])$, where, p_v is the vertical projection, \tilde{h} is any local horizontal extension of the vector h . With the pseudo-complex structure one may canonically extend it to any vector tangent to HM .

The second main feature of the vector field X is that, it is the Reeb field of the contact 1-form $A \in \Omega^1(HM)$ given by the restriction to HM of the vertical derivative of the Finsler metric, i.e. $dA(X, \cdot) = 0, A(X) = 1$.

Contact Anosov flows with smooth unstable foliations. In the compact case, the geodesic flow ϕ_t of a Finsler metric with negative Jacobi endomorphism is a contact Anosov Flow [Fo2]. This implies the existence of a complete flow-invariant splitting, called the Anosov splitting [Ano]

$$THM = \mathbb{R}X \oplus E^S \oplus E^U,$$

where E^S is the tangent distribution to the stable foliation \mathcal{W}^S , whose leaf at the point $x \in HM$ is $\mathcal{W}_x^S = \{y \in HM, \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(y), \phi_t(x)) = 0\}$. One also considers the weak stable distribution $\mathbb{R}X \oplus E^S$, tangent to the weak stable foliation, with $\mathcal{W}_x^{WS} = \cup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(\mathcal{W}_x^S)$. Similarly E^U is the unstable distribution, $\mathbb{R}X \oplus E^U$ the weak unstable distribution, they are both integrable. The first important remark is.

Lemma 1. — *If the Jacobi endomorphism is flows invariant then the Anosov splitting is smooth.*

I shall use a rigidity result for contact Anosov flow (It is not clear one really needs it to prove thmA).

Theorem 2 (B.F.L). — *Let $\phi_t, t \in \mathbb{R}$, be a smooth Anosov flow on a closed manifold N of dimension $2n - 1$ and such that,*

- (i) *The Anosov splitting is smooth,*
- (ii) *Its canonical one form is a contact form.*

Then up to finite covers and to time change the flow is conjugate to the geodesic flow of a negatively curved locally symmetric space.

If we specialize it to our context we obtain the following corollary.

Corollary 3. — *There exists a diffeomorphism $\mathfrak{S} : N \mapsto N_0$, which conjugate the flows ϕ_t to ϕ_t^0 . If $\mathbf{n} \geq \mathbf{3}$, there exists a closed locally symmetric n -manifold S such that $\rho : US \mapsto N_0$ is a finite riemannian cover.*

If $\mathbf{n} = \mathbf{2}$ then there is a finite cover N_2 of N and a closed negatively curved Riemann surface S such that the corresponding lifted flows are conjugate.

Remarks: $\Gamma \setminus S$ is not necessary a manifold.

We will adopt the following conventions : If E is an integrable distribution in the tangent bundle then \mathcal{E} will denote the corresponding foliation; \mathcal{E}_z is the leaf containing the point z . For instance \mathcal{V}_z is the fiber over $\pi(z)$. In order to deal with conjugacies the Finsler objects will appear with a complementary prime, pullbacked objects with a complementary $*$, Riemannian objects will be normally written.

Sketch of the proof of theorem A.

For this presentation we will only consider the case $\mathbf{n} \geq \mathbf{3}$. When we specialyse to our settings, the corollary 3, gives us the commutative diagram, $\phi'_t \circ \Psi = \Psi \circ \phi_t$, where $\Psi = \mathfrak{S}^{-1} \circ \rho$ is a smooth finite covering.

We want to show that Ψ is, possibly after composition with the flow, the tangent map of a local isometry.

One can easily observe that $\Psi_* A' = A$ where A denotes the canonical contact form on US .

Then the pullback of the Finsler splitting is such that, $V_* \stackrel{def}{=} \Psi_* V'$, $H_* \stackrel{def}{=} \Psi_* H'$ are Legendrien bundles, that is $dA|_{V_*} = 0$, $dA|_{H_*} = 0$. Let us state the first geometric observation.

Lemma 4. — *The Jacobi endomorphisms coincide through the semi-conjugacy i.e., $\Psi_* R' = R$. The distributions V_* and H_* are \mathcal{D}_X parallel.*

If the Jacobi endomorphism is invariant, then the induce splitting E_i^s (E_i^u) into \mathbb{R} eigenspaces of the stable(unstable) distribution, is an invariant splitting. By looking at the corresponding Liapunov exponents one immediately see that $\Psi_* E_i'^s = E_i^s$ and $\Psi_* E_i'^u = E_i^u$.

For the second property one remarks that with the same definition the distribution V_{i*} is included in $E_i = E_i^s \oplus E_i^u$. Then we use the definition of the horizontal distribution and the compactness of US .

Lemma 5. — *The distribution V_* is everywhere transversal to H .*

As still observed the pullback of the Anosov splitting of ϕ'_t coincides with the one of the geodesic flow ϕ_t , furthermore Ψ is an orientation preserving covering then the Maslov index of the triples $\{E'^s, E'^s, V'\}$ and $\{E^s, E^s, \Psi_* V'\}$ are equal.

Let us denote by $\mathcal{E}nd(V)$ the bundle of linear endomorphisms of the vertical bundle $V \mapsto US$ Using Lemmas 4, 5 we can now easily obtain.

Lemma 6. — *The distribution V_* is the graph of a section L of the bundle $\mathcal{E}nd(V)$. That is, $\forall z \in US$, $\forall v \in V_{*z}$, $\exists! Y \in V_z$, $v = Y + J^X(L(Y))$*

The section satisfies the following properties

i) $\mathcal{D}_X L = 0$

ii) $[L, R^X] = 0$

iii) L is symmetric with respect to the vertical metric g_v .

From the parallelism of the section L and the ergodicity of the flow one deduces that the eigenvalues $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$ are constant, and the corresponding L - eigenspace splitting $V = \bigoplus_{j=1}^{j=r} W_{j*}$, $L|_{W_{j*}} = \lambda_j \cdot Id|_{W_{j*}}$ is parallel.

We are now going to use the splitting associated to these pair of commuting operators to produce a sub-foliation of the strong stable foliation. The main feature is that these foliation is invariant under the holonomy of the weak unstable foliation. We will finally observe that such a foliation has to be trivial [Fo3]. That will force L to be a multiple of identity.

BIBLIOGRAPHIE

- [AkZ] Akbar-Zadeh H., 1988. *Sur les espaces de Finsler à courbure sectionnelles constantes*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. **74**, 281–322.
- [Ano] Anosov D. V., 1967. *Geodesic flows on compact manifolds of negative curvature*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **90**, Proc. Steklov Inst. Math. (1969).
- [B.C] Bao D. and Chern S.S., 1993. *A notable connection in Finsler geometry*, Houston J. Math., **19**, **1**.
- [Ben] Benzecri J.-P., 1960. *Sur les variétés localement affines et projectives*, Bull. Soc. Math. France **88**, p 229–332.
- [B.F.L1] Benoist Y., Foulon P., Labourie F., 1992. *Flots d’Anosov à distributions stable et instable différentiables*, J. Amer. Math. Soc. **5.1**, 33–74.
- [B.F.L2] Benoist Y., Foulon P., Labourie F., 1990. *Flots d’Anosov à distributions de Liapounov Différentiables*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **53** n 4, 395–412.
- [Bry] Bryant R.L., 1995. *Finsler Structures on The 2-Sphere Satisfying $K=1$* , Preprint Duke Univ. 1–15.
- [B.P] Busemann H. and Phadke, 1981. *Two theorems on general symmetric spaces*, Pacific J. Math. **92** .1, 39–48.
- [Eg1] Egloff D., 1995. *Some New Developments in Finsler Geometry*, Dissertation, Univ. Fribourg.
- [Eg2] Egloff D., 1995. *Uniform Finsler Hadamard Manifolds*, Ann. Inst. H. Poincaré, to appear.
- [Eg3] Egloff D., 1996. *Oral communication*.
- [Fo1] Foulon P., 1986. *Géométrie des équations différentielles du second ordre*, Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor. **45**, 1–28.
- [Fo2] Foulon P., 1992. *Estimation de l’entropie des systèmes lagrangiens sans points conjugués*, Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor. **57**, (1992), 117–146.
- [Fo3] Foulon P., 1994. *Feuilletages des sphères et dynamiques Nord-Sud*, C. R. Acad. Sci. Paris **318**, 1041–1042.
- [Fun] Funk P., 1929. *Über Geometrien, bei denen die Geraden die Kürzesten sind*, Math. Annalen **101**, 226–237.
- [Har] de la Harpe P., 1993. *On Hilbert’s metric for simplices*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., Series 181, Geometric group theory, Volume 1, 95–119.
- [O.S] Osserman R., Sarnak P., 1984. *A New Curvature Invariant and Entropy of the Geodesic Flows*, Invent. Math. **77**, 455–462.
- [Pla] Planche P., 1995. *Géométrie de Finsler sur les espaces symétriques*, Thèse Genève, 1–59.
- [Ver] Verovic P., 1996. *Entropies et Métriques de Finsler*, Thèse de doctorat. Institut Fourier, 1–82.