



HAL
open science

Algèbres de Lie semi-simples graduées par un système de racines et sous-algèbres C-admissibles.

Josiane Nervi

► **To cite this version:**

Josiane Nervi. Algèbres de Lie semi-simples graduées par un système de racines et sous-algèbres C-admissibles.. 1997. hal-00129567

HAL Id: hal-00129567

<https://hal.science/hal-00129567>

Preprint submitted on 8 Feb 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex

LES ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES GRADUÉES PAR UN SYSTÈME DE RACINES
par
JOSIANE NERVI

AMS Classification: 17B20, 17B70.

Mots clés: algèbres de Lie semi-simples graduées par un système de racines, sous-algèbres C-admissibles.

Algèbres de Lie semi-simples graduées par un système de racines et sous-algèbres C-admissibles

Josiane Nervi

Introduction.

Cet article a pour objectif d'établir le lien entre les algèbres de Lie semi-simples graduées par un système fini de racines telles que les définissent S. Berman et R. Moody [BM] (définition reprise par G. Benkart, E. Zelmanov [BZ] et E. Neher [Ne]) et la notion de sous-algèbre C-admissible développée par H. Rubenthaler et qui joue un rôle important dans la classification des paires duales. ([Ru1], [Ru2], [Ru3])

Les deux premiers paragraphes sont destinés à fixer les notations et rappeler les définitions et les résultats nécessaires à la lecture des démonstrations.

Le paragraphe 3 établit l'équivalence entre les algèbres de Lie semi-simples graduées par un système de racines et qui vérifient une condition supplémentaire d'irréductibilité de certaines représentations liées à la graduation et les algèbres de Lie contenant une sous-algèbre C-admissible. Cela nous permet de classer ces algèbres graduées.

Comme corollaire on obtient que dans ce cas, l'algèbre déployée associée à la graduation est son propre bi-commutant.

Le paragraphe 4 étudie le cas des algèbres semi-simples graduées par un système de racines simplement lacé.

Enfin le paragraphe 5 étudie le cas général sans la condition d'irréductibilité du paragraphe 3. Nous y établissons la classification complète des algèbres de Lie semi-simples graduées par un système de racines.

English introduction The purpose of this paper is to establish a link between semi-simple Lie algebras graded by finite root systems as defined by S. Berman and R. Moody [BM] (see also the paper by G. Benkart and E. Zelmanov [BZ] and the paper by E. Neher [Ne]) and the notion of C-admissible sub-algebra introduced by H. Rubenthaler, which plays an important role in the classification of reductive dual pairs.([Ru1], [Ru2], [Ru3])

In the first and second paragraphs we indicate the notations and recall the definitions and results which will be needed in our proofs.

The third paragraph shows the equivalence between semi-simple Lie algebras graded by finite root systems and which, additionally, verify an irreducibility condition for some representations coming from the grading, and Lie algebras containing a C-admissible sub-algebra. This allows a complete classification of these graded Lie algebras.

As a corollary in that case, one obtains the fact that the split algebra associated to the graduation is equal to its double commutant.

In the paragraph 4, we study the case of semi-simple Lie algebras graded by a simply laced root system.

Finally in the paragraph 5 the general case is studied without the irreducibility condition which was used in paragraph 3. We give the full classification of all semi-simple Lie algebras graded by finite root systems.

1. Algèbres Δ -graduées.

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{C} et Δ un système de racines fini, irréductible et réduit de rang $l \geq 1$. Soit $\overset{\circ}{Q}$ le réseau entier engendré par Δ .

Définition 1.1. [BM] [BZ] [Ne] *L'algèbre \mathfrak{g} est graduée par Δ ou \mathfrak{g} est Δ -graduée si*

(i) \mathfrak{g} admet une $\overset{\circ}{Q}$ -gradation

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \overset{\circ}{Q}} V_{\alpha}$$

dans laquelle $V_{\alpha} \neq \{0\}$ si et seulement si $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$.

(ii) L'algèbre simple déployée $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ dont le système de racines est Δ est réalisée comme une sous-algèbre de \mathfrak{g} et vérifie relativement à une sous-algèbre de Cartan $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, la condition $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{\alpha} \subset V_{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$.

La notation $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{\alpha}$ désigne l'espace radiciel de dimension 1 associé à α si $\alpha \neq 0$ et $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}^0 = \overset{\circ}{\mathfrak{h}}$.

(iii) Pour tout h de $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$, $\text{ad}_{\mathfrak{g}}(h)$ agit scalairement sur V_{α} avec la valeur propre $\alpha(h)$.

(iv) \mathfrak{g} est engendrée par les V_{α} , $\alpha \in \Delta$.

L'algèbre $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ est appelé sous-algèbre déployée associée à l'algèbre Δ -graduée \mathfrak{g} .

Remarque 1.2. Si \mathfrak{g} est Δ -graduée alors

$$\mathfrak{g} = \sum_{\alpha \in \Delta} V_{\alpha} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} [V_{\alpha}, V_{-\alpha}]$$

Démonstration . Il suffit de vérifier que $V_0 \subset \sum_{\alpha \in \Delta} [V_{\alpha}, V_{-\alpha}]$.

L'algèbre \mathfrak{g} est engendrée par les V_{α} pour $\alpha \in \Delta$ par conséquent, tout élément de V_0 s'écrit comme une somme d'éléments de la forme $[X_{\alpha_k}, \dots [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_1}] \dots]$ où $X_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i}$.

Un tel élément non nul appartient à $V_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k}$ (en vertu de la $\overset{\circ}{Q}$ -gradation) et la somme des racines $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ appartient à $\Delta \cup \{0\}$. Quitte à regrouper tous les éléments appartenant à un même sous-espace V_{α} , puisque la somme des sous-espaces V_{α} , $\alpha \in \overset{\circ}{Q}$, est directe, ces éléments sont dans V_0 . La somme des racines $\alpha_1 + \dots + \alpha_k$ est nulle. On en déduit que $\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} = -\alpha_k$ est une racine de Δ et que chacun des éléments $[X_{\alpha_k}, \dots [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_1}] \dots]$ appartient à $[V_{\alpha_k}, V_{-\alpha_k}]$. □

Remarque 1.3. Si \mathfrak{g} est Δ -graduée alors \mathfrak{g} est parfaite ($\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$) et on a $[\overset{\circ}{\mathfrak{h}}, V_{\alpha}] = V_{\alpha}$ pour tout $\alpha \in \Delta$.

En effet, $\forall \alpha \in \Delta$ il existe $h \in \overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ tel que $\alpha(h) \neq 0$ et tout élément de V_{α} peut s'écrire $X_{\alpha} = \frac{1}{\alpha(h)} [h, X_{\alpha}]$, par conséquent, $[\overset{\circ}{\mathfrak{h}}, V_{\alpha}] = V_{\alpha} \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

La démonstration de la remarque 1.2. prouve $V_0 \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. □

Remarque 1.4. La définition originelle de Bermann et Moody incluait le fait que Δ soit simplement lacé. Par contre Benkart, Zelmanov et Neher, comme nous le faisons s'affranchissent de cette contrainte. Nous reviendrons dans la dernière partie (§ 4) sur le cas où Δ est simplement lacé lorsque \mathfrak{g} est semi-simple.

2. Les espaces préhomogènes de type parabolique

Ces espaces ont notamment été étudiés par H. Rubenthaler dont nous empruntons les notations ([Ru1]). Nous rappelons brièvement dans ce qui suit quelques résultats utiles.

2.1. Structure des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie semi-simples complexes. Lien avec les \mathbb{Z} -graduations.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe, \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} et \mathcal{R} le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Si $\alpha \in \mathcal{R}$, nous désignerons par H_α l'unique élément de $[\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^\alpha]$ (où \mathfrak{g}^α est l'espace radiciel de dimension 1 associé à α) tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$. C'est la coracine de α .

L'ensemble Ψ étant une base de \mathcal{R} , nous désignerons par \mathcal{R}^+ (resp. \mathcal{R}^-) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) relativement à Ψ . Si θ est une partie de Ψ , nous désignerons par $\langle \theta \rangle$ l'ensemble des racines combinaisons linéaires d'éléments de θ , par $\langle \theta \rangle^+$ (resp. $\langle \theta \rangle^-$) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) de $\langle \theta \rangle$.

Soit \mathfrak{h}_θ l'orthogonal de θ dans \mathfrak{h}

$$\mathfrak{h}_\theta = \{H \in \mathfrak{h}, \alpha(H) = 0\}$$

Le centralisateur \mathfrak{l}_θ de \mathfrak{h}_θ dans \mathfrak{g} est

$$\mathfrak{l}_\theta = Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_\theta) = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle \theta \rangle} \mathfrak{g}^\alpha$$

On remarquera que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\theta \oplus \sum_{\alpha \in \theta} \mathbb{C}H_\alpha$.

L'algèbre \mathfrak{l}_θ est une algèbre réductive de centre \mathfrak{h}_θ et $\mathfrak{l}'_\theta = [\mathfrak{l}_\theta, \mathfrak{l}_\theta]$ est une algèbre de Lie semi-simple dont $\mathfrak{h}(\theta) = \sum_{\alpha \in \theta} \mathbb{C}H_\alpha$ est une sous-algèbre de Cartan. Les restrictions des éléments de θ à $\mathfrak{h}(\theta)$ forment une base de la paire $(\mathfrak{l}'_\theta, \mathfrak{h}(\theta))$.

On définit les algèbres nilpotentes $\mathfrak{n}_\theta^+ = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+ - \langle \theta \rangle^+} \mathfrak{g}^\alpha$

et de manière analogue \mathfrak{n}_θ^- .

L'algèbre $\mathfrak{p}_\theta = \mathfrak{l}_\theta + \mathfrak{n}_\theta^+$ est une sous-algèbre parabolique standard de \mathfrak{g} .

On définit ensuite l'élément H_θ de \mathfrak{h} par les équations

$$\begin{aligned} \alpha(H_\theta) &= 0 & \forall \alpha \in \theta \\ \alpha(H_\theta) &= 2 & \forall \alpha \in \Psi \setminus \theta \end{aligned}$$

L'élément H_θ est dans \mathfrak{h}_θ .

Pour $p \in \mathbb{Z}$, on pose $d_p(\theta) = \{X \in \mathfrak{g}, [H_\theta, X] = 2pX\}$.

On a alors :

$$\mathfrak{g} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} d_p(\theta) \quad [d_i(\theta), d_j(\theta)] \subset d_{i+j}(\theta) \quad \forall i, j \in \mathbb{Z}$$

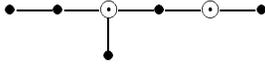
$$\mathfrak{l}_\theta = d_0(\theta) \quad \mathfrak{n}_\theta^+ = \sum_{i \geq 1} d_i(\theta) \quad \mathfrak{n}_\theta^- = \sum_{i \leq -1} d_i(\theta)$$

Les sous-espaces $d_p(\theta)$ définissent une \mathbb{Z} -graduation de \mathfrak{g} appelée graduation de type parabolique, et la représentation de \mathfrak{l}_θ dans chacun des espaces $d_p(\theta)$ sera notée $(\mathfrak{l}_\theta, d_p(\theta))$.

Proposition 2.1.1. *La représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est irréductible si et seulement si $\text{card}(\Psi \setminus \theta) = 1$ (c'est-à-dire si \mathfrak{p}_θ est maximale). (voir par exemple [Ru1] ou [Ru2], lemme 2.3.3.).*

Nous adopterons la convention graphique de H. Rubenthaler qui consiste à encercler sur le graphe de Dynkin de Ψ tous les éléments de $\Psi \setminus \theta$.

Exemple:



Les représentations $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ se décomposent alors de la manière suivante. Toute partie de Ψ est identifiée à un sous-graphe de Dynkin dans lequel on ne considère que les sommets associés aux éléments de Ψ et les arêtes qui les joignent. Il est alors possible de parler des composantes connexes d'une telle partie.

Si $\alpha \in \Psi \setminus \theta$ nous noterons Ψ_α la composante connexe de $\theta \cup \{\alpha\}$ contenant α .

On définit :

$$\theta_\alpha = \Psi_\alpha - \{\alpha\} \quad \mathfrak{h}_\alpha = \sum_{\gamma \in \Psi_\alpha} \mathbb{C}H_\gamma \quad \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h}_\alpha \oplus \sum_{\gamma \in \langle \Psi_\alpha \rangle} \mathfrak{g}^\gamma$$

$$\mathfrak{n}_{\theta_\alpha}^+ = \sum_{\gamma \in \langle \Psi_\alpha \rangle^+ - \langle \theta_\alpha \rangle^+} \mathfrak{g}^\gamma \quad d_1(\theta_\alpha) = d_1(\theta) \cap \mathfrak{n}_{\theta_\alpha}^+$$

Si H_{θ_α} est l'élément de \mathfrak{h}_α vérifiant

$$\alpha(H_{\theta_\alpha}) = 2 \quad \text{et} \quad \gamma(H_{\theta_\alpha}) = 0 \quad \forall \gamma \in \theta_\alpha$$

on a alors :

$$d_1(\theta_\alpha) = \{X \in \mathfrak{n}_{\theta_\alpha}^+, [H_{\theta_\alpha}, X] = 2X\}$$

Proposition 2.1.2. ([Ru1] prop. 1.2.2.)

(i) L'algèbre \mathfrak{g}_α est une algèbre de Lie simple dont le graphe de Dynkin est Ψ_α et

$$\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{n}_{\theta_\alpha}^- + \mathfrak{l}_{\theta_\alpha} + \mathfrak{n}_{\theta_\alpha}^+$$

(ii) L'algèbre $\mathfrak{p}_{\theta_\alpha} = \mathfrak{l}_{\theta_\alpha} + \mathfrak{n}_{\theta_\alpha}^+$ est une sous-algèbre parabolique maximale de \mathfrak{g}_α .

(iii) Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$ la décomposition de \mathfrak{g} en idéaux simples et soit $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_n$ la décomposition correspondante de \mathcal{R} . Soit I l'ensemble des indices i tels que $\mathcal{R}_i \cap (\Psi \setminus \theta) = \emptyset$. On a alors

$$\mathfrak{l}_\theta = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{g}_i \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Psi \setminus \theta} \mathfrak{l}_{\theta_\alpha}$$

la somme des $\mathfrak{l}_{\theta_\alpha}$ n'étant pas directe en général.

(iv) On a $d_1(\theta) = \bigoplus_{\alpha \in \Psi - \theta} d_1(\theta_\alpha)$ et chaque $d_1(\theta_\alpha)$ est \mathfrak{l}_θ -stable et irréductible sous l'action de $\mathfrak{l}_{\theta_\alpha}$, et donc a fortiori sous celle de \mathfrak{l}_θ .

(v) Les éléments H_{θ_α} ($\alpha \in \Psi \setminus \theta$) forment une base de \mathfrak{h}_θ .

Soient G le groupe adjoint de \mathfrak{g} , L_θ le centralisateur de H_θ dans G . Le groupe L_θ est aussi le sous-groupe analytique de G ayant \mathfrak{l}_θ pour algèbre de Lie.

Nous noterons $(L_\theta, d_1(\theta))$ la représentation de L_θ dans $d_1(\theta)$ dont la dérivée est la représentation $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$.

Théorème 2.1.3. ([Vi]) *Le groupe L_θ n'a qu'un nombre fini d'orbites dans $d_1(\theta)$. En particulier, il existe une orbite Zariski-ouverte, c'est-à-dire que $(L_\theta, d_1(\theta))$ est un espace préhomogène (de type parabolique).*

Définition 2.1.4. ([SK]) *L'espace préhomogène $(L_\theta, d_1(\theta))$ est dit régulier s'il existe un élément x de l'orbite ouverte et un invariant relatif f tel que le Hessien de f en x soit non nul. Cette condition est encore équivalente lorsque le groupe est réductif, ce qui est le cas ici, au fait que les sous-groupes d'isotropie génériques soient réductifs.*

2.2. Lien avec les sl_2 -triplets. Classification des espaces préhomogènes irréductibles réguliers de type parabolique.

Proposition 2.2.1. ([Ko]) *Nous supposons que H_θ est l'élément semi-simple d'un sl_2 -triplet, c'est-à-dire qu'il existe $X \in d_1(\theta)$ et $Y \in d_{-1}(\theta)$ tels que $[Y, X] = H_\theta$.*

(i) *L'orbite ouverte de $(L_\theta, d_1(\theta))$ est l'ensemble des $x \in d_1(\theta)$ tels qu'il existe un sl_2 -triplet de la forme (y, H_θ, x) . Ces éléments sont appelés éléments génériques.*

(ii) *$(L_\theta, d_1(\theta))$ est un espace préhomogène régulier.*

Proposition 2.2.2. ([Ru 1]) *Supposons $(L_\theta, d_1(\theta))$ irréductible. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *$(L_\theta, d_1(\theta))$ est régulier.*

(ii) *H_θ est l'élément semi-simple d'un sl_2 -triplet.*

Cette proposition permet notamment d'établir la liste des espaces préhomogènes irréductibles réguliers de type parabolique qui est reproduite dans la **table 1** à la fin de l'article.

Remarque 2.2.3. ([Ru1], th. 2.4.) *Si \mathfrak{n}_θ^+ est une algèbre commutative alors $d_1(\theta) = \mathfrak{n}_\theta^+$ et l'espace préhomogène irréductible de type parabolique est dit commutatif. Ces espaces sont obtenus en imposant à l'unique racine $\alpha \in \Psi \setminus \theta$ de figurer avec un coefficient 1 dans la décomposition de la plus grande racine de \mathcal{R}^+ .*

La liste des espaces préhomogènes irréductibles commutatifs est reproduite dans la **table 2** en fin d'article.

2.3. Construction des sous-algèbres admissibles.

Rappelons pour commencer la définition des sous-algèbres admissibles et C-admissibles introduites par H. Rubenthaler dans [Ru2].

Soit $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ un espace préhomogène de type parabolique dans une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} .

Notons $\overline{\mathcal{R}}$ l'ensemble des restrictions non nulles des éléments de \mathcal{R} à \mathfrak{h}_θ , la restriction à \mathfrak{h}_θ d'une racine α étant notée $\overline{\alpha}$.

Pour $\alpha \in \mathcal{R}$, on définit

$$V_{\overline{\alpha}} = \{X \in \mathfrak{g}, [H, X] = \overline{\alpha}(H)X, \quad \forall H \in \mathfrak{h}_\theta\}.$$

Proposition 2.3.1.

$$\forall \alpha \in \mathcal{R}, \quad V_{\overline{\alpha}} = \sum_{\beta=\overline{\alpha}} \mathfrak{g}^\beta$$

et si $\alpha \in \Psi \setminus \theta$ alors $V_{\overline{\alpha}} = d_1(\theta_\alpha)$.

La deuxième égalité est immédiate si l'on remarque que

$$d_1(\theta_\alpha) = \sum_{\beta \in \Omega(\theta_\alpha)} \mathfrak{g}^\beta$$

où $\Omega(\theta_\alpha)$ est l'ensemble des racines de la forme $\beta = \alpha + \delta$, $\delta \in \langle \theta_\alpha \rangle$.

Définition 2.3.2. *Le couple (Ψ, θ) est dit admissible si et seulement si pour tout $\alpha \in \Psi \setminus \theta$, $(\mathfrak{l}_{\theta_\alpha}, d_1(\theta_\alpha))$ est un espace préhomogène régulier, c'est-à-dire s'il existe $X_{-\overline{\alpha}} \in V_{-\overline{\alpha}}$, $X_{\overline{\alpha}} \in V_{\overline{\alpha}}$ tels que $(X_{-\overline{\alpha}}, H_{\theta_\alpha}, X_{\overline{\alpha}})$ soit un sl_2 -triplet.*

Définition 2.3.3. *Le couple (Ψ, θ) est dit C-admissible si et seulement si pour tout $\alpha \in \Psi \setminus \theta$, $(\mathfrak{l}_{\theta_\alpha}, d_1(\theta_\alpha))$ est un espace préhomogène irréductible régulier commutatif.*

Théorème 2.3.4. ([Ru3] th. 3.3.) *Si le couple (Ψ, θ) est admissible, la famille des sl_2 -triplets $(X_{-\overline{\alpha}}, H_{\theta_\alpha}, X_{\overline{\alpha}})$ pour $\alpha \in \Psi \setminus \theta$ engendre une sous algèbre simple \mathfrak{g}_θ dans \mathfrak{g} , dite sous-algèbre admissible associée au couple (Ψ, θ) .*

Si de plus (Ψ, θ) est C-admissible, alors l'ensemble $\overline{\mathcal{R}}$ des racines restreintes à \mathfrak{h}_θ , est le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$ et \mathfrak{g}_θ est appelée la sous-algèbre C-admissible associée au couple (Ψ, θ) .

Remarque 2.3.5. La classification des parties admissibles (respectivement C-admissibles) dans les algèbres de Lie simples a été établie à partir de la table 1 (resp. table 2).

La liste des sous-algèbres C-admissibles est celle de la **table 3**.

Dans la première colonne de cette table est dessiné le diagramme de Dynkin associé au couple (Ψ, θ) et dans la deuxième colonne est mentionné le type de la sous-algèbre C-admissible \mathfrak{g}_θ .

On remarquera que cette table ne mentionne pas le cas trivial $\theta = \emptyset$, c'est-à-dire $\mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}$.

3. Δ -graduations et sous-algèbres C-admissibles.

3.1. Partie directe: Δ -gradation associée à une sous-algèbre C-admissible.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe, \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .
soit Ψ une base du système \mathcal{R} de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et θ une partie de Ψ telle que le couple (Ψ, θ) est C-admissible.

L'algèbre \mathfrak{g}_θ est la sous-algèbre simple C-admissible associée à ce couple (Théorème 2.3.4.) et $\overline{\mathcal{R}}$ l'ensemble des racines restreintes à \mathfrak{h}_θ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$.

Nous noterons $\overline{\Psi}$ les restrictions des éléments de $\Psi \setminus \theta$ à \mathfrak{h}_θ et on pose $\overline{\Psi} = \{\overline{\gamma}_1, \dots, \overline{\gamma}_n\}$.

Proposition 3.1.1. *L'algèbre \mathfrak{g} est $\overline{\mathcal{R}}$ -graduée et \mathfrak{g}_θ est l'algèbre déployée associée à cette $\overline{\mathcal{R}}$ -gradation.*

Démonstration. Soit $\overset{\circ}{Q}$ le réseau de racines engendré par $\overline{\mathcal{R}}$.

Soit $\overline{\alpha} \in \overset{\circ}{Q}$

Si $\overline{\alpha} \in \overline{\mathcal{R}} \cup \{0\}$, on définit

$$V_{\overline{\alpha}} = \sum_{\gamma \in \mathcal{R} \cup \{0\}, \overline{\gamma} = \overline{\alpha}} \mathfrak{g}^\gamma = \{X \in \mathfrak{g}, \forall H \in \mathfrak{h}_\theta, [H, X] = \overline{\alpha}(H)X\}$$

Sinon, on pose $V_{\overline{\alpha}} = \{0\}$.

La sous-algèbre \mathfrak{g}_θ est une algèbre simple déployée dont le système de racines est $\overline{\mathcal{R}}$.

L'espace radiciel $\mathfrak{g}_\theta^{\overline{\alpha}}$ associé à la racine $\overline{\alpha}$ est par définition inclus dans $V_{\overline{\alpha}}$.

Par ailleurs, V_0 n'est autre que le centralisateur dans \mathfrak{g} de \mathfrak{h}_θ , soit \mathfrak{l}_θ , et $\mathfrak{g}_\theta^0 = \mathfrak{h}_\theta$ est inclus dans V_0 .

Par définition, pour tout $H \in \mathfrak{h}_\theta$, $ad_{\mathfrak{g}}H$ agit scalairement sur $V_{\overline{\alpha}}$ avec la valeur propre $\overline{\alpha}(H)$.

\mathfrak{g} est $\overset{\circ}{Q}$ -graduée, en effet:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{R} \cup \{0\}} \mathfrak{g}^\alpha = \bigoplus_{\overline{\alpha} \in \overline{\mathcal{R}} \cup \{0\}} \left(\bigoplus_{\overline{\gamma} = \overline{\alpha}} \mathfrak{g}^\gamma \right) = \bigoplus_{\overline{\alpha} \in \overset{\circ}{Q}} V_{\overline{\alpha}}$$

Soient $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \overset{\circ}{Q}$.

Si $\overline{\alpha}$ (ou $\overline{\beta}$) n'est pas une racine restreinte et n'est pas nulle, alors

$$[V_{\overline{\alpha}}, V_{\overline{\beta}}] = \{0\} \subset V_{\overline{\alpha} + \overline{\beta}}$$

Si $\overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \overline{\mathcal{R}} \cup \{0\}$ alors

$$[V_{\overline{\alpha}}, V_{\overline{\beta}}] = \left[\sum_{\overline{\gamma} = \overline{\alpha}} \mathfrak{g}^\gamma, \sum_{\overline{\lambda} = \overline{\beta}} \mathfrak{g}^\lambda \right] = \sum_{\Lambda = \{(\gamma, \lambda), \overline{\gamma} + \overline{\lambda} \in \overline{\mathcal{R}}\}} \mathfrak{g}^{\gamma + \lambda} \subset \sum_{\overline{\gamma} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}} \mathfrak{g}^\gamma = V_{\overline{\alpha} + \overline{\beta}}$$

Il reste à montrer que \mathfrak{g} est engendrée par les $V_{\overline{\alpha}}$, $\overline{\alpha} \in \overline{\mathcal{R}}$.

Puisque $\mathfrak{g} = V_0 \oplus \bigoplus_{\overline{\alpha} \in \overline{\mathcal{R}}} V_{\overline{\alpha}}$ il suffit de prouver que V_0 est engendré par les $V_{\overline{\alpha}}$.

Posons $d_p = \{X \in \mathfrak{g}, [H_0, X] = 2pX\}$.

On a $\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} d_p$ et $\forall p \in \mathbb{Z} \quad d_p = \bigoplus_{\beta \in \Delta, \beta(H_0)=2p} V_\beta^\circ$.

Remarque 3.2.2. L'élément H_0 est défini de manière unique par ce système d'équations puisque \mathcal{B} est une base de $\mathfrak{h}^{\circ*}$ et H_0 est l'élément semi-simple du sl_2 -triplet dit principal dans \mathfrak{g} . Il définit de ce fait une \mathbb{Z} -gradation de \mathfrak{g} . Pour tout $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$, $\alpha(H_0)$ est un entier pair.

En effet, si α n'est pas nul on a $\alpha = \sum_{i=1}^n n_i \gamma_i$ où les n_i sont des entiers de même signe et $\alpha(H_0) = 2 \sum_{i=1}^n n_i$.

On sait par ailleurs que $H_0 = \sum_{\alpha \in \Delta^+} H_\alpha$. ([Bou8] lemme 2 p. 132)

L'assertion de la proposition 3.2.1. concernant la structure des espaces d_p nécessite un lemme simple.

Lemme 3.2.3. Pour tout $\alpha \in \Delta \cup \{0\}$, on a :

(i) $V_\alpha^\circ = \{X \in \mathfrak{g}, \forall H \in \mathfrak{h} \quad [H, X] = \alpha(H)X\}$

(ii) $V_\alpha^\circ = \bigoplus_{\rho(\beta)=\alpha} \mathfrak{g}^\beta$.

(i) L'inclusion directe est évidente puisque pour tout $H \in \mathfrak{h}$ $ad_{\mathfrak{g}}H$ agit scalairement sur V_α° avec la valeur propre $\alpha(H)$.

Réciproquement, soit $X \in \mathfrak{g}$ tel que $[H, X] = \alpha(H)X \quad \forall H \in \mathfrak{h}$

Puisque $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\beta \in \Delta \cup \{0\}} V_\beta^\circ$, écrivons $X = \sum_{\beta} X_\beta$ où $X_\beta \in V_\beta^\circ$.

Pour tout $H \in \mathfrak{h}$ $[H, X] = \alpha(H) \sum_{\beta} X_\beta = \sum_{\beta} \beta(H) X_\beta$.

La décomposition étant directe et les β tous distincts, il existe un unique $\beta \in \Delta \cup \{0\}$ vérifiant

$X_\beta \neq 0$ et pour tout $H \in \mathfrak{h}$ $\beta(H) = \alpha(H)$; par conséquent $X \in V_\alpha^\circ$.

(ii) Soit $X \in V_\alpha^\circ$, X s'écrit $X = \sum_{\beta \in \mathcal{R} \cup \{0\}} X_\beta$, $X_\beta \in \mathfrak{g}^\beta$.

Pour tout $H \in \mathfrak{h}$, $[H, X] = \alpha(H) \sum_{\beta} X_\beta = \sum_{\beta} \beta(H) X_\beta$. La somme étant directe,

on a pour chaque β $X_\beta = 0$ ou $\beta(H) = \alpha(H) \quad \forall H \in \mathfrak{h}$.

L'inclusion réciproque est immédiate.

Terminons la démonstration de la proposition en montrant que

pour $p \in \mathbb{Z}$, $\bigoplus_{\beta(H_0)=2p} V_\beta^\circ = d_p$

Si $\overset{\circ}{\beta}(H_0) = 2p$, alors $V_\beta^\circ \subset \{X, [H_0, X] = 2pX\}$.

Réciproquement, si X vérifie $[H_0, X] = 2pX$ X s'écrit $X = \sum_{\beta} X_\beta^\circ$, $X_\beta^\circ \in V_\beta^\circ$

on a alors $[H_0, X] = \sum_{\beta} \overset{\circ}{\beta}(H_0)X_\beta^\circ = 2p \sum_{\beta} X_\beta^\circ$.

La somme étant directe, on en déduit que $X_\beta^\circ = 0$ ou $\overset{\circ}{\beta}(H_0) = 2p$.

La proposition est ainsi démontrée. □

Remarque 3.2.4.

$$d_p = \bigoplus_{\gamma(H_0)=2p} \mathfrak{g}^\gamma, \quad \gamma \in \mathcal{R}.$$

$$d_0 = V_0 \text{ et } \mathfrak{h} \subset d_0.$$

V_0 est par définition le centralisateur de $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ mais aussi celui de H_0 .

$$d_1 = \bigoplus_{i=1}^n V_{\gamma_i}^\circ.$$

Considérons la sous-algèbre $\mathfrak{p} = \sum_{p \geq 0} d_p$. Elle est \mathfrak{h} -stable puisque $\mathfrak{h} \subset d_0$.

Il existe donc une partie P de \mathcal{R} , close, et telle que $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^P$ où \mathfrak{g}^P désigne la somme directe des espaces radiciels \mathfrak{g}^α pour $\alpha \in P$ ([Bou8] Prop.2 p.86).

Proposition 3.2.5. *La sous-algèbre \mathfrak{p} est une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} .*

Il suffit de montrer que $P \cup (-P) = \mathcal{R}$ ([Bou8] Prop.11 p.91).

Soit α une racine, si $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{p}$ alors par définition α est dans P .

Sinon, il existe un entier $p < 0$ tel que $\mathfrak{g}^\alpha \subset d_p$. On a alors $\mathfrak{g}^{-\alpha} \subset \mathfrak{p}$ et $\alpha \in (-P)$. □

Nous pouvons affirmer qu'il existe une base Ψ de \mathcal{R} pour laquelle $\mathcal{R}^+ \subset P$ et une partie θ de Ψ telle que $P = \mathcal{R}^+ \cup \langle \theta \rangle^-$ ([Bou8] def.2 p.91).

Remarque 3.2.6. $\langle \theta \rangle = P \cap (-P)$.

Lemme 3.2.7. $\theta = \{\alpha \in \Psi, \alpha(H_0) = 0\}$.

Démonstration Si $\alpha \in \theta$ alors $\alpha, -\alpha \in P$.

Par conséquent il existe $p \geq 0$ tel que $\mathfrak{g}^\alpha \subset d_p$ c'est-à-dire tel que $\alpha(H_0) = 2p \geq 0$.

Puisque $(-\alpha) \in P$ on a $-\alpha(H_0) \geq 0$, et donc $p = 0$.

Réciproquement, soit α une racine de la base Ψ telle que $\alpha(H_0) = 0$. Les espaces \mathfrak{g}^α et $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ sont inclus dans d_0 ; par conséquent $\alpha \in P \cap (-P) = \langle \theta \rangle$ et puisque α est simple, $\alpha \in \theta$. □

Nous rappelons que ρ est l'application de \mathcal{R} dans $\mathfrak{h}^{\circ*}$ qui à la racine α associe sa restriction à \mathfrak{h}° .

Dans tout ce qui suit nous supposons que le système de racines Δ est distinct de \mathcal{R} et que par conséquent \mathfrak{g} est distincte de \mathfrak{g}° et que la partie θ est non vide. On a alors

Proposition 3.2.8. *L'application ρ est une surjection de \mathcal{R}^+ sur $\Delta^+ \cup \{0\}$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{R}^+$ il existe $p \geq 0$ tel que $\mathfrak{g}^\alpha \subset d_p$.

Soit $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, $X = \sum_{\beta(H_0)=2p} X_\beta^\circ$, $X_\beta^\circ \in V_\beta^\circ$ (prop 3.2.1.)

On remarquera que tous les β° sont dans $\Delta^+ \cup \{0\}$ puisque $\beta^\circ(H_0) \geq 0$

Pour tout $H \in \mathfrak{h}^{\circ}$, on a $[H, X] = \alpha(H) \sum X_\beta^\circ = \sum \beta^\circ(H) X_\beta^\circ$ puisque adH agit scalairement sur V_β° avec la valeur propre $\beta^\circ(H)$.

Si $\rho(\alpha) \neq 0$, la somme étant directe et les β° tous distincts, il existe un unique $\beta^\circ \in \Delta$ tel que $X_\beta^\circ \neq 0$ et $\rho(\alpha) = \beta^\circ$

En conclusion, $\rho(\alpha) \in \Delta^+ \cup \{0\}$ et $\mathfrak{g}^\alpha \subset V_{\rho(\alpha)}^\circ$.

Remarquons d'abord que la restriction de toute racine de θ est nulle. Soit $\alpha \in \theta$, si $\rho(\alpha) \neq 0$ alors $\rho(\alpha)$ est une racine positive et s'écrit $\rho(\alpha) = \sum_{n_i \geq 0} n_i \hat{\gamma}_i$

Par conséquent, $\alpha(H_0) = 2 \sum n_i = 0$ et tous les n_i sont nuls.

Soit $\hat{\alpha} \in \Delta^+$ on a $\mathfrak{g}^{\hat{\alpha}} \subset V_{\hat{\alpha}}^\circ = \bigoplus_{\rho(\beta)=\hat{\alpha}} \mathfrak{g}^\beta$.

Puisque $\mathfrak{g}^{\hat{\alpha}} \neq \{0\}$ il existe β tel que $\rho(\beta) = \hat{\alpha}$.

On remarquera que β n'est pas unique en général et que β est une racine positive. L'unicité est évidente dans le cas trivial $\theta = \emptyset$ et l'on a $\mathcal{R}^+ = \Delta^+$.

□

Proposition 3.2.9. *L'application ρ est une surjection de $\Psi \setminus \theta$ sur \mathcal{B} .*

Nous démontrerons au préalable les lemmes qui suivent.

Lemme 3.2.10. $\theta = \{\alpha \in \Psi, \rho(\alpha) = 0\}$.

Soit $\alpha \in \Psi$, si $\rho(\alpha) = 0$ alors $\alpha(H_0) = 0$ et $\alpha \in \theta$. (Lemme 3.2.7.)

La réciproque a été démontrée dans ce qui précède.

□

Lemme 3.2.11. *Toute racine de \mathcal{B} a un antécédent dans $\Psi \setminus \theta$.*

Soit $\hat{\gamma}_i \in \mathcal{B}$, il existe $\alpha \in \mathcal{R}^+$ tel que $\rho(\alpha) = \hat{\gamma}_i$.

Nous écrivons $\alpha = \sum_{\alpha_k \in \Psi \setminus \theta} m_k \alpha_k + \sum_{\alpha_j \in \theta} n_j \alpha_j$. D'après le lemme précédent on a :

$\rho(\alpha) = \sum_{\alpha_k \in \Psi \setminus \theta} m_k \rho(\alpha_k) = \overset{\circ}{\gamma}_i$. Puisque $\alpha_k \in \Psi \setminus \theta$, $\rho(\alpha_k)$ est une racine non nulle (lemme 3.2.10), positive et s'écrit

$$\rho(\alpha_k) = \sum_{j=1}^n p_j^k \overset{\circ}{\gamma}_j \quad \text{où les } p_j^k \text{ sont des entiers positifs non tous nuls.}$$

$$\text{On a } \rho(\alpha) = \sum_k m_k \left(\sum_j p_j^k \overset{\circ}{\gamma}_j \right) = \sum_j \left(\sum_k m_k p_j^k \right) \overset{\circ}{\gamma}_j = \overset{\circ}{\gamma}_i$$

\mathcal{B} est une base et les m_k , p_j^k sont des entiers positifs. On a donc

$$\forall j \neq i \quad \forall k \quad m_k p_j^k = 0 \quad (1)$$

$$\sum_k m_k p_i^k = 1 \quad (2)$$

De (2), on déduit l'existence d'un unique entier k_0 tel que $m_{k_0} = p_i^{k_0} = 1$.

Si $k \neq k_0$, on a $m_k p_i^k = 0$.

Par conséquent, si $j \neq i$ on a $m_{k_0} p_j^{k_0} = p_j^{k_0} = 0$ et $\rho(\alpha_{k_0}) = \sum_{j=1}^n p_j^{k_0} \overset{\circ}{\gamma}_j = \overset{\circ}{\gamma}_i$.

On remarquera que l'antécédent de $\overset{\circ}{\gamma}_i$, α_{k_0} , n'est pas unique et dépend de l'antécédent α choisi en début de démonstration. □

Considérons l'unique élément H_θ de \mathfrak{h} qui vérifie:

$$\alpha(H_\theta) = 0 \quad \forall \alpha \in \theta$$

$$\alpha(H_\theta) = 2 \quad \forall \alpha \in \Psi \setminus \theta$$

et la \mathbb{Z} -graduation qui lui est associée avec les notations rappelées dans §2.

On a notamment

$$d_0(\theta) = \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(H_\theta) = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}^{<\theta>} = V_0$$

$$d_1(\theta) = \bigoplus_{\gamma \in \Omega} \mathfrak{g}^\gamma \quad \text{où } \Omega = \{\gamma \in \mathcal{R}, \gamma = \alpha + \langle \theta_\alpha \rangle, \forall \alpha \in \Psi \setminus \theta\}.$$

Cette notation signifiant que la racine γ est somme de la racine α et d'une combinaison linéaire d'éléments de θ_α .

Lemme 3.2.12. $d_1 = d_1(\theta)$ et $H_0 = H_\theta$

Nous rappelons que $d_1 = \bigoplus_{\gamma(H_0)=2} \mathfrak{g}^\gamma = \bigoplus_{\overset{\circ}{\gamma}_i \in \mathcal{B}} V_{\overset{\circ}{\gamma}_i}$ et $V_{\overset{\circ}{\gamma}_i} = \bigoplus_{\rho(\gamma)=\overset{\circ}{\gamma}_i} \mathfrak{g}^\gamma$

Montrons que $d_1 \subset d_1(\theta)$

Soit $\gamma \in \mathcal{R}$ telle que $\gamma(H_0) = 2$. On en déduit que $\rho(\gamma) \in \Delta^+$ et $\gamma \in \mathcal{R}^+$. La racine γ s'écrit alors

$$\gamma = \sum_{\alpha_i \in \Psi \setminus \theta} n_i \alpha_i + \sum_{\alpha_j \in \theta} m_j \alpha_j \quad n_i, m_j \text{ étant des entiers positifs ou nuls et}$$

$$\gamma(H_0) = \sum_{\alpha_i \in \Psi \setminus \theta} n_i \rho(\alpha_i)(H_0).$$

$\forall i$, $\rho(\alpha_i) \in \Delta^+$ puisque $\alpha_i \in \Psi - \theta$ et $\rho(\alpha_i)(H_0) = \sum_k n_k^i \overset{\circ}{\gamma}_k(H_0) = 2 \sum_k n_k^i$ les n_k^i étant des entiers positifs non tous nuls.

Puisque $\gamma(H_0) = 2$, il existe i unique tel que $\rho(\alpha_i) \neq 0$ et $\sum_k n_k^i = 1$, et par

conséquent il existe k tel que $\rho(\alpha_i) = \gamma_k^\circ \in \mathcal{B}$.

On en déduit $\gamma = \alpha_i + \langle \theta \rangle$ et $d_1 \subset d_1(\theta)$.

Réciproquement, montrons que si une racine γ est dans Ω , alors $\gamma(H_0) = 2$.

Supposons que $\gamma \in \Omega$ et $\gamma(H_0) = 2p$, $p \geq 2$ c'est-à-dire que

$$\mathfrak{g}^\gamma \subset d_1(\theta) \cap d_p, \quad p \geq 2.$$

Il existe $\alpha \in \Psi \setminus \theta$ vérifiant: $\gamma = \alpha + \langle \theta \rangle$ et $\rho(\gamma) = \rho(\alpha) = \gamma_{i_1}^\circ + \dots + \gamma_{i_p}^\circ$.

Les $\gamma_{i_j}^\circ$ ne sont pas nécessairement tous distincts dans \mathcal{B} et on peut écrire cette somme de sorte que toutes les sommes partielles soient des racines de Δ .

Considérons : $\tilde{\mathfrak{g}} = V_{-\rho(\gamma)} \oplus V_0 \oplus V_{\rho(\gamma)}$

L'espace $\tilde{\mathfrak{g}}$ est une sous-algèbre de \mathfrak{g} puisque les V_α° forment une \mathring{Q} -graduation de \mathfrak{g} et Δ étant réduit, on a $[V_{\rho(\gamma)}, V_{\rho(\gamma)}] = 0$.

La sous-algèbre $\tilde{\mathfrak{g}}$ est graduée par l'élément semi-simple

$$h = H_{\gamma_{i_1}^\circ + \dots + \gamma_{i_p}^\circ} = H_{\rho(\gamma)}$$

C'est la coracine dans $\mathring{\mathfrak{h}}$ de $\gamma_{i_1}^\circ + \dots + \gamma_{i_p}^\circ$.

Nous savons ([Ko]) que l'ensemble des éléments X de $V_{\rho(\gamma)}$ pour lesquels il existe Y dans $V_{-\rho(\gamma)}$ tel que (Y, h, X) soit un sl_2 -triplet constitue l'orbite ouverte de la représentation $[\mathcal{V}_0, V_{\rho(\gamma)}]$ où \mathcal{V}_0 désigne le sous-groupe analytique du groupe adjoint G de \mathfrak{g} et dont l'algèbre de Lie est V_0 .

Puisque par hypothèse, $\mathfrak{g}^{\rho(\gamma)} \subset V_{\rho(\gamma)}$, cette orbite contient naturellement l'élément

$X_{\rho(\gamma)}$ de $\mathfrak{g}^{\rho(\gamma)}$ tel que $(X_{-\rho(\gamma)}, h, X_{\rho(\gamma)})$ est le sl_2 -triplet usuel dont h est l'élément semi-simple.

$X_{\rho(\gamma)}$ est donc générique et l'on a:

$$[V_0, X_{\rho(\gamma)}] = V_{\rho(\gamma)}$$

On peut écrire: $X_{\rho(\gamma)} = [X_{\gamma_{i_p}^\circ}, \dots, [X_{\gamma_{i_2}^\circ}, X_{\gamma_{i_1}^\circ}] \dots]$ avec $X_{\gamma_{i_j}^\circ} \in V_{\gamma_{i_j}^\circ}$.

Chacun des $V_{\gamma_{i_j}^\circ} = \bigoplus_{\{\lambda, \rho(\lambda) = \gamma_{i_j}^\circ\}} \mathfrak{g}^\lambda$ étant inclus dans $d_1(\theta)$, on écrira

$$X_{\gamma_{i_j}^\circ} = \sum X_{\lambda_j} \quad \text{où } \lambda_j = \alpha_{\lambda_j} + \langle \theta \rangle \quad \alpha_j \in \Psi \setminus \theta \quad \text{et } \rho(\alpha_{\lambda_j}) = \rho(\lambda_j) = \gamma_{i_j}^\circ.$$

Par conséquent $X_{\rho(\gamma)}$ s'écrit comme une somme de termes de la forme

$$[X_{\lambda_p}, \dots, [X_{\lambda_2}, X_{\lambda_1}] \dots] = X_{\alpha_{\lambda_p} + \dots + \alpha_{\lambda_1} + \langle \theta \rangle}$$

Tous ces éléments sont de toute évidence dans $d_p(\theta)$ $p \geq 2$ et donc,

$$\mathfrak{g}^\gamma \subset V_{\rho(\gamma)} = [V_0, X_{\rho(\gamma)}] \subset [V_0, d_p(\theta)] \subset d_p(\theta) \quad p \geq 2.$$

Ceci est en contradiction avec le fait que \mathfrak{g}^γ soit par définition dans $d_1(\theta)$.

En conclusion, il n'existe pas dans $d_1(\theta)$ d'éléments qui ne soit pas dans d_1 .

On a $d_1(\theta) = d_1$ et $\forall \alpha \in \Psi \setminus \theta \quad \alpha(H_0) = 2$.

Donc H_0 vérifie : $\alpha(H_0) = 0 \quad \forall \alpha \in \theta$ et $\alpha(H_0) = 2 \quad \forall \alpha \in \Psi - \theta$.

On en déduit $H_0 = H_\theta$ et $\rho(\alpha) \in \mathcal{B}$. Ceci termine la démonstration de la proposition 3.2.9. □

Proposition 3.2.13. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'application ρ est une bijection de $\Psi \setminus \theta$ sur \mathcal{B} .

(ii) $\mathfrak{h}^\circ = \mathfrak{h}_\theta$.

(iii) $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, la représentation $(V_0, V_{\gamma_i}^\circ)$ est irréductible.

La première équivalence est évidente lorsque que l'on a rappelé que ρ est une surjection de $\Psi \setminus \theta$ sur \mathcal{B} , que $\text{card}(\Psi \setminus \theta) = \dim \mathfrak{h}_\theta$, $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim \mathfrak{h}^\circ$ et que \mathfrak{h}° est un sous-espace de \mathfrak{h}_θ .

Prouvons que (i) \Leftrightarrow (iii).

Si ρ est bijective, alors, pour tout $\gamma_i^\circ \in \mathcal{B}$, il existe une unique racine $\alpha_j \in \Psi \setminus \theta$ telle que $\rho(\alpha_j) = \gamma_i^\circ$ et on a $V_{\gamma_i}^\circ = d_1(\theta_{\alpha_j})$ en empruntant les notations explicitées précédemment.

Les représentations $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta_{\alpha_j})) = (V_0, V_{\gamma_i}^\circ)$ étant irréductibles, l'implication directe est démontrée.

Réciproquement, supposons que ρ n'est pas injective.

Il existe alors $\gamma_i^\circ \in \mathcal{B}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \Psi \setminus \theta$ telles que, $\rho(\alpha_1) = \rho(\alpha_2) = \gamma_i^\circ$.

On a $d_1(\theta_{\alpha_1}) \oplus d_1(\theta_{\alpha_2}) \subset V_{\gamma_i}^\circ$. Puisque les sous-espaces $d_1(\theta_{\alpha_1})$ et $d_1(\theta_{\alpha_2})$ sont \mathfrak{l}_θ -stables, $(V_0, V_{\gamma_i}^\circ)$ n'est pas irréductible. □

Proposition 3.2.14. *Si \mathfrak{g} est Δ -graduée et si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la représentation $(V_0, V_{\gamma_i}^\circ)$ est irréductible, la sous-algèbre \mathfrak{g}° est la sous-algèbre C -admissible associée à la partie $\theta = \rho^{-1}(\{0\}) \cap \Psi$.*

Précisons au préalable quelques notations.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ γ_i est l'unique racine de $\Psi \setminus \theta$ dont la restriction à \mathfrak{h}° est γ_i° .

Notons Ψ_i la composante connexe de $\theta \cup \{\gamma_i\}$ qui contient γ_i et posons $\theta_i = \Psi_i \setminus \{\gamma_i\}$

$$\mathfrak{h}_i = \sum_{\alpha \in \Psi_i} \mathbb{C}H_\alpha \quad \mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i \oplus \sum_{\alpha \in \langle \Psi_i \rangle} \mathfrak{g}^\alpha$$

Par définition \mathfrak{g}_i est une sous-algèbre de \mathfrak{g} dont \mathfrak{h}_i est une sous-algèbre de Cartan, et Ψ_i est une base du système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$.

Lemme 3.2.15. *L'unique élément H_i de \mathfrak{h}_i vérifiant $\gamma_i(H_i) = 2$ et $\alpha(H_i) = 0 \quad \forall \alpha \in \theta_i$ est $H_{\gamma_i}^\circ$.*

Montrons que $H_{\gamma_i}^\circ$ est dans \mathfrak{h}_i .

Par définition $H_{\gamma_i}^\circ \in [\mathfrak{g}^{-\gamma_i}, \mathfrak{g}^{\gamma_i}]$, par hypothèse $\mathfrak{g}^{\gamma_i} \subset V_{\gamma_i}^\circ = d_1(\theta_i)$
 et $d_1(\theta_i) = \sum_{\alpha=\gamma_i+\langle\theta_i\rangle} \mathfrak{g}^\alpha$

Par conséquent $[\mathfrak{g}^{-\gamma_i}, \mathfrak{g}^{\gamma_i}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i$.

On a par définition $\gamma_i(H_{\gamma_i}^\circ) = 2$ et $\forall \alpha \in \theta_i$ $\alpha(H_{\gamma_i}^\circ) = 0$ puisque $H_{\gamma_i}^\circ \in \mathfrak{h}^\circ$ et le lemme 3.2.15. est démontré.

□

L'élément $H_{\gamma_i}^\circ$ gradue \mathfrak{g}_i et $H_{\gamma_i}^\circ$ est aussi l'élément semi-simple du sl_2 -triplet usuel

$(X_{-\gamma_i}^\circ, H_{\gamma_i}^\circ, X_{\gamma_i}^\circ)$ avec $X_{\gamma_i}^\circ \in \mathfrak{g}^{\gamma_i} \subset d_1(\theta_i)$.

Par conséquent, l'espace préhomogène $(d_0(\theta_i), d_1(\theta_i))$ est régulier pour tout i et le couple (Ψ, θ) est admissible.

Par ailleurs, supposons qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que $d_p(\theta_i) \neq \{0\}$, cela signifie qu'il existe une racine dans \mathcal{R}_i qui s'écrit $\alpha = p\gamma_i + \langle\theta_i\rangle$

et $\rho(\alpha) = p\rho(\gamma_i) = p\gamma_i$ $p \geq 2$.

Puisque $\rho(\alpha)$ est une racine du système réduit Δ , il est clair que notre hypothèse est absurde.

Ainsi, $\mathfrak{n}_{\theta_i}^+$ se réduit à $d_1(\theta_i)$ et l'espace préhomogène irréductible de type parabolique $(d_0(\theta_i), d_1(\theta_i))$ est commutatif (Remarque 2.2.4.). Le couple (Ψ, θ) est C-admissible (Définition 2.3.4.). Ceci termine la démonstration de la proposition 3.2.14.

□

On notera ([Ru3]) que \mathfrak{g}° est engendrée par la famille des sl_2 -triplets $(X_{-\gamma_i}^\circ, H_{\gamma_i}^\circ, X_{\gamma_i}^\circ)$. Les résultats obtenus précédemment sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 3.2.16

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie ,

\mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} ,

\mathcal{R} le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$,

Soit Δ un système de racines fini, irréductible et réduit de rang $n \geq 1$, dont une base est $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

Soit \mathfrak{g}° une algèbre simple déployée contenant une sous algèbre de Cartan \mathfrak{h}° telle que Δ soit le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}^\circ, \mathfrak{h}^\circ)$.

On note \mathring{Q} le réseau entier associé à Δ .

Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) Il existe une base Ψ de \mathcal{R} et une partie θ de Ψ telles que:

- Le couple (Ψ, θ) est C-admissible.

- L'algèbre \mathfrak{h}° est l'orthogonal de θ dans \mathfrak{h} et \mathfrak{g}° est la sous-algèbre C-admissible de \mathfrak{g} , associée au couple (Ψ, θ) .

(ii) L'algèbre \mathfrak{g} est Δ -graduée (au sens de la définition 1.1.) et si pour $\overset{\circ}{\alpha} \in \overset{\circ}{Q}$, $V_{\overset{\circ}{\alpha}}$ désigne le sous-espace associé à $\overset{\circ}{\alpha}$ dans la $\overset{\circ}{Q}$ -gradation de \mathfrak{g} , les représentations $(V_0, V_{\overset{\circ}{\gamma}_i})$ sont irréductibles pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Corollaire 3.2.17. La classification des algèbres de Lie simples graduées par un système de racines fini, irréductible, réduit dont une base est $\{\overset{\circ}{\gamma}_1, \dots, \overset{\circ}{\gamma}_n\}$ et telles que les représentations $(V_0, V_{\overset{\circ}{\gamma}_i})$ sont irréductibles, est donnée par la table des sous-algèbres C-admissibles (voir la table 3 à la fin de l'article).

Nous rappellerons ([Ru3] def. 1.1.1.) qu'un couple $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ de sous-algèbres réductives d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} réductive est une paire duale si le centralisateur de \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} est \mathfrak{b} , et vice-versa. Nous dirons alors que \mathfrak{a} (respectivement \mathfrak{b}) est une sous-algèbre de Howe.

H. Rubenthaler a établi ([Ru3] th. 4.1.) que si (Ψ, θ) est un couple C-admissible et \mathfrak{g}_{θ} la sous-algèbre C-admissible correspondante, alors \mathfrak{g}_{θ} est une sous-algèbre de Howe.

Ces rappels impliquent le corollaire qui suit.

Corollaire 3.2.18. La sous-algèbre déployée d'une algèbre de Lie semi-simple Δ -graduée telles que les représentations $(V_0, V_{\overset{\circ}{\gamma}_i})$ sont irréductibles pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, est une sous-algèbre de Howe.

L'exemple ci-dessous montre la nécessité de l'hypothèse d'irréductibilité des représentations $(V_0, V_{\overset{\circ}{\gamma}_i})$ pour que l'algèbre déployée associée à la Δ -gradation soit C-admissible et pour que ρ soit une bijection de $\Psi \setminus \theta$ sur \mathcal{B} .

Exemple 3.2.19. Dans cet exemple nous construirons dans une algèbre de Lie B_2 -graduée où la sous-algèbre C-admissible associée à la B_2 -gradation par le procédé précédemment décrit est distincte de la sous-algèbre déployée associée cette B_2 -gradation.

Dans $sl(4, \mathbb{C})$ nous considérons la sous-algèbre de Cartan des matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_4 = 0.$$

Le système de racines

$$\mathcal{R} = \{\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq 4 \ i \neq j\} \quad \text{où} \quad \alpha_{i,j} : \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_4 \end{pmatrix} \mapsto \lambda_i - \lambda_j \quad \text{est}$$

de type A_3 .

L'espace radiciel associé à la racine $\alpha_{i,j}$ est le sous-espace $\mathfrak{g}^{\alpha_{i,j}} = \mathbb{C}E_{i,j}$.

Nous poserons $\alpha = \alpha_{1,2}$, $\beta = \alpha_{2,3}$, $\gamma = \alpha_{3,4}$. L'ensemble $\Psi = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ est une base de \mathcal{R} .

La plus grande racine relativement à Ψ est $\omega = \alpha + \beta + \gamma = \alpha_{1,4}$.

Nous noterons $(Y_{\alpha_{i,j}}, H_{\alpha_{i,j}}, X_{\alpha_{i,j}})$ le sl_2 -triplet usuel associé à la racine $\alpha_{i,j}$.

Considérons la sous-algèbre de \mathfrak{g} notée $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ et engendrée par les sl_2 -triplets $(Y_{\beta}, H_{\beta}, X_{\beta})$ et $(Y_{\alpha} + Y_{\gamma}, H_{\alpha} + H_{\gamma}, X_{\alpha} + X_{\gamma})$.

De simples calculs montrent que \mathfrak{g}° est la sous-algèbre des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & c & -d & e \\ c' & -a+f & b & d \\ -d' & b' & a-f & c \\ e' & d' & c' & -a \end{pmatrix}$$

La sous-algèbre \mathfrak{h}° des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & -a+f & & \\ & & a-f & \\ 0 & & & -a \end{pmatrix} = H_{a,f}$$

est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}° de dimension 2 incluse dans \mathfrak{h} .

Si nous notons ρ l'application qui à une racine de \mathcal{R} associe sa restriction à \mathfrak{h}° , on a $\rho(\alpha) = \rho(\gamma) = \mathring{\alpha}$ où $\mathring{\alpha}(H_{a,f}) = 2a-f$ et $\rho(\beta) = \mathring{\beta}$ où $\mathring{\beta}(H_{a,f}) = -2a+2f$. L'ensemble des racines positives est $\rho(\mathcal{R}^+) = \{\mathring{\alpha}, \mathring{\beta}, \mathring{\alpha} + \mathring{\beta}, 2\mathring{\alpha} + \mathring{\beta}\}$ et Δ est un système de type B_2 de base $\mathcal{B} = \{\mathring{\alpha}, \mathring{\beta}\}$.

Les espaces radiciels associées aux racines positives sont les suivants.

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{\mathring{\alpha}} &= \mathbb{C}(E_{1,2} + E_{3,4}) \subset \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^\gamma \\ \mathfrak{g}^{\mathring{\beta}} &= \mathfrak{g}^\beta \\ \mathfrak{g}^{\mathring{\alpha} + \mathring{\beta}} &= \mathbb{C}(E_{2,4} - E_{1,3}) \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta} \oplus \mathfrak{g}^{\beta+\gamma} \\ \mathfrak{g}^{2\mathring{\alpha} + \mathring{\beta}} &= \mathfrak{g}^{\alpha+\beta+\gamma}. \end{aligned}$$

Soit \mathring{Q} le réseau entier associé à Δ . Soit $\mathring{\gamma} \in \mathring{Q}$. Nous poserons

$$V_\gamma^\circ = \bigoplus_{\rho(\lambda) = \mathring{\alpha}, \lambda \in \mathcal{R} \cup \{0\}} \mathfrak{g}^\lambda \text{ si } \mathring{\gamma} \in \Delta \cup \{0\}.$$

$$V_\gamma^\circ = \{0\} \text{ sinon.}$$

On obtient la configuration suivante:

$$\begin{pmatrix} V_0 & V_{\mathring{\alpha}} & V_{\mathring{\alpha} + \mathring{\beta}} & V_{2\mathring{\alpha} + \mathring{\beta}} \\ V_{-\mathring{\alpha}} & V_0 & V_{\mathring{\beta}} & V_{\mathring{\alpha} + \mathring{\beta}} \\ V_{-\mathring{\alpha} - \mathring{\beta}} & V_{-\mathring{\beta}} & V_0 & V_{\mathring{\alpha}} \\ V_{-2\mathring{\alpha} - \mathring{\beta}} & V_{-\mathring{\alpha} - \mathring{\beta}} & V_{-\mathring{\alpha}} & V_0 \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément que \mathfrak{g} est B_2 -graduée. La partie θ de Ψ définie par la B_2 -gradation (lemme 3.2.10.) est vide. Le couple ainsi formé est C-admissible et la sous-algèbre C-admissible associée est \mathfrak{g} elle-même qui contient strictement \mathfrak{g}° . On remarquera que conformément à la proposition 3.2.13. la représentation (V_0, V_α°) n'est pas irréductible et que conformément aux résultats du paragraphe suivant, B_2 n'est pas simplement lacé.

Le résultat suivant nous sera utile dans la partie 4.

Remarque 3.2.20. *La restriction $\overset{\circ}{\omega}$ de ω , la plus grande racine de \mathcal{R} , est la plus grande racine de Δ .*

Le système de racines Δ est ici ordonné par le choix de la base \mathcal{B} , puis \mathcal{R} est ordonné relativement à la base Ψ choisi par le procédé décrit après la proposition 3.2.5.

Démonstration Montrons que si dans \mathcal{R} on a $\alpha \geq \beta$ alors $\rho(\alpha) \geq \rho(\beta)$.

La notation $\alpha \geq \beta$ signifie que α s'écrit

$\alpha = \beta + \sum_{j=1}^k m_j \delta_j$ où pour tout j , m_j est un entier positif et δ_j une racine simple .

On a alors $\rho(\alpha) = \rho(\beta) + \sum_{j=1}^k m_j \rho(\delta_j)$. On sait que $\rho(\delta_j)$ est une racine positive de Δ , par conséquent $\rho(\alpha) \geq \rho(\beta)$.

On en déduit que pour toute racine α de \mathcal{R} , $\rho(\omega) \geq \rho(\alpha)$ et puisque ρ est une surjection de \mathcal{R}^+ dans $\Delta^+ \cup \{0\}$, $\rho(\omega) = \overset{\circ}{\omega}$

□

4. Cas des systèmes simplement lacés.

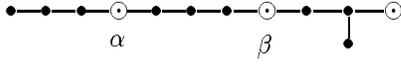
Nous montrerons dans cette partie que si le système de racines Δ est simplement lacé, c'est-à-dire de type A_l $l \geq 2$, D_l , $l \geq 4$, E_6 , E_7 , ou E_8 , alors la condition d'irréductibilité des représentations $(V_0, V_{\gamma_i}^\circ)$ est automatiquement vérifiée.

Proposition 4.1. *Si Δ est un système de racines réduit, irréductible, simplement lacé, alors l'application ρ est une injection de $\Psi \setminus \theta$ dans \mathcal{B} (et par conséquent une bijection au vu de la proposition 3.2.9.).*

En premier lieu, nous introduirons la notion de racines θ -connectées dans le système de racines \mathcal{R} de l'algèbre \mathfrak{g} , Ψ en étant une base, et nous démontrerons deux lemmes.

Définition 4.2. *Deux racines simples α et β de $\Psi \setminus \theta$ sont θ -connectées dans Ψ s'il existe dans le diagramme de Dynkin de Ψ , un chemin connexe reliant ces deux racines et ne contenant que des éléments de θ .*

Exemple:



Lemme 4.3. *Si deux racines α et β de $\Psi \setminus \theta$ sont θ -connectées dans Ψ , alors $\rho(\alpha) \neq \rho(\beta)$ et $(\rho(\alpha), \rho(\beta)) \neq 0$.*

Cette dernière condition dit que le produit scalaire dans Δ de ces deux racines est non nul, ou encore que $\rho(\alpha)$ et $\rho(\beta)$ sont connectés dans Δ .

Il existe $\delta_1, \dots, \delta_k$ dans θ telles que la somme

$$\epsilon = \alpha + \delta_1 + \dots + \delta_k + \beta$$

est une racine.

Puisque ρ est une application de \mathcal{R}^+ sur $\Delta^+ \cup \{0\}$, $\rho(\epsilon) = \rho(\alpha) + \rho(\beta)$ est une racine positive de Δ .

Les restrictions à \mathfrak{h} des éléments de $\Psi \setminus \theta$ étant des racines simples de Δ (proposition 3.2.9.) et Δ étant réduit, on conclut que $\rho(\alpha)$ et $\rho(\beta)$ sont distinctes, que leur somme n'est pas nulle et que le produit scalaire $(\rho(\alpha), \rho(\beta))$ est strictement négatif ([Bou6]).

La réciproque de ce lemme est naturellement fausse mais nous pouvons énoncer la remarque suivante:

Remarque 4.4. Soient α et β deux racines de $\Psi \setminus \theta$.

Si $(\rho(\alpha), \rho(\beta)) \neq 0$ alors il existe deux racines de $\Psi \setminus \theta$, α' et β' , θ -connectées dans Ψ et vérifiant $\rho(\alpha) = \rho(\alpha')$ et $\rho(\beta) = \rho(\beta')$.

On peut écrire les équivalences suivantes puisque $\rho(\alpha)$ et $\rho(\beta)$ sont des racines simples.

$$(\rho(\alpha), \rho(\beta)) \neq 0 \Leftrightarrow \rho(\alpha) + \rho(\beta) \in \Delta \Leftrightarrow \left[\begin{smallmatrix} \circ\rho(\alpha) \\ \mathfrak{g} \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \circ\rho(\beta) \\ \mathfrak{g} \end{smallmatrix} \right] \neq 0.$$

Supposons qu'aucun couple d'antécédents de $\rho(\alpha)$ et $\rho(\beta)$ respectivement ne soit constitué d'éléments θ -connectés dans Ψ .

Notons $\rho^{-1}(\{\rho(\alpha)\}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ et $\rho^{-1}(\{\rho(\beta)\}) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j\}$.

$${}_{\mathfrak{g}}^{\circ\rho(\alpha)} \subset V_{\rho(\alpha)} = \sum_{i=1}^k d_1(\theta_{\alpha_i})$$

$${}_{\mathfrak{g}}^{\circ\rho(\beta)} \subset V_{\rho(\beta)} = \sum_{l=1}^j d_1(\theta_{\beta_l})$$

Si α_i et β_l ne sont pas θ -connectés dans Ψ on a $[d_1(\theta_{\alpha_i}), d_1(\theta_{\beta_l})] = 0$.

Par conséquent, $[{}_{\mathfrak{g}}^{\circ\rho(\alpha)}, {}_{\mathfrak{g}}^{\circ\rho(\beta)}] = 0$ et $(\rho(\alpha), \rho(\beta)) = 0$, d'où le résultat. \square

Démonstration de la proposition 4.1.

Supposons qu'il existe deux racines simples α et β dans $\Psi \setminus \theta$ telles que $\rho(\alpha) = \rho(\beta) = \overset{\circ}{\gamma}$ où $\overset{\circ}{\gamma}$ est un élément de \mathcal{B} .

Remarque 4.5. Les racines α et β ne sont pas θ -connectées dans Ψ (lemme 4.3)

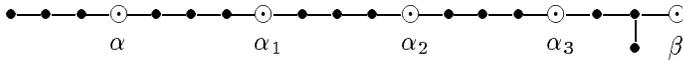
Dans ces conditions, puisque la décomposition dans Ψ de la plus grande racine ω de \mathcal{R} contient α et β le coefficient de $\overset{\circ}{\gamma}$ dans la plus grande racine $\overset{\circ}{\omega}$ de Δ est supérieur ou égal à 2. Si Δ est de type A_l $l \geq 2$ cette assertion est trivialement fausse car $\overset{\circ}{\omega} = \overset{\circ}{\gamma}_1 + \dots + \overset{\circ}{\gamma}_n$.

Nous supposons désormais que Δ est de type D_l $l \geq 4$, E_6 , E_7 ou E_8 , on peut donc affirmer que $\text{card}(\Psi) \geq \text{card}(B) \geq 4$.

Il existe entre α et β dans le diagramme de Dynkin de Ψ au moins un chemin connexe de type A_l , B_l , C_l ou F_4 , et l'on peut supposer quitte à choisir une autre paire le long de ce chemin et une autre racine $\overset{\circ}{\gamma}$ que toutes les restrictions des racines de $\Psi \setminus \theta$ autres que α et β sur ce chemin sont distinctes deux à deux et distinctes de $\overset{\circ}{\gamma}$. La remarque 4.5. justifie l'existence d'au moins une racine $\overset{\circ}{\gamma}$ dans \mathcal{B} , un chemin et une paire de racines dans \mathcal{R} répondant à ces conditions.

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k \geq 1$) ces racines intermédiaires, éléments de $\Psi \setminus \theta$. Nous supposons que α et α_1 sont θ -connectés ainsi que β et α_k et α_{i-1} et α_i .

Exemple de disposition



La somme ϵ des racines simples le long de ce chemin est une racine de \mathcal{R} ([Bou6] §1. cor.3. p.160)

$$\rho(\epsilon) = 2\overset{\circ}{\gamma} + \rho(\alpha_1) + \dots + \rho(\alpha_k) \in \Delta$$

et les $\rho(\alpha_j) \forall j \in \{1, \dots, k\}$ sont tous distincts dans \mathcal{B} .

La liste des racines positives dans un système de type D_l $l \geq 4$ ou E_l $l = 6, 7$ ou 8 ([Bou6] planches annexes) donne lieu à la remarque suivante.

Remarque Toute racine η de Δ dont l'écriture dans une base donnée \mathcal{B} ne comporte que des coefficients 0 ou 1 et un seul coefficient 2 est telle que le coefficient 2 est relatif à l'unique racine de la base \mathcal{B} connectée sur le diagramme de Dynkin à trois racines de \mathcal{B} exactement, elles-mêmes affectées du coefficient 1 dans la décomposition de η . La racine $\overset{\circ}{\gamma}$ est nécessairement cette unique racine et on a $k \geq 3$.

Nous avons $(\overset{\circ}{\gamma}, \rho(\alpha_1)) \neq 0$, $(\overset{\circ}{\gamma}, \rho(\alpha_k)) \neq 0$ avec $\rho(\alpha_1) \neq \rho(\alpha_k)$ (lemme 4.3.).

Il existe donc un entier $j \in \{2, \dots, k-1\}$ tel que $(\overset{\circ}{\gamma}, \rho(\alpha_j)) \neq 0$ (Remarque). Au vu des hypothèses et du lemme 4.3. on a encore:

$$(\rho(\alpha_j), \rho(\alpha_{j-1})) \neq 0 \quad \text{et} \quad (\rho(\alpha_j), \rho(\alpha_{j+1})) \neq 0 .$$

Les racines $\rho(\alpha_{j-1})$ et $\rho(\alpha_{j+1})$ étant distinctes dans \mathcal{B} , cette configuration est impossible puisque seule la racine $\overset{\circ}{\gamma}$ vérifie une telle propriété.

On en conclut que deux racines de $\Psi \setminus \theta$ ne peuvent se restreindre sur une même racine de \mathcal{B} et que ρ est une bijection de $\Psi \setminus \theta$ sur \mathcal{B} .

Par conséquent toutes les représentations $(V_0, V_{\overset{\circ}{\gamma}_i})$ sont irréductibles (prop.3.2.13.)

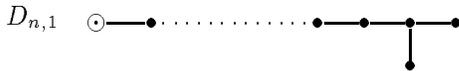
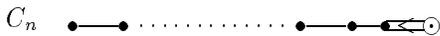
et $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ est la sous-algèbre C-admissible associée au couple (Ψ, θ) où $\theta = \rho^{-1}(\{0\}) \cap \Psi$. □

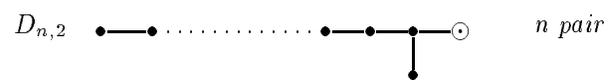
Corollaire 4.6. *La classification des algèbres simples complexes graduées par un système de racines fini, irréductible réduit, simplement lacé est établie à partir de la classification précédente (corollaire 3.2.17.) en éliminant de la liste établie dans la table 3, les algèbres donnant lieu à une sous-algèbre C-admissible de type $B_l, C_l(l \geq 2), F_4, G_2$. On remarquera que figurent dans cette liste les espaces préhomogènes irréductibles commutatifs réguliers correspondant à des algèbres A_1 -graduées. On obtient:*

A_n graduée par A_k $n \geq k \geq 1$ et $n+1$ multiple de $k+1$.

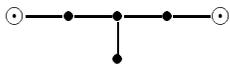


B_n, C_n, D_n graduées par A_1

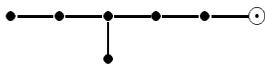




E_6 graduée par A_2



E_7 graduée par A_1



5. Le cas général.

5.1. Partie directe.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie graduée par un système de racines Δ fini, irréductible, réduit.

Soient $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ la sous-algèbre simple déployée de \mathfrak{g} dont Δ est le système de racines et $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ une sous-algèbre de Cartan de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$

Nous noterons $\mathcal{B} = \{\overset{\circ}{\gamma}_1, \dots, \overset{\circ}{\gamma}_n\}$ une base de Δ .

Soient \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} contenant $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ et \mathcal{R} le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathcal{R})$.

Nous noterons ρ l'application de \mathcal{R} dans $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}^*$ qui associe à la racine α sa restriction à $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$.

Nous avons établi (§ 3) qu'il existe une base Ψ de \mathcal{R} et une partie θ de Ψ vérifiant:

- $\theta = \{\alpha \in \Psi, \rho(\alpha) = 0\}$
- ρ est une surjection de \mathcal{R}^+ sur $\Delta^+ \cup \{0\}$ (l'ordre définissant \mathcal{R}^+ étant induit par Ψ)
- ρ est une surjection de $\Psi \setminus \theta$ sur \mathcal{B} .

Soit $\mathfrak{h}_\theta = \{H \in \mathfrak{h}, \alpha(H) = 0 \ \forall \alpha \in \theta\}$, \mathfrak{h}_θ contient $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$.

Nous noterons $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ les éléments de $\Psi \setminus \theta$

Soit Ψ_i la composante connexe dans Ψ de la partie $\theta \cup \{\gamma_i\}$ qui contient γ_i . Nous rappelons les notations déjà utilisées en posant $\theta_i = \Psi_i \setminus \{\gamma_i\}$, $\mathfrak{h}_i = \sum_{\alpha \in \Psi_i} \mathbb{C}H_\alpha$ et

$\mathfrak{g}_i = \mathfrak{h}_i + \sum_{\alpha \in \langle \Psi_i \rangle} \mathfrak{g}^\alpha$. L'ensemble Ψ_i est une base du système de racines noté $\langle \Psi_i \rangle$ de $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{h}_i)$.

Nous désignons par H_i l'unique élément de \mathfrak{h}_i vérifiant

$$\gamma_i(H_i) = 2 \text{ et } \alpha(H_i) = 0 \text{ pour tout } \alpha \text{ dans } \theta_i.$$

Les sous-espaces $d_p(\theta_i) = \{X \in \mathfrak{g}_i, [H_i, X] = 2pX\}$, $p \in \mathbb{Z}$ définissent une \mathbb{Z} -gradation de \mathfrak{g}_i et on a:

$$d_0(\theta_i) = \mathfrak{h}_i \oplus \sum_{\alpha \in \langle \theta_i \rangle} \mathfrak{g}^\alpha \text{ et } d_1(\theta_i) = \sum_{\alpha = \gamma_i + \langle \theta_i \rangle} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Proposition 5.1.1. Soient $\overset{\circ}{\gamma}$ un élément de \mathcal{B} et $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ les racines de $\Psi \setminus \theta$ dont la restriction à $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ est $\overset{\circ}{\gamma}$.

La coracine de $\overset{\circ}{\gamma}$ dans $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ est $H_{\overset{\circ}{\gamma}} = H_1 + \dots + H_q$ où pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$, H_j est l'unique élément de \mathfrak{h}_j vérifiant $\gamma_j(H_j) = 2$ et $\alpha(H_j) = 0$ pour tout $\alpha \in \theta_j$.

Démonstration : Nous avons établi (lemme 3.2.3.) que le sous-espace de la Δ -graduation $V_{\overset{\circ}{\gamma}}$ est égal à $\bigoplus_{j=1}^q d_1(\theta_j)$. Nous savons également (lemme 4.3.) que si deux racines de \mathcal{R} sont θ -connectées dans Ψ (déf. 4.2.) alors leurs restrictions à $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ sont distinctes. Nous en déduisons que les racines $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ ne sont pas θ -connectées deux à deux, que les bases Ψ_1, \dots, Ψ_q des sous-algèbres $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_q$ sont disjointes et que la somme $\mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_q$ est directe.

Par définition de l'élément $H_{\overset{\circ}{\gamma}}$ on a

$$H_{\overset{\circ}{\gamma}} \in [\overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{-\overset{\circ}{\gamma}}, \overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{\overset{\circ}{\gamma}}] \subset [V_{-\overset{\circ}{\gamma}}, V_{\overset{\circ}{\gamma}}] \subset [\bigoplus_{j=1}^q d_{-1}(\theta_j), \bigoplus_{j=1}^q d_1(\theta_j)] \subset \sum_{j=1}^q d_0(\theta_j) \subset \bigoplus_{j=1}^q \mathfrak{g}_j.$$

Par conséquent, on peut écrire $H_{\overset{\circ}{\gamma}} = h_1 + \dots + h_q$ où $h_j \in \mathfrak{h}_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$.

Soit $k \in \{1, \dots, q\}$, $\gamma_k(H_{\overset{\circ}{\gamma}}) = \overset{\circ}{\gamma}(H_{\overset{\circ}{\gamma}}) = 2$ et $\gamma_k(H_{\overset{\circ}{\gamma}}) = \sum_{j=1}^q \gamma_k(h_j)$.

Pour tout j , l'élément h_j s'écrit $h_j = \sum_{\alpha \in \Psi_j} y_{\alpha} H_{\alpha}$, $y_{\alpha} \in \mathbb{C}$.

Si $k \neq j$ on a $(\gamma_k, \alpha) = 0$ ou encore $\gamma_k(H_{\alpha}) = 0$ pour tout $\alpha \in \Psi_j$ et $\gamma_k(h_j) = 0$.

On déduit des deux expressions de $\gamma_k(H_{\overset{\circ}{\gamma}})$ que $\gamma_k(h_k) = 2$.

De manière analogue on montre que si $\alpha \in \theta_k$, alors $\alpha(H_{\overset{\circ}{\gamma}}) = \alpha(h_k) = 0$ car $\overset{\circ}{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h}_{\theta}$.

Par conséquent, h_k est l'élément H_k précédemment défini.

□

Corollaire 5.1.2 *Si la partie θ est vide, c'est-à-dire si ρ est une surjection de \mathcal{R}^+ sur Δ^+ , alors*

$$H_{\overset{\circ}{\gamma}} = H_{\gamma_1} + \dots + H_{\gamma_q}$$

où H_{γ_j} est la coracine dans \mathfrak{h} de la racine simple γ_j .

La démonstration est immédiate puisque \mathfrak{h}_j se réduit à la droite vectorielle engendrée par H_{γ_j} et que $\gamma_j(H_{\gamma_j}) = 2$.

Proposition 5.1.3. *Les représentations $(d_0(\theta_i), d_1(\theta_i))$ pour $i \in \{1, \dots, q\}$ sont des espaces préhomogènes irréductibles réguliers commutatifs et on peut choisir les générateurs d'une algèbre C -admissible \mathfrak{g}_{θ} (associée à (Ψ, θ)) de sorte que $\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{\theta}$.*

Démonstration : Soit $\overset{\circ}{\gamma}$ un élément de \mathcal{B} .

- Si $\overset{\circ}{\gamma}$ est la restriction à $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ d'une unique racine γ_j de $\Psi \setminus \theta$ on a $H_{\overset{\circ}{\gamma}} = H_j$. Il existe un élément $X_{\overset{\circ}{\gamma}}$ dans $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ et un élément $X_{-\overset{\circ}{\gamma}}$ dans $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{-\overset{\circ}{\gamma}}$ tels que $(X_{-\overset{\circ}{\gamma}}, H_{\overset{\circ}{\gamma}}, X_{\overset{\circ}{\gamma}})$ est un sl_2 -triplet.

On a $H_{\overset{\circ}{\gamma}} = H_j \in d_0(\theta_j)$, $X_{\overset{\circ}{\gamma}} \in V_{\overset{\circ}{\gamma}} = d_1(\theta_j)$ et $X_{-\overset{\circ}{\gamma}} \in V_{-\overset{\circ}{\gamma}} = d_{-1}(\theta_j)$. On remarquera que $(d_0(\theta_j), d_1(\theta_j))$ est un espace préhomogène irréductible régulier (prop. 2.2.2.).

- Si $\overset{\circ}{\gamma}$ est la restriction à $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ des racines simples $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ de $\Psi \setminus \theta$ alors

$$H_{\overset{\circ}{\gamma}} = H_1 + \dots + H_q \text{ (prop.5.1.1.)}$$

Comme précédemment, $H_{\overset{\circ}{\gamma}}$ est l'élément semi-simple d'un sl_2 -triplet $(X_{-\overset{\circ}{\gamma}}, H_{\overset{\circ}{\gamma}}, X_{\overset{\circ}{\gamma}})$.

Puisque

$$X_{\overset{\circ}{\gamma}} \in V_{\overset{\circ}{\gamma}} = d_1(\theta_1) \oplus \dots \oplus d_1(\theta_q)$$

$$X_{-\overset{\circ}{\gamma}} \in V_{-\overset{\circ}{\gamma}} = d_{-1}(\theta_1) \oplus \dots \oplus d_{-1}(\theta_q)$$

on a

$$X_{\overset{\circ}{\gamma}} = X_1 + \dots + X_q, \quad X_{-\overset{\circ}{\gamma}} = Y_1 + \dots + Y_q$$

et

$$H_{\overset{\circ}{\gamma}} = [X_{\overset{\circ}{\gamma}}, X_{-\overset{\circ}{\gamma}}] = [X_1, Y_1] + \dots + [X_q, Y_q]$$

La somme $\mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_q$ étant directe, on en déduit que pour tout $j \in \{1, \dots, q\}$

$$H_j = [X_j, Y_j].$$

Par conséquent, (Y_j, H_j, X_j) est un sl_2 -triplet et l'espace $(d_0(\theta_j), d_1(\theta_j))$ est un espace préhomogène irréductible régulier.

Puisque l'application ρ est une surjection de $\Psi \setminus \theta$ sur \mathcal{B} , le couple (Ψ, θ) est admissible (déf. 2.3.3.).

Considérons la sous-algèbre simple \mathfrak{g}_θ de \mathfrak{g} engendrée par les sl_2 -triplets ainsi définis. C'est, par définition, la sous-algèbre admissible associée au couple (Ψ, θ) dont une sous-algèbre de Cartan est \mathfrak{h}_θ .

Par construction, pour tout $\overset{\circ}{\gamma} \in \mathcal{B}$, $X_{\overset{\circ}{\gamma}} \in \mathfrak{g}_\theta$, par conséquent $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{\overset{\circ}{\gamma}} \subset \mathfrak{g}_\theta$. De même, on montre que $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{-\overset{\circ}{\gamma}} \subset \mathfrak{g}_\theta$. Puisque tous les générateurs $(X_{-\overset{\circ}{\gamma}}, H_{-\overset{\circ}{\gamma}}, X_{-\overset{\circ}{\gamma}})$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ sont dans \mathfrak{g}_θ , on a $\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_\theta$.

Montrons que le couple (Ψ, θ) est C-admissible (déf. 2.3.3.).

Soit γ_j une racine simple de $\Psi \setminus \theta$. Supposons qu'il existe un entier $p \geq 2$ tel que l'espace $d_p(\theta_j) \neq \{0\}$. Il existe dans $\langle \Psi_j \rangle$, une racine α qui s'écrit $\alpha = p\gamma_j + \langle \theta_j \rangle$. Mais alors $\rho(\alpha) = p\rho(\gamma_j)$ et ceci contredit l'hypothèse que Δ est réduit. Par conséquent l'espace $(d_0(\theta_j), d_1(\theta_j))$ est commutatif pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$.

□

Proposition 5.1.4. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie. Soient Δ un système de racines fini, irréductible, réduit graduant \mathfrak{g} et $\mathring{\mathfrak{g}}$ la sous-algèbre simple déployée associée.*

Le système Δ gradue la sous-algèbre C -admissible \mathfrak{g}_θ contenant $\mathring{\mathfrak{g}}$ et définie par le procédé de la prop. 5.1.3.

Nous rappelons que $\overline{\mathcal{R}}$ le système de racines de $(\mathfrak{g}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$ est l'ensemble des restrictions non nulles à \mathfrak{h}_θ des racines de \mathcal{R} .

L'ensemble $\overline{\Psi}$ des restrictions non nulles des racines de Ψ est une base de $\overline{\mathcal{R}}$ induisant un ensemble de racines positives $\overline{\mathcal{R}}^+$ et les H_j , pour $j \in \{1, \dots, l\}$ forment une base de \mathfrak{h}_θ .

Nous noterons $\overline{\rho}$ l'application de \mathcal{R} dans \mathfrak{h}_θ^* qui associe à une racine α sa restriction à \mathfrak{h}_θ et ρ_θ l'application de $\overline{\mathcal{R}}$ dans $\mathring{\mathfrak{h}}^*$ qui associe à une racine $\overline{\alpha}$ de $(\mathfrak{g}_\theta, \mathfrak{h}_\theta)$ sa restriction à $\mathring{\mathfrak{h}}$.

L'application $\overline{\rho}$ est une bijection de $\Psi \setminus \theta$ sur $\overline{\Psi}$ et $\rho = \rho_\theta \circ \overline{\rho}$ est une application surjective de $\Psi \setminus \theta$ sur \mathcal{B} (prop. 3.2.9.).

Lemme 5.1.5. *Pour toute racine $\overline{\alpha}$ de $\overline{\mathcal{R}}^+$, $\rho_\theta(\overline{\alpha}) \neq 0$.*

Démonstration : Soit $\overline{\gamma} \in \overline{\Psi}$, il existe une racine γ unique dans $\Psi \setminus \theta$ telle que $\overline{\rho}(\gamma) = \overline{\gamma}$. On a $\rho_\theta(\overline{\gamma}) = (\rho_\theta \circ \overline{\rho})(\gamma) = \rho(\gamma) \in \mathcal{B}$.

Soit $\overline{\alpha} \in \overline{\mathcal{R}}^+$, on écrit $\overline{\alpha} = \sum_{i \in I_C\{1, \dots, l\}} n_i \overline{\gamma}_i$ où les n_i sont des entiers positifs non nuls et les $\overline{\gamma}_i$ des racines de $\overline{\Psi}$ vérifiant $\rho_\theta(\overline{\gamma}_i) \neq 0$, on a donc $\rho_\theta(\overline{\alpha}) = \sum_{i \in I_C\{1, \dots, l\}} n_i \rho_\theta(\overline{\gamma}_i) \neq 0$.

□

Lemme 5.1.6. *L'application ρ_θ est une surjection de $\overline{\mathcal{R}}^+$ sur Δ^+*

Démonstration : Soit $\overline{\alpha} \in \overline{\mathcal{R}}^+$, il existe une racine $\alpha \in \mathcal{R}$ telle que $\overline{\alpha} = \overline{\rho}(\alpha)$, par conséquent $\rho_\theta(\overline{\alpha}) = (\rho_\theta \circ \overline{\rho})(\alpha) = \rho(\alpha) \in \Delta^+$ (lemme 5.1.5).

Soit $\mathring{\alpha} \in \Delta^+$, il existe une racine $\alpha \in \mathcal{R}^+$ telle que $\rho(\alpha) = \mathring{\alpha}$ (prop. 3.2.8.).

Posons $\overline{\alpha} = \overline{\rho}(\alpha)$, $\overline{\alpha} \neq 0$ et on a $\rho_\theta(\overline{\alpha}) = \mathring{\alpha}$.

□

Démonstration de la proposition:

Soit $\overset{\circ}{\alpha} \in \overset{\circ}{Q}$ le réseau de racines de Δ .

Si $\overset{\circ}{\alpha} \in \Delta^+ \cup \{0\}$, nous poserons $V_{\overset{\circ}{\alpha}} = \bigoplus_{\rho_{\theta}(\bar{\alpha})=\overset{\circ}{\alpha}} \mathfrak{g}_{\theta}^{\bar{\alpha}}$ où $\mathfrak{g}_{\theta}^{\bar{\alpha}}$ désigne l'espace radiciel de dimension 1 dans \mathfrak{g}_{θ} associée à la racine $\bar{\alpha}$ et où $\mathfrak{g}_{\theta}^0 = \mathfrak{h}_{\theta}$. Sinon nous poserons $V_{\overset{\circ}{\alpha}} = \{0\}$.

Il est évident que $V_0 = \mathfrak{h}_{\theta}$ (lemme 5.1.6.).

- L'algèbre \mathfrak{g}_{θ} est $\overset{\circ}{Q}$ -graduée par construction des $V_{\overset{\circ}{\alpha}}$, $\overset{\circ}{\alpha} \in \overset{\circ}{Q}$.

- Si $h \in \mathfrak{h}$, $ad_{\mathfrak{g}_{\theta}} h$ agit scalairement sur $V_{\overset{\circ}{\alpha}}$ avec la valeur propre $\overset{\circ}{\alpha}(h)$ de manière triviale.

- Pour tout $\overset{\circ}{\alpha} \in \Delta$ l'espace $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{\overset{\circ}{\alpha}} \subset V_{\overset{\circ}{\alpha}}$. En effet, puisque $\overset{\circ}{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g}_{\theta}$ tout élément $X_{\overset{\circ}{\alpha}}$ de $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{\overset{\circ}{\alpha}}$ s'écrit $X_{\overset{\circ}{\alpha}} = H + \sum_{\bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{R}}} X_{\bar{\alpha}}$ avec $H \in \mathfrak{h}_{\theta}$, $X_{\bar{\alpha}} \in \mathfrak{g}_{\theta}^{\bar{\alpha}}$.

Pour tout $h \in \mathfrak{h}$, $[h, X_{\overset{\circ}{\alpha}}] = \sum_{\bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{R}}} \bar{\alpha}(h) X_{\bar{\alpha}} = \overset{\circ}{\alpha}(h) X_{\overset{\circ}{\alpha}}$. D'où, $H = 0$ et pour tout $h \in \mathfrak{h}$ $\bar{\alpha}(h) = \overset{\circ}{\alpha}(h)$ c'est-à-dire $\rho_{\theta}(\bar{\alpha}) = \overset{\circ}{\alpha}$.

- L'algèbre \mathfrak{g}_{θ} est engendrée par les $V_{\overset{\circ}{\alpha}}$, $\overset{\circ}{\alpha} \in \Delta$.

Il suffit de prouver que V_0 est engendré par les $V_{\overset{\circ}{\alpha}}$, $\overset{\circ}{\alpha} \in \Delta$. Ceci est trivialement vrai puisque $V_0 = \mathfrak{h}_{\theta}$ est engendré par les $\mathfrak{g}_{\theta}^{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha} \in \bar{\mathcal{R}}$ avec $\mathfrak{g}_{\theta}^{\bar{\alpha}} \subset V_{\rho_{\theta}(\bar{\alpha})}$ où $\rho_{\theta}(\bar{\alpha}) \in \Delta$ (lemme 5.1.5.).

Proposition 5.1.7. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie graduée par un système de racines Δ fini, irréductible et réduit.*

Soient $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ la sous-algèbre simple déployée dont Δ est un système de racines et \mathfrak{g}_{θ} la sous-algèbre C-admissible de \mathfrak{g} contenant $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$, construite par le procédé de la prop. 5.1.3. et elle-même graduée par Δ d'après la proposition 5.1.4.

La sous-algèbre C-admissible de l'algèbre \mathfrak{g}_{θ} contenant $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ et construite par le procédé de la prop. 5.1.3. est \mathfrak{g}_{θ} elle-même.

Puisque \mathfrak{g}_{θ} est Δ -graduée, il existe une base $\bar{\Psi}$ de $\bar{\mathcal{R}}$ et une partie Γ de $\bar{\Psi}$ telles que le couple $(\bar{\Psi}, \Gamma)$ est admissible et $\Gamma = \{\bar{\alpha} \in \bar{\Psi}, \rho_{\theta}(\bar{\alpha}) = 0\}$ (th. 3.2.16.).

Le lemme 5.1.5. prouve que Γ est vide, donc la sous-algèbre admissible de \mathfrak{g}_{θ} associée à Γ est \mathfrak{g}_{θ} elle-même. □

Définition 5.1.8. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie graduée par un système de racines Δ fini, irréductible et réduit. Nous dirons que Δ est maximal relativement à \mathfrak{g} si la sous-algèbre C-admissible construite par le procédé de la prop. 5.1.3. est \mathfrak{g} elle-même.*

Remarque 5.1.9. Cela signifie en d'autres termes que la partie θ des racines de la base Ψ dont la restriction à \mathfrak{h} est nulle est vide.

Proposition 5.1.10. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie. Soient Δ_1 un système de racines fini, irréductible et réduit graduant \mathfrak{g} et \mathfrak{g}_1 et la sous-algèbre déployée associée à Δ_1 .*

Soit Δ_2 un système de racines fini, irréductible et réduit graduant \mathfrak{g}_1 et maximal relativement à \mathfrak{g}_1 .

Le système de racines Δ_2 gradue \mathfrak{g} .

Démonstration : Nous noterons \mathfrak{g}_2 la sous-algèbre déployée de \mathfrak{g}_1 associée à Δ_2 et \mathfrak{h}_i une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre \mathfrak{g}_i pour $i = 1, 2$. On a $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$.

Nous noterons $\bar{\alpha}$ une racine de Δ_1 et $\mathring{\alpha}$ une racine de Δ_2 .

Il existe une base Ψ_1 de Δ_1 et une base Ψ de \mathcal{R} telles que les applications de \mathcal{R}^+ (resp. Δ_1^+) dans $\Delta_1^+ \cup \{0\}$ (resp. Δ_2^+) qui à α (resp. $\bar{\alpha}$) associe sa restriction à \mathfrak{h}_1 (resp. à \mathfrak{h}_2) sont surjectives (prop. 3.2.8. et lemme 5.1.5.).

Nous noterons $V_{\bar{\alpha}}$ ($\bar{\alpha} \in \overline{\mathcal{R}}$) et $V_{\mathring{\alpha}}$ les espaces de la Δ_1 -graduation de \mathfrak{g} .

Soit $\mathring{\alpha}$ un élément de \mathring{Q} le réseau de Δ_2 . Posons $V_{\mathring{\alpha}} = \bigoplus_{\bar{\alpha}|_{\mathfrak{h}_2} = \mathring{\alpha}} V_{\bar{\alpha}}$ si $\mathring{\alpha} \in \Delta_2 \cup \{0\}$ et $V_{\mathring{\alpha}} = \{0\}$ sinon.

On a $V_{\mathring{0}} = V_{\mathring{0}}$ car si $\bar{\alpha} \neq 0$ alors $\bar{\alpha}|_{\mathfrak{h}_2} \neq \mathring{0}$ (lemme 5.1.5.).

- Les sous-espaces $V_{\mathring{\alpha}}$ forment une \mathring{Q} -graduation de manière évidente.

- Pour tout $h \in \mathfrak{h}_2$, $ad_{\mathfrak{g}}h$ agit scalairement sur $V_{\mathring{\alpha}}$ avec la valeur propre $\mathring{\alpha}(h)$.

- L'espace $V_{\mathring{0}}$ est engendré par les $V_{\mathring{\alpha}}$, $\mathring{\alpha} \in \Delta_2$. En effet $V_{\mathring{0}} = V_{\mathring{0}}$ et l'espace $V_{\mathring{0}}$ est engendré par les $V_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha} \in \Delta_1$.

Puisque pour tout $\bar{\alpha} \in \Delta_1$, $V_{\bar{\alpha}} \subset V_{\bar{\alpha}|_{\mathfrak{h}_2}}$ avec $\bar{\alpha}|_{\mathfrak{h}_2} \in \Delta_2$, on a le résultat attendu.

□

Théorème 5.1.11. *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie. Soit Δ un système de racines fini, irréductible et réduit.*

Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) Δ gradue \mathfrak{g}

(ii) Il existe un couple (Ψ, θ) C -admissible dans le système de racines \mathcal{R} de \mathfrak{g} tel que Δ gradue la sous-algèbre C -admissible \mathfrak{g}_{θ} associée au couple (Ψ, θ) et Δ est maximal relativement à la sous-algèbre \mathfrak{g}_{θ} .

Démonstration : La première implication est une conséquence de la proposition 5.1.7.

Réciproquement, puisque le système de racines $\overline{\mathcal{R}}$ de \mathfrak{g}_θ gradue \mathfrak{g} , (prop. 3.1.1.), il suffit d'appliquer la proposition 5.1.10.

□

Remarque 5.1.12. D'après le théorème précédent et au vu des résultats obtenus dans le § 3, la classification des algèbres de Lie simples graduées par un système de racines fini irréductible et réduit est ramenée à la recherche des graduations maximales. La liste de ces graduations sera établie au paragraphe 5.3.

5.2. Etude des cas.

Dans cette partie nous donnerons la liste des systèmes de racines finis, irréductibles, réduits, maximaux graduant une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie donnée.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie et Δ un système de racines graduant \mathfrak{g} et maximal relativement à \mathfrak{g} .

Soit $\mathcal{B} = \{\overset{\circ}{\gamma}_1, \dots, \overset{\circ}{\gamma}_n\}$ une base de Δ .

Dans le système de racines \mathcal{R} de \mathfrak{g} , nous considérerons une base $\Psi = \{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$, construite par le procédé de la prop. 5.1.3.

Nous pourrions supposer que l'application de restriction ρ n'est pas une bijection de Ψ sur \mathcal{B} , c'est-à-dire que les représentations $(V_0, V_{\overset{\circ}{\gamma}_i})$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ ne sont pas irréductibles et que par conséquent la sous-algèbre $\overset{\circ}{\mathfrak{g}}$ est distincte de \mathfrak{g} . Nous dirons dans ce cas que la Δ -gradation est non triviale.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous noterons Ψ^i l'ensemble des racines simples de \mathcal{R} dont la restriction à $\overset{\circ}{\mathfrak{h}}$ est la racine simple $\overset{\circ}{\gamma}_i$. On obtient ainsi une partition de la base Ψ puisque par hypothèse la partie θ est vide et l'application ρ est une surjection de Ψ sur \mathcal{B} .

Si $\Psi^i = \{\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_q}\}$ on sait que les racines γ_{i_j} sont deux à deux orthogonales.

Si l'on note $(X_{-\gamma_{i_j}}, H_{\gamma_{i_j}}, X_{\gamma_{i_j}})$ un sl_2 -triplet associé à la racine γ_{i_j} , on a

$H_{\overset{\circ}{\gamma}_i} = H_{\gamma_{i_1}} + \dots + H_{\gamma_{i_q}}$ (cor. 5.1.2.) et l'élément $X_i = X_{\gamma_{i_1}} + \dots + X_{\gamma_{i_q}} \in V_{\overset{\circ}{\gamma}_i}$ puisque $V_{\overset{\circ}{\gamma}_i} = \bigoplus_{j \in \{1, \dots, q\}} \mathfrak{g}^{\gamma_{i_j}}$ la partie θ de Ψ étant vide.

On sait (prop. 5.1.3.) que l'on peut choisir les éléments $X_{\gamma_{i_j}}$ de sorte que $X_i \in \overset{\circ}{\mathfrak{g}}^{\overset{\circ}{\gamma}_i}$.

Pour tout $h \in \overset{\circ}{\mathfrak{h}}$, l'élément $ad_{\mathfrak{g}} h$ agit scalairement sur X_i avec la valeur propre $\overset{\circ}{\gamma}_i(h)$, d'où

$$\forall i, k \in \{1, \dots, n\}, [H_{\overset{\circ}{\gamma}_k}, X_i] = \overset{\circ}{\gamma}_i(H_{\overset{\circ}{\gamma}_k})X_i$$

Lemme 5.2.1. Soient α et β deux racines simples ayant la même restriction $\overset{\circ}{\gamma}_i$ dans \mathcal{B} alors

(i) $(\alpha, \beta) = 0$.

(ii) Si γ est une racine simple telle que $(\gamma, \alpha) \neq 0$ alors il existe une racine simple μ vérifiant $(\mu, \beta) \neq 0$ et $\rho(\gamma) = \rho(\mu)$. Si $(\gamma, \beta) = 0$ alors μ est distincte de γ .

(iii) Pour tout couple (i, k) d'entiers distincts de $\{1, \dots, n\}$ le nombre $\alpha(H_{\overset{\circ}{\gamma}_k})$ est indépendant du choix de α dans Ψ^i .

Démonstration : (i) Le système de racines Δ étant réduit la première assertion est immédiate.

(ii) Supposons que la racine γ a pour restriction la racine simple $\overset{\circ}{\gamma}_k$ (en d'autres termes $\gamma \in \Psi^k$); puisque $(\gamma, \alpha) \neq 0$ on a $k \neq i$.

On peut écrire compte tenu des remarques précédentes

$$H_{\overset{\circ}{\gamma}_i} = H_\alpha + H_\beta + \sum_{\lambda \in \Psi^i \setminus \{\alpha, \beta\}} H_\lambda$$

$$X_i = X_\alpha + X_\beta + \sum_{\lambda \in \Psi^i \setminus \{\alpha, \beta\}} X_\lambda$$

$$H_{\overset{\circ}{\gamma}_k} = H_\gamma + \sum_{\xi \in \Psi^k \setminus \{\gamma\}} H_\xi$$

$$[H_{\overset{\circ}{\gamma}_k}, X_i] = \overset{\circ}{\gamma}_i(H_{\overset{\circ}{\gamma}_k})X_i = [H_\gamma, X_i] + \sum_{\xi \in \Psi^k \setminus \{\gamma\}} [H_\xi, X_i] = \alpha(H_\gamma)X_\alpha + \beta(H_\gamma)X_\beta + \sum_{\lambda \in \Psi^i \setminus \{\alpha, \beta\}} \lambda(H_\gamma)X_\lambda +$$

$$\left(\sum_{\xi \in \Psi^k \setminus \{\gamma\}} \alpha(H_\xi) \right) X_\alpha + \left(\sum_{\xi \in \Psi^k \setminus \{\gamma\}} \beta(H_\xi) \right) X_\beta + \sum_{\lambda, \xi} \lambda(H_\xi) X_\lambda.$$

Si $\beta(H_\gamma) \neq 0$ on pourra poser $\mu = \gamma$

Si $\beta(H_\gamma) = (\gamma, \beta) = 0$ alors $\sum_{\xi \in \Psi^k \setminus \{\gamma\}} \beta(H_\xi) \neq 0$ et puisque pour tout $\xi \in \Psi^k \setminus \{\gamma\}$, $\beta(H_\xi) \leq 0$, il existe $\xi \in \Psi^k \setminus \{\gamma\}$ tel que $\beta(H_\xi) < 0$ c'est-à-dire tel que $(\xi, \beta) \neq 0$ et on posera $\mu = \xi$. Par construction $\mu \in \Psi^k$, c'est-à-dire que $\rho(\mu) = \rho(\gamma)$.

(iii) Par définition $X_i = \sum_{\alpha \in \Psi^i} X_\alpha$.

$$[H_{\overset{\circ}{\gamma}_k}, X_i] = \sum_{\alpha \in \Psi^i} \alpha(H_{\overset{\circ}{\gamma}_k})X_\alpha = \overset{\circ}{\gamma}_i(H_{\overset{\circ}{\gamma}_k})X_i.$$

Par conséquent pour tout $\alpha \in \Psi^i$, $\alpha(H_{\overset{\circ}{\gamma}_k}) = \overset{\circ}{\gamma}_i(H_{\overset{\circ}{\gamma}_k})$.

□

Dans un premier temps nous examinerons le cas des algèbres simples A_l, B_l, C_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$), F_4, G_2 .

Pour simplifier les notations, nous poserons $H^i = H_{\overset{\circ}{\gamma}_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Nous supposons que $\overset{\circ}{\gamma}_1$ est la restriction de la racine simple γ_1 (la numérotation des racines étant celle de Bourbaki (GAL chap. 4.5.6.)). Par conséquent on a $H^1 = \sum_{\alpha \in \Psi^1} H_\alpha$.

Puisque $(\gamma_1, \gamma_2) \neq 0$ les racines γ_1 et γ_2 ont des restrictions distinctes et nous noterons $\overset{\circ}{\gamma}_2$ la restriction de la racine γ_2 . On posera $H^2 = \sum_{\alpha \in \Psi^2} H_\alpha$.

Corollaire 5.2.2.

- (i) Les algèbres A_2, B_2, G_2, C_3 n'admettent aucune Δ -graduation maximale non triviale.
(ii) Si A_3 et B_3 admettent une Δ -graduation maximale non triviale alors on a $\Psi^1 = \{\gamma_1, \gamma_3\}$ et $\Psi^2 = \{\gamma_2\}$. Cette éventuelle graduation de A_3 (resp. B_3) ne peut être que de type B_2 (resp. G_2). Le cas A_3 correspond à l'unique automorphisme de diagramme non trivial de A_3 .

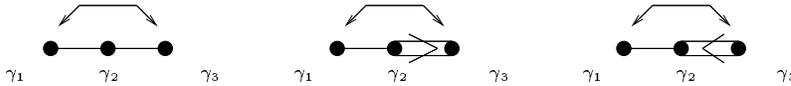
Nous verrons au paragraphe 5.3. que de telles graduations existent effectivement.

Démonstration : La première assertion, pour ce qui concerne A_2, B_2 et G_2 , est une conséquence immédiate du lemme 5.2.1.

Pour les algèbres A_3, B_3 et C_3 , on a nécessairement (lemme 5.2.1.) $\Psi^1 = \{\gamma_1, \gamma_3\}$ $\Psi^2 = \{\gamma_2\}$, $H^2 = H_{\gamma_2}$ et $\gamma_1(H^2) = \gamma_3(H^2)$.

Cette dernière condition est évidemment fausse dans le cas de C_3 .

Convention graphique: Nous relierons par une flèche sur le diagramme de Dynkin deux racines de Ψ ayant la même restriction. On obtient alors les diagrammes suivants :



Dans les cas de A_3 et B_3 , si une telle graduation existe, la matrice de Cartan du système de racines graduant l'algèbre est donnée par les $\overset{\circ}{\gamma}_k(H^i)$ $i, j \in \{1, 2\}$. On obtient pour A_3 la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et pour B_3 la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ qui sont les matrices de Cartan respectives de B_2 et G_2 .

□

Nous supposons désormais que $l \geq 4$. Les notations adoptées précédemment justifient alors la remarque suivante.

Remarque 5.2.3. Pour tout $\alpha \in \Psi^1$, $\alpha(H^2) = -1$.

Lemme 5.2.4.

(i) Dans les cas où \mathfrak{g} est de type A_l, B_l, C_l, F_4 si $\Psi^1 = \{\gamma_1\}$ alors pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_j)\}) \cap \Psi = \{\gamma_j\}$ et la Δ -graduation est triviale.

(ii) Dans le cas où \mathfrak{g} est de type D_l , si $\Psi^1 = \{\gamma_1\}$ alors

- soit l'éventuelle graduation est triviale

- soit pour tout $j \in \{1, \dots, l-2\}$ $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_j)\}) \cap \Psi = \{\gamma_j\}$ et $\rho(\gamma_{l-1}) = \rho(\gamma_l)$.

On verra au paragraphe 5.3. que ce dernier cas correspond effectivement à une graduation.

Démonstration :

(i) Notons j_0 le plus petit indice tel que $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_{j_0})\}) \cap \Psi$ contient plus de deux racines. Cela signifie qu'il existe un entier $k \geq j_0 + 2$ tel que $\rho(\gamma_k) = \rho(\gamma_{j_0})$.

On a évidemment $2 \leq j_0 \leq l-2$ et l'application du lemme 5.2.1. nous donne

$\rho(\gamma_{j_0-1}) = \rho(\gamma_{k+1})$ ou $\rho(\gamma_{j_0-1}) = \rho(\gamma_{k-1})$. La partie $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_{j_0-1})\}) \cap \Psi$ contiendrait alors plus de deux racines, ce qui est contradictoire avec le choix de j_0 .

(ii) Dans le cas de D_l , le même raisonnement reste valable pour $j \in \{1, \dots, l-2\}$ et cela réserve la possibilité d'avoir $\rho(\gamma_{l-1}) = \rho(\gamma_l)$. On obtient alors le diagramme suivant :



□

Lemme 5.2.5. Dans les cas où l'algèbre \mathfrak{g} est de type A_l, B_l, C_l ($l \geq 4$) ou F_4 et si on suppose que la Δ -graduation est maximale non triviale, on a nécessairement $\Psi^1 = \{\gamma_1, \gamma_l\}$.

Démonstration : Supposons qu'il existe $j \in \{3, \dots, l-1\}$ tel que $\gamma_j \in \Psi^1$ on a alors $\{\gamma_{j-1}, \gamma_{j+1}\} \subset \Psi^2$ et $\gamma_j(H^2) \leq -2$. Ceci est impossible (rem. 5.2.3.).

□

On en déduit la

Remarque 5.2.6. Dans les cas de A_l, B_l, C_l ($l \geq 4$) on a $\gamma_2(H^1) = -1$.

Lemme 5.2.7. Les algèbres B_l, C_l ($l \geq 4$) et F_4 n'admettent pas de Δ -graduation maximale non triviale.

Démonstration : Dans tous les cas, on a nécessairement $\gamma_{l-1} \in \Psi^2$.

Pour B_l on a $\gamma_{l-1}(H^1) \leq -2$ et $\gamma_2(H^1) = -1$.

Pour C_l on a $\gamma_l(H^2) \leq -2$ et $\gamma_1(H^2) = -1$. Ceci est en contradiction avec le lemme 5.2.1. (iii).

Pour F_4 , $\rho(\gamma_1) = \rho(\gamma_4)$ implique $\rho(\gamma_2) = \rho(\gamma_3)$ et ceci est impossible (lemme 5.2.1. (i)).

□

Proposition 5.2.8.

- L'algèbre A_{2p} n'admet pas de Δ -graduation maximale non triviale.
- Si l'algèbre A_{2p+1} admet une Δ -graduation maximale non triviale, celle-ci est de type C_{p+1} et ce cas correspond à l'unique automorphisme de diagramme non trivial de A_{2p+1} .

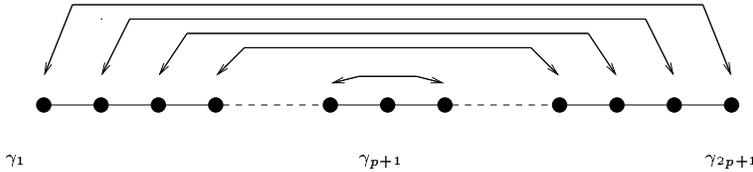
Nous démontrerons au préalable que si on désigne par $[\frac{l+1}{2}]$ la partie entière de $\frac{l+1}{2}$ où $l \geq 4$ alors dans A_l on a $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_j)\}) \cap \Psi = \{\gamma_j, \gamma_{l-j+1}\}$ pour tout $j \in \{1, \dots, [\frac{l+1}{2}]\}$.

La démonstration se fait par récurrence sur j .

L'assertion est vérifiée pour $j = 1$ (lemme 5.2.5.). Soit un entier $j \in \{1, \dots, [\frac{l+1}{2}] - 1\}$, supposons que pour tout entier $k \leq j$ on a $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_k)\}) \cap \Psi = \{\gamma_k, \gamma_{l-k+1}\}$; par conséquent $\rho(\gamma_{j+1}) = \rho(\gamma_{l-j})$ ou $\rho(\gamma_{j+1}) = \rho(\gamma_{l-j+2})$ (lemme 5.2.1. (ii)). Cette dernière égalité est exclue par l'hypothèse de récurrence.

Si $l = 2p$ la récurrence conduit à $\rho(\gamma_p) = \rho(\gamma_{p+1})$ et ceci est impossible puisque $(\gamma_p, \gamma_{p+1}) \neq 0$ (lemme 5.2.1. (i)).

Si $l = 2p+1$ alors, on obtient $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_j)\}) \cap \Psi = \{\gamma_j, \gamma_{l-j+1}\}$ pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$ et $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_{p+1})\}) \cap \Psi = \{\gamma_{p+1}\}$ et le diagramme associé est le suivant :



Si une telle graduation existe alors les coefficients de la matrice de Cartan du système graduant sont donnés par les $\gamma_j(H^i)$ pour $i, j \in \{1, \dots, p\}$, et on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice de Cartan obtenue est de type C_{p+1} et le diagramme de Dynkin du système correspondant est :



□

Proposition 5.2.9.

(i) Si D_l ($l \geq 5$) admet une Δ -graduation maximale non triviale, alors nécessairement pour tout $j \in \{1, \dots, l-2\}$, $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_j)\}) \cap \Psi = \{\gamma_j\}$, $\rho(\gamma_l) = \rho(\gamma_{l-1})$, et la graduation éventuelle est de type B_{l-1} . Ce cas correspond à l'unique automorphisme de diagramme non trivial de D_l ($l \geq 5$).

(ii) Si D_4 admet une Δ -graduation maximale non triviale, alors celle-ci est de type B_3 ou G_2 et les diagrammes correspondants sont ceux des seuls automorphismes de diagramme non triviaux de D_4 .

Démonstration : Comme dans le cas A_l , on montre que si $\Psi^1 \neq \{\gamma_1\}$ alors $\rho(\gamma_1) = \rho(\gamma_{l-1})$ ou $\rho(\gamma_1) = \rho(\gamma_l)$. Le "ou" n'étant pas exclusif.

Si $l \geq 5$ alors $\rho(\gamma_1) \neq \rho(\gamma_3)$ et donc $\gamma_2(H^1) = -1$. On note $\Psi^3 = \rho^{-1}(\{\rho(\gamma_3)\}) \cap \Psi$.

Supposons que $\rho(\gamma_1) = \rho(\gamma_{l-1})$ alors $\rho(\gamma_2) = \rho(\gamma_{l-2})$ (lemme 5.2.1. (i)) et $\rho(\gamma_l) = \rho(\gamma_1)$ ou $\rho(\gamma_l) = \rho(\gamma_3)$. Le "ou" est ici exclusif puisque Ψ^1 ne contient pas γ_3 .

- Si l'on a $\rho(\gamma_1) = \rho(\gamma_l) \neq \rho(\gamma_3)$ alors $\gamma_2(H^1) = -1$ et $\gamma_{l-2}(H^1) = -2$. Ceci est impossible (lemme 5.2.1.(iii)).

- Si l'on a $\rho(\gamma_l) = \rho(\gamma_3) \neq \rho(\gamma_1)$ alors $\rho(\gamma_{l-3}) = \rho(\gamma_3)$ puisque γ_{l-3} n'est pas dans Ψ^1 . Mais alors $\gamma_2(H^3) = -1$ $\gamma_{l-2}(H^3) = -2$. Ceci est en contradiction avec le lemme 5.2.1.(iii).

On traiterait de manière analogue le cas $\rho(\gamma_1) = \rho(\gamma_l)$.

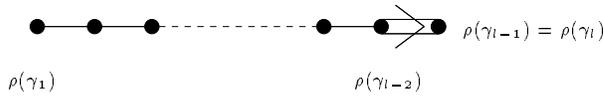
En conclusion, si $l \geq 5$ pour tout $j \in \{1, \dots, l-2\}$, $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_j)\}) \cap \Psi = \{\gamma_j\}$, $\rho(\gamma_l) = \rho(\gamma_{l-1})$ et le diagramme correspondant est le suivant :



Les coefficients de la matrice de Cartan du système graduant sont donnés par les $\gamma_k(H^i)$, $i, k \in \{1, \dots, n\}$ et on obtient :

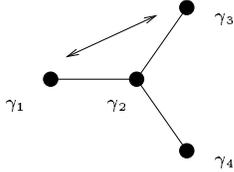
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Le système Δ est de type B_{l-1} et le diagramme de Dynkin correspondant est le suivant:



(ii) Le cas de D_4 :

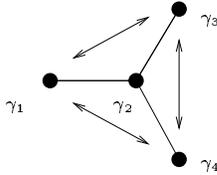
- Si $\Psi^1 = \{\gamma_1, \gamma_3\}$, $\Psi^2 = \{\gamma_2\}$, $\Psi^3 = \{\gamma_4\}$ le diagramme correspondant est le suivant:



La matrice de Cartan donné par les $\gamma_k(H^i)$ caractérise un système de type B_3 .

Les autres cas tels que deux racines seulement ont même restriction donnent lieu au même résultat.

- Si $\Psi^1 = \{\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4\}$, $\Psi^2 = \{\gamma_2\}$; le diagramme correspondant est le suivant:



La matrice de Cartan associée au système de relations donné par les $\gamma_k(H^i)$ est la matrice de Cartan de G_2 $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Etude des algèbres de type E

Proposition 5.2.10.

(i) Les algèbres E_7 et E_8 n'admettent aucune Δ -gradation maximale non triviale.
(ii) Si E_6 admet une Δ -gradation maximale non triviale, alors nécessairement $\Psi^1 = \{\gamma_1, \gamma_6\}$, $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_3)\}) \cap \Psi = \{\gamma_3, \gamma_5\}$, $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_2)\}) \cap \Psi = \{\gamma_2\}$ et $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_4)\}) \cap \Psi = \{\gamma_4\}$. (La numérotation adoptée est celle de Bourbaki). Ceci correspond à l'unique automorphisme de diagramme non trivial de E_6 .

Démonstration :

- Si $\Psi^1 = \{\gamma_1\}$ alors pour tout $j \in \{3, \dots, l\}$, $l = 6, 7, 8$ on a $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_j)\}) \cap (\Psi \setminus \{\gamma_2\}) = \{\gamma_j\}$. La démonstration est analogue à celle donnée pour le cas A_l (lemme 5.2.4. (i)).

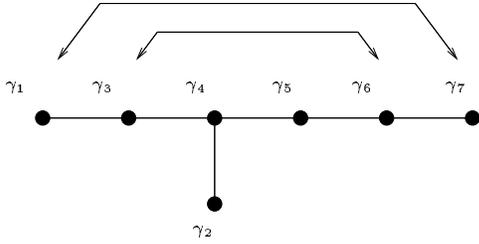
Montrons qu'alors $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_2)\}) \cap \Psi = \{\gamma_2\}$. Supposons qu'il existe $j \in \{3, 5, \dots, l\}$, $l = 6, 7, 8$ tel que $\rho(\gamma_j) = \rho(\gamma_2)$ (1). Si $j \neq 3$ (1) implique $\rho(\gamma_{j-1}) = \rho(\gamma_4)$ ou $\rho(\gamma_{j+1}) = \rho(\gamma_4)$ Ceci est en contradiction avec le résultat précédent. Si $\rho(\gamma_3) = \rho(\gamma_2)$ alors $\rho(\gamma_1) = \rho(\gamma_4)$ (lemme 5.2.1. (i)). Ceci contre-dit l'hypothèse $\Psi^1 = \{\gamma_1\}$.

- Les racines γ_1 et γ_2 ont des restrictions distinctes, on aurait sinon $\rho(\gamma_3) = \rho(\gamma_4)$.

- Si Ψ^1 contient plus de deux racines alors $\Psi^1 = \{\gamma_1, \gamma_l\}$. La démonstration est analogue à celle donnée pour le cas A_l (lemme 5.2.5.).

Examinons désormais cas par cas.

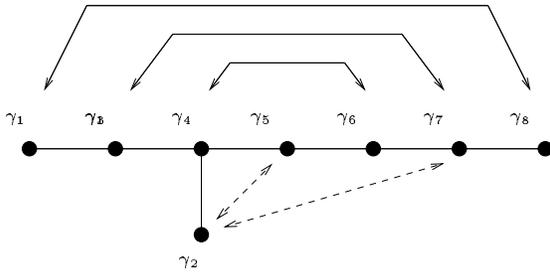
- **Pour E_7** : $\rho(\gamma_1) = \rho(\gamma_7)$ implique $\rho(\gamma_3) = \rho(\gamma_6)$ (lemme 5.2.1. (i)) implique $\rho(\gamma_4) = \rho(\gamma_5)$ (on applique lemme 5.2.1. (i) et le fait que $\Psi^1 = \{\gamma_1, \gamma_7\}$). Ceci est impossible.



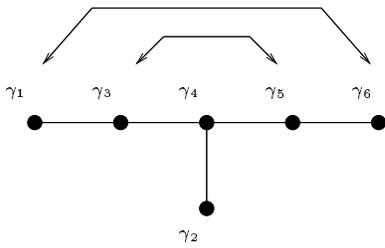
- **Pour E_8** : $\rho(\gamma_1) = \rho(\gamma_8)$ implique $\rho(\gamma_3) = \rho(\gamma_7)$ implique $\rho(\gamma_4) = \rho(\gamma_6)$ implique $\rho(\gamma_2) = \rho(\gamma_5)$ (1)
ou
 $\rho(\gamma_2) = \rho(\gamma_7)$ (2)

(1) donne $\gamma_4(H^2) = -2$ car $\rho(\gamma_5 \neq \rho(\gamma_7))$ et $\gamma_6(H^2) = -1$. Ceci est impossible (lemme 5.2.1. (iii)).

(2) implique $\rho(\gamma_8) = \rho(\gamma_4) = \rho(\gamma_1)$. Ceci est impossible puisque $\Psi^1 = \{\gamma_1, \gamma_8\}$.



- **Pour E_6** : On a nécessairement $\rho(\gamma_3) = \rho(\gamma_5)$ $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_4)\}) \cap \Psi = \{\gamma_4\}$ puisque $\Psi^1 = \{\gamma_1, \gamma_6\}$. et $\rho^{-1}(\{\rho(\gamma_2)\}) \cap \Psi = \{\gamma_2\}$.



5.3. Partie réciproque.

Proposition 5.3.1. Soit \mathfrak{g}° la sous-algèbre simple de l'algèbre \mathfrak{g} engendrée par les sl_2 -triplets (Y_i, H^i, X_i) pour $i \in \{1, \dots, n\}$ précédemment définis et \mathfrak{h}° la sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}° engendrée par les H_i .

Nous noterons Δ le système de racines de $(\mathfrak{g}^\circ, \mathfrak{h}^\circ)$ et \mathcal{R} le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

L'application ρ associée à toute racine de \mathcal{R} sa restriction à \mathfrak{h}° .

Si $\rho(\mathcal{R}) \subset \Delta$ alors Δ gradue l'algèbre \mathfrak{g} .

Démonstration :

Nous savons que $\rho(\Psi) = \{\gamma_1^\circ, \dots, \gamma_n^\circ\}$ est une base de Δ et que la matrice de Cartan de Δ est donnée par les relations $\gamma_k^\circ(H^i) = 1 \leq k, i \leq n$.

Par construction $\Delta \subset \rho(\mathcal{R})$, par conséquent, l'hypothèse implique qu'aucune racine de \mathcal{R} ne se restreint à 0 dans \mathfrak{h}° .

Soit \mathring{Q} le réseau de racines de Δ . Soit $\mathring{\alpha} \in \mathring{Q}$; nous poserons :

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathfrak{h} \\ V_{\mathring{\alpha}} &= \bigoplus_{\rho(\gamma)=\mathring{\alpha}} \mathfrak{g}^\gamma \quad \text{si } \mathring{\alpha} \in \Delta \\ V_{\mathring{\alpha}} &= \{0\} \quad \text{sinon} \end{aligned}$$

- Les espaces $V_{\mathring{\alpha}}$ forment une \mathring{Q} -gradation de \mathfrak{g} . On a notamment $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\mathring{\alpha} \in \Delta \cup \{0\}} V_{\mathring{\alpha}}$ puisque pour tout $\gamma \in \mathcal{R}$, $\rho(\gamma) \in \Delta$ et $\mathfrak{g}^\gamma \in V_{\rho(\gamma)}$.

- La sous-algèbre \mathfrak{h}° est incluse dans $V_0 = \mathfrak{h}$.

- Soit $\mathring{\gamma}_i \in \mathcal{B}$, par construction $\mathfrak{g}^{\mathring{\gamma}_i}$ est le sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par $X_i = \sum_{\alpha \in \Psi, \rho(\alpha)=\mathring{\gamma}_i} X_\alpha$, on a donc $\mathfrak{g}^{\mathring{\gamma}_i} \subset V_{\mathring{\gamma}_i}$.

Soit $\mathring{\alpha} \in \Delta$, $\mathring{\alpha}$ peut s'écrire sous forme d'une somme de racines simples $\mathring{\alpha} = \mathring{\gamma}_{i_1} + \dots + \mathring{\gamma}_{i_p}$ de sorte que toutes les sommes partielles sont des racines de Δ .

On a donc $\mathfrak{g}^{\circ\alpha} = [\mathfrak{g}^{\circ\gamma_{i_p}} \dots [\mathfrak{g}^{\circ\gamma_{i_2}}, \mathfrak{g}^{\circ\gamma_{i_1}}] \dots] \subset V_{\gamma_{i_p} + \dots + \gamma_{i_1}}^{\circ}$.

- Pour tout $h \in \mathfrak{h}$ $ad_{\mathfrak{g}}(h)$ agit scalairement sur V_{α}° avec la valeur propre $\alpha(h)$ par construction de V_{α}° .

- L'algèbre \mathfrak{g} est engendrée par les espaces V_{α}° pour $\alpha \in \Delta$.

En effet, pour tout $\gamma \in \Psi$ on a $H_{\gamma} \in [\mathfrak{g}^{-\gamma}, \mathfrak{g}^{\gamma}] \subset [V_{-\rho(\gamma)}, V_{\rho(\gamma)}]$ par construction et $\rho(\gamma) \neq 0$ d'où la conclusion.

□

Proposition 5.3.2. *Tous les cas mis en évidence précédemment (propositions 5.2.8, 5.2.9, et 5.2.10.) correspondent effectivement à des Δ -graduations. Plus précisément A_{2p+1} est gradué par C_{p+1} , D_l ($l \geq 4$) est gradué par B_{l-1} , B_3 et D_4 sont gradués par G_2 et E_6 est gradué par F_4 .*

Ce sont les seules graduations d'algèbres de Lie simples qui sont maximales non triviales.

Pour l'étude des différents cas, on consultera la liste des racines positives des systèmes de racines irréductibles et réduits. [Bou6 planches annexes].

- A_{2p+1} est graduée par C_{p+1} .

$$\Psi = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{2p+1}\} \quad \mathcal{B} = \{\overset{\circ}{\gamma}_1, \dots, \overset{\circ}{\gamma}_{p+1}\}.$$

$$\text{On rappelle que } \begin{cases} H^i &= H_{\gamma_i} + H_{\gamma_{2p+2-i}} & 1 \leq i \leq p \\ X_i &= X_{\gamma_i} + X_{\gamma_{2p+2-i}} \\ \overset{\circ}{\gamma}_i &= \rho(\gamma_i) & = \rho(\gamma_{2p+2-i}) \end{cases}$$

$$H^{p+1} = H_{\gamma_{p+1}} X_{p+1} = X_{\gamma_{p+1}} \overset{\circ}{\gamma}_{p+1} = \rho(\gamma_{p+1})$$

Montrons que $\rho(\mathcal{R}_+) \subset \Delta_+$.

Soit $\alpha \in \mathcal{R}_+$.

- Si $\alpha = \sum_{i \leq k \leq j} \gamma_k$ $1 \leq i < j \leq p+1$ alors $\rho(\alpha) = \sum_{i \leq k \leq j} \overset{\circ}{\gamma}_k \in \Delta_+$.

- Si $\alpha = \sum_{i \leq k \leq j} \gamma_k$ $p+1 \leq i < j \leq 2p+1$ alors $\rho(\alpha) = \sum_{2p+2-j \leq k \leq 2p+2-j} \overset{\circ}{\gamma}_k \in \Delta_+$.

- Si $\alpha = \sum_{i \leq k \leq j} \gamma_k$ $1 \leq i < p+1 < j \leq 2p+1$. Nous noterons $M = \max(i, 2p+2-j)$
 $m = \min(i, 2p+2-j)$

On a alors $\rho(\alpha) = \sum_{m \leq k < M} \overset{\circ}{\gamma}_k + 2 \sum_{M \leq k \leq p} \overset{\circ}{\gamma}_k + \overset{\circ}{\gamma}_{p+1} \in \Delta_+$.

La proposition précédente nous donne le résultat.

- D_l ($l \leq 4$) est gradué par B_{l-1} .

$$\Psi = \{\gamma_1, \dots, \gamma_l\} \quad \mathcal{B} = \{\overset{\circ}{\gamma}_1, \dots, \overset{\circ}{\gamma}_{l-1}\}.$$

$$\text{On rappelle que } \begin{cases} H^i & = & H_{\gamma_i} & & 1 \leq i \leq l-2 \\ H^{l-1} & = & H_{\gamma_{l-1}} + H_{\gamma_l} & & \\ \overset{\circ}{\gamma}_i & = & \rho(\gamma_i) & & 1 \leq i \leq l-2 \\ \overset{\circ}{\gamma}_{l-1} & = & \rho(\gamma_{l-1}) & = & \rho(\gamma_l) \end{cases}$$

Soit $\alpha \in \mathcal{R}_+$

$$\text{- si } \alpha = \sum_{i \leq k \leq j} \gamma_k \quad 1 \leq i < j \leq l-1 \quad \text{alors } \rho(\alpha) = \sum_{i \leq k \leq j} \overset{\circ}{\gamma}_k \in \Delta_+.$$

$$\text{- si } \alpha = \sum_{i \leq k \leq j} \gamma_k + \gamma_l \quad 1 \leq i < j \leq l-2 \quad \text{alors } \rho(\alpha) = \sum_{i \leq k \leq j} \overset{\circ}{\gamma}_k + \overset{\circ}{\gamma}_{l-1} \in \Delta_+.$$

$$\text{- si } \alpha = \sum_{i \leq k < j} \gamma_k + 2 \sum_{j \leq k \leq l-2} \gamma_k + \gamma_{l-1} + \gamma_l \quad 1 \leq i < j \leq l-1 \quad \text{alors } \rho(\alpha) = \sum_{i \leq k < j} \overset{\circ}{\gamma}_k + 2 \sum_{j \leq k \leq l-2} \overset{\circ}{\gamma}_k + 2\overset{\circ}{\gamma}_{l-1} \in \Delta_+.$$

- B_3 (et par conséquent D_4) est gradué par G_2 .

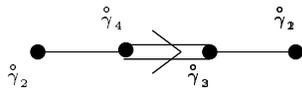
$$\text{Nous poserons } \begin{cases} H^1 & = & H_{\gamma_1} + H_{\gamma_3} \\ H^2 & = & H_{\gamma_2} \\ \overset{\circ}{\gamma}_1 & = & \rho(\gamma_1) & = & \rho(\gamma_3) \\ \overset{\circ}{\gamma}_2 & = & \rho(\gamma_2) \end{cases}$$

$$\text{On obtient } \rho(\mathcal{R}_+) = \{\overset{\circ}{\gamma}_1, \overset{\circ}{\gamma}_2, \overset{\circ}{\gamma}_1 + \overset{\circ}{\gamma}_2, 2\overset{\circ}{\gamma}_1 + \overset{\circ}{\gamma}_2, 3\overset{\circ}{\gamma}_1 + \overset{\circ}{\gamma}_2, 3\overset{\circ}{\gamma}_1 + \overset{\circ}{\gamma}_2\} = \Delta_+.$$

- E_6 est gradué par F_4 .

$$\text{Nous poserons } \begin{cases} H^1 & = & H_{\gamma_1} + H_{\gamma_6} \\ H^2 & = & H_{\gamma_2} \\ H^3 & = & H_{\gamma_3} + H_{\gamma_5} \\ H^4 & = & H_{\gamma_4} \\ \overset{\circ}{\gamma}_1 & = & \rho(\gamma_1) & = & \rho(\gamma_6) \\ \overset{\circ}{\gamma}_2 & = & \rho(\gamma_2) \\ \overset{\circ}{\gamma}_3 & = & \rho(\gamma_3) & = & \rho(\gamma_5) \\ \overset{\circ}{\gamma}_4 & = & \rho(\gamma_4) \end{cases}$$

Le système de racines Δ ainsi obtenu est de type F_4 associé au diagramme de Dynkin suivant:



Nous nous conformerons à la convention d'écriture de [Bou6]. La racine de E_6 qui s'écrit

$$\alpha = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3 + d\gamma_4 + e\gamma_5 + f\gamma_6 \quad \text{sera notée} \quad \begin{matrix} a & c & d & e & f \\ & & b & & \end{matrix}$$

La racine de F_4 qui s'écrit $\overset{\circ}{\alpha} = m\overset{\circ}{\gamma}_2 + n\overset{\circ}{\gamma}_4 + p\overset{\circ}{\gamma}_3 + q\overset{\circ}{\gamma}_1$ sera notée $m \quad n \quad p \quad q$.

$$\text{Si } \alpha = \begin{matrix} a & c & d & e & f \\ & & b & & \end{matrix} \text{ alors } \rho(\alpha) = \begin{matrix} b & d & c+e & a+f \\ & & b & \end{matrix}$$

Il suffit alors de vérifier que $\rho(\mathcal{R}_+) \subset \Delta_+$ en consultant les listes respectives des racines positives de E_6 et F_4 .

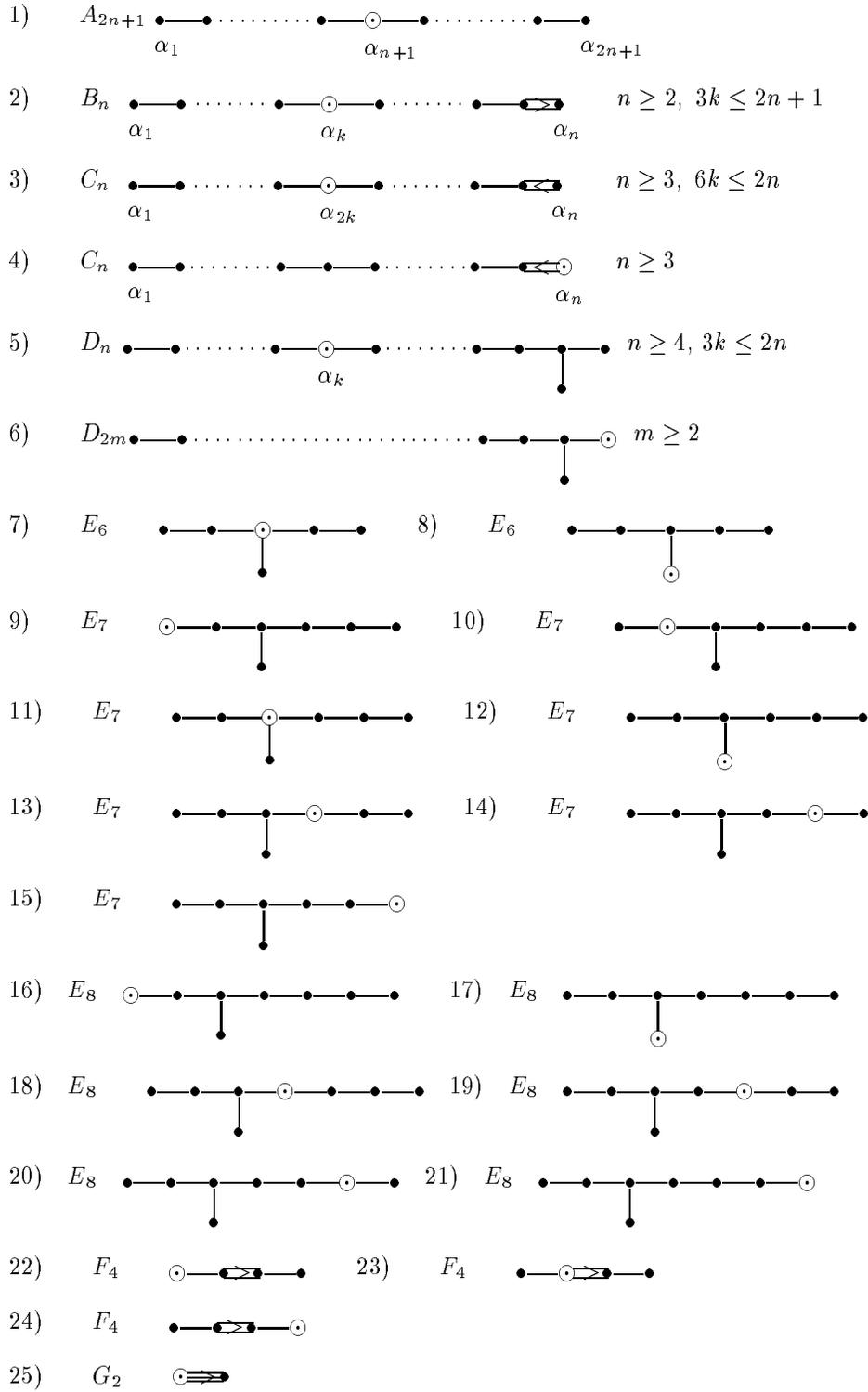
TABLE 1: Espaces préhomogènes irréductibles réguliers de type parabolique


Table 2: Espaces préhomogènes commutatifs

	\mathfrak{g}	$\ell'_\theta = [\ell_\theta, \ell_\theta]$	régularité
A_n		$A_{p-1} \times A_{n-p}$	régulier si $n=2p-1$
B_n		B_{n-1}	régulier
C_n		A_{n-1}	régulier
$D_{n,1}$		D_{n-1}	régulier
$D_{n,2}$		A_{n-1}	rég. si n pair
E_6		D_5	non régulier
E_7		E_6	régulier

Table 3: Sous-algèbres C-admissibles.

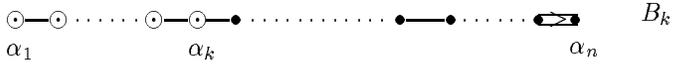
Le type de la sous-algèbre C-admissible qui figure accolé à chacun des diagrammes de cette table est aussi le type du système de racines Δ graduant l'algèbre.

Type A_n : $n = (k + 1)p - 1, k \geq 1, n \geq 1, p \geq 1$.



Type B_n :

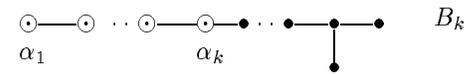
$n \geq k.$

Type C_n :

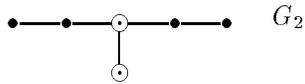
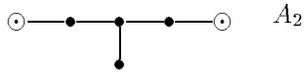
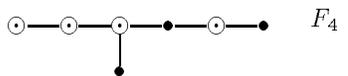
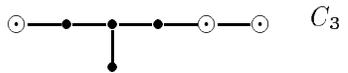
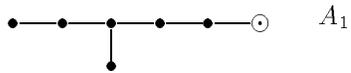
$n = (k+1)p, k \geq 0, p \geq 1.$

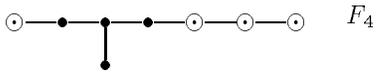
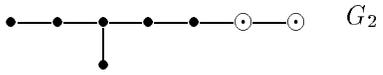
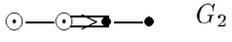
Type D_n :

$n \geq k+2.$



$n = (k+1)p, p \text{ pair}, p \geq 1.$

Type E_6 :Type E_7 :

Type E_8 :Type F_4 :

Bibliographie

- [BM] S. BERMAN - R. MOODY. *Lie algebras graded by finite root systems*, Inv. Math. 108, p. 323-347, 1992.
- [BZ] G. BENKART - E. ZELMANOV. *Lie algebras graded by finite root systems and intersection matrix algebras*, Invent. Math. 126, p. 1-45, 1996.
- [Bou6] N. BOURBAKI. *Groupes et algèbres de Lie*, ch 4, 5, 6 Masson Paris 1981.
- [Bou8] N. BOURBAKI. *Groupes et algèbres de Lie*, ch 7, 8 Hermann Paris 1975.
- [Ko] B. KOSTANT. *The principal three dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex Lie group*, Amer. J. Math., vol. 81, 1959, p. 973-1032.
- [Ne] E. NEHER. *Lie algebras graded by J-graded root systems and Jordan pairs covered by grids*, Amer. J. Math., Volume 118, Number 2, April 1996 p.439. The Johns Hopkins Univ. Press.
- [Ru1] H. RUBENTHALER. *Espaces préhomogènes de type paraboliques*, Thèse, Université de Strasbourg 1982.
- [Ru2] H. RUBENTHALER. *Construction de certaines sous-algèbres remarquables dans les algèbres de Lie semi-simples*, J. Alg., 81, 1983, p. 268-278.
- [Ru3] H. RUBENTHALER. *Les paires duales dans les algèbres de Lie réductives*, Astérisque n° 219, 1994.
- [SK] M. SATO - T. KIMURA. *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants*, Nagoya Math. J., 65, 1977, p. 1-155.
- [Vi] E.B. VINBERG. *On the classification of the nilpotent elements of graded Lie algebras*, Soviet Math. Dokl. 16, 1975, p. 1517-1520.

JOSIANE NERVI
 Institut de Recherche Mathématique Avancée
 Université Louis Pasteur
 7, rue René Descartes
 F-67084 Strasbourg cédex
 e-mail: nervi@math.u-strasbg.fr