



**HAL**  
open science

# Identification Récursive des Systèmes à Dérivée Non Entière

Abdelbaki Djouambi, Alina Voda, Abdelfatah Charef

► **To cite this version:**

Abdelbaki Djouambi, Alina Voda, Abdelfatah Charef. Identification Récursive des Systèmes à Dérivée Non Entière. Journées Identification et Modélisation Expérimentale JIME'2006, Nov 2006, Poitier, France. hal-00126277

**HAL Id: hal-00126277**

**<https://hal.science/hal-00126277>**

Submitted on 24 Jan 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Identification Récursive des Systèmes à Dérivée Non Entière

Abdelbaki DJOUAMBI, Alina Voda BESANÇON et Abdelfatah CHAREF

Laboratoire d'Automatique de Grenoble LAG-ENSIEG  
BP 46 Rue de la Houille Blanche St Martin d'Hères 38402 France

djouambi@lag.ensieg.inpg.fr, alina.voda@lag.ensieg.inpg.fr  
http://www.lag.ensieg.inpg.fr

**Résumé**— Une nouvelle approche d'identification des systèmes d'ordre non entiers est présentée dans cet article. L'idée de base est d'étendre la méthode de l'identification paramétrique des moindres carrés récursifs au cas de systèmes à dérivée non entières. Le modèle considéré est de type ARX généralisé dont les ordres de dérivation sont distribués dans un intervalle réel fixé. La matrice de régression est composée de l'ensemble de dérivations non entières de l'équation différentielle généralisée à un instant donné. Une évaluation comparative en simulation par des exemples numériques ont montrés clairement la qualité de l'identification en utilisant cet approche par rapport aux résultats obtenus en utilisant la méthode des moindres carrés linéaires non récursifs. L'utilisation des variables instrumentales a permis d'améliorer la convergence asymptotique de l'algorithme des moindres carrés récursifs.

**Mots-clés**— Identification recursive, systèmes d'ordre non entier.

## I. INTRODUCTION

L'automatique consiste en l'étude des systèmes réels des différents disciplines scientifiques (electronique, mécanique, thermique, biologie, chimie...), en vue de l'analyse, de la prédiction, de la surveillance, de la commande, et de l'optimisation. La condition nécessaire pour cela est l'obtention d'un modèle mathématique du système réel. Un système est un objet dans le-quel des variables de différents types interagissent et produisent des signaux observables. Lorsque le modèle du système n'est pas connu, il est nécessaire de procéder à son identification.

L'identification a pour objet la détermination, généralement à partir de mesures physiques, des paramètres numériques d'un modèle, de telle sorte que dans le domaine de fonctionnement pour lequel il a été établi, ce modèle présente un comportement aussi proche que possible de celui du système réel.

L'analyse d'une large catégorie de processus physiques tel que le bruit électronique [10], les réseaux de télécommunication [9], l'hydrolique [4], la mécanique des fluides [8], la polarisation électro-électrolyte [3], montre que les tracés de Bode de ces systèmes sont caractérisés par une pente d'ordre non entier et par un comportement temporel régit par des équations différentielles d'ordre non entier. Ce type de processus est connu comme système d'ordre non entier ou système fractionnaire. L'utilisation des modèles entiers n'est donc pas convenable pour l'identification de ce type de systèmes. Alors, une nouvelle catégorie de modèles appelés modèles d'ordre non entier, basés sur le concept de la différentiation non entière a été développée [2], [5], [1].

Identifier un modèle à partir de données réelles devient difficile lorsque l'ordre non entier est introduit. Pour un modèle entier, une fois l'ordre maximal du système à identifier fixé, les paramètres du modèle peuvent être optimisés directement, alors, que l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire nécessite le choix du nombre d'opérateurs non entiers, la puissance non entière de chaque opérateur et les coefficients des opérateurs.

Plusieurs modèles et plusieurs méthodes ont été proposés, voir [2]. Dans plusieurs cas de systèmes dont les paramètres varient dans le temps, ou dans le cas de systèmes de commandes où il faut prendre des décisions en ligne comme dans la commande adaptative, il est nécessaire, voir obligatoire d'estimer les paramètres du modèle en temps réel ou en même temps que l'acquisition de données entrées-sorties. Pour cela, des méthodes récursives ont été utilisées avec des systèmes ordinaires linéaires ou non linéaire [6].

Cet article présente une extension de la méthode d'identification des moindres carrés récursifs aux systèmes d'ordre non entiers en utilisant la structure ARX généralisée.

L'article est organisé comme suit : la section II présente une méthode de simulation des systèmes d'ordre non entiers basée sur la discrétisation de l'équation différentielle généralisée. Une extension de la l'algorithme des moindres carrés récursifs pour l'identification des systèmes à dérivée non entière est développée dans la section III. En fin, afin de valider les performances de la méthode proposée, et de comparer les résultats obtenus par cet approche avec celles obtenus par la méthode des moindres carrés linéaires présentée dans [1], des exemples numériques de l'identification par modèles non entiers à partir de données issues de la simulation d'un modèle à dérivée non entière est présentés dans la section IV.

## II. SIMULATION DE SYSTÈMES D'ORDRE NON ENTIER

Considérons l'équation différentielle généralisée donnée par l'équation suivante

$$\sum_{i=0}^L a_i d^{m_{a_i}} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j d^{n_{b_j}} u(t) \quad (1)$$

avec  $n_{a_j}, n_{b_i} \in \mathbb{R}^+$ ,  $i \in [0, L]$ ,  $j \in [0, M]$ .

La simulation du système décrit par (1) est basée sur la discrétisation de cette équation en utilisant la définition de Grünwald-Letnikov, voir [5]. Pour  $t = Nh$  ( $N$  : entier) nous

avons

$$d^n y(t) = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{n}{k} y(t-k) \quad (2)$$

où  $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ .

La solution de l'équation différentielle (1) discrétisée pour  $t > 0$  peut être donnée par l'équation suivante :

$$y(t) = - \frac{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}} \sum_{k=1}^t (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y(t-k)}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}} + \frac{\sum_{m=0}^M \frac{b_m}{h^{n_{b_m}}} \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{n_{b_m}}{k} u(t-k)}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}} \quad (3)$$

une forme linéaire de l'équation (3) peut être donnée par :

$$y(t) = - \sum_{l=0}^L a'_l Y_l(t) + \sum_{m=0}^M b'_m U_m(t) \quad (4)$$

avec

$$a'_l = \frac{\frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}}, \quad 0 \leq l \leq L, \quad \sum_{l=0}^L a'_l = 1 \quad (5)$$

$$b'_m = \frac{\frac{b_m}{h^{n_{b_m}}}}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}}, \quad 0 \leq m \leq M \quad (6)$$

$$Y_l(t) = \sum_{k=1}^t (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y(t-k) \quad (7)$$

$$U_m(t) = \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{n_{b_m}}{k} u(t-k) \quad (8)$$

L'équation (4) présente une forme linéaire de la sortie du système par rapport aux nouveaux paramètres :

$$\theta = (a'_0, \dots, a'_L, b'_0, \dots, b'_M)^T \quad (9)$$

définissant une matrice de régression par

$$\phi = [-Y_0(t), \dots, -Y_L(t), U_0(t), \dots, U_M(t)]^T \quad (10)$$

Alors, l'équation (4) peut être donnée sous sa forme matricielle par l'équation suivante :

$$y(t, \theta) = \theta^T \phi(t) \quad (11)$$

### III. ESTIMATION PARAMETRIQUE RECURSIVE DU MODÈLE NON ENTIER DISCRET

#### A. Méthode des moindres carrés récursifs

Le modèle typique considéré ici est de type ARX généralisé donné par l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{i=0}^L a_i d^{n_{a_i}} y(t) = \sum_{j=0}^M b_j d^{n_{b_j}} u(t) + e(t) \quad (12)$$

avec  $n_{a_j}, n_{b_i} \in \mathbb{R}^+$ ,  $i \in [0, L]$ ,  $j \in [0, M]$ , et  $e(t)$  représente un bruit stochastique.

Introduisons la matrice de régression définie par l'équation (10), alors, l'équation (12) peut être réécrite sous la forme :

$$y(t, \theta) = \theta^T \phi(t) + e'(t) \quad (13)$$

où

$$e'(t) = \frac{e(t)}{\sum_{l=0}^L \frac{a_l}{h^{n_{a_l}}}} \quad (14)$$

représente le nouveau terme de bruit.

Le vecteur de paramètres  $\theta$  dans l'équation (13) est supposé inconnu. L'identification considérée ici consiste en la détermination de ce vecteur en utilisant un ensemble de données entrées/sorties. Pour cela, si le caractère de bruit n'est pas spécifié, on peut considérer le modèle de prédiction donnée par l'équation suivante :

$$\hat{y}(t, \hat{\theta}) = \hat{\theta}^T \phi(t) \quad (15)$$

L'estimation de nouveaux paramètres devant s'effectuer sous la contrainte  $\sum_{l=0}^L a'_l = 1$  (relation 5), un jeu d'écriture tel que  $a'_0 = 1 - \sum_{l=1}^L a'_l$  permet d'exprimer une estimation de la sortie du modèle linéairement et sans contrainte par rapport au nouveau vecteur de paramètres donné par :

$$\hat{\theta}_r = (\hat{a}'_1, \dots, \hat{a}'_L, \hat{b}'_0, \dots, \hat{b}'_M)^T \quad (16)$$

soit

$$\hat{y}(t) = -Y_0(t) - \sum_{l=1}^L \hat{a}'_l (Y_l(t) - Y_0(t)) + \sum_{m=0}^M \hat{b}'_m U_m(t) \quad (17)$$

ou, sous sa forme matricielle :

$$\hat{y}(t, \hat{\theta}_r) = -Y_0(t) + \hat{\theta}_r^T \phi_r(t) \quad (18)$$

avec

$$\phi_r(t) = [-Y_1(t) + Y_0(t), \dots, -Y_L(t) + Y_0(t), U_0(t), \dots, U_M(t)]^T \quad (19)$$

Le principe général de l'estimation paramétrique par la méthode des moindres carrés récursifs dans le cas de systèmes à dérivée non entière considérés ici est donné par le schéma de la figure (1)

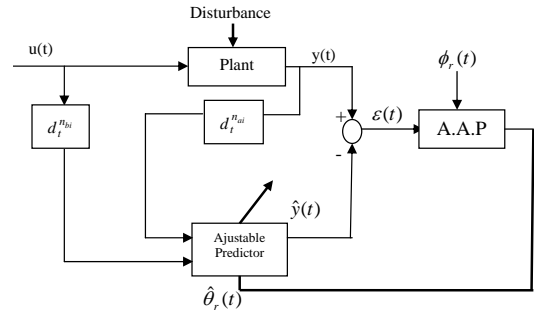


Fig. 1. Schéma de principe de l'estimation récursive par MCR

Le problème de l'estimation se formalise maintenant par la recherche d'un vecteur de paramètre  $\hat{\theta}_r$ , minimisant un critère quadratique donné par l'équation suivante :

$$J_t(\hat{\theta}_r) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^t [y(k) - \hat{y}(k, \hat{\theta}_r)]^2 \quad (20)$$

La solution de ce problème au sens des moindres carrés donne :

$$\hat{\theta}_r = \left[ \sum_{k=0}^t \phi_r(k) \phi_r^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=0}^t \phi_r(k) [y(k) + Y_0(k)] \quad (21)$$

Pour notre objectif ici, il est important d'exprimer (21) sous forme récursive.

Soit

$$F(t) = \left[ \sum_{k=0}^t \phi_r(k) \phi_r^T(k) \right]^{-1} \quad (22)$$

alors

$$F^{-1}(t) = F^{-1}(t-1) + \phi_r(t) \phi_r^T(t) \quad (23)$$

l'équation (21) peut être réécrite sous la forme :

$$\hat{\theta}_r(t) = F(t) \left( \sum_{k=0}^{t-1} \phi_r(k) [y(k) + Y_0(k)] + \phi_r(t) [y(t) + Y_0(t)] \right) \quad (24)$$

Mais, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{t-1} \phi_r(k) [y(k) + Y_0(k)] &= F^{-1}(t-1) \hat{\theta}_r(t-1) \\ &= [F^{-1}(t) - \phi_r(t) \phi_r^T(t)] \hat{\theta}_r(t-1) \end{aligned} \quad (25)$$

Substituant (25) dans (24), on aura

$$\hat{\theta}_r(t) = \hat{\theta}_r(t-1) - F(t) \phi_r(t) \phi_r^T(t) \hat{\theta}_r(t-1) + F(t) \phi_r(t) [y(t) + Y_0(t)] \quad (26)$$

l'équation (26) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\hat{\theta}_r(t) = \hat{\theta}_r(t-1) + F(t) \phi_r(t) [(y(t) + Y_0(t)) - \phi_r^T(t) \hat{\theta}_r(t-1)] \quad (27)$$

à partir de l'équation (23) on aura

$$F(t) = [F^{-1}(t-1) + \phi_r(t) \phi_r^T(t)]^{-1} \quad (28)$$

introduisons le lemme de l'inversion matricielle :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1} \quad (29)$$

avec  $A = F^{-1}(t-1)$ ,  $B = \phi_r(t)$ ,  $C = I$ ,  $D = \phi_r^T(t)$ , on aura

$$\begin{cases} \hat{\theta}_r(t) = \hat{\theta}_r(t-1) + \frac{F(t-1)\phi_r(t)}{1+\phi_r^T(t)F(t-1)\phi_r(t)} [y(t) - (\hat{\theta}_r^T(t-1)\phi_r(t) - Y_0(t))] \\ F(t) = F(t-1) - \frac{F(t-1)\phi_r(t)\phi_r^T(t)F(t-1)}{1+\phi_r^T(t)F(t-1)\phi_r(t)} \end{cases} \quad (30)$$

L'équation (30) présente l'algorithme récursif des moindres carrés, dans lequel nous avons introduit une nouvelle composition de la matrice de régression  $\phi_r$  définie par (19) avec une nouvelle formulation du vecteur de paramètres  $\hat{\theta}_r$  donné par (16).

Pour que l'algorithme des moindres carrés récursifs soit exactement équivalent à l'algorithme non récursif des moindres carrés, il faut que l'algorithme commence par la première estimation obtenue à l'instant  $t = \dim\phi(t)$  [7]. En pratique l'algorithme commence à l'instant  $t = 0$  avec :

$$F(0) = \frac{1}{\delta} I, 0 < \delta \ll 1 \quad (31)$$

Dans le cas de systèmes dont les paramètres varient lentement avec le temps, il est important de donner plus d'importance aux nouvelles données. Une approche pour cela est de modifier le critère quadratique de minimisation en utilisant un facteur d'oubli  $\lambda$

$$J_t(\hat{\theta}_r) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^t \lambda^{t-k} [y(k) - \hat{y}(k, \hat{\theta}_r)]^2 \quad (32)$$

avec  $0 < \lambda < 1$ .

L'algorithme des moindres carrés récursifs avec facteur d'oubli aura la forme donnée par l'équation suivante :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_r(t) = \hat{\theta}_r(t-1) + \frac{F(t-1)\phi_r(t)}{\lambda + \phi_r^T(t)F(t-1)\phi_r(t)} [y(t) - (\hat{\theta}_r^T(t-1)\phi_r(t) - Y_0(t))] \\ F(t) = \frac{1}{\lambda} [F(t-1) - \frac{F(t-1)\phi_r(t)\phi_r^T(t)F(t-1)}{\lambda + \phi_r^T(t)F(t-1)\phi_r(t)}] \end{cases} \quad (33)$$

Les coefficients  $a_l (l = 1, 2, \dots, L)$  se déduisent par la résolution du système linéaire suivant ( $a_0$  étant fixé à 1)

$$\begin{pmatrix} (a'_1 - 1)h^{-n_{a1}} & a'_1 h^{-n_{a2}} & \dots & a'_1 h^{-n_{aL}} \\ a'_2 h^{-n_{a1}} & (a'_2 - 1)h^{-n_{a2}} & \dots & a'_2 h^{-n_{aL}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_L h^{-n_{a1}} & a'_L h^{-n_{a2}} & \dots & (a'_L - 1)h^{-n_{aL}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a'_1 h^{-n_{a0}} \\ -a'_2 h^{-n_{a0}} \\ \vdots \\ -a'_L h^{-n_{a0}} \end{pmatrix}$$

Les coefficients  $b_m (m = 0, 1, \dots, M)$  s'expriment alors par :

$$b_m = b'_m \sum_{l=0}^L a_l h^{n_{bm} - n_{al}} \quad (34)$$

*Analyse du biais de l'estimation*

Supposant que les données E/S de l'identification sont générées par un système décrit par (12). La forme régressive de cet équation peut être donnée par :

$$y(t, \theta_r) = -Y_0(t) + \theta_r^T \phi_r(t) + e'(t) \quad (35)$$

en substituant cet équation dans (21), on aura, voir [6]

$$\hat{\theta}_r = \theta_r + \left[ \frac{1}{t} \sum_{k=0}^t \phi_r(k) \phi_r^T(k) \right]^{-1} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^t \phi_r(k) [e'(k)] \quad (36)$$

avec  $\theta_r$  le vecteur de paramètres du système réel.

La relation (36) révèle que l'estimation est asymptotiquement biaisée. La cause principale de ce biais provient de la corrélation entre le signal  $e'(t)$  et le signal  $y(t)$  qui est contenu dans la matrice de régression  $\phi_r$ . L'estimation est non biaisée seulement dans le cas où  $e'(t)$  et  $\phi_r(t)$  sont non corrélées ( $E[e'(t)\phi_r(t)] = 0$ ). Cela est vrai dans les deux cas suivants :

-  $e'(t)$  est un bruit blanc.

- l'entrée  $u(t)$  est indépendante du  $e'(t)$  et  $n_{ai} = 0 (i = 0, 1, \dots, L)$ , donc  $\phi_r(t)$  contient seulement les termes relatives aux mesures de l'entrée d'excitation.

Afin de résoudre ce problème, on remplace le vecteur d'observation  $\phi_r(t)$  dans l'équation (21) par un autre vecteur non corrélé avec le bruit  $e'(t)$ . Une telle méthode est appelée méthode des variables instrumentales [6] et [7].

### B. Méthode des variables instrumentales récursives

Le principe général de cette méthode consiste en la construction d'un nouveau vecteur d'observation  $\xi_r$  composé des données non corrélées avec le bruit, de tel sorte que le vecteur des paramètres  $\hat{\theta}_r$  vérifie le système d'équation suivant :

$$\frac{1}{t} \sum_{k=0}^t \xi_r(k) e'(k) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^t \xi_r(k) [y(k) - \hat{y}(k, \hat{\theta}_r)] = 0 \quad (37)$$

Sachant que  $\hat{y}(k, \hat{\theta}_r)$  est donné par l'équation (18) et si  $\dim(\xi_r) = \dim(\vartheta_r)$ , alors, (37) donne :

$$\hat{\theta}_r = \left[ \sum_{k=0}^t \xi_r(k) \phi_r^T(k) \right]^{-1} \sum_{k=0}^t \xi_r(k) [y(k) + Y_0(k)] \quad (38)$$

Par analogie au développement de la section (III.A), la forme récursive de (38) sera donnée par :

$$\begin{cases} \hat{\theta}_r(t) = \hat{\theta}_r(t-1) + \frac{F(t-1)\xi_r(t)}{1+\phi_r^T(t)F(t-1)\xi_r(t)} [y(t) - (\hat{\theta}_r^T(t-1)\phi_r(t) - Y_0(t))] \\ F(t) = F(t-1) - \frac{F(t-1)\xi_r(t)\phi_r^T(t)F(t-1)}{1+\phi_r^T(t)F(t-1)\xi_r(t)} \end{cases} \quad (39)$$

Généralement, le vecteur de régression  $\xi_r$  est composé de données issus de la simulation d'un modèle auxiliaire dont la dynamique est proche de celle du système à identifier. Un modèle possible dans notre cas ici est donné par l'équation suivante :

$$\sum_{i=0}^L \hat{a}_i d^{n_{a_i}} y^{IV}(t) = \sum_{j=0}^M \hat{b}_j d^{n_{b_j}} u(t) \quad (40)$$

où, les coefficients  $\hat{a}_i, \hat{b}_j$  sont les paramètres estimés à l'instant  $t-1$ .

La sortie de ce système peut être exprimée par (voir section (III.A)) :

$$y^{IV}(t, \hat{\theta}_r) = -Y_0^{IV}(t) + \hat{\theta}_r^T \xi_r(t) \quad (41)$$

avec

$$\xi_r(t) = [-Y_1^{IV}(t) + Y_0^{IV}(t), \dots, -Y_L^{IV}(t) + Y_0^{IV}(t), U_0(t), \dots, U_M(t)]^T \quad (42)$$

$$Y_l^{IV}(t) = \sum_{k=1}^t (-1)^k \binom{n_{a_l}}{k} y^{IV}(t-k), l = 0, \dots, L \quad (43)$$

### IV. EXEMPLES D'APPLICATIONS

L'objectif de ce paragraphe est de valider les techniques de l'identification par modèle non entier et de comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus avec la méthode des moindres carrés non-récursifs. Le modèle considéré est un ARX généralisé dont les coefficients sont supposés inconnus, les ordres de dérivations non entières sont supposés distribués dans l'intervalle  $[0,2]$ . Les mesures sont construites à partir de 100 paires E/S issus de la simulation d'un système régi par l'équation différentielle généralisée donnée par l'équation (44) en

utilisant une entrée d'excitation SBPA avec un pas d'échantillonnage  $h = 0.5 \text{ sec}$

$$10\left(\frac{d}{dt}\right)^{1.5}y(t) + 5\left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5}y(t) + y(t) = 100u(t) + e(t) \quad (44)$$

où  $e(t)$  est un bruit blanc.

Deux cas peuvent être présentés ici :

#### A. Cas de données non bruitées : ( $e(t)$ est supposé nul)

Trois modèles différents de type ARX à dérivées généralisées peuvent être sélectionnés pour l'identification du système considéré en utilisant l'algorithme des moindres carrés récursifs (MCR)

##### A.1 Le modèle à identifier a la même structure que celle du système simulé (système réel) :

$$a_2\left(\frac{d}{dt}\right)^{1.5}y(t) + a_1\left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5}y(t) + y(t) = b_0u(t) \quad (45)$$

Les paramètres inconnus sont les coefficients  $[b_0, a_1, a_2]$ . L'algorithme de MCR est initialisé comme suit :

$$F(0) = \frac{1}{0.001} I, \quad \hat{\theta}_r(0) = [0, 0, 0], \quad \lambda = 0.95$$

La figure (2) présente l'évolution avec le temps des paramètres estimés en utilisant la méthode des MCR. Elle montre bien la rapidité de convergence de l'algorithme vers les paramètres réels.

Les équations (46) et (47) donnent les résultats de l'identification obtenus par la méthode des MCR et ceux obtenus par la méthode des moindres carrés linéaires (MCL) respectivement

$$10.000\left(\frac{d}{dt}\right)^{1.5}y(t) + 5.000\left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5}y(t) + y(t) = 100.000u(t) \quad (46)$$

$$10.045\left(\frac{d}{dt}\right)^{1.5}y(t) + 5.022\left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5}y(t) + y(t) = 99.900u(t) \quad (47)$$

Ces résultats montrent la qualité de l'estimation par la méthode des MCR par rapport à ceux obtenus par la méthode des MCL ; les paramètres identifiés par MCR sont pratiquement identiques à ceux du système réel.

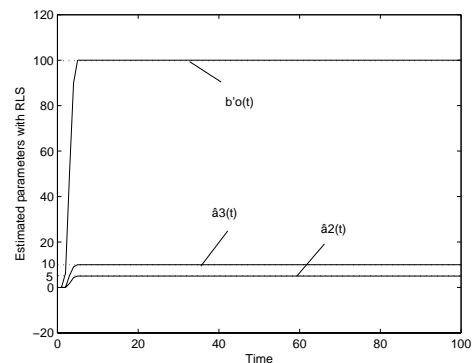


Fig. 2. Evolution des paramètres estimés du modèle (45) avec MCR (données non bruitées)

A.2 La structure du modèle à identifier contient celle du système réel

Considérons le modèle ARX généralisé donné par l'équation suivante :

$$a_4 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.8} y(t) + a_3 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.5} y(t) + a_2 \left(\frac{d}{dt}\right)^1 y(t) + a_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5} y(t) + y(t) = b_0 u(t) + b_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5} u(t) \quad (48)$$

Les paramètres à identifier sont les coefficients  $[b_0, b_1, a_1, a_2, a_3, a_4]$ . L'algorithme est initialisé comme suit :

$$F(0) = \frac{1}{0.01} I, \quad \hat{\theta}_r(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0], \quad \lambda = 0.95$$

Les équations (49) et (50) donnent les résultats de l'identification en utilisant les MCR et MCL respectivement

$$0.000 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.8} y(t) + 10.000 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.5} y(t) + 0.000 \left(\frac{d}{dt}\right)^1 y(t) + 5.000 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5} y(t) + y(t) = 100.000 u(t) + 0.000 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5} u(t) \quad (49)$$

$$-0.259 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.8} y(t) + 9.894 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.5} y(t) - 0.003 \left(\frac{d}{dt}\right)^1 y(t) + 4.837 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5} y(t) + y(t) = 97.766 u(t) - 1.555 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5} u(t) \quad (50)$$

Ces résultats montrent clairement que le modèle obtenu par la méthode des MCR est identique à celui du système à identifier, ce qui est n'est pas exactement le cas avec le modèle obtenu avec les MCL.

A.3 Les ordres de dérivation du système à identifier sont différents de ceux du système réel

Le modèle proposé ici est un ARX généralisé dont les ordres de dérivation sont arbitrairement distribués dans l'intervalle  $[0, 2]$  et différents de ceux du système à identifier,

$$a_4 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.6} y(t) + a_3 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.4} y(t) + a_2 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.6} y(t) + a_1 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.4} y(t) + y(t) = b_0 u(t) \quad (51)$$

L'algorithme est initialisé comme suit :

$$F(0) = \frac{1}{0.01} I, \quad \hat{\theta}_r(0) = [0, 0, 0, 0], \quad \lambda = 0.95$$

les équations (52) et (53) présentent les résultats de l'identification obtenus par les méthodes MCR et MCL respectivement

$$4.838 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.6} y(t) + 6.108 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.4} y(t) + 2.491 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.6} y(t) + 2.869 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.4} y(t) + y(t) = 108.155 u(t) \quad (52)$$

$$4.892 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.6} y(t) + 6.251 \left(\frac{d}{dt}\right)^{1.4} y(t) + 2.393 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.6} y(t) + 3.038 \left(\frac{d}{dt}\right)^{0.4} y(t) + y(t) = 108.155 u(t) \quad (53)$$

Afin de valider les modèles obtenus par l'identification précédente, les figures (3) et (4) illustrent les performances temporelles et fréquentielles de l'identification en utilisant la méthode des MCR et les figures (5) et (6) illustrent celle obtenues par MCL. La superposition des réponses indicielles et des diagrammes de Bode du système identifié par MCR et celle du système simulé montre la qualité de l'estimation par cette approche par rapport à celle obtenue par MCL.

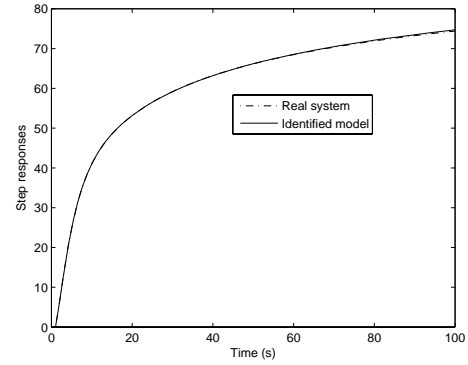


Fig. 3. Réponse indicielle du modèle (51) identifié par MCR et du système réel (44)

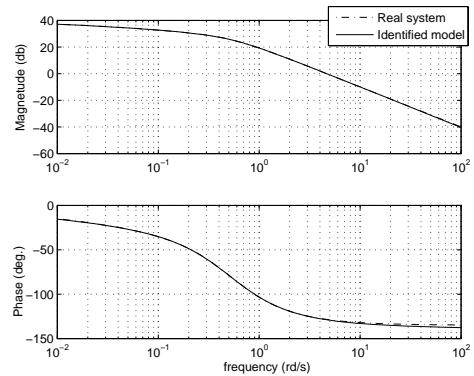


Fig. 4. Diagramme de Bode du modèle (51) identifié par MCR et du système réel (44)

## B. Cas de données bruitées

L'objectif de cet exemple est de valider la technique d'identification par modèle non entier en utilisant la méthode des moindres carrés récursifs et la méthode des variables instrumentales récursives lorsque les données d'identification sont bruitées par un bruit blanc. Le système à identifier est donné par l'équation différentielle (44). Le signal  $e(t)$  est un bruit blanc de variance  $\sigma^2 = 0.32$  et de moyenne nulle.

Le modèle sur lequel porte l'identification est un modèle non entier de type (45). L'algorithme est initialisé comme suit :

$$F(0) = \frac{1}{0.001} I, \quad \hat{\theta}_r(0) = [0, 0, 0], \quad \lambda = 0.96$$

Les figures (7) et (8) présentent l'évolution de l'estimation en utilisant la méthode des moindres carrés récursifs (MCR) et celle des variables instrumentales récursives (VIR) respectivement. Les équations (54), (55) et (56) présentent les résultats de l'identification en utilisant la méthode des MCR, la

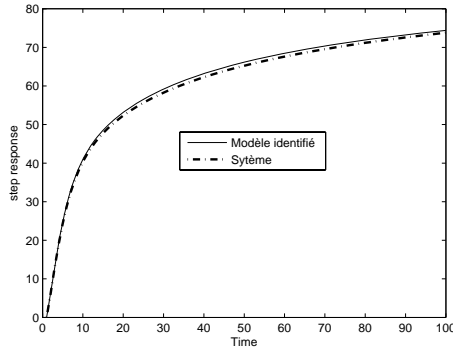


Fig. 5. Réponse indicielle du système (51) identifié par MCL et du système réel (44)

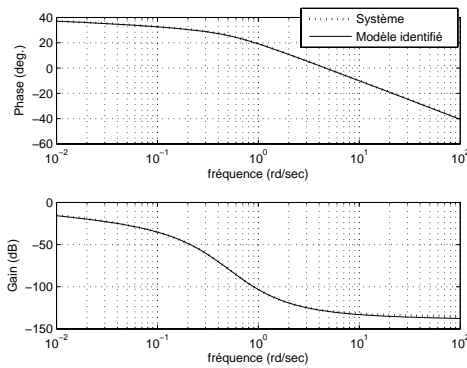


Fig. 6. Diagramme de Bode du système (51) identifié par MCL et du système réel (44)

méthode VIR et celle des MCL respectivement. L'ensemble des résultats obtenus montre que la méthode des moindres carrés récursifs est moins sensible au bruit en comparaison avec la méthode des MCL. L'introduction des variables instrumentales a amélioré la rapidité de convergence de l'algorithme et la précision de l'estimation.

$$10.128\left(\frac{d}{dt}\right)^{1.5}y(t) + 5.115\left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5}y(t) + y(t) = 100.480u(t) \quad (54)$$

$$10.080\left(\frac{d}{dt}\right)^{1.5}y(t) + 5.076\left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5}y(t) + y(t) = 100.092u(t) \quad (55)$$

$$9.937\left(\frac{d}{dt}\right)^{1.5}y(t) + 4.954\left(\frac{d}{dt}\right)^{0.5}y(t) + y(t) = 98.299u(t) \quad (56)$$

## V. CONCLUSION

Une méthode d'identification récursive des systèmes à dérivée non entière est présentée. Il s'agit d'une extension de la méthode des moindres carrés récursifs au cas de systèmes à dérivée non entière. Le modèle utilisé est de type ARX généralisé. Les ordres de dérivation sont préalablement distribués dans un intervalle réel fixé, les coefficients des opérateurs différentiels sont estimés en même temps que l'acquisition de données entrées/sorties du système. Bien que cette méthode présente l'avantage de manipuler des matrices de données de dimension réduite et de suivre l'évolution des paramètres dans le cas des systèmes variants dans le temps, l'analyse par

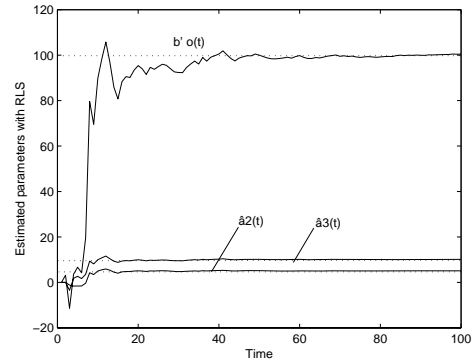


Fig. 7. Evolution des paramètres estimés du modèle (45) avec MCR (données bruitées).

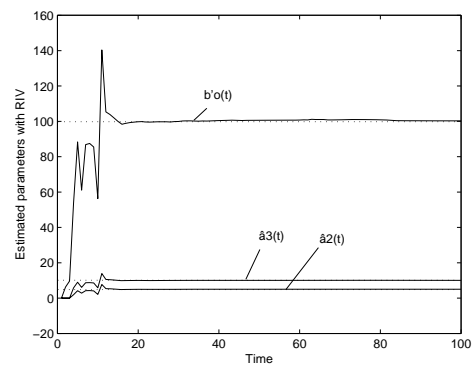


Fig. 8. Evolution des paramètres estimés du modèle (45) avec VIR (données bruitées).

simulation numérique d'un modèle typique nous a montré les performances caractéristiques de cette méthode par rapport à celle obtenues en utilisant la méthode des moindres carrés linéaires non-récursifs. Ces performances sont considérablement améliorées en introduisant des variables instrumentales avec un modèle auxiliaires non entier.

## RÉFÉRENCES

- [1] Olivier Cois. Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier application en thermique. *Thèse de Doctorat*, 2002.
- [2] Oustaloup A. et al. Représentation et identification par modèle non entier. *LAVOISIER*, 2005.
- [3] Sun H. and Onaral B. A unified approach to represent metal electrode interface. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME-31, 1984.
- [4] Black R. P. Hurst H. E. and Sinaika Y. M. Long term storage in reservoirs. an experimental study. 1965.
- [5] Le Lay L. Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier. *Ph. D. Thesis*, 1998.
- [6] Ljung L. and Söderström T. Theory and practice of recursive identification. *Press, Cambridge*, 1983.
- [7] Lozano R. Landau I. D. and M'Saad M. Adaptive control. *Springer*, 1998.
- [8] Scotti A. Meneveau S.G. Fractal dimension of velocity signals in high-reynolds-numbers hydrodynamic turbulence. *Physical Review*, 51 :5594–5608, 1995.
- [9] Leland W.E. Wilson V. Wilinger W., Taquq M.S. Self-similarity in high-speed packed traffic : analysis and modelling of ethernet traffic measurements. *Statistical Science*, 10 :676–685, 1995.
- [10] Van Der Ziel. Unified presentation of 1/f noise in electronic devices : fundamental 1/f noise sources. volume 76, pages 233–258, 1988.