



**HAL**  
open science

## Opérations d'Adams en $K$ -théorie algébrique.

Florence Lecomte

► **To cite this version:**

| Florence Lecomte. Opérations d'Adams en  $K$ -théorie algébrique.. 1996. hal-00129543

**HAL Id: hal-00129543**

**<https://hal.science/hal-00129543>**

Preprint submitted on 8 Feb 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Opérations d'Adams en $K$ -théorie algébrique

Florence LECOMTE

## INTRODUCTION

Les opérations d'Adams, initialement introduites en topologie, jouent un rôle important en  $K$ -théorie algébrique. Sur l'anneau de Grothendieck  $K_0(X)$  d'une variété algébrique lisse, ces opérations permettent de retrouver rationnellement les anneaux de Chow [SGA6]. En  $K$ -théorie supérieure elles fournissent la cohomologie motivique rationnelle.

Dans cet article, nous montrons que pour un schéma  $X$  muni d'une famille ample de faisceaux inversibles, les opérations introduites par Schechtman en  $K$ -théorie de Quillen,  $\Psi_k : K_i(X) \otimes \mathbf{Q} \rightarrow K_i(X) \otimes \mathbf{Q}$ ,  $i \geq 0$ , munissent l'anneau gradué  $\bigoplus_{i \geq 0} K_i(X) \otimes \mathbf{Q}$  d'une structure de  $\lambda$ -anneau spécial. La méthode a des réminiscences topologiques. Nous utilisons les schémas bisimpliciaux  $\mathbf{B}^m P$  de Schechtman qui jouent en  $K$ -théorie de Quillen le rôle de l'espace classifiant  $BU$  en  $K$ -théorie topologique. Nous obtenons les opérations à partir d'éléments de  $K_{-1}(\mathbf{B}P)$ , et leurs délaçages dans  $K_{-m}(\mathbf{B}^m P)$ , qui jouent le rôle des classes d'homotopie  $[BU, BU]$ . L'hypothèse,  $X$  muni d'une famille ample de faisceaux inversibles, permet d'appliquer le théorème de Mayer-Vietoris de Thomason et Trobaugh [T-T] à la  $K$ -théorie de Quillen. Elle est vérifiée pour tout schéma quasi-projectif sur une base affine régulière, par exemple les schémas définis sur  $\mathbf{Z}$ , ou sur un anneau de corps de nombres intervenant en arithmétique. Il est apparemment nécessaire de tensoriser par  $\mathbf{Q}$  pour délaçer les opérations d'Adams et utiliser les résultats de Thomason et Trobaugh. La  $\lambda$ -structure de la  $K$ -théorie (sans tensoriser par  $\mathbf{Q}$ ) est connue dans le cas affine [K] et le cas régulier [So] et [G-S]. Par ailleurs Grayson [Gr] a construit des opérations d'Adams pour des schémas généraux, sans démontrer les propriétés spéciales.

Notre exposé s'articule comme suit. Nous rappelons dans une première partie la construction des schémas bisimpliciaux  $\mathbf{B}^m P$  à partir des schémas simpliciaux  $BGL(n)$

$$\mathbf{B}P_{\cdot 1} = \coprod_{n \in \mathbf{N}} BGL(n)$$

et le théorème de représentabilité de Schechtman

$$\mathbf{K}(X) \simeq \underset{\mathcal{U}}{\text{holim}} \underline{\text{Hom}}(N\mathcal{U}, \mathbf{B}P)$$

où  $\mathbf{K}(X)$  désigne l'espace définissant la  $K$ -théorie de Quillen,  $\mathcal{U}$  parcourt la famille des recouvrements ouverts de  $X$ ,  $N\mathcal{U}$  est le nerf de Čech de  $\mathcal{U}$ .

En deuxième partie, nous définissons les groupes de  $K$ -théorie des schémas multi-simpliciaux  $X$ . Dans la troisième partie, nous commençons en (3.1) par construire, pour

tout groupe algébrique  $G$ , un morphisme  $R_{\mathbf{Z}}(G) \rightarrow K_0(BG)$  où  $R_{\mathbf{Z}}(G)$  désigne l'anneau de Grothendieck des représentations algébriques de  $G$ , puis nous démontrons qu'il existe un morphisme surjectif de  $K_{-1}(\mathbf{B}P)$  vers la partie primitive de l'algèbre de Hopf  $C = \prod_{n \in \mathbf{N}} K_0(BGL(n))$ , où le coproduit sur  $C$  est induit par la somme de Whitney des matrices. Les images par les opérations d'Adams dans  $R_{\mathbf{Z}}(GL(n))$  de la représentation identique de  $GL(n)$  fournissent alors, via le morphisme de (3.1), des éléments  $\beta_k^{(1)}$  de  $K_{-1}(\mathbf{B}P) \otimes \mathbf{Q}$  puis  $\beta_k^{(m)}$  de  $K_{-m}(\mathbf{B}^m P) \otimes \mathbf{Q}$ .

Nous montrons dans la quatrième partie que les morphismes d'adjonction

$$NU \otimes \mathbf{B}P(NU) \rightarrow \mathbf{B}P$$

où  $\mathbf{B}P(NU)$  désigne  $\underline{\text{Hom}}(NU, \mathbf{B}P)$ , induisent des morphismes

$$K_{-1}(\mathbf{B}P) \rightarrow K_{-1}(NU \otimes \mathbf{B}P(NU)).$$

Or le théorème des coefficients universels et le théorème de Carlsson [C] impliquent que le groupe  $K_{-1}(NU \otimes \mathbf{B}P(NU))$  est isomorphe au groupe des classes d'homotopie de la réalisation géométrique  $|\mathbf{B}P(NU)|$  dans  $\mathbf{K}(NU)$ . En appliquant le théorème de Mayer-Vietoris  $\mathbf{K}(X) \simeq \mathbf{K}(NU)$ , et en passant à la limite sur les recouvrements  $\mathcal{U}$ , on montre que tout élément de  $K_{-1}(\mathbf{B}P)$  produit une classe d'homotopie de  $[\mathbf{K}(X), \mathbf{K}(X)]$ . Les éléments de  $\beta_k^{(m)}$  de  $K_{-m}(\mathbf{B}^m P) \otimes \mathbf{Q}$  en fournissent des délaçages, et la suite d'éléments  $\beta_k^{(m)}$  induit des opérations  $\Psi_k$  sur les groupes de  $K$ -théorie de Quillen. Finalement on vérifie que les identités de  $\lambda$ -anneau spécial se transportent des  $R_{\mathbf{Z}}(GL(n))$  aux  $K_i(X) \otimes \mathbf{Q}$ .

Ce travail, qui reprend une partie de ma thèse, repose sur l'article [Sch]. Je remercie vivement Schechtman pour les fructueuses discussions que nous avons eues et en profite pour remercier également le département de mathématiques de Stony Brook qui m'a si chaleureusement accueillie au printemps 1994.

Il m'est pénible de ne pouvoir remercier personnellement Robert Thomason qui fut si généreux pour ses idées, conseils et encouragements. Des conversations avec Henri Gillet, Rick Jardine et Marc Levine m'ont été très utiles. Je suis reconnaissante à toutes les personnes qui m'ont soutenues pendant ce travail, en particulier Matthias Flach, Annette Huber et Christophe Soulé qui m'a soumis le problème et m'a constamment encouragée.

## Notations et Conventions

**0.1.** Nous supposons fixé un schéma de base  $S$ , séparé et localement noethérien, et travaillons dans la catégorie  $Sch_S$  des schémas séparés sur  $S$ . Dans les parties 3 et 4 nous supposerons  $S$  affine et régulier.

Pour chaque schéma de base  $S$ , on fixe un univers. C'est la donnée, pour chaque caractéristique  $p$  intervenant dans  $S$  d'un corps algébriquement clos  $\Omega_p$ . Chaque corps considéré est inclus dans un  $\Omega_p$ .

**0.2.** Nous appelons espace un espace topologique ayant le type d'homotopie d'un  $CW$ -complexe. Pour les notions simpliciales, nous renvoyons au livre de Bousfield et Kan [B-K]. Suivant leur terminologie nous confondons ensemble simplicial et espace, via la réalisation géométrique noté  $|-|$ . Nous réservons le terme d'application aux applications continues.

On note  $Ens$  la catégorie des ensembles. Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie, on note  $\Delta^\circ\mathcal{C}$  (resp.  $(\Delta^\circ)^n\mathcal{C}$ ) la catégorie des objets simpliciaux (resp.  $n$ -simpliciaux) sur  $\mathcal{C}$ .

Si  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, on désigne par  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(C, D)$  l'ensemble des morphismes entre les objets  $C$  et  $D$  de  $\mathcal{C}$ , et par  $N\mathcal{C}$  le nerf de  $\mathcal{C}$ ; ses  $n$ -simplexes sont les chaînes  $C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_n$  de morphismes composables de  $\mathcal{C}$  [B-K](XI 2.1).

En particulier, si  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  est un recouvrement d'un schéma  $X$ ,  $N\mathcal{U}$  est le nerf de Čech de ce recouvrement défini par

$$(N\mathcal{U})_n = \coprod_{(i_0, \dots, i_n) \in I^{n+1}} U_{i_0} \times_X \dots \times_X U_{i_n}$$

les faces étant induites par les projections et les dégénérescences  $d_k$  par les identifications

$$U_{i_0} \times_X \dots \times_X U_{i_k} \times_X \dots \times_X U_{i_n} \simeq U_{i_0} \times_X \dots \times_X U_{i_k} \times_X U_{i_k} \times_X \dots \times_X U_{i_n}$$

**0.3.** Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie munie de coproduits. Si  $C$  est un objet de  $\mathcal{C}$  et  $E$  un ensemble simplicial, on note  $C \otimes E$  l'objet simplicial sur  $\mathcal{C}$  défini par

$$(C \otimes E)_n = \coprod_{E_n} C$$

avec les faces et dégénérescences déduites de celles de  $E$ .

C'est l'objet qui représente le foncteur

$$\begin{aligned} \Delta^\circ\mathcal{C} &\rightarrow Ens \\ X &\mapsto \text{Mor}_{\Delta^\circ Ens}(E, \text{Hom}(C, X)) \end{aligned}$$

où  $\text{Hom}(C, X)$  est l'ensemble simplicial  $[n] \mapsto \text{Mor}(C, X_n)$ .

Ainsi définit-on des foncteurs

$$\otimes : (\Delta^\circ)^n\mathcal{C} \times \Delta^\circ Ens \rightarrow (\Delta^\circ)^{n+1}\mathcal{C}.$$

Si  $X$  et  $Y$  sont des objets simpliciaux sur  $\mathcal{C}$ , l'espace des fonctions  $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$  est l'ensemble simplicial  $n \mapsto \text{Mor}_{\Delta^\circ\mathcal{C}}(X \otimes \Delta[n], Y)$ , où  $\Delta[n]$  est le  $n$ -simplexe standard, les faces et dégénérescences sont induites respectivement par les cofaces et codégénérescences de l'espace cosimplicial  $n \mapsto \Delta[n]$ .

En particulier, si  $X$  est un objet simplicial constant,

$$\underline{\text{Hom}}_n(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y_n)$$

et si  $X$  est un objet simplicial et  $Y$  un objet  $n$ -simplicial,  $\underline{\text{Hom}}(X, Y)$  est l'ensemble  $n$ -simplicial

$$(p, q_1, \dots, q_{n-1}) \mapsto \text{Mor}_{\Delta^o}(X \otimes \Delta[p], Y_{q_1, \dots, q_{n-1}}).$$

**0.4.** Si de plus  $\mathcal{C}$  est munie d'un objet final  $*$ , on appelle objet pointé de  $\mathcal{C}$  un objet  $C$  muni d'un morphisme  $* \rightarrow C$  et morphisme pointé d'objets pointés un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & * & \\ \swarrow & \longrightarrow & \searrow \\ C & & D \end{array}$$

**0.5.** Dans les catégories  $Sch_S$  et  $(\Delta^o)^n Sch_S$ , le schéma de base  $S$  joue le rôle de point base. Les schémas  $BGL(n)$ ,  $\mathbf{B}^m P$  et  $\mathbf{B}^m L$  que nous construirons à partir de groupes algébriques seront pointés, via le morphisme correspondant à l'élément neutre du groupe.

Si  $E$  est un ensemble simplicial pointé et  $X$  un schéma on note  $X \wedge E$  le schéma bisimplicial pointé

$$(X \wedge E)_n \simeq S \coprod_{E_n \setminus \{*\}} \left( \coprod_{E_n \setminus \{*\}} X \right)$$

muni des faces et dégénérescences déduites de celles de  $E$ . On définit de la même manière un schéma  $n+1$ -simplicial  $X \wedge E$  à partir d'un schéma  $n$ -simplicial  $X$ . En particulier, on a une suspension simpliciale

$$\Sigma X = X \wedge S^1.$$

Si  $Y$  est un schéma simplicial pointé, l'espace des fonctions pointées  $\underline{\text{Hom}}_*(X, Y)$  d'un schéma  $X$  dans  $Y$  est l'ensemble simplicial

$$\underline{\text{Hom}}_{*n}(X, Y) = \{\text{morphisms pointés } X \wedge \Delta[n] \rightarrow Y\}.$$

Cette définition se généralise au cas où  $X$  et  $Y$  sont des schémas multisimpliciaux.

**0.6.** Pour les définitions relatives aux schémas simpliciaux nous renvoyons à [D]. En particulier, nous appelons régulier (resp. affine) un schéma simplicial  $X$  dont toutes les composantes  $X_n$  sont régulières (resp. affines).

**0.7.** Si  $A$  est un groupe abélien,  $A_{\mathbf{Q}}$  désigne le groupe sans torsion  $A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ .

# 1. CONSTRUCTIONS DE SCHECHTMAN

## 1.1. Rappels de $K$ -théorie

Nous utilisons la construction  $S$  de Waldhausen [W 2] pour définir la  $K$ -théorie des schémas. A une petite catégorie  $\mathcal{E}$  exacte au sens de Quillen [Q2], on associe la suite de catégories  $\underline{\mathbb{S}}_n(\mathcal{E})$ . Les objets de  $\underline{\mathbb{S}}_n(\mathcal{E})$  sont les chaînes de monomorphismes admissibles de  $\mathcal{E}$

$$0 = E_{00} \rightarrow E_{01} \rightarrow \dots \rightarrow E_{0n}$$

munies de choix de quotients

$$E_{0j}/E_{0i} \simeq E_{ij} \quad i \leq j$$

les morphismes étant les diagrammes de morphismes de  $\mathcal{E}$ , compatibles aux choix. Pour faire des  $\underline{\mathbb{S}}_n(\mathcal{E})$  une catégorie simpliciale on définit des foncteurs faces

$$d_i : \underline{\mathbb{S}}_n(\mathcal{E}) \rightarrow \underline{\mathbb{S}}_{n-1}(\mathcal{E})$$

qui consistent

- pour  $i = 0$ , à quotienter par le terme  $E_{01}$  et choisir les quotients

$$(E_{0j}/E_{01})/(E_{0i}/E_{01}) \simeq E_{ij}$$

- pour  $i > 0$ , à oublier le terme  $E_{0i}$ , composer les morphismes  $E_{0i-1} \rightarrow E_{0i} \rightarrow E_{0i+1}$  et garder les mêmes choix de quotients.

Les dégénérescences  $s_i : \underline{\mathbb{S}}_n(\mathcal{E}) \rightarrow \underline{\mathbb{S}}_{n+1}(\mathcal{E})$  consistent à répéter le terme  $E_{0i}$  à la  $(i+1)$ -ème place, ajouter le morphisme identité et garder les mêmes choix de quotients.

La catégorie simpliciale  $\underline{\mathbb{S}}(\mathcal{E})$  est exacte. On peut itérer la construction  $\underline{\mathbb{S}}$  et définir par récurrence

$$\underline{\mathbb{S}}^{m+1}(\mathcal{E}) = \underline{\mathbb{S}}\underline{\mathbb{S}}^m(\mathcal{E}).$$

On considère aussi la catégorie simpliciale  $\underline{\mathbb{S}}^{Is}(\mathcal{E})$  (et les catégories simpliciales  $\underline{\mathbb{S}}^{m,Is}(\mathcal{E})$ ) où  $\underline{\mathbb{S}}_n^{Is}(\mathcal{E})$  est la sous-catégorie de  $\underline{\mathbb{S}}_n(\mathcal{E})$  ayant les mêmes objets mais dans laquelle les morphismes sont les seuls isomorphismes.

La suite des ensembles simpliciaux  $m \mapsto \mathbf{S}^m(\mathcal{E}) = N\underline{\mathbb{S}}^{m,Is}(\mathcal{E})$  forme un  $\Omega$ -spectre au sens de [T] qu'on notera  $\mathbf{S}(\mathcal{E})$ . Pour définir la  $K$ -théorie d'un schéma  $X$ , on considère la catégorie exacte  $\mathcal{P}(X)$  des classes d'isomorphismes des faisceaux de  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de type fini.

**1.1.1. Définition.** Soit  $X$  un schéma. On pose

$$K_i(X) = \pi_{i+1}(\mathbf{S}(\mathcal{P}(X)))$$

où les groupes d'homotopie en question sont les groupes d'homotopie stable.

## 1.2. Construction de $\mathbf{BP}$

Nous renvoyons à [Sch] pour la construction à partir de groupes algébriques des objets  $\mathbf{BP}$ ,  $\mathbf{B}^m P$ ,  $\mathbf{BL}$ ,  $\mathbf{B}^m L$  et n'en donnons qu'une description. Tous les groupes algébriques considérés sont définis sur  $\text{Spec } \mathbf{Z}$ , et par extension sur tout schéma  $S$ . Nous omettons de signaler le schéma de base dans les notations.

A un schéma en groupes  $G$  sur  $S$ , on associe le schéma simplicial classifiant  $BG$ ,

$$BG_k = G^k$$

produit fibré sur  $S$  de  $k$  copies de  $G$ . Ses faces  $\delta_i : G^k \rightarrow G^{k-1}$  sont

- si  $i = 0$  (resp.  $i = k$ ) la projection sur les  $(k - 1)$  derniers (resp. premiers) facteurs
- si  $0 < i < k$ ,  $\delta_i = id_G \times \dots \times \mu \times \dots \times id_G$  avec  $\mu : G \times G \rightarrow G$  loi du groupe située sur les  $i$  et  $(i + 1)$ -èmes facteurs.

Les dégénérescences  $\sigma_i : G^k \rightarrow G^{k+1}$ ,  $0 \leq i \leq k$ , sont  $id_G \times id_G \times \dots \times e \times \dots id_G$ , où le morphisme élément neutre  $e : S \rightarrow G$  est placé sur le  $(i + 1)$ -ème facteur.

Si  $A$  est un anneau commutatif unitaire, on note  $GL(n, A)$  le groupe des matrices  $n \times n$  inversibles à coefficients dans  $A$  et  $GL(n)$  le groupe algébrique associé.

Pour un  $l$ -uplet  $\underline{n} = (n_1, \dots, n_l)$ , on note  $A^{\underline{n}}$  le module libre  $A^{n_1} \oplus \dots \oplus A^{n_l}$  filtré par

$$F_p A^{\underline{n}} = \bigoplus_{i=1}^p A^{n_i}.$$

Le groupe  $P(\underline{n}, A)$  des automorphismes de  $A^{\underline{n}}$  préservant la filtration  $F_p$  s'identifie au sous-groupe parabolique de  $GL(n_1 + \dots + n_l, A)$  constitué des matrices

$$GL(n_1, \dots, n_l; A) = \left\{ \begin{pmatrix} [n_1] & & & \\ & [n_2] & & * \\ & & \ddots & \\ & & & [n_k] \\ & 0 & & & [n_k] \end{pmatrix}, [n_k] \in GL(n_i, A) \right\}$$

$[n_i]$  représentant un élément de  $GL(n_i, A)$ .

On note  $P(\underline{n})$  ou  $GL(n_1, \dots, n_l)$  le groupe algébrique associé et on définit le schéma bisimplicial  $\mathbf{BP}$  par

$$\mathbf{BP}_l = \coprod_{\underline{n} \in \mathbf{N}^l} BP(\underline{n}) = \coprod_{(n_1, \dots, n_l) \in \mathbf{N}^l} BGL(n_1, \dots, n_l).$$

$$\mathbf{BP}_0 = BGL(0) = S.$$

Ses faces  $d_i : \mathbf{BP}_l \rightarrow \mathbf{BP}_{l-1}$  sont induites par les applications suivantes :

- si  $i = 0$  la projection  $GL(n_1, \dots, n_l) \rightarrow GL(n_2, \dots, n_l)$
- si  $0 < i < l$  les inclusions  $GL(n_1, \dots, n_l) \rightarrow GL(n_1, \dots, n_i + n_{i+1}, \dots, n_l)$
- si  $i = l$  la projection  $GL(n_1, \dots, n_l) \rightarrow GL(n_1, \dots, n_{l-1})$ .

Ses dégénérescences  $\mathbf{BP}_l \rightarrow \mathbf{BP}_{\ell+1}$  sont induites par les isomorphismes

$$GL(n_1, \dots, n_l) \simeq GL(n_1, \dots, n_i, 0, n_{i+1}, \dots, n_l) \quad 0 \leq i \leq l.$$

Schechtman définit également un schéma bisimplicial  $\mathbf{B}L$  à partir des sous-groupes de Levi des groupes  $GL(n)$ :

$$\mathbf{B}L_l = \coprod_{(n_1, \dots, n_l) \in \mathbf{N}^l} BGL(n_1) \times_S \dots \times_S BGL(n_l).$$

Le schéma bisimplicial  $\mathbf{B}L$  est le classifiant du monoïde  $\mathbf{M} = \coprod_{n \geq 0} BGL(n)$  pour la loi induite par la somme de Whitney  $GL(n) \times GL(m) \rightarrow GL(n+m)$ .

L'espace  $\mathbf{B}P(\mathbf{C}) = \underline{\mathbf{H}\mathbf{om}}(\mathit{Spec} \mathbf{C}, \mathbf{B}P)$  est le premier d'un spectre  $\mathbf{B}^m X$  associé au  $\Gamma$ -espace  $X$ ,  $X(l) = \coprod_{(n_1, \dots, n_l)} GL(n_1, \dots, n_l, \mathbf{C})$ ,  $\Gamma$ -espace au sens de Segal [Seg]. Ainsi  $\mathbf{B}P(\mathbf{C})$  est le délaçage de  $\mathbf{Z} \times BGL^+(\mathbf{C})$  et on a  $\pi_{i+1}(\mathbf{B}P(\mathbf{C})) = K_i(\mathbf{C})$ .

Poursuivant l'analogie avec les constructions topologiques, Schechtman construit des schémas  $(m+1)$ -simpliciaux (en réalité des schémas pseudo- $(m+1)$ -simpliciaux), pour plus de détails voir [Sch] Appendix A&B)  $\mathbf{B}^m P$  munis de morphismes naturels

$$\Sigma \mathbf{B}^m P \rightarrow \mathbf{B}^{m+1} P$$

$$\Sigma \mathbf{B}^m L \rightarrow \mathbf{B}^{m+1} L.$$

Afin de donner une idée de la construction des  $\mathbf{B}^m P$ , nous décrivons  $\mathbf{B}^2 P$ . A l'instar de  $\mathbf{B}P$ , construit à partir d'automorphismes préservant une filtration,  $\mathbf{B}^2 P$  se construit à partir d'automorphismes préservant une double filtration.

Soit  $\underline{n} = (n_{ij})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l}$ ,  $n_{ij} \in \mathbf{N}$ . Pour tout anneau  $A$ , on note  $A^{\underline{n}}$  le module libre  $A^{\underline{n}} = \bigoplus_{i,j} A^{n_{i,j}}$ , naturellement équipé de deux filtrations croissantes  $F_1$  et  $F_2$  définies par

$$F_1^p A^{\underline{n}} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^l A^{n_{i,j}} \quad 1 \leq p \leq k$$

$$F_2^q A^{\underline{n}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^q A^{n_{i,j}} \quad 1 \leq q \leq l.$$

On note  $P(\underline{n}, A)$  le groupe des automorphismes de  $A^{\underline{n}}$  respectant ces deux filtrations et  $P(\underline{n})$  le groupe algébrique associé, et on pose

$$\mathbf{B}^2 P_{k,l} = \coprod_{\underline{n}} \mathbf{B}P(\underline{n})$$

$$\mathbf{B}^2 P_{0,0} = \mathbf{B}^2 P_{k,0} = \mathbf{B}^2 P_{0,l} = S.$$

Schechtman montre qu'on peut munir  $\mathbf{B}^2 P$  d'opérateurs faces et dégénérescences qui en font un schéma pseudo-3-simplicial. Le terme pseudo signifie que les faces et dégénérescences ne vérifient les identités simpliciales qu'à isomorphisme près. Heureusement ces isomorphismes, provenant de changements de bases suivant que l'on considère l'une ou l'autre des filtrations, sont induits par des automorphismes intérieurs de  $GL(n)$  et sont homotopes à l'identité sur les  $BGL(n)$  (cf 3.1.3). Ils n'interviennent pas en  $K$ -théorie et dorénavant nous considérerons que  $\mathbf{B}^2 P$ ,  $\mathbf{B}^m P$  et  $\mathbf{B}^m L$  sont des schémas multisimpliciaux.



### 1.3. Théorème de représentabilité.

Soit  $X$  un schéma localement noethérien. On note  $\bar{X}$  l'ensemble des points géométriques de  $X$ , c'est à dire l'ensemble des morphismes  $x : \text{Spec } k_x \rightarrow X$  où  $k_x$  est un corps algébriquement clos (on rappelle qu'on s'est fixé un univers).

**1.3.1. Définition** ([F] Definition 4.2). *Un recouvrement rigide de  $X$  est un recouvrement  $\mathcal{U} = (U_x)_{x \in \bar{X}}$  de  $X$  indexé par les points géométriques de  $X$ . Chaque  $U_x$  est un ouvert de Zariski de  $X$  contenant  $x$ .*

On peut rigidifier (mais pas de façon unique) un recouvrement  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$  en choisissant pour chaque point  $x$  de  $\bar{X}$  un ouvert  $U_i$  contenant  $x$ . L'avantage de travailler avec des recouvrements rigides est qu'ils forment un système projectif filtrant.

**1.3.2. Théorème de représentabilité** (Schechtman). *Soit  $X$  un schéma noethérien. On a*

$$K_i(X) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \pi_{i+1}(\underline{\text{Hom}}(N\mathcal{U}, \mathbf{BP})) \quad \forall i \geq 0, \quad m \geq 1$$

où  $\mathcal{U}$  parcourt l'ensemble des recouvrements ouverts rigides de  $X$ .

Nous sortons momentanément de la catégorie des spectres pour travailler avec des espaces et démontrons le théorème 1.3.2 en suivant une méthode suggérée par Illusie.

Pour tout recouvrement d'ouverts  $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ , considérons la catégorie  $\mathcal{P}(X, \mathcal{U})$  (resp.  $\mathcal{P}_n(X, \mathcal{U})$ ) des  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de type fini (resp. de rang  $n$ ) de  $X$  trivialisés sur  $\mathcal{U}$ .

**1.3.3. Lemme.** *Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des petites catégories. L'ensemble simplicial  $\underline{\text{Hom}}(N\mathcal{C}, N\mathcal{D})$  est le nerf de la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}$ .*

*Démonstration:* Les éléments de  $\underline{\text{Hom}}_0(N\mathcal{C}, N\mathcal{D})$  c'est à dire les morphismes de  $N\mathcal{C}$  dans  $N\mathcal{D}$  sont les foncteurs  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ . En constatant l'identité  $\Delta[n] = N \langle 0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n \rangle$ , où  $\langle 0 \rightarrow \dots \rightarrow n \rangle$  est la catégorie associée à l'ensemble ordonné  $\{0 \leq 1 \leq \dots \leq n\}$ , on identifie  $\underline{\text{Hom}}_n(N\mathcal{C}, N\mathcal{D})$  à  $\text{Hom}(\mathcal{C} \times \langle 0 \rightarrow \dots \rightarrow n \rangle, \mathcal{D})$ , c'est à dire l'ensemble des chaînes de transformations naturelles  $F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow \dots \rightarrow F_n$  de foncteurs  $F_i$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}$ . Cette identification est compatible aux faces et dégénérescences  $\square$ .

Le schéma simplicial  $N\mathcal{U}$  s'identifie au nerf de la catégorie schéma  $\langle \mathcal{U} \rangle$ , dont les objets sont les ouverts  $U_i$  et les morphismes forment le schéma  $\text{Mor}(U_i, U_j) = U_i \times_X U_j$ . Le schéma simplicial  $BGL(n)$  est le nerf de la catégorie schéma  $\langle *, GL(n) \rangle$  qui a un seul objet et dont les morphismes forment le schéma  $GL(n)$ . Le lemme 1.3.3 permet d'identifier

$$\underline{\text{Hom}}(N\mathcal{U}, BGL(n)) = N(\text{Foncteurs} : \langle \mathcal{U} \rangle \rightarrow \langle *, GL(n) \rangle).$$

Or un foncteur de  $\langle \mathcal{U} \rangle$  dans  $\langle *, GL(n) \rangle$  est caractérisé par la donnée de flèches

$$g_{ij} : U_i \times_X U_j \rightarrow GL(n)$$

vérifiant  $g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}$ , c'est à dire la donnée d'un fibré vectoriel sur  $X$ , trivialisé sur  $\mathcal{U}$ . Par ailleurs un morphisme de foncteurs  $(g_{ij}) \rightarrow (h_{ij})$  est la donnée d'éléments  $a_k$  de

$\Gamma(U_k, GL(n))$  tels que  $g_{ij} \cdot a_j = a_i \cdot h_{ij}$ , c'est à dire un isomorphisme de fibrés vectoriels, montrant ainsi

$$\underline{\mathbf{Hom}}(NU, BGL(n)) = N\mathcal{P}_n^{Is}(X, \mathcal{U})$$

$$\underline{\mathbf{Hom}}(NU, \coprod_{n \geq 0} BGL(n)) = N\mathcal{P}^{Is}(X, \mathcal{U}).$$

On démontre de la même façon que l'ensemble simplicial  $\underline{\mathbf{Hom}}(NU, BGL(n_1, \dots, n_l))$  s'identifie au nerf de la catégorie des fibrés vectoriels  $E$  sur  $X$  munis d'une filtration avec  $l$  quotients  $E_i/E_{i-1}$  de rang  $n_i$  et trivialisés sur  $\mathcal{U}$ , en d'autres termes

$$\underline{\mathbf{Hom}}(NU, \coprod_{(n_1, \dots, n_l) \in \mathbf{N}^l} BGL(n_1, \dots, n_l)) \simeq N\underline{\mathcal{S}}_p^{Is}\mathcal{P}(X, \mathcal{U})$$

$$\underline{\mathbf{Hom}}(NU, \mathbf{BP}_l) \simeq N\underline{\mathcal{S}}^{Is}\mathcal{P}(X, \mathcal{U})$$

et en considérant les réalisations géométriques

$$|\underline{\mathbf{Hom}}(NU, \mathbf{BP})| \simeq |\mathbf{SP}(X, \mathcal{U})|.$$

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de montrer, compte tenu de la compatibilité des groupes d'homotopie avec les limites inductives filtrantes, le lemme suivant

**1.3.4. Lemme.** *La limite inductive des espaces  $|\mathbf{SP}(X, \mathcal{U})|$  quand  $\mathcal{U}$  parcourt la catégorie des recouvrements ouverts rigides de  $X$  existe et est homotopiquement équivalent à l'espace  $|\mathbf{SP}(X)|$*

$$|\mathbf{SP}(X)| \simeq \varinjlim_{\mathcal{U}} |\mathbf{SP}(X, \mathcal{U})|.$$

*Démonstration.* Lorsque  $\mathcal{U}$  varie,  $\mathcal{P}(X, \mathcal{U})$  n'est pas un système inductif filtrant puisqu'il n'existe pas de façon fonctorielle de trivialisier des fibrés vectoriels. On peut néanmoins s'inspirer de l'argument de Quillen [Q2] ( Proposition 2.2 p.125). On remplace les catégories  $\mathcal{P}(X, \mathcal{U})$  par les catégories  $\mathcal{P}'(\mathcal{U})$  définies de la manière suivante. Un objet de  $\mathcal{P}'(\mathcal{U})$  est la donnée

- d'un fibré vectoriel  $E$  de  $\mathcal{P}(X, \mathcal{U})$
- pour tout recouvrement  $\mathcal{V} = (V_j)$  plus fin que  $\mathcal{U}$ , d'isomorphismes

$$E|_{V_j} \simeq (\mathcal{O}_{V_j})^n$$

notés

$$\theta_{\mathcal{V}} : E|_{\mathcal{V}} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{V}}^n.$$

Un morphisme  $(E, (\theta_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}}) \rightarrow (E', (\theta'_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}})$  de  $\mathcal{P}'(\mathcal{U})$  est une famille de morphismes  $\alpha_{\mathcal{V}}$  rendant commutatifs les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} E|_{\mathcal{V}} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{V}}} & E'|_{\mathcal{V}} \\ \theta_{\mathcal{V}} \searrow & & \swarrow \theta'_{\mathcal{V}} \\ & (\mathcal{O}_{\mathcal{V}})^n & \end{array}$$

Les catégories  $\mathcal{P}'(\mathcal{U})$  et  $\mathcal{P}(X, \mathcal{U})$  sont homotopiquement équivalentes. En effet, considérons le foncteur

$$f : \mathcal{P}'(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathcal{P}(X, \mathcal{U}) \\ (E, \theta_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V}} \mapsto E$$

Pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{P}(X, \mathcal{U})$  la catégorie  $E \setminus f$  des objets de  $\mathcal{P}'(\mathcal{U})$  au-dessus de  $E$  est contractile car tous les objets sont reliés entre eux par un unique isomorphisme. D'après [Q2](Theorem A), le foncteur  $f$  induit une équivalence d'homotopie. On peut maintenant écrire

$$|N\mathcal{P}(X)| \simeq \varinjlim_{\mathcal{U}} |N\mathcal{P}'(\mathcal{U})|.$$

On conclut en utilisant la compatibilité de la  $K$ -théorie aux limites inductives  $\square$ .

**1.3.5. Remarque.** Il est nécessaire de garder ce lemme en mémoire. Nous l'utilisons chaque fois que nous considérons des limites suivant une famille de recouvrements.

Schechtman montre plus, à savoir

**1.3.6. Théorème** (Schechtman). *Pour tout schéma  $X$ , pour tous les entiers  $m \geq 1$ ,  $i \geq 0$ ,*

$$K_i(X) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \pi_{i+m}(\underline{\mathbf{H}\mathbf{om}}(N\mathcal{U}, \mathbf{B}^m P)).$$

*Démonstration.* On veut montrer

$$|\mathbf{S}^m \mathcal{P}(X)| \simeq \varinjlim_{\mathcal{U}} |\underline{\mathbf{H}\mathbf{om}}(N\mathcal{U}, \mathbf{B}^m P)|.$$

L'argument est analogue au précédent puisque la construction des  $\mathbf{B}^m P$  calque celle des multicatégories  $\underline{\mathbf{S}}^n$  de Waldhausen. Les difficultés supplémentaires dues au fait que les  $\mathbf{B}^m P$  sont des objets pseudo-simpliciaux sont traitées en [Sch](Appendix B)  $\square$ .

Notons

$$\mathbf{B}^m P(N\mathcal{U}) = \underline{\mathbf{H}\mathbf{om}}(N\mathcal{U}, \mathbf{B}^m P) \quad m \geq 1$$

$$\mathbf{B}^m P(\check{X}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \mathbf{B}^m P(N\mathcal{U}).$$

La suite des  $\mathbf{B}^m P(N\mathcal{U})$ ,  $m \geq 1$ , forme un  $\Omega$ -spectre. Nous disons que les  $\mathbf{B}^m P$  forment un spectre en schémas, également noté  $\mathbf{B}P$  qui représente la  $K$ -théorie. On a dans la catégorie de l'homotopie stable

$$K_i(X) = \pi_{i+1}(\mathbf{B}P(\check{X})).$$

## 1.4. Produits

Waldhausen a défini en [W 1] un produit

$$K_i(X) \otimes K_j(X) \rightarrow K_{i+j}(X)$$

induit par le produit tensoriel des  $\mathcal{O}_X$ -modules. Pour un schéma affine  $X = \text{Spec } A$ , le produit provient de l'accouplement

$$\phi_A : \mathbf{SP}(A) \times \mathbf{SP}(A) \rightarrow \mathbf{S}^2\mathcal{P}(A)$$

qui dans les notations de 1.2 envoie la paire de modules libres  $(A^{\underline{n}}, A^{\underline{m}})$  sur  $A^{\underline{nm}}$  où  $(\underline{nm})_{i,j} = n_i \cdot m_j$ . Comme cette construction est fonctorielle en  $A$ , on en déduit un morphisme de groupes algébriques  $P(\underline{n}) \otimes P(\underline{m}) \rightarrow P(\underline{nm})$ , qui après identification de  $P(\underline{n})$  avec  $GL(n_1, \dots, n_l)$  est le produit tensoriel des matrices. On regroupe ces morphismes pour obtenir un accouplement

$$\Psi : \mathbf{BP} \times \mathbf{BP} \rightarrow \mathbf{B}^2P.$$

Par construction, cet accouplement représente le produit en  $K$ -théorie, au sens que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SP}(X, \mathcal{U}) \wedge \mathbf{SP}(X, \mathcal{U}) & \xrightarrow{\phi_X} & \mathbf{S}^2\mathcal{P}(X, \mathcal{U}) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \mathbf{BP}(N\mathcal{U}) \wedge \mathbf{BP}(N\mathcal{U}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathbf{B}^2P(N\mathcal{U}) \end{array}$$

pour tout schéma  $X$  et tout recouvrement ouvert  $\mathcal{U}$  de  $X$ .

## 2.K-THEORIE D'UN SCHEMA SIMPLICIAL

### 2.1. Définitions

Ce paragraphe repose sur l'article de Thomason [T]. Nous fixons un modèle fibrant  $\mathbf{K}$  du spectre de  $K$ -théorie: pour tout schéma  $X$ ,  $\mathbf{K}(X)$  est un spectre en ensembles simpliciaux fibrants [T] (Section 5) . Contrairement à Thomason, nous ne délaçons pas la construction de Waldhausen et avons pour  $i \geq 0$

$$K_i(X) = \pi_{i+1}(\mathbf{K}(X)) \simeq \pi_{i+1}(|\mathbf{BP}(\check{X})|)$$

où les groupes  $\pi_i$  sont les groupes d'homotopie stable.

**2.1.1.Définition.** Soit  $X$  un schéma simplicial . On pose

$$\mathbf{K}(X) = \mathop{\mathrm{holim}}\limits_n \mathbf{K}(X_n)$$

$$K_i(X) = \pi_{i+1}(\mathbf{K}(X))$$

où  $\mathop{\mathrm{holim}}$  est le foncteur de limite homotopique de Bousfield et Kan. Si  $X$  est un schéma multisimplicial on pose

$$\mathbf{K}(X) = \mathbf{K}(\mathrm{diag} X)$$

où  $\mathrm{diag}$  désigne le foncteur diagonal,  $(\mathrm{diag} X)_n = X_{n, \dots, n}$ .

Ainsi défini,  $\mathbf{K}$  est un foncteur contravariant de la catégorie des schémas multisimpliciaux dans celles des spectres. Les  $K_i$  sont des foncteurs contravariants dans la catégorie des groupes abéliens.

Cette définition diffère de celle de [Sch]. Schechtman utilise le foncteur Tot pour transformer l'espace cosimplicial  $n \mapsto \mathbf{K}(X_n)$  en espace simplicial, mais le foncteur  $\mathop{\mathrm{holim}}$  est préférable car il préserve les équivalences d'homotopie. De plus, Schechtman distingue les schémas simpliciaux de dimension combinatoire finie, c'est à dire ceux pour lesquels il existe un entier  $M \geq 0$  tel que  $X = Sq_M(X)$ . Il pose, pour un schéma simplicial quelconque

$$\hat{K}_i(X) = \varprojlim_M K_i(Sq_M X).$$

**2.1.2.Proposition.** Soit  $X$  un schéma simplicial. Les deux définitions de la  $K$ -théorie de  $X$  sont reliées par la suite exacte

$$0 \rightarrow \varprojlim_M^1 K_i(Sq_M(X)) \rightarrow K_i(X) \rightarrow \hat{K}_i(X) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* C'est la suite exacte de [T] (Lemma 5.4) associée à la tour de fibrations.

$$\mathcal{X}_M = \mathbf{K}(Sq_M X).$$

Rappelons à ce propos que le rôle du foncteur  $\mathop{\mathrm{holim}}$  est de transformer des diagrammes en diagrammes de fibrations  $\square$ .

**2.1.3.Proposition.** *Soit  $X$  un schéma simplicial. Il existe une suite spectrale*

$$E_2^{p,q}(X) = H^p(n \mapsto K_{-q}(X_n)) \implies K_{-p-q}(X)$$

*située dans le deuxième quadrant.*

*Démonstration.* C'est la suite exacte de Bousfield et Kan associée à un espace cosimplicial [T] (Proposition 5.13)  $\square$ .

La convergence de la suite spectrale est discutée en [T] (5. 44- 5.48). La suite spectrale converge fortement dès que le schéma simplicial est de dimension combinatoire finie.

Pour les schémas multisimpliciaux il existe plusieurs suites spectrales, selon qu'on privilégie l'une ou l'autre des directions simpliciales. Toutes ces suites spectrales aboutissent vers la  $K$ -théorie du schéma multisimplicial, en vertu des équivalences d'homotopie [T] (Lemma 5.7 & Lemma 5.33)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(X) &\simeq \underset{n}{\operatorname{holim}}(\underset{m}{\operatorname{holim}}(\mathbf{K}(X_{n,m})) \\ &\simeq \underset{m}{\operatorname{holim}}(\underset{n}{\operatorname{holim}}(\mathbf{K}(X_{n,m})) \end{aligned}$$

## 2.2.Propriétés

La définition 2.1.1 permet d'étendre aux schémas simpliciaux les propriétés usuelles de la  $K$ -théorie algébrique. Nous nous contentons de signaler les propriétés que nous utiliserons ultérieurement.

**2.2.1.Proposition** (Homotopie). *Soient  $X$  un schéma simplicial régulier et  $\mathbf{A}_X^m$  l'espace affine de dimension  $m$  sur  $X$ , défini par  $n \mapsto \mathbf{A}_{X_n}^m$ . Alors la projection canonique  $\mathbf{A}_X^m \rightarrow X$  induit une équivalence d'homotopie*

$$\mathbf{K}(X) \simeq \mathbf{K}(\mathbf{A}_X^m).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence de l'invariance homotopique de la  $K$ -théorie algébrique et du fait que le foncteur  $\operatorname{holim}$  préserve les équivalences d'homotopie  $\square$ .

**2.2.2.Proposition.** *Soient  $X$  un schéma simplicial,  $E$  un faisceau en  $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de rang  $r$ . Soit  $\mathbf{P}E_X$  l'espace projectif simplicial associé. On a une équivalence d'homotopie*

$$\prod_{i=1}^r \mathbf{K}(X) \simeq \mathbf{K}(\mathbf{P}E_X).$$

*Démonstration.* Le résultat se déduit comme précédemment d'un résultat analogue de [Q2] et du fait que le foncteur  $\operatorname{holim}$  commute aux produits finis  $\square$ .

Les propriétés déjà mentionnées du foncteur  $\operatorname{holim}$  permettent de généraliser l'existence d'un produit et définir pour un schéma multisimplicial un accouplement

$$\mathbf{K}(X) \wedge \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbf{K}(X)$$

induit, composante par composante, par le produit tensoriel des fibrés vectoriels.

**2.2.3. Théorème** (Thomason-Trobaugh). *Soit  $X$  un schéma muni d'une famille ample de faisceaux inversibles. Soit  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . On a pour tout  $i \geq 0$  un isomorphisme*

$$K_i(X) \simeq K_i(N\mathcal{U}).$$

*Démonstration.* C'est le théorème de Mayer-Vietoris [T-T] (8.4) Cela suppose qu'on travaille avec la  $K$ -théorie de Bass définie en [T-T] chap.6 et qu'on a posé  $\mathbf{K}(N\mathcal{U}) = \mathop{\mathrm{holim}}\limits_i \mathbf{K}^B(N\mathcal{U}_i)$ . L'hypothèse, issue de [SGA 6] (Exp.II 2.2.4), assure que la  $K$ -théorie de Quillen considérée dans cet article coïncide avec la  $K$ -théorie de Bass en degré positif ou nul.  $\square$ .

Ce théorème s'étend aux schémas simpliciaux en

**2.2.4. Proposition.** *Soit  $X$  un schéma simplicial muni d'une famille ample de faisceaux inversibles et soit  $\mathcal{U}$  un hyperrecouvrement de  $X$  tel qu'en chaque degré  $k$ ,  $\mathcal{U}_k$  soit le nerf de Čech d'un recouvrement ouvert de  $X_k$ . Pour chaque  $i \geq 0$  on a l'isomorphisme*

$$K_i(X) \simeq K_i(\mathcal{U}).$$

En sus du théorème de représentabilité et du théorème de Mayer-Vietoris, l'ingrédient essentiel pour la suite est une variante du théorème des coefficients universels

**2.2.5. Théorème.** *Soient  $X$  un schéma multisimplicial et  $E$  un ensemble simplicial pointé. On a une équivalence d'homotopie*

$$\mathbf{K}(X \wedge E) \simeq \mathrm{Map}_*(|E|, \mathbf{K}(X))$$

où  $|E|$  est la réalisation géométrique de  $E$  et  $\mathrm{Map}_*(|E|, \mathbf{K}(X))$  est le spectre des fonctions pointées de l'espace  $|E|$  dans le spectre  $\mathbf{K}(X)$ .

*Démonstration.* Dans le cas où  $X$  est un schéma simplicial constant, on a par définition

$$\mathbf{K}(X \wedge E) = \mathop{\mathrm{holim}}\limits_n (\mathbf{K}(X \wedge E_n)).$$

Or  $X \wedge E_n$  est une somme disjointe (infinie) de copies de  $X$  et d'après un théorème de Carlsson [C], on a

$$\mathbf{K}(X \wedge E_n) \simeq \mathbf{K}(X) \wedge E_n \simeq \mathrm{Map}_*(E_n, \mathbf{K}(X))$$

où  $E_n$  est muni de la topologie discrète. On peut maintenant appliquer le théorème des coefficients universels [T] (Proposition 5.35)

$$\mathbf{K}(X \wedge E) \simeq \mathrm{Map}_*(\mathop{\mathrm{hocolim}}\limits_n E_n, \mathbf{K}(X)).$$

Comme  $\mathbf{K}(X)$  est fibrant, le foncteur  $\text{Map}_*(-, \mathbf{K}(X))$  commute aux équivalences d'homotopie et la proposition découle de l'équivalence ([T](5.10))

$$\text{hocolim}_n E_n \simeq |E|.$$

Cette démonstration s'étend au cas où  $X$  est multisimplicial en vertu de [T] (Lemma 5.11)

$$\text{holim}_n \text{Map}_*(|E|, \mathbf{K}(X_n)) \simeq \text{Map}_*(|E|, \text{holim}_n \mathbf{K}(X_n)) \quad \square.$$

Ainsi, les morphismes de suspension construits par Schechtman [Sch]

$$\mathbf{B}^m P \wedge S^1 \rightarrow \mathbf{B}^{m+1} P$$

induisent des applications

$$\mathbf{K}(\mathbf{B}^{m+1} P) \rightarrow \mathbf{K}(\mathbf{B}^m P \wedge S^1) \simeq \text{Map}_*[S^1, \mathbf{B}^m P]$$

et des morphismes

$$K_i(\mathbf{B}^{m+1} P) \rightarrow K_{i+1}(\mathbf{B}^m P) \quad i \in \mathbf{Z}.$$



### 3.K-THEORIE DE BP

A partir de maintenant nous supposons que le schéma de base  $S$  est affine et régulier. Pour calculer les groupes  $K_i(\mathbf{BP})$  nous suivons les directions de Schechtman dans son calcul des groupes de cohomologie.

#### 3.1.La classe d'une représentation.

**3.1.1.Proposition.** *Soit  $G$  un schéma en groupes défini sur  $S = \text{Spec } A$ . Soit  $\mathbf{R}_A(G)$  l'anneau de Grothendieck des représentations algébriques de dimension finie de  $G$  sur  $S$ . Il existe un morphisme d'anneaux*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_A(G) &\rightarrow K_0(BG) \\ \rho &\mapsto [\rho]. \end{aligned}$$

A une représentation  $\rho : G \rightarrow GL(n)$  on associe un morphisme de schémas multiséparés

$$\tilde{\rho}_{(1)} : BG \wedge S^1 \rightarrow \mathbf{BP}$$

via l'inclusion

$$i_n : BGL(n) \hookrightarrow \mathbf{BP}_1 = \coprod_{n \geq 0} BGL(n)$$

puis des morphismes

$$\tilde{\rho}_{(m)} : BG \wedge S^m \rightarrow \mathbf{B}^m P$$

par suspension. Ces morphismes définissent un élément de  $\pi_1(\underline{\mathbf{Hom}}(BG, \mathbf{BP}))$ . Nous rappelons que nous entendons par  $\underline{\mathbf{Hom}}(BG, \mathbf{BP})$  le spectre  $m \mapsto \underline{\mathbf{Hom}}(BG, \mathbf{B}^m P)$

**3.1.2.Lemme.** *Pour tout schéma simplicial  $X$  il existe un morphisme de spectres*

$$\underline{\mathbf{Hom}}(X, \mathbf{BP}) \rightarrow \mathbf{K}(X).$$

*Démonstration de 3.1.2.* Pour tout entier positif  $n$ , le théorème de représentabilité fournit une flèche  $\mathcal{X}^n = \underline{\mathbf{Hom}}(X_n, \mathbf{BP}) \rightarrow \mathbf{K}(X_n)$ . L'espace simplicial  $\underline{\mathbf{Hom}}(X, \mathbf{BP})$  est en fait l'espace total  $\text{Tot}(\mathcal{X})$  associé à l'espace cosimplicial  $n \mapsto \mathcal{X}^n$ . L'espace  $\mathbf{K}(X)$  est quant à lui la limite homotopique des  $\mathbf{K}(X_n)$ . Le lemme résulte de la comparaison des foncteurs  $\text{Tot}$  et  $\text{holim}$  [T] (Lemma 5.25)  $\square$ .

La représentation  $\rho$  définit donc un élément  $[\rho]$  de  $\pi_1(\mathbf{K}(BG)) = K_0(BG)$ .

**3.1.3.Lemme.** *La classe  $[\rho]$  de la représentation  $\rho$  ne dépend pas de la classe d'isomorphisme de  $\rho$ .*

*Démonstration de 3.1.3.* Deux représentations sont isomorphes si elles sont conjuguées par un automorphisme intérieur de  $GL(n)$ . Or pour tout groupe  $G$  l'automorphisme intérieur associé à un élément  $g$  de  $G$  induit un endomorphisme simplicial de  $BG$  qui

est homotopoe à l'identité. En effet, utilisant les notations de May ([M] p.12), on définit une homotopie simpliciale par

$$h_i : G^q \rightarrow G^{q+1} \quad 0 \leq i \leq q$$

$$h_i(x_1, \dots, x_q) = (gx_1g^{-1}, \dots, gx_ig^{-1}, g, x_{i+1}, \dots, x_q) \quad \square.$$

**3.1.4.Lemme.** Si  $0 \rightarrow \rho' \rightarrow \rho \rightarrow \rho'' \rightarrow 0$  est une suite exacte de représentations de  $G$ , alors on a  $[\rho] = [\rho'] + [\rho'']$ .

*Démonstration de 3.1.4.* On représente  $\rho$ ,  $\rho'$  et  $\rho''$  par des morphismes

$$\tilde{\rho}' : BG \rightarrow BGL(n)$$

$$\tilde{\rho}'' : BG \rightarrow BGL(m)$$

$$\tilde{\rho} : BG \rightarrow BGL(n+m)$$

où  $\tilde{\rho}$  se factorise par  $BG \rightarrow BGL(n, m)$ , définit un morphisme  $BG \otimes \Delta[2] \rightarrow \mathbf{BP}$  et une homotopie entre  $[\tilde{\rho}']$  et  $[\tilde{\rho}'] + [\tilde{\rho}'']$   $\square$ .

Notons que  $\mathbf{BP}$  joue le même rôle qu'un  $H$ -espace en topologie et que la somme de Whitney des matrices induit la loi de groupe de  $\pi_1(\mathbf{BP}(\check{X}))$ . Par linéarité, on définit un morphisme de groupes abéliens  $\mathbf{R}_Z(G) \rightarrow K_0(BG)$ . Ce morphisme est compatible aux produits d'après 1.3 et la proposition 3.1.1 est démontrée.

### 3.2.Calcul de $K_*(BGL(n))$ .

**3.2.1.Proposition.** Soit  $T(n)$  le sous-groupe diagonal de  $GL(n)$ . On a un isomorphisme d'anneaux

$$K_i(BT(n)) = K_i(S)[[a_1, \dots, a_n]]$$

où l'élément  $a_i = pr_i^*(e_1 - 1)$  de  $K_0(BT(n))$  est la l'image inverse par la  $i$ -ème projection  $T(n) \rightarrow T(1)$  de  $a = e_1 - 1$ , et  $e_1$  la classe de la représentation régulière de  $T(1)$ .

*Démonstration.* On calcule  $\hat{K}_*(BT(n))$ . Dans le cas  $n = 1$ ,  $Sq_M BT(1)$  est homotopie à  $\mathbf{P}_S^M$  dans le sens suivant. Considérons le recouvrement affine  $\mathcal{U} = (U_i)_{0 \leq i \leq M}$  de l'espace projectif  $\mathbf{P}_S^M$ ,  $U_i = \{(x_0 : \dots : x_M) \in \mathbf{P}_S^M, x_i \neq 0\}$ . Les sections locales  $U_i \rightarrow \mathcal{O}(1)$  du fibré canonique de rang 1 de  $\mathbf{P}_S^M$  induisent un morphisme de schémas simpliciaux

$$\phi(M) : NU \rightarrow Sq_M BT(1)$$

défini en degré  $p \leq M$  par

$$\begin{aligned} \phi(M)_p : U_{i_0} \times \dots \times U_{i_p} &\longrightarrow T(1)^p \\ (x_0 : \dots : x_M) &\longmapsto \left( \frac{x_{i_1}}{x_{i_0}}, \frac{x_{i_2}}{x_{i_1}}, \dots, \frac{x_{i_p}}{x_{i_{p-1}}} \right). \end{aligned}$$

Le morphisme  $\phi(M)$ , surjectif et à fibres affines, induit une équivalence d'homotopie via (2.2.1)

$$\mathbf{K}(Sq_M BT(1)) \simeq \mathbf{K}(NU).$$

Notons qu'à cet endroit nous utilisons la régularité du schéma de base  $S$ . Par ailleurs,  $\mathcal{U}$  étant un recouvrement de  $\mathbf{P}_S^M$ , la propriété de Mayer-Vietoris (2.2.3) et le théorème du fibré projectif (2.2.2) entraînent

$$\begin{aligned} K_*(N\mathcal{U}) &\simeq K_*(\mathbf{P}_S^M) \\ &\simeq K_*(S)[\xi_M] / (\xi_M - 1)^{M+1} \end{aligned}$$

où  $\xi_M$  est la classe dans  $K_0(\mathbf{P}_S^M)$  du fibré canonique  $\mathcal{O}(1)$ . On en déduit un isomorphisme d'anneaux

$$K_*(Sq_M BT(1)) \simeq K_*(S)[a] / (a)^{M+1}.$$

Comme les morphismes de transition

$$K_*(Sq_{M+1} BT(1)) \simeq K_*(S)[a] / (a)^{M+2} \rightarrow K_*(Sq_M BT(1)) \simeq K_*(S)[a] / (a)^{M+1}$$

sont surjectifs, on a via (2.1.2)

$$K_*(BT(1)) \simeq \hat{K}_*(BT(1)) \simeq K_*(S)[[a]].$$

On traite le cas  $n \geq 1$  de la même façon en représentant le schéma simplicial  $Sq_M BT(n)$  par le schéma  $(\mathbf{P}_M)^n$   $\square$ .

### 3.2.2. Proposition.

$$K_i(BGL(n)) \simeq K_i(S)[[\gamma_{1n}, \dots, \gamma_{nn}]]$$

où  $\gamma_{in} = \gamma^i(e_n - n)$  est la  $i$ -ème  $\gamma$ -opération de Grothendieck de l'élément  $e_n - n$ ,  $e_n$  étant la classe dans  $K_0(BGL(n))$  de la représentation identique de  $GL(n)$ .

En terme de  $\lambda$ -opérations,  $\gamma_{i,n}$  est l'image dans  $K_0(BGL(n))$  de l'élément  $\lambda^i(e_n - n + i - 1)$  du  $\lambda$ -anneau  $R_A(GL(n))$  [Ser].

Notons  $E_n$  le fibré au dessus de  $BGL(n)$  correspondant à la représentation identique et considérons  $D(E_n)$  sa variété en drapeaux complète

$$\begin{array}{ccc} & E_n & \\ & \downarrow & \\ D(E_n) & \xrightarrow{p} & BGL(n). \end{array}$$

L'image inverse  $p^*(E_n)$  est un fibré vectoriel muni d'une filtration de longueur maximale. Soit  $\mathcal{V}$  un hyperrecouvrement du schéma simplicial  $D(e_n)$  trivialisant  $p^*(e_n)$ . L'application classifiante (cf 1.3.3)  $h : \mathcal{V} \rightarrow BGL(n)$  se factorise à travers l'espace classifiant  $BB(n)$  du sous-groupe de Borel de  $GL(n)$  constitué des matrices triangulaires supérieures

$$\begin{array}{ccc} & BB(n) & \\ & \downarrow g & \\ \mathcal{V} & \xrightarrow{h} & BGL(n). \end{array}$$

**3.2.3.Lemme.** *Le triangle*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{h} & BGL(n) \\ & \searrow & \uparrow f' \\ & & D(E_n). \end{array}$$

*commute à homotopie près.*

*Démonstration de 3.2.3.* Il suffit de montrer que sur  $BGL(n)$  l'application classifiante de  $E_n$  est homotope à la projection  $E_n \rightarrow BGL(n)$ . Le schéma simplicial  $E_n$  est décrit en [G] (p.217). En tout degré c'est un fibré trivial et seule la face  $d_0$  est non triviale et contient l'action de  $GL(n)$  sur  $\mathbf{A}_S^n$ . On choisit comme hyperrecouvrement de  $BGL(n)$  l'hyperrecouvrement  $\mathcal{U}$  engendré en chaque degré par les  $U_{i_0, \dots, i_k} = d_{i_0}^{-1} \circ \dots \circ d_{i_k}^{-1}(S) \simeq (GL(n))^k$ . L'application classifiante  $v : \mathcal{U} \rightarrow BGL(n)$  consiste à envoyer  $U_{i_0, \dots, i_k}$  sur  $GL(n)^k$  via l'identité si l'un des indices  $i_j$  est nul, ou via l'application triviale sinon. On construit une homotopie entre  $v$  et la projection  $\mathcal{U} \rightarrow BGL(n)$  en envoyant de plus en plus de termes via l'identité  $\square$ .

Comme  $D(E_n)$  est construit à partir de  $BGL(n)$  par une succession de fibrés projectifs, pour tout entier positif  $M$ , le morphisme tronqué

$$f'^*(M) : K_*(Sq_M D(E_n)) \rightarrow K_*(Sq_M BGL(n))$$

est injectif et par Mayer-Vietoris (2.2.3), on a des isomorphismes

$$f^*(M) : K_*(Sq_M D(E_n)) \simeq K_*(Sq_M \mathcal{V}).$$

Donc les morphismes  $h^*(M)$  et  $g^*(M)$  sont injectifs. De plus, le théorème d'invariance homotopique (2.2.1) assure

$$K_*(BB(n)) \simeq K_*(BT(n))$$

et on a , pour tout entier  $M \geq 1$ , les inclusions

$$K_*(Sq_M BGL(n)) \hookrightarrow K_*(Sq_M BT(n)).$$

Le groupe symétrique  $\Sigma_n$  des permutations de  $n$  éléments agit sur  $BT(n)$  et  $BGL(n)$ , par automorphismes intérieurs sur  $BGL(n)$ , donc par l'identité en  $K$ -théorie (3.1.3), d'où les inclusions

$$j_{(M)} : K_*(Sq_M BGL(n)) \hookrightarrow K_*(Sq_M BT(n))^{\Sigma_n}.$$

Soit  $\gamma_{in}$  la classe dans  $K_0(BGL(n))$  de  $\gamma^i(e_n - n)$ . Sur  $T(n)$  la représentation virtuelle  $id_n - n$  est scindée et on a dans le  $\lambda$ -anneau spécial [Ser]  $R_{\mathbf{Z}}T(n)$

$$[\gamma^i(id_n - n)] = \sigma_i(pr_1^*(\gamma^{(1)}(id_n), \dots, pr_n^*(\gamma^{(1)}(id_n)))$$

et dans  $K_0(BT(n))$

$$\gamma_{in} = \sigma_i(a_1, \dots, a_n)$$

où  $\sigma_i$  est la  $i$ -ème fonction symétrique élémentaire . Comme les classes  $\sigma_i(a_k)$ ,  $1 \leq i, k \leq n$  engendrent le module des invariants  $K_*(Sq_M BT(n))^{\Sigma_n}$  , l'inclusion  $j_{(M)}$  induit un isomorphisme

$$K_*(Sq_M BGL(n)) \simeq K_*(S)[\gamma_{1n}, \dots, \gamma_{nn}]/I(M)$$

avec

$$I(M) = \{P \in K_*(S)[a_1, \dots, a_n], P \text{ est symétrique et } P \in (a_1^{M+1}, \dots, a_n^{M+1})\}.$$

En utilisant de nouveau (2.1.2), on conclut que  $K_*(BGL(n))$  est le complété séparé de  $K_*(S)[\gamma_{11}, \dots, \gamma_{nn}]$  pour la topologie définie par les  $I(M)$ . Cette topologie, pour laquelle les  $a_i$  sont nilpotents est équivalente à celle définie par les poids, en attribuant le poids  $i$  à la variable  $\gamma_{in}$  (cf SGA 6 VI prop. 4.10), ce qui achève la démonstration de 3.2.2 .

**3.2.4.Remarque.** Les  $K_*(Sq_M BGL(n))$  sont également engendrés par les  $\lambda_{in} = \lambda^i(e_n)$  comme le suggère le théorème de Serre [Ser], mais je ne sais pas exprimer l'idéal des relations  $I(M)$  en fonction des  $\lambda_{in}$ .

### 3.3.Calcul de $K_*(\mathbf{B}P)$ .

**3.3.1.Théorème** (Schechtman). *Il existe des éléments  $\beta_k^{(m)} \in K_{-m}(\mathbf{B}^m P)$ ,  $k \geq 1, m \geq 1$ , tels que*

$$\begin{aligned} K_*(\mathbf{B}P)_{\mathbf{Q}} &\simeq K_*(S)_{\mathbf{Q}}[[\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_k^{(1)}, \dots]] \\ K_*(\mathbf{B}^m P)_{\mathbf{Q}} &\simeq K_*(S)_{\mathbf{Q}}[[\beta_1^{(m)}, \dots, \beta_k^{(m)}, \dots]] \end{aligned}$$

Les éléments  $\beta_k^{(m)}$  sont les délaçages des éléments  $\beta_k^{(1)}$  notés aussi  $\beta_k$ . Les morphismes  $\omega_m : K_{-m}(\mathbf{B}^m P) \rightarrow K_{-m-1}(\mathbf{B}^{m+1} P)$  induits par la suspension (2.2.6) envoient chaque élément  $\beta_k^{(m)}$  sur  $\beta_k^{(m+1)}$ . Ce sont ces éléments  $\beta_k$  qui fournissent les opérations d'Adams. Nous expliciterons dans le cours de la démonstration leur relation avec les éléments  $\Psi_k(id_n)$  de  $\mathbf{R}_{\mathbf{Z}}(GL(n))$ . Nous commençons par le cas  $m = 1$ . Pour calculer  $K_*(\mathbf{B}P)$  nous utilisons la suite spectrale

$$(3.3.2) \quad E_1^{p,q} = K_{-p}(\mathbf{B}P_q) \implies K_{-p-q}(X)$$

où

$$\mathbf{B}P_q = \coprod_{(n_1, \dots, n_q) \in \mathbf{N}^q} K_{-p}(BGL(n_1, \dots, n_q)).$$

D'après le théorème de Carlsson [C],

$$\begin{aligned} K_{-p}(\mathbf{B}P_q) &\simeq \prod_{(n_1, \dots, n_q) \in \mathbf{N}^q} K_{-p}(BGL(n_1, \dots, n_q)) \\ &\simeq \prod_{(n_1, \dots, n_q) \in \mathbf{N}^q} K_{-p}(BGL(n_1)) \times \dots \times K_{-p}(BGL(n_q)) \\ &\simeq K_{-p}(\mathbf{B}L_q) \end{aligned}$$

d'après la propriété d'homotopie.

Pour calculer  $K_*(BGL(n_1) \times \dots \times BGL(n_q))$  on constate que les calculs précédents restent valables quand on remplace le schéma de base  $S$  par un schéma simplicial lisse de dimension combinatoire finie. En particulier on a

$$K_*(BGL(n_1) \times BGL(n_2)) \simeq K_*(BGL(n_1)) \hat{\otimes}_{K_*(S)} K_*(BGL(n_2))$$

où  $\hat{\otimes}$  désigne le produit tensoriel complété défini en [Q1] (Appendix A-1) .

Notons les anneaux

$$A = K_*(S) = C_0$$

$$C_n = K_*(BGL(n)) = A[[\gamma_{1n}, \dots, \gamma_{nn}]]$$

$$C_{\leq i} = \prod_{1 \leq n \leq i} C_n$$

$$C = \prod_{n \geq 0} C_n = \varprojlim_i C_{\leq i}$$

et pour tout entier  $M \geq 0$ ,

$$C_n(M) = K_*(S_{qM} BGL(n)) = A[\gamma_{1n}, \dots, \gamma_{nn}] / I_n(M)$$

$$C_{\leq i}(M) = \prod_{1 \leq n \leq i} C_n(M)$$

$$C(M) = \prod_{n \geq 0} C_n(M) = \varprojlim_i C_{\leq i}(M).$$

On a donc

$$K_*(\mathbf{B}P_p) = C^{\hat{\otimes} p}.$$

La somme de Whitney  $\oplus$  munit  $C$  d'une structure de cogèbre. L'identité fondamentale des  $\gamma$ -opérations

$$\gamma^i(x_n \oplus x_m) \simeq \bigoplus_{\substack{i' + i'' = i \\ n' + n'' = n}} \gamma^{i'}(x_n) \otimes \gamma^{i''}(x_m)$$

se traduit, pour le coproduit  $\Delta : C \rightarrow C \hat{\otimes} C$  par la formule

$$(3.3.3) \quad \Delta \gamma_{in} = \sum_{\substack{i' + i'' = i \\ n' + n'' = n}} \gamma_{i'n'} \otimes \gamma_{i''n''}.$$

Ainsi  $C$  est une algèbre de Hopf complète, connexe et cocommutative au sens de [Q1]. Le terme  $E_1$  de la suite spectrale (3.3.2) est le complexe de  $A$ -modules correspondant au  $A$ -module cosimplicial

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\
& & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\
A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C^{\otimes 2} & \longrightarrow & \dots \\
& \longleftarrow & & \longleftarrow & & \longleftarrow & \\
& & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \\
& & \longleftarrow & & \longleftarrow & & 
\end{array}$$

qui calcule la cohomologie de l'algèbre de Hopf  $C$  [Ca].

Nous sommes dans une situation analogue à celle de [Sch] , à la différence près que  $C$  est une algèbre de séries formelles. Nous pouvons nous ramener au cas d'algèbres de polynômes en tronquant le schéma bisimplicial  $\mathbf{BP}$  dans une direction (celle qui consiste à tronquer tous les  $BGL(n)$ ) et en considérant la suite spectrale  $E_r(M) = E_r(Sq_M \mathbf{BP})$  . Le complexe  $E_1(M)$  calcule la cohomologie de l'algèbre de Hopf  $C(M)$ .

**3.3.4.Lemme.** *Pour tout  $p \geq 1$ , la suite  $M \mapsto C(M)^{\otimes p}$  vérifie la condition de Mittag-Leffler [B-K] (Ch.IX 3.5).*

*Démonstration.* L'argument est toujours le même: les morphismes de transition sont surjectifs pour tous les entiers  $n \geq 0$ ,  $M \geq 1$   $\square$ .

La suite spectrale commute aux limites projectives et nous pouvons calculer  $E_r(\mathbf{BP}) = \varprojlim_M E_r(M)$  et  $E_2(M) = H^*(E_1(M))$ . On a  $H^0(E_1(M)) = A$ ,  $H^1(E_1(M))$  est l'ensemble des éléments primitifs  $C(M)^{\text{prim}}$  de  $C(M)$ .

**3.3.5.Lemme.**  *$C(M)^{\text{prim}}$  est le  $A$ -module libre engendré par l'ensemble  $\{\nu^k\}$ , où l'élément  $\nu^k = (\nu_{k0}, \dots, \nu_{kn}, \dots)$  de  $C$  a pour coordonnées  $\nu_{kn}$  dans  $A[\gamma_{1n}, \dots, \gamma_{nn}]/I_n(M)$  le  $k$ -ème polynôme de Newton en les  $\gamma_{in}$ .*

*Démonstration.* Soit  $f = (f_0, f_1, \dots)$  un élément primitif de  $C(M)$ . Comme la comultiplication préserve les poids, on peut supposer que chaque  $f_i$  est un polynôme de poids  $k \leq M$ . Dans

$$C_p(M) \otimes C_q(M) = A[\gamma_{1p}, \dots, \gamma_{pp}, \gamma'_{1q}, \dots, \gamma'_{qq}]/I(M)$$

la condition de primitivité s'écrit via (3.3.3)

$$\begin{aligned}
(3.3.6) \quad f_{p+q}(\gamma_{0p}\gamma'_{1q} + \gamma_{1p}\gamma'_{0q}, \dots, \sum_{\substack{i+i'=j \\ 1 \leq j \leq p+q}} \gamma_{ip}\gamma'_{i'q}, \dots, \gamma_{pp}\gamma'_{qq}) &= \\
&= f_p(\gamma_{1p}, \dots, \gamma_{ip}, \dots, \gamma_{pp}) + f_q(\gamma_{1q}, \dots, \gamma_{jq}, \dots, \gamma_{qq}).
\end{aligned}$$

Si  $k = 0$  , la condition (3.3.6) devient  $f_{p+q} = f_p + f_q$  , c'est à dire  $f_p = pf_1$ ,  $f_1 \in A$ .

Si  $k > 0$ , on montre à partir de (3.3.6)  $f_1(x) = \alpha x$ ,  $\alpha \in A$ , et par récurrence sur  $p$ , [Sch] (2.5)

$$f_p(\sigma_1(x_1, \dots, x_p), \dots, \sigma_p(x_1, \dots, x_p)) = f_1(x_1) + \dots + f_1(x_p)$$

c'est à dire  $f_p = \alpha \nu_{kp}$ ,  $\alpha \in A$   $\square$ .

Il reste à calculer la cohomologie supérieure de  $C(M)$ . C'est à ce niveau que l'on tensorise par  $\mathbf{Q}$  pour pouvoir appliquer les théorèmes de structure des algèbres de Hopf. Si une algèbre de Hopf  $H$  est primitivement engendrée au sens de Milnor et Moore [M-M], et si ses éléments primitifs forment un module libre  $H^{\text{prim}}$ , alors la cohomologie de  $H$  est l'algèbre extérieure de  $H^{\text{prim}}$ . Par ailleurs sur un anneau de caractéristique 0, une algèbre

de Hopf connexe et cocommutative est primitivement engendrée [Q 2] (Theorem 4.5). On en conclut

$$H^*(C(M))_{\mathbf{Q}} \simeq K_*(S)_{\mathbf{Q}}[\nu_1, \dots, \nu_{M-1}]/J(M)$$

où  $J(M)$  est l'idéal engendré par les polynômes de poids  $k \geq M$ , chaque monôme  $\nu_i$  étant muni du poids 1. On en déduit

$$E_2(\mathbf{BP}) \simeq K_*(S)_{\mathbf{Q}}[[\nu_1, \dots, \nu_k, \dots]].$$

Comme notre but est de construire des opérations d'Adams, nous préférons l'expression suivante

**3.3.7.Lemme.**

$$E_2(\mathbf{BP}) \simeq K_*(S)_{\mathbf{Q}}[[\psi_1, \dots, \psi_k, \dots]].$$

où l'élément  $\psi_k = (\psi^k(id_n))_{n \geq 0}$  de  $C$  provient des  $\psi^k(id_n)$  de  $R_{\mathbf{Z}}(GL(n))$ ,  $k$ -ième opérations d'Adams des représentations identiques.

*Démonstration de 3.3.7.* En utilisant le formalisme des  $\lambda$ -anneaux (voir par exemple [A-T]) et le principe de scindage, on montre que les  $\psi_k$  et les  $\nu_k$  sont reliés par l'équation

$$\sum_{k \geq 0} \psi_k t^k = \frac{1}{1+t} (t + \sum_{k \geq 0} \nu_k (\frac{t}{1+t})^k)$$

qui permet le changement de générateurs  $\square$ .

**3.3.8.Proposition**(Schechtman). *Les différentielles  $d_r$  de  $E_r(\mathbf{BP}) \simeq E_r(\mathbf{BL})$  sont nulles pour  $r \geq 2$ .*

*Démonstration.* La somme de Whitney induit un morphisme de schémas bisimpliciaux  $\mathbf{BL} \times \mathbf{BL} \rightarrow \mathbf{BL}$  puis un morphisme de suites spectrales

$$\oplus^* : E_r(\mathbf{BL}) \rightarrow E_r(\mathbf{BL} \times \mathbf{BL}).$$

On a calculé  $E_2(\mathbf{BL})_{\mathbf{Q}}$  qui est un  $A_{\mathbf{Q}}$ -module libre et on montre

$$E_2(\mathbf{BL} \times \mathbf{BL})_{\mathbf{Q}} \simeq E_2(\mathbf{BL}) \hat{\otimes}_{\mathbf{Q}} E_2(\mathbf{BL}).$$

La somme de Whitney qui induit la comultiplication sur  $E_1 = C$ , induit également une comultiplication  $\Delta_2$  pour laquelle tous les  $\nu_i$  sont primitifs. Un examen des degrés prouve que  $d_2$  commute avec  $\Delta_2$  seulement si  $d_2 = 0$ . L'argument se généralise au cas  $r > 2$ . La suite spectrale  $E_r(\mathbf{BP})$  dégénère au terme  $E_2$  et converge fortement vers  $K_*(\mathbf{BP})$

$$E_2^{p,q}(\mathbf{BP}) \simeq E_{\infty}^{p,q} \implies K_{-p-q}(\mathbf{BP}).$$

On en déduit ( $p = 1, q = 0$ ) que le morphisme

$$K_{-1}(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}} \rightarrow E_1^{1,0} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} A_{\mathbf{Q}} \nu^k$$



est surjectif, et en choisissant, pour chaque  $k \geq 1$ , un relèvement  $\beta_K^{(1)}$  de  $\psi_k$  dans  $K_{-1}(\mathbf{B}P)$  on achève la démonstration du théorème 3.3.1 dans le cas  $r = 1$ .

Ainsi les  $\beta_K^{(1)}$  sont ils des relèvements des

$$\psi_k = ([\Psi_k(id_n)]) \in \prod_{n \geq 0} K_0(BGL(n))$$

par les morphismes  $K_{-1}(\mathbf{B}P) \rightarrow \prod_{n \geq 0} K_0(BGL(n))$  induit par  $\coprod_{n \geq 0} BGL(n) \wedge S^1 \rightarrow \mathbf{B}P$ .

Le cas  $m \geq 2$  se traite par récurrence. On remarque que le schéma multisimplicial  $\mathbf{B}^{m+1}P$  se forme à partir de  $\mathbf{B}^m P$  de la même façon que  $\mathbf{B}P$  à partir de  $\coprod_{n \geq 0} BGL(n)$ . Au lieu de commencer avec l'algèbre de Hopf  $C$ , on part de l'algèbre

$$C^{(m)} = K_*(S)_{\mathbf{Q}} [[\beta_1^{(m)}, \dots, \beta_k^{(m)}, \dots]]$$

avec les  $\beta_k^{(m)}$  de degré  $m$ .

Par le théorème de Samuelson [Bo] (Theorem 4.1), on peut choisir les  $\beta_k^{(m)}$  primitifs. On montre alors

$$E_2(\mathbf{B}^{m+1}P) = K_*(S)_{\mathbf{Q}} [[\beta_1^{(m)}, \dots, \beta_k^{(m)}, \dots]]$$

où les  $\beta_k^{(m)}$  sont de degré  $m + 1$ . La suite spectrale dégénère et on relève  $\beta_k^{(m)}$  dans  $K_{-m-1}(\mathbf{B}^{m+1}P)_{\mathbf{Q}}$  en  $\beta_k^{m+1}$   $\square$ .

## 4. OPERATIONS D'ADAMS

Dorénavant, les schémas considérés vérifient les hypothèses du théorème de Mayer Vietoris 2.2.3, à savoir qu'ils sont munis d'une famille ample de faisceaux inversibles.

### 4.1. Constructions des opérations.

Soient  $X$  un schéma et  $\mathcal{U}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . L'ensemble multisimplicial

$$\mathbf{B}^m P(N\mathcal{U}) = \underline{\mathbf{Hom}}_*(N\mathcal{U}, \mathbf{B}^m P)$$

est pointé par le morphisme  $N\mathcal{U} \rightarrow S$ . Les morphismes d'adjonction

$$\phi_{\mathcal{U}}^{(m)} : N\mathcal{U} \wedge \mathbf{B}^m P(N\mathcal{U}) \rightarrow \mathbf{B}^m P$$

induisent des morphismes

$$\mathbf{K}(\mathbf{B}^m P) \rightarrow \mathbf{K}(N\mathcal{U} \wedge \mathbf{B}^m P(N\mathcal{U})).$$

Or la proposition 2.2.3 implique

$$K_m(N\mathcal{U} \wedge \mathbf{B}^m P(N\mathcal{U})) \simeq \pi_0(\text{Map}_*(|\mathbf{B}^m P(N\mathcal{U})|, \mathbf{K}(N\mathcal{U}))).$$

Une suite d'éléments  $\alpha = (\alpha_m)_{m \geq 1}$ ,  $\alpha_m \in K_m(\mathbf{B}^m P)$  tels que  $\omega_m(\alpha_{m+1}) = \alpha_m$  (cf 3.3.1) définit une classe d'homotopie de morphismes de spectres

$$|\mathbf{B}P(N\mathcal{U})| \rightarrow \mathbf{K}(N\mathcal{U}).$$

A ce niveau on utilise la propriété de Mayer-Vietoris (2.2.5). Comme on l'a signalé, il faut travailler avec la  $K$ -théorie de Bass. Le spectre de  $K$ -théorie de Bass est défini à partir du spectre de  $K$ -théorie de Waldhausen par récurrence [T-T] Lemma 6.3 . Comme les opérations que nous considérerons sont naturelles (voir 4.1.2), elles s'étendent à la  $K$ -théorie de Bass. Nous ne considérerons que les groupes de degré positif ou nul pour lesquels les  $K$ -théories de Bass et Quillen coïncident et ferons mine d'ignorer la  $K$ -théorie de Bass.

La suite  $\alpha$  définit une classe d'homotopie de morphismes de spectres

$$\alpha_{\mathcal{U}} : |\mathbf{B}P(N\mathcal{U})| \rightarrow \mathbf{K}(X)$$

et par passage à la limite sur les recouvrements rigides de  $X$ , des applications continues

$$\alpha_X : |\mathbf{B}P(\check{X})| \simeq \mathbf{K}(X) \rightarrow \mathbf{K}(X)$$

puis des morphisme de groupes

$$\alpha_* : K_i(X) \rightarrow K_i(X) \quad i \geq 0$$

En particulier, les éléments  $\beta_k = (\beta_k^{(m)})$  de  $\prod_{m \geq 1} K_m(\mathbf{B}^m P)_{\mathbf{Q}}$  induisent des opérations

$$\Psi_k : K_i(X)_{\mathbf{Q}} \rightarrow K_i(X)_{\mathbf{Q}}.$$

**4.1.1.Lemme.** *Les opérations  $\Psi_k$  sont indépendantes du choix des relèvements  $\beta_k^{(m)}$  de  $K_{-m}(\mathbf{B}^m P)$ .*

*Démonstration.* Une étude de la suite spectrale prouve que deux relèvements de  $\nu_k$  de  $C^{\text{prim}}$  dans  $K_{-1}(\mathbf{B}P)$  diffèrent d'un élément  $\alpha = \epsilon \cdot \beta_{k_1}^{(1)} \dots \beta_{k_i}^{(1)}$ ,  $\epsilon \in K_{i-1}(S)_{\mathbf{Q}}$ ,  $i \geq 2$ . Cet élément provient de  $K_{-1}(\mathbf{B}P \times \mathbf{B}P)$  et l'opération induite se factorise par

$$|\mathbf{B}P(N\mathcal{U})| \xrightarrow{\text{diag}} |\mathbf{B}P(N\mathcal{U})| \wedge |\mathbf{B}P(N\mathcal{U})| \rightarrow \mathbf{K}(X)$$

et devient l'application nulle sur les groupes d'homotopie puisque l'inclusion diagonale  $S^i \rightarrow S^i \wedge S^i$  est homotope à l'application nulle. On démontre de même que les délaçages de  $\Psi_k$  sont indépendants des choix des  $\beta_k^{(m)}$ ,  $m \geq 2$   $\square$ .

**4.1.2.Proposition.** *Les opérations  $\Psi_k$  sont fonctorielles.*

*Démonstration.* Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas. On veut montrer que sur les groupes de  $K$ -théorie, les opérations  $\psi_k$  commutent aux morphismes image inverse

$$\Psi_k \circ f^* = f^* \circ \Psi_k : K_i(Y)_{\mathbf{Q}} \rightarrow K_i(X)_{\mathbf{Q}} \quad \forall i \geq 0.$$

Soit  $\mathcal{V} = (V_y)_{y \in \bar{Y}}$  un recouvrement ouvert rigide de  $Y$ . Soit  $\mathcal{U} = (U_x)_{x \in \bar{X}}$  le recouvrement ouvert rigide de  $X$  défini par  $U_x = f^{-1}(V_{f(x)})$ . Le morphisme  $f$  induit un morphisme simplicial  $Nf : N\mathcal{U} \rightarrow N\mathcal{V}$  et il s'ensuit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} N\mathcal{U} \wedge \mathbf{B}^m P N\mathcal{V} & \rightarrow & N\mathcal{V} \wedge \mathbf{B}^m P N\mathcal{V} \\ \downarrow & & \downarrow \\ N\mathcal{U} \wedge \mathbf{B}^m P(N\mathcal{U}) & \rightarrow & \mathbf{B}P \end{array}$$

qui prouve que les deux applications  $\Psi_k \circ f^*$  et  $f^* \circ \Psi_k$  proviennent du même élément de  $\prod_{m \geq 1} K_{-m}(\mathbf{B}^m P)$   $\square$ .

## 4.2. Propriétés spéciales.

Nous voulons montrer que les opérations  $\Psi_k$  munissent la  $K$ -théorie rationnelle d'un schéma d'une structure de  $\lambda$ -anneau spécial, à savoir

**4.2.1. Théorème.** *Soit  $X$  un schéma muni d'une famille ample de faisceaux inversibles. Les opérations  $\Psi_k : K_i(X)_{\mathbf{Q}} \rightarrow K_i(X)_{\mathbf{Q}}$  vérifient les propriétés*

- (i)  $\Psi_k(1) = 1 \quad \Psi_1 = id$
- (ii)  $\Psi_k$  est un morphisme de groupes additifs
- (iii)  $\Psi_k \circ \Psi_{k'} = \Psi_{kk'}$
- (iv)  $\Psi_k(xy) = \Psi_k(x)\Psi_k(y) \quad x \in K_i(X)_{\mathbf{Q}} \quad y \in K_j(X)_{\mathbf{Q}}$

Pour simplifier le texte nous résumerons les opérations d'Adams à des éléments de  $K_{-1}(\mathbf{B}P)_{\mathbf{Q}}$ . Les délaçages liés aux éléments de  $K_{-m}(\mathbf{B}^m P)_{\mathbf{Q}}$  se traitent de la même façon.

Comme dans les cas déjà connus [K], [So], il s'agit de transférer sur  $K_i(X)_{\mathbf{Q}}$  des identités démontrées par Serre [Ser] sur l'anneau des représentations  $\mathbf{R}_{\mathbf{Z}}(GL(n))$ .

La condition (ii) est vérifiée par construction, puisque les  $\Psi_k$  proviennent d'applications de spectres.

La démonstration de (i) est aisée. Pour prouver  $\Psi_k(1) = 1$ , on représente l'élément 1 de  $K_0(X)$  par le morphisme composé  $u : X \rightarrow S \rightarrow BGL(n)$ . C'est un élément  $\gamma_u$  de  $\text{Map}(S^1, \mathbf{B}P(X))$  qui s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \wedge S^1 & \longrightarrow & BGL(1) \wedge S^1 \\ id \wedge \gamma_u \downarrow & \searrow u & \downarrow \\ X \wedge \mathbf{B}P(X) & \longrightarrow & \mathbf{B}P \end{array}$$

On a alors  $\Psi_k(1) = u^*(\beta_k)$  or  $u^*(\beta_k)$  provient de  $[\Psi_k(1)] = 1$  de  $K_0(BGL(1)) \square$ .

Le morphisme  $id : \mathbf{B}P \rightarrow \mathbf{B}P$  produit un élément de  $\pi_0(\underline{\text{Hom}}_*(\mathbf{B}P, \mathbf{B}P))$  puis de  $K_{-1}(\mathbf{B}P)$ . Cet élément est un relèvement de  $\nu_1 = ([id_n])$  et sera choisi comme  $\beta_1$ . Il induit l'identité  $K_i(X) \rightarrow K_i(X)$  une fois choisies les identifications

$$\mathbf{K}(X) \xleftarrow{\sigma^{-1}} |\mathbf{B}P(\check{X})| \xrightarrow{\sigma} \mathbf{K}(X)$$

où  $\sigma$  est la limite des morphismes  $\sigma_{\mathcal{U}} : |\mathbf{B}P(N\mathcal{U})| \rightarrow \mathbf{K}(N\mathcal{U}) \simeq \mathbf{K}(X)$ .

Nous explicitons maintenant le cheminement entre  $\mathbf{R}_{\mathbf{Z}}(GL(n))$  et  $K_i(X)_{\mathbf{Q}}$  pour démontrer (iii).

On fixe un recouvrement ouvert rigide  $\mathcal{U}$  de  $X$  et on pose

$$BGL(n)(N\mathcal{U}) = \underline{\text{Hom}}_*(N\mathcal{U}, BGL(n))$$

$$BGL(0)(N\mathcal{U}) = *$$

$$\mathbf{M} = \coprod_{n \geq 0} |BGL(n)(N\mathcal{U})|.$$

La somme de Whitney munit  $\mathbf{M}$  d'une structure de monoïde topologique. Le classifiant de  $\mathbf{M}$  est l'espace  $|\mathbf{BL}(NU)|$ . On note  $\tilde{\mathbf{M}}$  l'espace  $\Omega|\mathbf{BL}(NU)|$ , le 'group completion' homotopique de  $\mathbf{M}$ . On pose

$$\mathbf{H} = \prod_{n \geq 0} K_0(BGL(n))$$

$$\mathbf{H}^{\text{prim}} = \{\text{éléments primitifs de } \mathbf{H}\}$$

si  $A$  et  $B$  sont deux espaces

$$[A, B] = \pi_0(\text{Map}_*(A, B)).$$

Une représentation  $\rho_n : GL(n) \rightarrow GL(m)$  induit des morphismes

$$\rho_{n,\mathcal{U}} : |BGL(n)(NU)| \rightarrow |BGL(m)(NU)|$$

$$\rho_n^* : K_0(BGL(m)) \rightarrow K_0(BGL(n))$$

tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} K_0(BGL(m)) & \longrightarrow & [ |BGL(m)(NU)|, \mathbf{K}(NU) ] \\ \downarrow \rho_n^* & & \downarrow \rho_{n,\mathcal{U}} \circ (-) \\ K_0(BGL(n)) & \longrightarrow & [ |BGL(n)(NU)|, \mathbf{K}(NU) ] \end{array}$$

**4.2.2.Lemme.** Si  $\rho_m : GL(m) \rightarrow GL(m')$  est une représentation de  $GL(n)$ , alors dans  $K_0(BGL(n))$  on a

$$\rho_n([\rho_m]) = [\rho_m \circ \rho_n].$$

*Démonstration.* C'est immédiat d'après la construction de la classe d'une représentation (3.1.1)  $\square$ .

Une suite  $\rho = (\rho_n)_{n \geq 0}$  de représentations  $\rho_n$  de  $GL(n)$  induit des morphismes  $\rho_{\mathcal{U}}$  et  $\rho^*$  qui s'inscrivent dans le diagramme commutatif

$$(4.2.3) \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{H} = \prod_{n \geq 0} K_0(BGL(n)) & \longrightarrow & [\mathbf{M}, \mathbf{K}(NU)] \\ \downarrow \rho^* & & \downarrow \rho_{\mathcal{U}} \circ (-) \\ \mathbf{H} & \longrightarrow & [\mathbf{M}, \mathbf{K}(NU)]. \end{array}$$

Si  $\rho$  est une suite de représentations virtuelles, c'est à dire une suite d'éléments  $\rho_n$  de  $\mathbf{R}_{\mathbf{Z}}(GL(n))$  alors  $\rho$  induit par linéarité des morphismes

$$\begin{array}{ccc} \rho^* : \mathbf{H} & \rightarrow & \mathbf{H} \\ \rho_{\mathcal{U}} : \mathbf{M} & \rightarrow & \tilde{\mathbf{M}}. \end{array}$$

Nous utilisons ici le principe de Quillen énoncé par Gillet et Grayson [G-G] "use algebra to add and topology to subtract".

**4.2.4.Lemme.** Si la classe  $[\rho]$  de  $\rho$  dans  $\mathbf{H}$  appartient à  $\mathbf{H}^{\text{prim}}$ , alors l'image de  $\rho^*$  est incluse dans  $\mathbf{H}^{\text{prim}}$ .

*Démonstration.* Si  $\rho$  est une suite de représentations, alors la propriété  $[\rho] \in \mathbf{H}^{\text{prim}}$  se traduit par le fait que  $\rho$  est compatible avec la somme de Whitney. En effet, on se ramène au cas  $\mathbf{H} = \text{Map}(G, G)$ , où  $G$  est un monoïde topologique. Si  $\rho \in \mathbf{H}$ , alors  $\Delta\rho \in \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}$  est défini par  $\Delta\rho(g_1, g_2) = \rho(g_1 \cdot g_2)$  pour des éléments  $g_1$  et  $g_2$  de  $G$ . Ainsi  $\rho$  est primitif dans  $\mathbf{H}$  si et seulement si c'est un morphisme de monoïdes. Dans ce cas, le morphisme  $\rho^*$  induit, est un morphisme de cogroupes et préserve les éléments primitifs. Comme ces propriétés se traduisent par des identités formelles, la démonstration s'étend au cas des représentations virtuelles  $\square$ .

Ainsi quand la classe est primitive, le morphisme  $\rho^*$  peut se relever en une application (non unique)

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\rho} : K_{-1}(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}} & \dots \rightarrow & K_{-1}(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbf{H}_{\mathbf{Q}}^{\text{prim}} \xrightarrow{\rho^*} \mathbf{H}_{\mathbf{Q}}^{\text{prim}}. \end{array}$$

Si  $\rho = (\Psi_k(id_n))$ , d'après le lemme 4.2.2, l'élément  $\tilde{\rho}^*(\beta_l)$  est un relèvement de

$$[\Psi_l \circ \Psi_k(id_n)]_{n \geq 0} = [\Psi_{kl}(id_n)] \in \mathbf{H}^{\text{prim}}.$$

On peut choisir  $\rho^*(\beta_l) = \beta_{lk}$  et définir une opération notée  $\beta_k^*$

$$\beta_k^* : K_{-1}(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}} \rightarrow K_{-1}(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}} \\ \beta_l \mapsto \beta_{lk}.$$

Il nous reste à vérifier que cette opération de  $K_{-1}(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}}$  correspond à la composition par  $\Psi_k$  sur  $K_i(X)_{\mathbf{Q}}$ . La démonstration de 4.2.1 prouve que le morphisme  $\rho_U : \mathbf{M} \rightarrow \tilde{\mathbf{M}}$  est compatible à la structure de monoïdes de  $\mathbf{M}$  et  $\tilde{\mathbf{M}}$  dès que la classe  $[\rho]$  est un élément de  $\mathbf{H}^{\text{prim}}$  et ce morphisme induit une application sur les classifiants

$$B\rho_U : B\mathbf{M} \rightarrow B\tilde{\mathbf{M}} \simeq B\mathbf{M} \simeq \mathbf{BL}(NU).$$

On peut suspendre le diagramme (4.2.3) en

$$\begin{array}{ccc} K_{-1}(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & [|\mathbf{BL}(NU)|, \mathbf{K}(NU)] \\ \downarrow \tilde{\rho}^* & & \downarrow B\rho_U \circ (-) \\ K_{-1}(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & [|\mathbf{BL}(NU)|, \mathbf{K}(NU)]_{\mathbf{Q}}. \end{array}$$

Par ailleurs le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} K_{-1}(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}} & \longrightarrow & [|\mathbf{BP}(NU)|, \mathbf{K}(NU)]_{\mathbf{Q}} \\ \downarrow \wr & & \downarrow \\ K_{-1}(\mathbf{BL}) & \longrightarrow & [|\mathbf{BL}(NU)|, \mathbf{K}(NU)]_{\mathbf{Q}} \end{array}$$

assure que rationnellement toute application  $|\mathbf{BL}(NU)| \rightarrow \mathbf{K}(NU)$  provenant d'un élément de  $K_{-1}(\mathbf{BP})$  se relève en une unique application  $|\mathbf{BP}(NU)| \rightarrow \mathbf{K}(NU)$ .

Ainsi rationnellement, peut-on représenter chaque opération  $\Psi_l$  par  $\tilde{\beta}_l^*(\beta_1)$  et un carré

$$\begin{array}{ccc} |\mathbf{BL}(NU)| & \xrightarrow{i_U} & |\mathbf{BP}(NU)| \\ \downarrow \beta_{l,U} & & \downarrow \tilde{\beta}_{l,U} \\ |\mathbf{BP}(NU)| & \xrightarrow{\sigma_U} & \mathbf{K}(NU) \end{array}$$

où  $i_U$  est induite par l'inclusion  $\mathbf{BL} \hookrightarrow \mathbf{BP}$  et  $\Psi_l$  est la limite des classes d'homotopie des  $\tilde{\beta}_{l,U}$ .

Notons qu'il est important d'avoir construit les applications  $\tilde{\beta}_{k,U}$  à partir d'opérations sur les  $K_{-1}(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}}$ . Si on essayait a priori de construire des opérations  $|\mathbf{BP}(NU)| \rightarrow |\mathbf{BP}(NU)|$ , on ne saurait comparer les applications définies pour différents recouvrements, ni évaluer l'impact sur les groupes d'homotopie des identifications  $BM \simeq |\mathbf{BL}(NU)|$ : la construction suggère que ces identifications peuvent introduire de la torsion.

La composition  $\Psi_k \circ \Psi_l$  se représente par le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} |\mathbf{BL}(NU)| & = & |\mathbf{BL}(NU)| & \xrightarrow{i_U} & |\mathbf{BP}(NU)| \\ \downarrow & & \downarrow \beta_{k,U} & & \downarrow \tilde{\beta}_{k,U} \\ |\mathbf{BL}(NU)| & \xrightarrow{i_U} & |\mathbf{BP}(NU)| & \xrightarrow{\sigma_U} & \mathbf{KN}(U) \\ \downarrow \beta_{l,U} & & \downarrow \tilde{\beta}_{l,U} & & \\ |\mathbf{BP}(NU)| & \xrightarrow{\sigma_U} & \mathbf{Kn}(U). & & \end{array}$$

où la colonne de gauche représente  $\beta_k^*(\beta_{l,U}) = \beta_{kl,U}$ , ce qui achève la démonstration de (iii).

On démontre (iv) de manière analogue en travaillant sur  $K_{-2}(\mathbf{BP} \times_S \mathbf{BP})_{\mathbf{Q}}$  au lieu de  $K_{-1}(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}}$ . Un élément de  $K_{-2}(\mathbf{BP} \times_S \mathbf{BP})_{\mathbf{Q}}$  induit des accouplements

$$K_i(X)_{\mathbf{Q}} \otimes K_j(X)_{\mathbf{Q}} \rightarrow K_{i+j}(X)_{\mathbf{Q}}.$$

Puisqu'on a

$$K_*(\mathbf{BP} \times_S \mathbf{BP})_{\mathbf{Q}} \simeq K_*(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}} \otimes_{K_*(S)_{\mathbf{Q}}} K_*(\mathbf{BP})_{\mathbf{Q}} \simeq K_*(S)[[\dots\beta_{k,k'}\dots]]$$

où  $\beta_{k,k'}$  provient de l'élément  $[\Psi_k(id_n) \otimes \Psi_{k'}(id_m)]$  de  $\prod_{n,m} K_0(BGL(n) \times BGL(m))$ , on montre que chaque élément  $\beta_{k,k'}$  induit les accouplements

$$\begin{array}{ccc} K_i(X)_{\mathbf{Q}} \otimes K_j(X)_{\mathbf{Q}} & \rightarrow & K_{i+j}(X)_{\mathbf{Q}} \\ (x, y) & \mapsto & \Psi_k(x) \cdot \Psi_{k'}(y). \end{array}$$

Par ailleurs l'accouplement (1.4)

$$\Psi : \mathbf{BP} \times_S \mathbf{BP} \rightarrow \mathbf{B}^{(2)}P$$

induit un morphisme

$$\Psi^* : K_{-2}(\mathbf{B}^{(2)}P)_{\mathbf{Q}} \rightarrow K_{-2}(\mathbf{B}P \times_S \mathbf{B}P)_{\mathbf{Q}}.$$

On vérifie que l'élément  $\Psi^*(\beta_k^{(2)})$  induit l'accouplement

$$\begin{array}{ccc} K_i(X)_{\mathbf{Q}} \otimes K_j(X)_{\mathbf{Q}} & \rightarrow & K_{i+j}(X)_{\mathbf{Q}} \\ (x, y) & \mapsto & \Psi_k(x \cdot y). \end{array}$$

On conclut en remarquant que l'élément  $\Psi^*(\beta_k^{(2)})$  provient de

$$[\Psi_k(id_n \otimes id_m)] \in \prod_{n,m} K_0(BGL(n) \times BGL(m))$$

et qu'on peut supposer  $\Psi^*(\beta_k^{(2)}) = \beta_{k,k}$ .

## Références

- [A-T] M. Atiyah, D.O. Tall, *Group representations,  $\lambda$ -rings and J-homomorphism*, Topology 8 (1969) 253-297.
- [B-K] A. K. Bousfield, D. K. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, Springer Lecture Notes in Math. 304 (1973).
- [Bo] A. Borel, *Topics in the homology theory of fibre bundles*, Springer Lecture Notes in Math. 36 (1967).
- [C] G. Carlsson, *On the algebraic K-theory of infinite product categories*, preprint (1995).
- [Ca] P. Cartier, *Hyperalgèbres et groupes de Lie formels*, Séminaire 'Sophus Lie' 2-ème année 1955/56, Faculté des Sciences de Paris
- [D] P. Deligne, *Théorie de Hodge III*, Publ. Math. I.H.E.S. 44 (1974), 5-78.
- [F] E. Friedlander, *Etale homotopy of simplicial schemes*, Ann. of Math. Studies, Princeton (1982).
- [G] H. Gillet, *Riemann- Roch for higher algebraic K-theory*, Adv. Math. 40 (1981), 203-289.
- [G-Gr] H. Gillet, D. Grayson, *On the loop space of the Q-construction*, Illinois J. of Math. 31 (1987), 574-597.
- [G-S] H. Gillet, C. Soulé, *Filtrations on higher algebraic K-theory*, non publié.
- [Gr] D. Grayson, *Adams operations on higher K-theory*, Ktheory 6 (1992) 97-111.
- [K] C. Kratzer,  *$\lambda$ -structure en K-théorie algébrique*, Comm. Math. Helv. no 55 (1980) 233-254.
- [M] J. P. May, *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, van Nostrand (1967).
- [Q1] D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. 90 (1969), 205-295.
- [Q2] D. Quillen, *Higher algebraic K-theory*, Higher K-theories, Springer Lecture Notes Math. 341 (1973), 85-147.



- [Sch] V. V. Schechtman, *On the delooping of Chern characters and Adams operations*, Springer Lecture Notes Math. 1289 (1988), 265-319.
- [Seg] G. Segal, *Categories and cohomology theories*, Topology 13 (1974), 293-312.
- [Ser] J.-P. Serre, *Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés*, Publ. Math. I.H.E.S. no. 34 (1968), 37-52.
- [SGA6] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Springer Lecture Notes Math. 225 (1971).
- [So] C. Soulé, *Opérations en K-théorie algébrique*, Can. J. Math. Vol. XXXVII no. 3 (1985) 488-550.
- [T] R. W. Thomason, *Algebraic K-theory and étale cohomology*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 18 (1985) 437-552.
- [T-T] R. W. Thomason, T. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, The Grothendieck Festschrift III, Progress in Math. 88, Birkhäuser 1990.
- [W1] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of free products*, Ann. of Math. 108 (1978) 135-204, 205-256.
- [W2] F. Waldhausen, *Algebraic K-theory of spaces*, Springer Lecture Notes Math. 1126 (1985) 318-419.

Institut de Recherche Mathématique Avancée  
 Université Louis Pasteur et CNRS  
 7 rue René Descartes  
 67084 Strasbourg Cedex, FRANCE