HAL open science

Champs de Hurwitz

José Bertin, Matthieu Romagny

To cite this version:

José Bertin, Matthieu Romagny. Champs de Hurwitz. 2007. hal-00126173

HAL Id: hal-00126173

https://hal.science/hal-00126173

Preprint submitted on 23 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Janvier 2007 version 2

CHAMPS DE HURWITZ

par

José Bertin et Matthieu Romagny

Institut Fourier, Université de Grenoble 1, F
Institut de Mathématiques de Jussieu, Université de Paris 6, F
E–mail: jose.bertin@ujf-grenoble.fr, romagny@math.jussieu.fr

Abstract

In this work we give a thorough study of Hurwitz stacks and associated Hurwitz moduli spaces, both in Galois and non Galois case. We compare our construction to those proposed by Harris-Mumford, Abramovich-Corti-Vistoli and Mochizuki-Wewers. We apply our results to revisit some classical examples, particularly the stacks of stable curves equipped with an arbitrary level-structure, and the stack of tamely ramified cyclic covers. In a second part we exhibit some tautological bundles and cohomology classes naturally living on Hurwitz stacks, and give some universal relations, in particular a higher analogue of the Riemann-Hurwitz formula, between these classes. Applications are given to the stack of cyclic covers of the projective line, with special attention to Cornalba-Harris type relations and to Hyperelliptic Hodge integrals.

Subject class: 14D15,14D20,14D22,14H30. Mots clés: algebraic stack, covering of curves, formal deformation, group action, moduli of curves.

hal-00126173, version 1 - 23 Jan 2007

Contenu

1. Introduction, Contenu
2. Classification des revêtements
   2.1. Actions de groupes et revêtements
   2.2. Donnée de Hurwitz
   2.3. Nombre de Nielsen
3. Familles de G-courbes lisses
   3.1. Géométrie du diviseur de branchement
   3.2. Inversion de la formule de Chevalley - Weil
4. Familles de G-courbes stables
   4.1. Actions stables, revêtements stables
   4.2. Collision des points de ramification
   4.3. Courbes stables marquées et actions de groupes
5. Déformations des revêtements modérément ramifiés
   5.1. Déformations équivariantes des courbes
   5.2. Déformations des revêtements modérément ramifiés
   5.3. Modèle stable marqué d'un revêtement
6. Champs de Hurwitz
   6.1. G-champs et champs quotients
   6.2. Champs de Hurwitz
   6.3. Compactification du schéma de Hurwitz: Gieseker-Mumford
   6.4. Compactification stable du champ de Hurwitz (II)
   6.5. Champs de revêtements stables: cas non galoisien
7. Graphes et revêtements
   7.1. Graphes modulaires de Hurwitz
   7.2. Graphes de groupes et revêtements de graphes
   7.3. Groupe de Picard et revêtements
   7.4. Stratification canonique du bord
   7.5. Type topologique d'un point du bord
8. Structures de niveau sur les courbes stables
   8.1. Le champ des courbes stables avec structure de niveau G
   8.2. Le niveau abélien (n)
9. Revêtements cycliques
   9.1. Revêtements cycliques versus racines d'un faisceau inversible
   9.2. Revêtements cycliques stables
   9.3. Le champ ouvert des revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1$
10. Groupe de Picard et classes tautologiques
   10.1. Fibré de Hodge
   10.2. Les fibrés en droites $\psi_{i,\chi}$ et $\mu_{i,v}$
   10.3. Relations de Riemann-Hurwitz d'ordre supérieur
   10.4. Revêtements cycliques

1. Introduction.

L'objectif de ce travail est l'étude systématique des champs de revêtements modérément ramifiés entre courbes algébriques. Rappelons que classiquement [35], par *espace de Hurwitz*, on entend la variété algébrique $H_{g,d}$ paramétrant les revêtements $\pi : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ de degré d de la droite projective, par une courbe lisse de genre g, et définis sur un corps algébriquement clos k. *Modéré* signifie que l'ordre du groupe de monodromie, c'est-à-dire le groupe de Galois de la clôture galoisienne, a un ordre premier à la caractéristique p de k, si $p > 0$. Ces espaces (ou mieux les champs associés $\mathcal{H}_{g,d}$), et leurs compactifications naturelles $\overline{H}_{g,d}$ et $\overline{\mathcal{H}}_{g,d}$, jouent un rôle significatif dans de nombreuses questions. Citons comme exemples du côté arithmétique, la formulation géométrique du problème de Galois inverse par Fried [32], Fried-Völklein [34], mais aussi la généralisation des tours modulaires suggérée par Fried [33]. Du côté géométrique les récents et profonds développements autour de l'étude asymptotique des nombres de Hurwitz, en d'autres termes la théorie de Gromov-Witten sur $\mathbb{P}^1$, développée par Okounkov-Pandharipande [59], Graber-Vakil [38], et Ekedahl-Lando-Shapiro-Vainshtein [27] ont une expression en termes de champs de Hurwitz. Signalons aussi l'étude parallèle à certains égards de l'espace des modules des courbes avec structure de spin (dans un sens généralisé) par Jarvis [43], [44], et Jarvis-Kimura [45]. Un point de vue différent, celui des applications stables de Kontsevich $C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ [49], [53], s'est imposé comme une approche alternative pour aborder ce genre de questions, du moins lorsque la base est rigide. Il n'est pas utilisé dans notre travail.

Les champs de Hurwitz seront essentiellement vus comme correspondances entre espaces de modules de courbes. C'est cette position qui a été la motivation principale pour entreprendre le présent travail. On notera que la construction des espaces modulaires de Hurwitz a été abordée à plusieurs reprises dans la littérature, mais sous des angles particuliers, le plus souvent pour les revêtements de base $\mathbb{P}^1$, et avec un traitement partiel ou imparfait de la compactification stable marquée. On se reportera au rapport de Dèbes [16], ou à Wewers [68], [69].

Notre objectif est d'abord de proposer une construction uniforme, puis ensuite une étude détaillée des champs $\mathcal{H}_{g,h,d}$, en corollaire des espaces de modules $H_{g,h,d}$, classifiant les revêtements $\pi : C \longrightarrow D$ définis sur un corps algébriquement clos k, de degré d, d'une courbe de genre h par une courbe de genre g, la ramification étant supposée modérée. Si $h = 0$, c'est la situation du début; si $d = 1$, $\mathcal{H}_{g,g,d} = \mathcal{M}_g$. On observera qu'en général $\mathcal{H}_{g,h,d}$ n'est pas connexe, mais possède la propriété que les composantes connexes sont irréductibles; propriété partagée avec tout champ localement noethérien et normal. On sépare de manière grossière ces composantes en fixant le type de la ramification, appelé la donnée de Hurwitz, ou la donnée de ramification, et notée ξ dans le texte (section 2.2). L'espace de Hurwitz $H_{g,h,\xi}$ qui en découle n'est en général pas connexe. Le nombre de composantes connexes (ou irréductibles) est le nombre de Nielsen (Définition 2.4). La contribution principale du présent travail est la construction, puis l'étude, de la compactification naturelle par adjonction des revêtements stables, $\overline{\mathcal{H}}_{g,h,\xi}$ de $\mathcal{H}_{g,h,\xi}$. A ce stade les choses sont plus subtiles, du fait que plusieurs choix naturels sont possibles, marquage ou pas par le diviseur de ramification.

Il doit être noté que des constructions partielles de l'espace de Hurwitz sont présentes dans la littérature, d'abord par Fulton [35] dans le cas des revêtements simples de la droite projective, puis

dans une logique différente par Fried [32]. On notera cependant que l'espace modulaire considéré par Fried, et qui concerne la base $\mathbb{P}^1$, n'est pas identique au nôtre, bien que directement lié; le champ de Hurwitz est le champ quotient de celui de Fried par $\mathrm{PGL}(1)$. La comparaison entre ces deux constructions, la construction de Fried et la présente construction, est analysée par Dèbes [16], voir aussi Emsalem [29],[30]. Une approche plus systématique de la construction du schéma de Hurwitz, ainsi que d'une compactification naturelle par adjonction des revêtements admissibles, à sa source dans le travail de Harris-Mumford [42], et dans les raffinements proposés par Mochizuki [55], Wewers [68] [69].

Les champs de Hurwitz sont, comme on va le voir, d'une extrême souplesse, du fait qu'il est possible de jouer avec les paramètres: groupe, donnée de ramification et marquage. Le champ $\mathcal{H}_{g,h,\xi}$ (resp. $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$) est du fait de sa définition, la source d'un morphisme naturel et important (le discriminant): $(C \to D) \mapsto (D, (\{Q_j\}))$, qui associe à un revêtement sa base marquée par les points de branchement, définissant, si r est le nombre de points de branchement, un morphisme $\mathcal{H}_{g,h,\xi} \longrightarrow \mathcal{M}_{h,r}$. Plus important est le fait que ce morphisme se prolonge en $\overline{\mathcal{H}}_{g,h,\xi} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{h,r}$, c'est à dire aux compactifications stables. On observera qu'un revêtement stable est essentiellement stable marqué par les points de ramification, avec une subtilité liée à la coalescence éventuelle des points de ramification d'indice deux. De cette manière les champs (espaces) de Hurwitz apparaissent comme des revêtements (ramifiés) de $\mathcal{M}_{h,r}$, (resp. $\overline{\mathcal{M}}_{h,r}$), l'espace des modules des courbes de genre h avec r points marqués. On notera que ces espaces contiennent comme cas particuliers les espaces modulaires de courbes avec structure de niveau (§ 8). C'est de manière simplifiée, un point de vue finalement assez fructueux, exploité dans [3], de voir un revêtement comme la donnée d'une sorte de structure de niveau (non abélien) sur la base, et réciproquement.

La construction de la compactification stable du champ de Hurwitz, modelée sur celle $\overline{\mathcal{M}}_{h,r}$ pour $\mathcal{M}_{h,r}$, est le sujet de la section 6. L'idée, somme toute banale, revient à ajouter à $\mathcal{H}_{g,h,\xi}$ les revêtements dits "stables", qui doivent être distingués des revêtements admissibles introduits dans Harris-Mumford [40], [42], et des applications stables de Kontsevich [49]. Contrairement aux applications stables, un revêtement stable est un objet qui, dans le cadre des revêtements, provient par spécialisation d'un revêtement entre courbes lisses, ou d'une autre manière est tel que le revêtement générique dans sa déformation universelle est un revêtement entre courbes lisses, i.e. qui est lissifiable. Un point du bord est représenté, dans le cas galoisien, par une courbe stable marquée par les points de ramification, ce qui interdit à ceux-ci à se localiser en des points doubles, cela joint à une condition de stabilité de l'action du groupe de Galois G du revêtement. On notera que les points doubles qui peuvent avoir un stabilisateur non trivial, alors cyclique, ne sont pas considérés comme des points de ramification, par contre ils interviennent dans la déformation universelle de $C \to D$ (voir la section 5 pour des détails). Il y a une définition alternative au concept de stabilité, qui revient à ignorer le marquage par le diviseur de ramification. En effet les points de ramification ne sont pas mobiles, ils sont assignés par l'action du groupe de Galois. Bien que sans importance pour les espaces de modules, les deux définitions peuvent conduire à des champs distincts (voir §6.4). On notera qu'un modèle de cette construction était déja visible dans la compactification des revêtements doubles utilisée par Beauville [7].

Dans le cas non galoisien, un revêtement stable sera défini (section 6) comme un revêtement qui étale-localement admet une clôture galoisienne (voir section 6.5). Ces uniformisations galoisiennes locales doivent satisfaire à une condition de cohérence. Un revêtement stable est admissible, mais la réciproque n'est pas vraie : les champs correspondants diffèrent. Le champ de Hurwitz est de manière précise la normalisation (désingularisation) du champ de Harris-Mumford. On doit noter qu'on arrive essentiellement au même résultat en enrichissant un revêtement admissible d'une log-structure, construction étudiée par Mochizuki [55], et Wewers [68]. Cette construction diffère légèrement de la notre. C'est d'ailleurs une vertu essentielle des champs de Hurwitz, ou de ceux qui en dérivent, que de proposer des compactifications lisses aux divers problèmes de modules posés par les revêtements modérément ramifiés. Cela sera vérifié pour le champ $\mathcal{M}_g(G)$ des structures de niveau G sur les courbes lisses de genre g ($g \geq 2$), i.e. des G-revêtements principaux de base une courbe lisse de genre g. Nous décrirons (section 8) une compactification lisse $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$ de $\mathcal{M}_g(G)$, à la différence de Deligne-Mumford [20], mais par contre non représentable, même si le niveau domine le niveau abélien $(n), n \geq 3$. Les objets de ce champ seront les G-revêtements principaux dégénérés stables. Un objectif similaire au nôtre a été atteint, cependant par des méthodes et points de vue différents, par Abramovich-Vistoli et leurs coauteurs [1], [2], [3]. Les objets qu'ils décrivent sous le vocable de "balanced twisted stable maps", constituent les points d'un champ de Deligne-Mumford lisse et propre, et qui n'est pas autre chose que le champ (quotient) (§6.4) :

$$\overline{\mathcal{M}}_{g',b}(BG) = \coprod_{[\xi]} \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}//Z(G)$$

la somme étant sur les données de Hurwitz, et $Z(G)$ étant le centre de G. Le point de vue des revêtements adopté içi rend les constructions très naturelles. Cela s'applique à l'extension G-équivariante des théories topologiques des champs par Turaev, Jarvis at al (voir [45],[46]).

Décrivons brièvement le contenu du présent travail. Dans le paragraphe 2, on introduit les définitions de base, donnée de Hurwitz, ou de ramification, ou d'holonomie autour des points de branchement, et les opérations naturelles supportées par ces données, comme la restriction et l'induction. La description topologique de l'espace de Hurwitz est présentée, pour clarification, et conduit à la définition du nombre de Nielsen, introduit par Fried [32]. Dans le paragraphe 3, nous étudions les familles de courbes lisses munies de l'action d'un groupe fini, à donnée de Hurwitz fixée, de manière équivalente les familles de G-revêtements galoisiens.

Le résultat principal de cette section est un théorème d'inversion de la formule bien connue de Chevalley-Weil (Théorème 3.1). On montre que la donnée de Hurwitz est totalement déterminée par la connaissance des représentations de G dans les espaces $H^0(C, \omega_C^{\otimes m})$, en fait par un nombre fini d'entre elles. Dans le paragraphe 4, on étudie de la même manière les familles G-équivariantes de courbes stables marquées. L'inversion des relations de Chevalley-Weil est l'outil combinatoire crucial pour analyser le problème de la collision des points de ramification, phénomène qui peut intervenir dans certains cas, et qui correspond à la présence de points doubles à isotropie diédrale (Théorème 4.1). L'objectif principal du paragraphe 4 est de clarifier le comportement des points de ramification par spécialisation et déformation. On montre en particulier qu'une G-courbe stable est essentiellement

marquée par les points de ramification, la seule complication venant éventuellement des points de ramification d'indice deux.

Dans le paragraphe 5, nous étudions la déformation verselle d'un revêtement galoisien modérément ramifié $\pi : C \longrightarrow D$ de diviseur de branchement B. Dans le cas lisse il est bien connu que les déformations d'un revêtement correspondent bijectivement à celles de la base équipée du diviseur de branchement. Dans le cas stable, le résultat essentiel (théorème 5.2), décrit l'écart entre d'une part la déformation verselle équivariante de C, et d'autre part la déformation verselle de la base D marquée par les points de branchement.

Dans le paragraphe 6, on construit les champs (espaces) de Hurwitz et leurs compactifications stables. On montre, et cette remarque peut avoir une certaine utilité, que la projectivité des espaces $\overline{H}_{g,h,\xi}$ peut s'obtenir par preuve similaire à celle donnée par Gieseker et Mumford pour la projectivité de $\overline{M}_g$. Cette approche permet en fait d'obtenir de manière uniforme la projectivité des $\overline{M}_{g,n}$, par une preuve qui réduit essentiellement tout au cas de $\overline{M}_g$. La raison est bien sûr le fait que les points marqués sont implicites dans une action, ce sont les points de branchements, ou de ramification. Le théorème 6.2 compare notre construction et celle de Harris-Mumford. On montre d'abord, dans le cas galoisien, puis dans le cas des revêtements non galoisiens, que le champ de Hurwitz (ou l'espace modulaire de Hurwitz) étudié dans le présent travail, est la désingularisation de celui, non normal, introduit dans [42].

Dans le paragraphe 7 on étudie la combinatoire du bord, qui se résume à la version équivariante de la description habituelle du bord de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Un rôle clé est joué dans cette section par la théorie de Bass [6] des revêtements de graphes ; voir en particulier le théorème 7.2. Dans le paragraphe 8, on applique en guise de test, la construction des espaces de Hurwitz à la description modulaire du bord des espaces de modules de courbes avec structure de niveau G, abélien ou non. Rappelons que la construction usuelle de la compactification $\overline{M}_g(G)$, qui procède de manière indirecte, (voir Deligne-Mumford [21]), ne conduit pas à une description modulaire précise des points du bord. Ici, ils apparaissent comme des revêtements principaux stablement dégénérés, de groupe G. C'est aussi le point de vue récent développé par Abramovich-Vistoli [2]. On retrouve et on clarifie quelques résultats de Boggi-Pikaart [13], Oort-van Geemen [36].

Dans les paragraphes 9 et 10, on introduit les classes "tautologiques" qui vivent dans le groupe de Chow d'un champ de Hurwitz, particulièrement dans le cas du champ classifiant les revêtements cycliques (voir aussi [5]). On met en évidence quelques relations universelles entre ces éléments, de manière analoque au travail de Jarvis sur les courbes à spin [43]. Ces relations contiennent les relations de Cornalba-Harris dans le cas hyperelliptique. On observe que la relation de Riemann-Hurwitz s'étend à un ordre supérieur, sous la forme d'un relation simple entre classes kappa. Comme application on calcule certaines intégrales de Hodge sur le champ des courbes hyperelliptiques suggérées par le travail de A. Bene [10].

Les conventions et notations seront rappelées si nécessaire en début de chaque section. Les résultats du présent travail ont été annoncés en partie, et sous une forme restreinte, dans la note [11]. Ils s'appuient occasionnellement (§ 6 à § 8) sur la thèse du second auteur (voir [61]).

Nous remercions les organisateurs de la semaine thématique "Théorie de galois et espaces de modules" au CIRM en Mars 04 durant laquelle plusieurs exposés furent consacrés aux espaces de Hurwitz.

2. Classification des revêtements.

Dans ce paragraphe, les définitions de base concernant les revêtements sont introduites. Nous définissons et étudions les invariants fondamentaux, donnée de Hurwitz, représentations de Hurwitz.

2.1. Actions de groupes et revêtements.

Fixons tout d'abord quelques notations et conventions communes à la totalité de l'article, puis celles particulières à ce paragraphe. Soit un corps k algébriquement clos, de caractéristique arbitraire. Une courbe, du moins lorsqu'il sera fait allusion à un corps de définition, aura toujours pour sens, une courbe projective réduite, connexe, définie sur k. On se limitera dans la totalité de ce paragraphe, ainsi que dans le suivant, à des courbes non singulières. Notons cependant que dans la définition qui suit, comme dans d'autres, cette restriction est inutile. Dans les paragraphes ultérieurs (§ 4 à § 8), une courbe sera de manière plus générale une courbe singulière connexe, avec pour seules singularités des points doubles ordinaires, donc selon une terminologie bien établie, une courbe nodale ou préstable. le genre d'une telle courbe est $g(C) = p_a(C)$. Les définitions correspondantes, sous ces hypothèses, seront rappelées et précisées dans le paragraphe 4 et les paragraphes ultérieurs.

2.1.1. G-revêtements

Fixons un groupe fini G. On supposera, et cela de manière permanente que si la caractéristique d'un corps k est $p > 0$, alors p ne divise pas l'ordre de G. De manière plus générale, dans les manipulations de familles, on supposera que l'ordre de G est inversible dans les faisceaux structuraux des schémas considérés. Dit d'une autre manière, les actions du groupe G seront modérément ramifiées. Nous retenons par ailleurs les conventions suivantes concernant le groupe G. Le groupe des caractères (multiplicatifs), Hom (G, k^*) sera noté $\hat{G}$. Nous noterons $\mathrm{Irrep}\,(G)$ l'ensemble des représentations (ou caractères) irréductibles de G, une même lettre désignant en général une représentation V, ou bien sans précision supplémentaire son caractère $\chi_V : G \to k$. On notera respectivement $\mathrm{Aut}\,(G)$ et $\mathrm{Out}\,(G)$ le groupe des automorphismes de G, respectivement des automorphismes extérieurs. Pour $s \in G$, $[[s]]$ désignera la classe de conjugaison de s.

L'objet fondamental étudié dans de ce travail est une courbe C, munie d'une *action* du groupe G, action signifiant toujours une action fidèle. Celle-ci est donc décrite par un morphisme injectif $\phi : G \to \mathrm{Aut}\,(C)$. On désignera alors par (C, ϕ) la donnée de C munie de l'action définie par ϕ, lorsqu'il sera utile de préciser celle-ci. La définition suivante d'équivalence, pour les courbes munies d'une action de G, est celle qui prévaut dans tout ce travail. On notera cependant, et cela justifie qu'elles soient mises en évidence, qu'il y a des variantes à cette définition, que nous allons rappeler, voir aussi par exemple, Fried [32], Dèbes [16], et aussi la section 6.

Définition 2.1. *Soient deux actions (C, ϕ) et (C', ϕ') de G sur des courbes C et C'. Ces actions sont dites G-équivalentes, en abrégé, équivalentes, s'il existe un G-isomorphisme $f : C \to C'$, c'est à dire un isomorphisme tel que pour tout $x \in C$ et tout $s \in G$, on ait $f(\phi(s)).x = \phi'(s).f(x)$.*

Dans la suite on omettra le plus souvent la lettre ϕ et on parlera pour simplifier d'une G-courbe; l'action sera alors notée de manière abrégée $(s, x) \mapsto sx$. Notons que les courbes munies d'une action de G que nous auront à considérer vérifierons en général la condition que le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}\,(C)$ est fini; on pourrait remplacer cette hypothèse par la finitude de $\mathrm{Aut}_G(C)$, groupe des automorphismes G-équivariants. C'est le cas par exemple si C est lisse de genre $g \geq 2$, ou plus généralement si C est stable de genre $g \geq 2$ (section 3, et [20], [53]). Dans ce paragraphe on se limite de manière exclusive à la considération de courbes lisses; les résultats seront étendus au paragraphe suivant aux courbes nodales stables. Sous les hypothèses en vigueur, il est bien connu que la courbe quotient C/G est définie; nous parlerons du morphisme quotient $\pi : C \to C/G$ comme étant le revêtement (galoisien) de groupe G défini par (C, G).

De manière plus générale, un revêtement $\pi : C \to D$, C et D étant deux courbes lisses connexes, est un morphisme fini et génériquement étale. L'hypothèse faite sur le cardinal de G, à savoir que si la caractéristique de k est $p > 0$, alors p ne divise pas $|G|$ a pour traduction que le revêtement associé est modérément ramifié. En fait le revêtement $\pi : C \to C/G$ associé à (C, G) est, en utilisant une terminologie répandue, un G-revêtement, ce qui signifie qu'on inclut à la donnée de $\pi : C \to D$, l'action de G sur C, ou ce qui revient au même, on fixe une identification $G \cong \mathrm{Aut}\,(\pi)$.

Dans cette situation, donc pour un revêtement galoisien modérément ramifié, rappelons qu'un point de *ramification* est un point (fermé) $x \in C$ tel que si G_x est le stabilisateur, alors $G_x \neq 1$. L'orbite d'un tel point sera souvent appelée une orbite singulière; on parlera aussi par opposition d'orbites régulières. Notons que si x est un point de ramification le stabilisateur G_x est cyclique, d'ordre $e(x)$ l'indice de ramification. Les points images dans C/G des points de ramification sont appelés les points de *branchement*. Ces définitions s'étendent comme il est bien connu au cas non galoisien. Finalement la relation de Riemann-Hurwitz pour un revêtement non nécessairement galoisien $\pi : C \to D$ de degré d est

$$2g(C) - 2 = d(2g(D) - 2) + \sum_{x \in C} (e(x) - 1)$$

2.1.2. Classification des revêtements

La classification des couples (C, G), ou ce qui revient au même du G-revêtement correspondant $\pi : C \to C/G$, introduite ci-dessus, ne doit pas être confondue avec ce que l'on entend usuellement par la classification des revêtements [17], [32] [55], [67], [68].

A titre de comparaison avec la définition initiale, et pour utilisation ultérieure, rappelons que deux revêtements, galoisiens ou non, $\pi : C \to D$ et $\pi' : C' \to D'$ sont dits *équivalents*, s'il existe des isomorphismes $f : C \xrightarrow{\sim} C'$ et $h : D \xrightarrow{\sim} D'$ tels que $\pi' f = h\pi$, soit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & C' \arrow[d, "\pi'"'] \\ D \arrow[r, "h"] & D' \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Naturellement si $f : (C, G) \xrightarrow{\sim} (C', G)$ est une G-équivalence, donc si les G-revêtements associés sont G-équivalents, ils sont alors équivalents. La G-équivalence exige en plus que l'isomorphisme f soit un G-isomorphisme. On notera aussi que pour les revêtements de base fixée D, on peut aussi choisir comme relation d'équivalence, la relation d'équivalence G-stricte (resp. stricte). Cela revient à imposer $h = 1$ dans la définition de dessus.

Dans le cas galoisien, donc pour des G-revêtements, on a notre disposition deux manières distinctes d'identifier deux revêtements, selon que l'on exige que f soit G-équivariant, c'est dire la G-équivalence, ou pas. Cela correspond classiquement à la distinction entre les courbes modulaires $X_0(N)$ et $X_1(N)$. Notons que si la base est fixée, égale à $\mathbb{P}^1$ (le schéma de Hurwitz classique), la définition de l'équivalence retenue par Fried [32], Fulton [35] , est l'équivalence stricte (ou rigide), pour laquelle deux revêtements $\pi : C \to \mathbb{P}^1$ et $\pi' : C' \to \mathbb{P}^1$ sont équivalents, si et seulement si il existe un isomorphisme équivariant $f : C \xrightarrow{\sim} C'$ avec $\pi' f = \pi$; c'est à dire avec les notations de dessus, $h = 1$.

Le cas général des revêtements non galoisien sera traité dans un paragraphe ultérieur (Chap 6, § 6.5). Posons cependant le principe de classification. La classification des revêtements non galoisiens est celle donnée par un diagramme (2.1). Dans le Chap. 6, elle sera ramenée au cas galoisien par passage à la clôture galoisienne.

Dans le reste de ce paragraphe, les revêtements seront galoisiens, mieux des G-revêtements, l'équivalence sera la G-équivalence.

2.2. Donnée de Hurwitz.

Dans cette partie, une courbe est une courbe projective connexe, lisse et définie sur k, corps algébriquement clos. On désigne par G un groupe fini d'ordre premier à la caractéristique de k.

2.2.1. Donnée de Hurwitz: Définition

Soit donc C une courbe munie d'une action, effective rappelons le, du groupe fini G. Si $x \in C$ est un point de ramification, c'est à dire à isotropie non triviale $G_x \neq 1$, il en découle une représentation naturelle

$$\chi_x : G_x \to GL(\frac{\mathcal{M}_x}{\mathcal{M}_x^2}) = k^*$$

du groupe cyclique G_x dans l'espace cotangent en x (et en dualisant dans l'espace tangent). Le caractère χ_x de G_x est primitif, c'est à dire d'ordre $e_x = |G_x|$. Ceci nous amène à considérer l'ensemble des couples (H, χ), où H est un sous-groupe cyclique et χ un caractère primitif de H. Introduisons la définition suivante: nous dirons que les couples (H, χ) et (H', χ') sont conjugués, nous écrirons alors $(H, \chi) \sim (H', \chi')$, s'il existe $s \in G$ tel que

$$H' = sHs^{-1} \text{ et } \chi'(sts^{-1}) = \chi(t) \text{ pour } t \in H.$$

Ou encore $\chi' = {}^s\chi$. Il est manifeste que si $y = sx$ alors $(G_y, \chi_y) \sim (G_x, \chi_x)$. Ceci permet de définir le G-*type* d'une orbite singulière, disons l'orbite de x, comme étant la classe de conjugaison de (G_x, χ_x), notée dans la suite $[G_x, \chi_x]$. Ainsi nous parlerons d'une orbite de type $[H, \chi]$. D'une manière plus précise, nous dirons qu'un point fixe x est *d'holonomie* (H, χ) si $G_x = H$ et $\chi_x = \chi$. Décomposons l'ensemble des points de ramification F en une réunion d'orbites (les orbites singulières) $F = F_1 \cup \cdots \cup F_b$, et notons $[H_i, \chi_i]$ le type de F_i. La définition suivante est sous une forme ou une autre classique [32], [50], [65]:

Définition 2.2. *La donnée de Hurwitz (ou de ramification) de l'action de G sur C désigne l'ensemble $\{[H_i, \chi_i]\}$ des types distincts on non, des orbites singulières comptées avec multiplicité.*

Il s'avère parfois commode de spécifier seulement les types distints $[H_i, \chi_i]$, $1 \leq i \leq t$, et de préciser dans ce cas la multiplicité de $[H_i, \chi_i]$. Pour une formulation plus précise formons le groupe abélien libre suivant:

$$R_+(G) = \bigoplus_{[H,\chi]} \mathbb{Z}[H, \chi] \tag{2.2}$$

la somme directe étant indexée par les classes de conjugaison de couples $[H, \chi]$, où rappelons le, H parcourt les sous groupes cycliques de G et $\chi : H \to k^*$ les caractères non nécessairement primitifs de H. Ainsi une donnée de ramification est un élément ξ de $R_+(G)$ qui a ses coordonnées positives. On peut donc écrire une telle donnée $\xi = \sum b_i[H_i, \chi_i]$, avec pour tout i, $b_i \geq 1$); l'entier $b = \sum b_i$ est le degré de ξ. Il est clair que la donnée de Hurwitz ne dépend que de la classe d'équivalence de (C, G).

2.2.2. Opérations sur les données de Hurwitz

Il y a plusieurs opérations naturelles sur l'ensemble $R_+(G)$ données de Hurwitz. La première est l'induction. Soit $J < G$ un sous-groupe, alors toute donnée relative à J définit de manière évidente une donnée de G, soit une application $\mathbf{Ind}_J^G : R_+(J) \to R_+(G)$:

$$\xi = \sum b_i[H_i, \chi_i]_H \mapsto \xi = \sum b_i[H_i, \chi_i]_G \tag{2.3}$$

l'indice précisant le groupe dans lequel la classe de conjugaison est prise. Si J_1, J_2 sont deux sous-groupes de G et ξ_1, ξ_2 des données relatives à ces deux sous-groupes, on peut ainsi effectuer l'opération d'induction $\mathbf{Ind}_{J_1}^G(\xi_1) + \mathbf{Ind}_{J_2}^G(\xi_2)$ conduisant à un élément de $R_+(G)$.

Il y a deux autres opérations naturelles concernant les données de ramification qui seront utilisées dans la suite, la restriction et le passage au quotient. Soit $J < G$ un sous groupe; on définit le morphisme de restriction, $\mathrm{Res}_J^G : R_+(G) \to R_+(J)$ par

$$\mathrm{Res}_J^G([H, \chi]) \;=\; \sum_{J \backslash G / H} [J \cap gHg^{-1}, \chi^g \mid_{J \cap gHg^{-1}}] \tag{2.4}$$

où la sommation porte sur les classes doubles mod. (J, H), et χ^g désigne le caractère $\chi^g(s) = \chi(g^{-1}sg)$.

Si maintenant $J = {}^{\mathrm{G}}/_{\mathrm{K}}$ on définit le morphisme de corestriction $\mathrm{Cores}_J^G : R_+(G) \to R_+(J)$ par

$$\mathrm{Cores}_J^G([H, \chi]) = [H/H \cap K, \chi^{\mathrm{Card}\, H \cap K|}] \tag{2.5}$$

L'interprétation de ces deux opérations, au niveau des actions, est expliquée dans l'énoncé ci-dessous, dont la preuve élémentaire est omise. L'indice 1 signifie qu'on prend la projection sur le sous groupe $\sum_{H \neq 1} \mathbb{Z}[H, \chi]$.

Proposition 2.3. *Soit ξ la donnée de Hurwitz de l'action de G sur C; alors i)* $\mathrm{Res}_J^G(\xi)_1$ *est la donnée associée à la restriction de l'action à J.*
ii) $\mathrm{Cores}_J^G(\xi)_1$ *est la donnée associée à l'action de $J = {}^{\mathrm{G}}/_{\mathrm{K}}$ sur la courbe C/K.*

□

Pour utilisation ultérieure, notons qu'il existe une action évidente de $\mathrm{Out}\,(G)$ sur $R_+(G)$, définie par

$$\theta[H, \chi] \;=\; [\theta(H), \chi\, \theta^{-1}] \tag{2.6}$$

Si on considère l'action de G tordue au moyen de θ, alors $\theta(\xi)$ n'est autre que la donnée de ramification de cette action.

Notons pour finir que le groupe $\Gamma = \mathbf{Gal}_{\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ agit lui aussi de manière naturelle sur le groupe $R_+(G)$ selon la règle $\sigma[H, \chi] = [H, \sigma.\chi]$. On peut d'une autre manière interpréter la donnée $\sigma(\xi)$ comme celle associée à l'action de G sur la courbe $C^\sigma = C \otimes_k k$ tordue au moyen de σ. Il peut être utile de signaler une autre manière de décrire une donnée de ramification, par exemple voir (Fried [32], Serre [65]). Supposons avoir fixé une racine de l'unité $\zeta \in k$ d'ordre $n = \mathrm{Card}\, G$, $\zeta \in k$. Si χ est un caractère primitif du sous groupe cyclique H, et si $\mathrm{Card}\, H = e$, il lui correspond un unique générateur s de H tel que $\chi(s) = \zeta^{n/e}$. Si s' correspond de la même manière à (H', χ'), alors $(H, \chi) \cong (H', \chi')$ équivaut à s' est conjugué à s. De cette manière la donnée de Hurwitz devient une somme formelle de classes de conjugaison $\sum_{[[s]]} b_{[[s]]}[[s]]$. On notera que le stabilisateur de $[H, \chi] \leftrightarrow [[s]]$, pour l'action adjointe de G,est le commutant $C(s) = C_G(H)$ de s (de H) dans G.

On va étendre le formalisme du G-type aux diviseurs G-invariants. Soit $D = \sum_{i=1}^d x_i$ un diviseur invariant par G, tel que si $i \neq j$, $x_i \neq x_j$. Alors D est une somme d'orbites deux à deux distinctes , et si $[H_\alpha, \chi_\alpha]$ sont les G - types de ces orbites, on appellera l'élément $\sum_\alpha [H_\alpha, \chi_\alpha]$ le G-type de D. On prolonge la définition en disant qu'une orbite régulière est de type [1] (holonomie locale triviale).

Définition 2.4. *Soit une action de G sur la courbe C (lisse ou nodale). On dit que l'action est marquée par $b+r$ orbites, dont r régulières, si on a fait le choix de $b+r$ orbites, contenant les b orbites singulières, augmentées de r orbites régulières, les orbites étant indexées $\mathcal{O}_1, \cdots, \mathcal{O}_{b+r}$.*

Le cas non indexé peut être considéré de la même manière. Il est commode pour la suite d'étendre aux courbes marquées dans le sens précédent, la donnée de Hurwitz qui est attachée à une action de G, en ajoutant à la donnée initialement définie le terme $r[1]$. On voit alors facilement que l'énoncé (2.4) reste valable, l'indice 1 (c'est à dire la restriction $H \neq 1$) étant maintenant supprimé.

2.3. Nombre de Nielsen

Dans cette section $k = \mathbb{C}$. Une courbe est identifiée à une surface de Riemann compacte et connexe.

2.3.1. Classification topologique

On s'intéresse à la classification équivariante des actions de groupes finis sur les courbes (G-revêtements), mais maintenant sous le seul aspect topologique. On fixe une surface C^∞ compacte orientée C, de genre $g \geq 2$, munie d'une action du groupe fini G; on suppose que l'action de G respecte l'orientation. Nous pouvons reformuler dans le cadre topologique (C^∞) l'essentiel de la section 2.3. La première observation est que la donnée de Hurwitz, définie algébriquement, est en fait un invariant topologique de l'action de G sur la surface C. En effet, soit $x \in C$ un point fixe de stabilisateur $G_X = H$; alors il en découle une représentation linéaire réelle de degré deux dans l'espace tangent réel T_x de C en x. La représentation complexifiée $T_x \otimes \mathbb{C}$ est alors somme directe de deux représentations conjuguées de degré un. On choisit celle parmi les deux dont la direction ξ est telle que la $\mathbb{R}$-base $(Re(\xi), Im(\xi)$ fournit l'orientation de T_x. Alors le caractère local χ_x de la section 2.2 est retrouvé comme celui qui décrit l'action de H sur la droite de direction ξ, soit pour $s \in H$, $s\xi = \chi_x(s)\xi$.

La définition de l'équivalence de deux G-revêtements (Définition 2.1) prend maintenant la forme suivante. Soit deux surfaces C et C' munies d'une action (fidèle) de G.

Les surfaces sont *G-équivalentes* (en bref équivalentes), s'il existe un difféomorphisme G-équivariant et préservant l'orientation $f : C \xrightarrow{\sim} C'$. La encore cette relation ne doit pas être confondue avec la relation d'équivalence des revêtements, dans la situation présente, le revêtement quotient $C \to C/G$. Comme dans le cadre algébrique, la relation d'équivalence coincide avec l'équivalence au sens des G-revêtements. Ceci étant, il est de nouveau clair que deux actions équivalentes de G sur des surfaces C et C' ont des données de Hurwitz identiques. Il est aussi immédiat que la donnée de Hurwitz étant fixée, ainsi que le genre de C, alors le genre de $D = C/G$ est de fait déterminé; c'est une conséquence directe de la formule de Riemann - Hurwitz.

Notre objectif maintenant est d'identifier les classes d'équivalences , en d'autres termes les types topologiques, d'actions de G, groupe fixé, sur les surfaces de genre g ($g \geq 2$, fixé); on fixe en plus de g, le genre g' de la surface quotient C/G. La procédure pour conduire cette classification est la suivante.

On fixe tout d'abord une surface B, et $\beta \subset B$ un ensemble fini de points (distincts). On suppose en outre avoir fixé une partition $\beta = \beta_1 \sqcup \cdots \sqcup \beta_t$ de β en t - parties. On pose

$$Diff^+(B, \beta) = \{h \in Diff^+(B),\, h(\beta_i) = \beta_i \ (i = 1, \cdots, t)\}$$

il est connu que le groupe $Diff^+(B)$ agit transitivement sur les parties finies numérotées de cardinal fixé, le choix de β est donc sans importance. On suppose enfin avoir fixé une donnée de Hurwitz $\xi = \sum_{i=1}^{t} b_i[H_i, \chi_i]$, les classes $[H_i, \chi_i]$ étant deux à deux distinctes. On fait alors l'hypothèse que $\mathrm{Card}\,\beta_i = b_i$. Fixons enfin un point de base $\star \in U = B - \beta$, et posons $\pi = \pi_1(U, \star)$.

Définition 2.5. *Un marquage d'une action de G sur C consiste en le choix d'un morphisme C^∞, $\phi : C \to B$ qui identifie B avec la surface quotient C/G, et qui en plus est tel qu'une orbite singulière est du type $[H_i, \chi_i]$ si et seulement si c'est une fibre $\phi^{-1}(b)$ avec $b \in \beta_i$.*

Une équivalence entre deux actions marquées $(C, \phi), (C', \phi')$ est par une définition identique à (2.1) donnée par un difféomorphisme G-équivariant $f : C \xrightarrow{\sim} C'$ tel que $\phi' \circ f = \phi$ (équivalence stricte). Il est clair que $Diff^+(B, \beta)$ agit transitivement sur l'ensemble des classes de marquages de l'action donnée de G sur C, mais pas simplement transitivement en général, du fait de l'existence possible d'automorphismes de la base B. On associe comme d'habitude à une action marquée par $\phi : C \to B$ un morphisme de monodromie de π dans le groupe des permutations de la fibre $\phi^{-1}(\star)$, qui correspond à une action à droite de π sur $\phi^{-1}(\star)$. Supposons les points de cette fibre numérotés

$$\phi^{-1}(\star) = (\star_1, \cdots, \star_n)$$

C'est un fait bien connu que le groupe de monodromie, c'est à dire l'image de $\pi \to \mathbb{S}_{\phi^{-1}(\star)}$, s'identifie grâce à la numérotation des points de la fibre avec le commutant de G dans le groupe des permutations $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_{\phi^{-1}(\star)}$. De cette construction découle un morphisme surjectif $\psi_\phi : \pi \to G$ qui à conjugaison près ne dépend pas de la numérotation des points de $\phi^{-1}(\star)$. Rappelons la définition explicite de ce morphisme; on choisit $\star_1 \in \phi^{-1}(\star)$. L'image par ψ_ϕ d'un lacet α basé en $\star$ s'obtient en relevant dans $\phi^{-1}(U)$, α en $\tilde{\alpha}$ d'origine $\star_1$. Alors

$$\psi_\phi(\langle\alpha\rangle) = \sigma \in G \iff \tilde{\alpha}(1) = \sigma(\star_1) \tag{2.7}$$

Si on fait le choix d' un autre point de base $\star' \in U$, et si l est un chemin de U qui joint $\star$ à $\star'$, alors l'isomorphisme $l_\star : \pi_1(U, \star) \to \pi_1(U, \star')$ conduit à la relation à conjugaison près $\psi_\phi = \psi'_\phi \circ l_\star$.

Dans la suite la surjection caractéristique ψ_ϕ sera comprise à conjugaison près dans G, et modulo un changement éventuel du point de base. Le fait suivant qui fait abstraction de la donnée de Hurwitz est essentiellement le contenu du résultat élémentaire et bien connu sur la classification topologique des revêtements [1]:

[1] Deux revêtements étales de degré n, $\pi : C \to D$ et $\pi' : C' \to D$, de base fixée D, sont topologiquement équivalents si et seulement si les actions de monodromie, $\phi, \phi' : \pi_1(D, \star) \to \mathbb{S}_n$ sont conjuguées (voir par exemple [35], Proposition 1.2). Le groupe $\mathrm{Aut}\,(\pi)$ est le commutant dans $\mathbb{S}_n$ de l'action de monodromie.

Lemme 2.6. *la correspondance $(C, \phi) \mapsto \psi_\phi$ établit une bijection entre d'une part les classes d'actions marquées de G sur C, et d'autre part les classes de conjugaison de surjections $\pi \to G$.*

□

2.3.2. Nombre de Nielsen

Pour poursuivre la classification topologique, fixons une présentation de $\pi = \pi_1(U)$ (présentation canonique):

$$\pi = \langle A_1, \cdots, A_g; B_1, \cdots, B_g; \gamma_1, \cdots, \gamma_b \quad / \quad \prod_{j=1\cdots,g'} [A_j, B_j]\gamma_1 \cdots \gamma_b = 1\rangle$$

Le morphisme ψ_ϕ est déterminé par les images a_j, b_j et σ_k des générateurs A_j, B_j, et γ_k. Pour abréger nous noterons $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{\sigma})$ cette donnée; c'est essentiellement la *description du revêtement* au sens de Fried [32]. On a donc

$$G = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{\sigma} \quad / \quad \prod_{j=1\cdots,g'} [a_j, b_j]\sigma_1 \cdots \sigma_b = 1\rangle \tag{2.8}$$

Le lien entre la donnée du $(2g' + b)$-uple $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{\sigma})$ et la donnée de Hurwitz ξ est le suivant. Soient $C_1, \cdots, C_r$ les classes de conjugaison distinctes définies par $\sigma_1, \cdots, \sigma_b$; on suppose que la multiplicité de C_i dans cette liste est b_i. Alors la donnée de Hurwitz dans son interprétation au moyen de classes de conjugaison (§2.2) est décrite comme étant $\xi = \sum_{i=1}^r b_i[C_i]$. D'une autre manière, on peut voir la donnée des r classes distinctes comme un ensemble de r couleurs; le lacet $\sigma_j = \psi_\phi(\gamma_j)$ étant de couleur i ssi $\sigma_j \in C_i$. En conséquence le point de branchement Q_j appartient à β_j ssi $\sigma_j = \psi_\phi(\gamma_j)$ est de couleur i. Dans la suite nous noterons $\mathrm{Hom}_\beta(\pi, G)$ l'ensemble des surjections $\psi : \pi \to G$ qui satisfont aux conditions ci-dessus, dictées par la donnée de ramification, donc en résumé:

$$Q_j \in \beta_i \Longleftrightarrow \psi(\gamma_j) \in C_i \tag{2.9}$$

La classification topologique des actions de G sur les surfaces de genre g, à donnée fixée, s'obtient à ce stade par la construction classique suivante. Soit une action de G sur C; on choisit un marquage (Définition 2.4) $\phi : C \to B$, ce qui produit une surjection $\psi_\phi \in \mathrm{Hom}_\beta(\pi, G)$, définie à conjugaison près (Lemme 2.6). Soit maintenant le mapping class group $\mathbb{M}_{g',b}$, qui est, rappelons-le, le sous groupe de $\mathrm{Out}(\pi)$, composé des automorphismes extérieurs qui permutent les classes de conjugaison des lacets $\langle\gamma_j\rangle$ $(j = 1, \cdots, b)$. Il y a un morphisme naturel

$$Diff^+(B, \beta) \to \mathrm{Out}(\pi)$$

qui factorise par $\mathbb{M}_{g',b}$. Un résultat fondamental de Nielsen décrit l'image de ce morphisme, qui s'identifie à l'ensemble des automorphismes de π qui permutent les classes de conjugaison des $\langle\gamma_j\rangle$ à l'intérieur de chaque partie β_i $(i = 1, \cdots, r)$. Si on considère la surjection canonique $\mathbb{M}_{g',b} \to \mathbb{S}_b$, l'image ci-dessus est le groupe noté dans la suite $\mathbb{M}_{g',(b_1,\cdots,b_r)}$ image réciproque du sous-groupe $\mathbb{S}_{b_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{b_r}$. Il en résulte donc une action de $\mathbb{M}_{g',(b_1,\cdots,b_r)}$ sur $\mathrm{Hom}_\beta(\pi, G)/G$. Le résultat suivant est bien connu:

Proposition 2.7. *Fixons une donnée de Hurwitz. Les classes topologiques d'actions de G sur les surfaces de genre g à donnée fixée, sont en correspondance bijective avec les "classes doubles"*

$$\mathbb{M}_{g',(b_1,\cdots,b_r)} \backslash (\mathrm{Hom}_\beta(\pi, G)/G) \tag{2.10}$$

Preuve: La preuve est claire. Il suffit d'éliminer le marquage, ce qui compte tenu du lemme 2.6 revient à effectuer le quotient de $\mathrm{Hom}_\beta(\pi, G)/G$ par l'action décrite ci-dessus de $\mathbb{M}_{g',(b_1,\cdots,b_r)}$. $\square$

Exemple 2.1 Examinons ce que donne la correspondance ci-dessus dans le cas $g' = 0$ (revêtements de la sphère). On a dans ce cas $B = S^2$, et le mapping class group est ici le groupe $\mathbb{M}_{0,b}$ image du groupe des tresses à b brins $B(b)$. Le groupe π est dans ce cas le groupe libre de rang $b-1$ décrit par la présentation usuelle

$$\langle \gamma_1, \cdots, \gamma_b, \ / \ \prod \gamma_i = 1 \rangle \tag{2.11}$$

Une surjection $\psi \in \mathrm{Hom}_\beta(\pi, G)$ est déterminée par le r - uple $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \cdots, \sigma_b)$ avec $\sigma_i = \psi(\gamma_i)$ $(1 \leq i \leq b)$, ces générateurs étant soumis à la relation $\prod \sigma_i = 1$. Noter que G est engendré par les σ_i $(i = 1, \cdots, b)$. L'action par conjugaison sur les surjections devient dans cette description la conjugaison diagonale

$$\underline{\sigma} \mapsto g\underline{\sigma}g^{-1} = (g\sigma_1 g^{-1}, \cdots, g\sigma_b g^{-1}) \tag{2.12}$$

Si on fixe une donnée de Hurwitz, la restriction qui en découle, c'est à dire, la couleur assignée aux points de branchement est: $Q_j \in \beta_i \Longleftrightarrow \sigma_j \in C_i$. L'action de $\mathbb{M}_{0,b}$ sur $\mathrm{Hom}_\beta(\pi, G)/G$ se déduit de l'action standard du groupe des tresses de la sphère, elle est en particulier engendrée par les opérations

$$S_i(\underline{\sigma}) = (\sigma_1, \cdots, \sigma_{i-1}, \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i^{-1}, \sigma_i, \sigma_{i+2}, \cdots, \sigma_b) \ (1 \leq i \leq b) \tag{2.13}$$

La condition (2.9) exige de se limiter à l'action du sous-groupe des tresses partiellement colorées $B(b_1, \cdots, b_r)$, image réciproque de $\mathbb{S}_{b_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{b_r}$ par la surjection canonique $B(b) \to \mathbb{S}_b$. $\Diamond$

Dans le cas général, on est conduit à considérer l'ensemble $\mathbf{Ni}(\xi)$ des classes de Nielsen relatives à une donnée de Hurwitz ξ fixée. La définition est la suivante [16],[32]:

$$\mathbf{Ni}(\xi) = \{(\underline{a}, \underline{b}, \underline{\sigma})\} \in G^{2g'+b} / \text{ modulo conjugaison}\}$$

les éléments $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{\sigma})$ étant soumis aux conditions explicitées ci-dessus, à savoir:

i) $\prod_{i=1}^{g'} [a_i, b_i]\sigma_1 \cdots \sigma_b = 1$

ii) $G = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{\sigma} \rangle$

iii) $Q_j \in \beta_i \Longleftrightarrow \sigma_j \in C_i$

En conclusion l'ensemble quotient $\mathbb{M}_{g',(b_1,\cdots,b_r)} \backslash \mathbf{Ni}(\xi)$ est le classifiant pour les types topologiques d'actions de G sur les surfaces de genre g, avec une donnée de Hurwitz fixée ξ; c'est un ensemble fini, ce qui conduit à poser [25]:

Définition 2.8. *Fixons une donnée de Hurwitz ξ. Le nombre de Nielsen $h(\xi)$ est défini comme étant le nombre de types topologiques distincts d'actions de G sur les surfaces de genres g, avec une donnée de Hurwitz fixée égale à ξ, soit*

$$h(\xi) = \mathrm{Card}\,\mathbb{M}_{g',(b_1,\cdots,b_r)}\backslash \mathrm{Hom}_\beta(\pi, G)/G \tag{2.14}$$

Le fait le plus important pour la suite est que le nombre de Nielsen[2] a une signification géométrique précise, il représente le nombre de composantes connexes, ou irréductibles, de l'espace des modules des revêtements, espace qui sera construit dans les sections 5 et 6. Pour le prouver, il faut resituer la classification des revêtements dans son contexte analytique, la théorie de Teichmüller [24], [25]. La discussion qui suit est succinte, pour plus de détails nous renvoyons aux références précédentes.

On fixe une surface de référence Σ_g de genre g ($g \geq 2$), ainsi qu'une action fidèle du groupe fini G sur Σ_g. Le couple (Σ_g, G) définit donc ce qu'on peut appeler pour abréger, un type topologique. Soit $Conf(\Sigma_g)$ l'ensemble des structures conformes sur Σ_g. le groupe $Diff^+(\Sigma_g)$ agit naturellement sur $Conf(\Sigma_g)$, et si $Diff_\circ(\Sigma_g)$ désigne la composante connexe de l'élément neutre du groupe $Diff^+(\Sigma_g)$, donc le sous-groupe des difféomorphismes homotopes (ou isotopes) à l'identité, le quotient

$$T_g = Conf(\Sigma_g)/Diff_0(\Sigma_g)$$

est une des formes de l'espace de Teichmüller [24]. En suivant la construction de Earle (loc.cit), on est amené à considèrer l'ensemble des points fixes de G dans $Conf(\Sigma_g)$. Soit $Z_0(G)$ le centralisateur de G dans $Diff_0(\Sigma_g)$. On peut montrer que, $N(G)$ étant le normalisateur de G dans $Diff^+(\Sigma_g)$, on a $Conf(\Sigma_g)^G = N(G) \cap Diff_0(\Sigma_g)$. L'espace de Teichmüller équivariant, c'est à dire celui qui classifie les actions à type topologique fixé est $T_{g,G} = Conf(\Sigma_g)^G/Z_0(G)$

On montre sous ces conditions le résultat de fondamental suivant loc.cit[3]:

Théorème 2.9. *$T_{g,G}$ est une sous variété fermée et contractile de T_g. En fait $T_{g,G}$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^{6g'-6+2b}$. Ce résultat donne immédiatement le résultat énoncé au dessus, à savoir que l'espace de Teichmüller équivariant, classifiant les actions de G sur les surfaces (de Teichmüller) de genre g à type topologique fixé est connexe; par suite l'espace modulaire classifiant les actions à type topologique fixé, étant un quotient du précédent, est donc aussi connexe. En conclusion, si on fixe seulement la donnée de Hurwitz ξ, l'espace modulaire a exactement $h(\xi)$ composantes connexes.*

□

Remarque 2.2 La définition 2.8 du nombre de Nielsen $h(\xi)$ montre immédiatement que dans le cas $g' = 0$, et le groupe G étant supposé abélien, alors $h(\xi) = 1$. La détermination du nombre de

[2] Ce nombre ne doit pas être confondu avec le nombre de Hurwitz [59], qui est $h_{g,G,\xi} = \#\mathrm{Hom}_\beta(\pi, G)/G$. La formule de sommation de Burnside donne $h_{g,G,\xi} = \sum_{[\pi]} \frac{1}{\#\mathrm{Aut}\,(\pi)}$, la sommation portant sur les classes d'équivalence (strictes) de G-revêtements de donnée de ramification fixée, d'une courbe de genre g' fixée, ainsi que les points de branchement β.

[3] Une partie de ce résultat est redémontrée dans la note de Natazon: "The topological structure of the space of holomorphic morphisms of Riemann surfaces", Comm. of the Moscow Math. Soc.

Nielsen est, dans le cas général, une question connue comme difficile, conduisant à étudier l'action d'un groupe de tresses sur des uplets d'éléments de G; [32],[41] [67]. On sait cependant que $h(\xi) = 1$ dans plusieurs situations utiles [25], [32], [35], [67]. Le cas le plus simple, et par ailleurs bien connu, est celui des revêtements simples de degré n de $\mathbb{P}^1$, avec r-points de branchement [35]. Le résultat est étendu dans [41] à une base de genre g' arbitraire, sous l'hypothèse le nombre de points de branchement soit tel que $b \geq 2n$. Il est immédiat que la clôture galoisienne d'un tel revêtement a pour groupe de Galois $\mathbb{S}_n$, la donnée de ramification étant $\xi = r$(classe de conjugaison des transpositions). On peut prouver que le nombre de Nielsen est encore égal à un, dans le cas où la ramification est simple sauf au plus en une ou deux fibres, base $\mathbb{P}^1$ (Wajnryb [67]).

Un autre cas pour lequel la détermination de nombre de Nielsen est aisée, et par ailleurs classique, et celui des structures de niveau abélien $n \geq 3$ [20]. Cela signifie que $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g'}$, et $\xi = \emptyset$. Alors (voir paragraphe 8), h est dans ce cas l'indice $[GL_{2g'}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : Sp_{2g'}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})]$.
$\diamondsuit$

Supposons maintenant $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\xi \neq 0$. La surjection $\psi : \pi \to G$ est dans ce cas déterminée par les seules images des lacets d'homologie, du fait que les classes de conjugaison sont réduites à un seul élément; donc la donnée de Hurwitz détermine les éléments $\sigma_1, \cdots, \sigma_b$, ceux-ci étant soumis à la seule relation $\sigma_1 . \cdots \sigma_b = 1$. Ne subsiste alors que la condition $G = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{\sigma} \rangle$, soit $\mathrm{pgcd}\,(a_j, b_k, \sigma_l, n) = 1$.

Le résultat qui suit est bien connu, il remonte à Nielsen. Un résultat plus général sur le type topologique dans le cas d'un groupe abélien est aussi disponible (Edmonds [25], theorem 3.1)

Proposition 2.10. *Si G est cyclique, pour toute donnée de Hurwitz $\xi \neq 0$, on a $h(\xi) = 1$; en d'autres termes il y a un seul type topologique, et l'espace modulaire correspondant est connexe.*

$\square$

Soit par exemple le cas $n = 3$, et $r = g + 2$. La donnée de ramification s'identifie à une partition (non ordonnée) de $[1, g+2]$ en deux parties Λ_1, Λ_2, selon que le caractère local est $\sigma \mapsto j$, ou j^2 ($j^3 = 1$). On a $|\Lambda_1| + 2|\Lambda_2| \equiv 0 \pmod 3$, soit $|\Lambda_1| \equiv |\Lambda_2| \pmod 3$. Le nombre de types topologiques, c'est à dire de composantes connexes de l'espace de Hurwitz est donc

$$\frac{1}{2} \sum_{2l \equiv g-1 \pmod 3} \binom{g+2}{l}$$

3. Familles de G-courbes lisses.

Les notations et conventions de la section 2 sont conservées. Dans cette section on s'intéresse de manière essentielle à la géométrie de l'action de G dans une famille de courbes lisses, puis nodales.

3.1. Géométrie du diviseur de branchement

3.1.1. Diviseurs de points fixes

La situation générique est la suivante: soit $\pi : C \to S$ une famille de courbes, qu'on suppose tout d'abord lisse, et avec des fibres de genre $g \geq 2$ (restriction superficielle): le morphisme π est donc projectif, lisse, à fibres connexes. On supposera en général la base S est connexe. Il est alors bien connu que le foncteur en groupes $\mathrm{Aut}_{C/S} : T \mapsto \mathrm{Aut}_T(C \times_S T)$ défini sur la catégorie des S-schémas, est représentable, en fait représenté par un S-schéma fini et non ramifié $\mathrm{Aut}_S(C)$ [20]. Fixons la convention suivante: une *action* de G sur C/S est un morphisme injectif de G dans le groupe des sections de $\mathrm{Aut}_S(C)$. Notons alors que si $\sigma \neq 1$ est un S-automorphisme de C, l'automorphisme σ_s induit sur une quelconque fibre C_s, est distinct de l'identité, comme il découle de la propriété de non ramification. Nous allons tout d'abord rassembler quelques propriétés élémentaires des sous-schémas de points fixes. Rappelons que $\mathrm{Card}\, G$ est inversible dans $\mathcal{O}_S$. Comme les stabilisateurs des points dans les fibres géométriques sont cycliques, les sous-schémas de points fixes non vides sont ceux relatifs aux sous-groupes cycliques. Notons le fait facile suivant

Proposition 3.1. *Pour tout sous-groupe cyclique $H \subset G$, le sous-schéma des points fixes C^H de H est un diviseur de Cartier relatif, étale sur S.*

Preuve: C'est la version relative, pour la propriété étale, du fait bien connu que lorsqu'un groupe réductif opère sur une variété lisse sur un corps, le sous schéma des points fixes est lisse. Dit d'une autre manière, si P est un point fixe de H, d'image $s \in S$, on peut alors linéariser (formellement) l'action de H en P, donc identifier l'anneau local complété $\hat{\mathcal{O}}_P$ à $\hat{\mathcal{O}}_s[[T]]$, l'action d'un générateur σ de H étant $\sigma(T) = \zeta T$, pour une racine de l'unité convenable ζ. Alors l'équation de C^H en Pest $\sigma(T) - T = (\zeta - 1)T = 0$. Le résultat est donc visible.

□

Supposons un instant que $S = \mathrm{Spec}\,(k)$, avec k algébriquement clos. Si $P \in C$ est un point de ramification, donc qui a un stabilisateur $H \neq 1$, rappelons (2.2) qu'on attache alors à H un caractère primitif χ_P de H.

Lemme 3.2. *Soit un sous-groupe $H \subset G$ stabilisateur d'un point d'une fibre géométrique C_{s_0}, il est alors le stabilisateur d'un point pour toute fibre géométrique C_s.*
Soit $\{H_1, \cdots, H_q\}$ la liste des sous-groupes cycliques de G qui sont les stabilisateurs des points dans une fibre géométrique C_s, alors cette liste est indépendante de s, de même que le nombre de points de C_s ayant pour stabilisateur H_i.

Preuve: Il résulte immédiatement de la proposition 3.1 que pour un sous-groupe H de G, le fait d'avoir un point fixe dans une fibre géométrique C_s entraîne que H a un point fixe dans chaque fibre géométrique. De plus le cardinal de C_s^H, qui est le degré de C^H, est constant sur les fibres géométriques. Soit $\{H_1, \cdots, H_q\}$ la liste des sous-groupes H, tels que $C^H \neq \emptyset$, c'est à dire $C_s^H \neq \emptyset$ pour tout s. Posons

$$\Delta_i(s) = \{x \in C_s \text{ tel que } H_i \text{ est le stabilisateur de } x\}$$

et $r_i(s) = \mathrm{Card}\,(\Delta_i(s))$. Définissons aussi $r_i^*(s) = \mathrm{Card}\, C_s^{H_i} - r_i(s)$, c'est à dire le nombre de points dont le stabilisateur contient strictement H_i. Par la proposition 3.1, la fonction $r_i + r_i^*$ est constante. Pour prouver que r_i est constante, supposons d'abord H_i maximal dans la famille $\{H_j\}$; dans ce cas la conclusion est claire. Si tel n'est plus le cas pour H_i, et si la conclusion est admise pour tout sous-groupe H_j tel que $H_i \subsetneqq H_j$, l'égalité $r_i^* = \sum_{j, H_i \subsetneqq H_j} r_j$, montre que r_i^* est constante, et donc aussi r_i.

□

Fixons de nouveau une fibre géométrique C_{s_0}, et soit $\{P_1, \cdots, P_l\}$ la liste des points de C_{s_0} qui ont pour stabilisateur $H = H_i$; le nombre l de ces points est par le Lemme 3.2 indépendant de la fibre, ce qui donne un sens à la définition. On note χ_j $(1 \leq j \leq l)$ le caractère de H attaché à P_j.

Lemme 3.3. *L'ensemble $\{\chi_1, \cdots, \chi_l\}$ constitué de l caractères (distincts ou non) de H, c'est à dire comptés avec multiplicité, est indépendant de la fibre.*

Preuve: Soient $H_i \subsetneqq H_j$ deux sous-groupes de la liste du lemme 3.2. Le schéma des points fixes C^{H_j} est un sous-schéma fermé de C^{H_i}, et il est étale sur S, par la proposition 3.1. L'injection de C^{H_j} dans C^{H_i} est étale finie sur $S*$, et donc ouverte et fermée. Si on pose

$$Z_i = C^{H_i} - \bigcup_{H_i \subsetneqq H_j} C^{H_j} \tag{3.1}$$

il est clair que Z_i est fini étale sur S, de degré relatif l. Considérons sur Z_i le faisceau inversible $\mathcal{L}_i = \Omega^1_{C/S} \otimes \mathcal{O}_{Z_i}$; $\mathcal{L}_i$ est un $(\mathcal{O}_{Z_i}, H_i)$ module et $\pi_*(\mathcal{L}_i)$ est un $(\mathcal{O}_S, H_i)$- module localement libre de rang l. Il admet une décomposition en facteurs isotypiques $\pi_*(\mathcal{L}_i) = \bigoplus_{\chi \in \hat{H}_i} E_\chi \otimes 1_\chi$, 1_χ désignant la représentation de degré un de caractère χ, le module E_i étant localement libre. Le nombre de fois que χ apparaît dans la liste $\{\chi_i\}$ de l'énoncé est égal au rang de E_χ; la connexité de S entraîne le résultat.

□

Il est très utile dans les manipulations de familles de courbes de pouvoir disposer de la famille quotient. Le résultat bien connu, et par ailleurs élémentaire du fait de l'hypothèse de réductivité, suivant résume les propriétés essentielles de cette opération:

Proposition 3.4. *Soit $\pi : C \to S$ une courbe propre et lisse de base S. Soit une action de G sur C/S. Alors la courbe quotient $B = C/G$ existe, et le morphisme π factorise en $\pi : C \to B \to S$, le morphisme $f : C \to B$ étant fini plat de rang n; de plus la formation de B commute aux changements de bases. En particulier, au niveau des fibres on a $B_s = C_s/G$ $(s \in S)$.*

□

Une autre construction importante pour la suite est celle du diviseur de ramification (resp. le diviseur de branchement). Fixons comme ci-dessus une action de G sur la courbe C/S. Dans la liste du Lemme 3.2, des sous-groupes de G qui sont des stabilisateurs de points dans les fibres géométriques, choisissons dans chaque classe de conjugaison un élément, et notons de nouveau $\{H_1, \cdots, H_q\}$ cette liste. Formons pour chaque indice i le sous schéma Z_i (Lemme 3.3) formé des points de stabilisateur exactement H_i. Rappelons que Z_i est fini et é tale sur S. Soit $N_i = N_G(H_i)$, le normalisateur de H_i dans G, et $\overline{N}_i = N_i/H_i$. Le groupe $\overline{N}_i$ opère librement sur Z_i, de sorte que $D_i = Z_i/\overline{N}_i$ est fini étale

sur S. Alors $D_i \subset B$ est un diviseur de cartier relatif de B dont les points fermés correspondent aux orbites singulières de points de C avec isotropie H_i. Cette remarque élémentaire sera souvent utilisée. En conclusion, on observe que la donnée de ramification est invariante par déformation.

3.1.2. Ramification et branchement

Nous appelerons le diviseur de cartier relatif $D = \sum_{i=1}^{q} D_i$ de B/S le *diviseur de branchement réduit relatif*, de C/S. Le degré de D, qui est étale sur S, est le nombre d'orbites singulières contenues dans chaque fibre, donc le nombre de points de branchement. Rappelons que le diviseur de branchement $B(\pi)$, qui ne doit pas être confondu avec D, est l'image directe $B(\pi) = \pi_*(R)$ du diviseur de ramification. Ce dernier étant défini par $R = \mathrm{Div}\,(\Omega_{C/D})$, donc tel que $\mathcal{O}(R) = \Omega^1_{C/S} \otimes \pi^*(\Omega^1_{B/S})^{-1}$. Notant plus généralement, et pour utilisation ultérieure, $F_H = C^H$ le diviseur de Cartier relatif des points fixes du sous-groupe cyclique H, et Δ_H la composante de F_H formée des points de stabilisateur exactement H, on a l'expression classique du diviseur de ramification R_π:

$$R_\pi = \sum_{H \neq 1} \varphi(|H|) F_H \; = \sum_{H \neq 1} (|H| - 1)\Delta_H \tag{3.2}$$

φ désignant le fonction d'Euler. Il est facile de relier le diviseur de branchement $B(\pi)$ aux diviseurs D_i définis au dessus. En effet, partant de l'expression de dessus $R = \sum_{H \neq 1} \varphi(|H|) C^H$, et prenant l'image par π de cette relation dans D, on obtient :

$$B(\pi) = \sum_{i=1}^{q} \left(|G| - \frac{|G|}{|H_i|} \right) D_i \tag{3.3}$$

On peut raffiner la décomposition de D en invoquant le type d'une orbite singulière. La donnée de Hurwitz étant ξ, et notant $[H_1, \chi_1], \ldots, [H_k, \chi_k]$ les classes deux à deux distinctes qui apparaissent dans ξ, soit $\xi = \sum_{i=1}^{k} b_i [H_i, \chi_i]$, $(b_i > 0)$, on a la décomposition suivante:

Proposition 3.5. *Le diviseur de branchement $B(\pi)$, ou de branchement réduit $D(\pi)$, se décompose en une somme $D(\pi) = \sum_{i=1}^{k} T_\alpha$ de diviseurs deux à deux disjoints, et $\deg(T_\alpha) = b_\alpha$. Les points de D_α sont les images des fibres singulières de type $[H_\alpha, \chi_\alpha]$.*

Preuve: Fixons l'un des sous-groupes $H \in \{H_i\}$, et considérons les différents caractères primitifs $\chi_1, \cdots, \chi_m$ tels que la classe de (H, χ_i) apparaîsse dans la donnée ξ. Notons que $(H', \chi') \equiv (H, \chi)$ équivaut (voir 2.2) à l'existence de $t \in N = N_G(H)$ tel que $\chi'(s) = \chi(t^{-1}st)$, pour tout $s \in H$. Par réciprocité de Frobenius cela est aussi équivalent à $\mathbf{Ind}_H^N(\chi) \cong \mathbf{Ind}_H^N(\chi')$. La représentation $\mathbf{Ind}_H^n(\chi)$ désigne la représentation obtenue par induction de H à N de la représentation de degré un de caractère χ. Soit Z le sous schéma étale sur S associé à H comme dans le Lemme 3.3. Le faisceau conormal $\mathcal{N}$ de Z dans C coincide avec $\Omega^1_{C/S} \otimes \mathcal{O}_Z$. Il est inversible et muni d'une action de $\overline{N} = N/H$. L'image directe $\pi_\star(\mathcal{N})$ est alors un faisceau muni d'une action de $\overline{N}$. On peut ainsi le décomposer en facteurs isotypiques

$$\pi_*(\mathcal{N}) = \bigoplus_{v \in \mathrm{Irrep}\,(\overline{N})} \mathcal{L}_v \otimes v$$

où dans cette somme directe, v parcourt les représentations irréductibles de $\overline{N}$, et $\mathcal{L}_v$ est un module localement libre. Sur les composantes connexes de $\pi(Z)$, qui sont disjointes deux à deux, le rang de chacun de ces faisceaux est constant et de cela découle que la représentation $\pi_*(\mathcal{N})_y$ est constante le long des fibres $y \in \pi(Z)$. Cela prouve le résultat.

$\square$

Remarque 3.1 Soit $[H, \chi]$ une classe de conjugaison, et notons $\Delta_{(H,\chi)}$ (resp. $\Delta_{[H,\chi]}$) le diviseur de C, lieu des points fixes"d'holonomie" exactement (H, χ) (resp. un conjugué). Soit $C(H, \chi)$ le stabilisateur de (H, χ) pour l'action adjointe de G. On a $C(H, \chi) = C_G(H)$ le commutant de H dans G. On note que $\frac{C_G(H)}{H}$ agit librement sur $\Delta_{(H,\chi)}$, de quotient la composante $B_{[H,\chi]}$ de $B(\pi)$ (voir preuve de la Proposition 3.4). Par ailleurs notons la décomposition en une somme disjointe

$$\Delta_{[h,\chi]} = \sum_{g \in G/C_G(H)} e\Delta_{(H,\chi)} \tag{3.4}$$

$\Diamond$

3.2. Inversion de la formule de Chevalley - Weil

Soit comme dans la section précédente, une courbe lisse C définie sur le corps k, de genre $g \geq 2$, munie d'une action de G de donnée de Hurwitz ξ. Le faisceau canonique $\omega_C = \Omega_C$ est un G-faisceau inversible, en particulier les espaces vectoriels $H^0(C, \omega_C^{\otimes m})$ sont naturellement des représentations de G, appelées dans la suite *les représentations de Hurwitz* associées à la G-courbe C, et notées $Hurw_m(C)$, ou $Hurw_m$ s'il n'y a pas de doute sur C.

3.2.1. Formule de Chevalley-Weil

Il y a une connexion étroite entre la structure de ces représentations et la donnée de Hurwitz; pour l'essentiel elle est donnée par le théorème de Chevalley - Weil, que nous allons rappeler. Le résultat principal de cette section (Théorème 3.6) est une réciproque à ce théorème. Noter que Morrison et Pinkham ont étudié en détail la représentation $H^0(C, \omega_C)$; ils en donnent en particulier une caractérisation lorsque G est cyclique [56]. Rappelons tout d'abord la formule de Chevalley-Weil sous la forme donnée par Ellingsrud et Lönsted [28] (voir aussi [56] pour le cas cyclique). Soit $\mathcal{L}$ un $(\mathcal{O}, G)$ module inversible; la trace de Lefschetz de $\mathcal{L}$ est l'élément de l'anneau des représentations $R(G)$ donné par:

$$L_G(\mathcal{L}) = \sum_{i=0}^{1} (-1)^i [H^i(C, \mathcal{L}] \tag{3.5}$$

où si v est un kG-module, $[v]$ désigne sa classe dans $R(G)$. Lorsque l'action de G est libre, on a la formule bien connue $L_G(\mathcal{L}) = \frac{\chi(\mathcal{L})}{\operatorname{Card} G}[k[G]]$.

Indiquons brièvement comment s'obtient la formule dans le cas général. Soit $\pi : C \to B$ le quotient par G. On considère la décomposition du $(\mathcal{O}_B, G)$-faisceau $\pi_*(\mathcal{L})$ en facteurs isotypiques

$$\pi_*(\mathcal{L}) = \bigoplus_{v \in \hat{G}} E_v \otimes v$$

avec $E_v = \pi_*^G(\mathcal{L} \otimes v^\vee)$, faisceau localement libre de rang $\dim(v)$. La relation $L_G(\mathcal{L}) = \sum_{v \in G^\vee} \chi(E_v)[v]$ montre que pour obtenir la trace de Lefschetz, il suffit d'expliciter $\chi(E_v)$, du fait du théorème de Riemann-Roch qui donne $\chi(E_v) = \deg(E_v) + \dim(v)(1 - g')$.

Notons $\{y_1, \cdots, y_r\}$ les points de branchements de π. Il est clair que le conoyau $\mathcal{Q}(\mathcal{L}, v)$ du morphisme canonique $\pi^*(E_v) \to \mathcal{L} \otimes v^\vee$ a pour support les points de branchement. De plus on a visiblement en fixant un point $x_i \in \pi^{-1}(y_i)$ de stabilisateur H_i:

$$\mathcal{Q}(\mathcal{L}, v)_{y_i} = \bigoplus_{\pi(x)=y_i} \mathcal{Q}(\mathcal{L}, v)_x = \mathbf{Ind}_{H_i}^G(\mathcal{Q}(\mathcal{L}, v)_{x_i})$$

En particulier, si $\mathrm{Card}\, H_i = e_i$ on a $\dim \mathcal{Q}(\mathcal{L}, v)_{y_i} = \frac{n}{e_i} \dim \mathcal{Q}(\mathcal{L}, v)_{x_i}$. Pour décrire le kH_i-module $\mathcal{Q}(\mathcal{L}, v)_{x_i}$ on peut noter que si $\nu_i \in R(H_i)$ est la représentation de degré un de H_i dans la fibre $\mathcal{L}(x_i)$, on a $(\mathcal{L} \otimes v^\vee)_{x_i} = \mathcal{O}_{x_i} \otimes v^\vee(\nu_i)$. Le caractère χ_i de la représentation cotangente au point fixe x_i de H_i étant primitif, il vient dans $R(H_i)$ une décomposition

$$[v^\vee(\nu_i)|_{H_i}] = \sum_{l=1}^{e_i} m_{il} \chi_i^l$$

Pour expliciter la contribution de $\mathcal{Q}(\mathcal{L}, v)_{x_i}$, on est ramené à calculer la dimension du conoyau de $\left(\chi_i^l \otimes \mathcal{O}_{x_i}\right)^{H_i} \otimes_{\mathcal{O}_{y_i}} \mathcal{O}_{x_i} \to \chi_i^l \otimes \mathcal{O}_{x_i}$, qui est $e_i - l$. On en tire immédiatement $\dim \mathcal{Q}(\mathcal{L}, v)_{x_i} = \sum_{l=1}^{e_i-1} (e_i - l) m_{il}$, d'où le degré de E_v

$$\deg E_v = \frac{\dim(v) \deg(\mathcal{L})}{n} - \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=1}^{e_i-1} \frac{e_i - l}{e_i} m_{il} \tag{3.6}$$

Cette relation fournit l'essentiel du contenu numérique de la formule de Chevalley-Weil.

Exemple 3.2 (Revêtements simples de $\mathbb{P}^1$) Pour éclairer la relation (3.6), soit le cas d'un revêtement "simple" $\pi : C \to \mathbb{P}^1$, simple signifiant que le groupe de Galois est le groupe symétrique $G = \mathbf{S}_n$, et la donnée de ramification est $r(12)$, où par (12) on désigne la classe de conjugaison des transpositions. Un calcul facile conduit pour $\mathcal{L} = \Omega_C$ à

$$\deg(E_v) \;=\; \xi_v(1)(\frac{r}{2} - 2) \;-\; \frac{r}{4} \xi_v((12))$$

et vu que $\deg(E_v) = \chi_v(1)$, on trouve $\chi(E_v) \;=\; (\frac{r}{4} - 1)\, \chi_v(1) - \frac{r}{4}\, \chi_v((12))$. Notons que par les relations d'orthogonalités des caractères, on a $\sum_{v \in \mathcal{S}_\setminus} \chi_v((12)) \chi_v(1) = 0$, ce qui assure la consistance des relations de dessus avec le genre donné par la relation de Riemann-Hurwitz $g_C = \dim H^0(C, \Omega_C) = 1 + n!(\frac{r}{4} - 1)$ $\diamondsuit$

Spécialisons maintenant la relation (3.6), pour utilisation ultérieure, dans le cas G cyclique (d'ordre n) et $\mathcal{L} = \omega_C^{\otimes m}$. Fixons un générateur σ de G, et soit χ la représentation de degré un de G donnée par $\chi(\sigma) = \epsilon$, où ϵ désigne une racine primitive n-ième de l'unité fixée. Le stabilisateur H_i est alors engendré par $\sigma^{\frac{n}{e_i}}$, et le caractère local χ_i est donné par $\chi(\sigma^{\frac{n}{e_i}}) = \epsilon^{\frac{nk_i}{e_i}}$ pour un certain entier k_i, avec $0 < k_i < e_i$ et $(k_i, e_i) = 1$. Soit η_i défini par $\eta_i k_i \equiv 1 \pmod{e_i}$, alors la restriction de χ^l à H_i coïncide avec $\chi_i^{l\eta_i}$.

Avec le choix $\mathcal{L} = \omega_C^m$ $(m \geq 1)$, les représentations introduites ci-dessus sont $\nu_i = \chi_i^m$, et si $v = \chi^l$, la multiplicité de χ_i^j dans la restriction à H_i de $v^\vee(\nu_i)$ est

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } m - l\eta_i \not\equiv j \pmod{e_i} \\ 1 & \text{si } m - l\eta_i \equiv j \pmod{e_i} \end{cases} \tag{3.7}$$

Adoptons pour la suite la notation suivante: si $\langle x \rangle$ désigne la partie fractionnaire de $x \in \mathbb{R}$, $\langle\langle x \rangle\rangle = 1 - \langle -x \rangle$ Soit g' le genre de B; alors avec $v = \chi^l$ et en notant dans ce cas E_l au lieu de E_v, la relation (3.6) se spécialise en

$$\chi(E_l) = \frac{m(2g-2)}{n} + (1-g') - \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \langle\langle \frac{m - l\eta_i}{e_i} \rangle\rangle\right) \tag{3.8}$$

et tenant compte de la formule de Riemann - Roch

$$\chi(E_l) = (2m-1)(g'-1) + mr - \sum_{i=1}^{r} \left(\langle \frac{l\eta_i - m}{e_i} \rangle + \frac{m}{e_i}\right) \tag{3.9}$$

On obtient en particulier, si $m = 1$, que la multiplicité μ_l de χ^l dans $H^0(C, \omega_C)$ est

$$\mu_l = \begin{cases} g' \quad si \quad \mathrm{l} = 0 \\ g' - 1 + r - \sum_{i=1}^{r} \left(\langle \frac{l\eta_i - 1}{e_i} \rangle + \frac{1}{e_i}\right) \quad \text{si} \quad l = 1, \cdots, n-1 \end{cases} \tag{3.10}$$

Les formules (3.9) et (3.10) forment le contenu de ce qu'on appelle, semble t-il usuellement, les (ou la) formules de Chevalley-Weil.

3.2.2. Inversion des relations de Chevalley-Weil

Inverser les relations de Chevalley-Weil revient à montrer que la connaissance des représentations de Hurwitz $H^0(C, \omega_C^{\otimes m})$, en fait d'un nombre fini d'entre elles, permet de retrouver la donnée de Hurwitz. L'utilité d'une telle observation s'explique par le fait que les représentations de Hurwitz se comportent "bien" dans des familles. De manière précise, le résultat, qui à notre connaissance ne semble pas avoir été remarqué, est:

Théoreme 3.6. *Soit une action du groupe fini G sur la courbe projective lisse C/k. On suppose l'action modérée, donc que $n = \mathrm{Card}\, G$ est inversible dans k. Les kG-modules $H^0(C, \omega_C^{\otimes m})(m \geq 1)$ déterminent de manière unique la donnée de Hurwitz de l'action (un nombre fini d'entre eux en fait suffisent).*

Preuve: La preuve consiste à faire l'étude d'un point de vue combinatoire de l'action du groupe G. Elle découle plus précisément de l'utilisation itérée de la formule d'inversion de Möbius appliquée à l'ensemble ordonné des sous-groupes cycliques de G. On procède par étapes:

Lemme 3.7. *Supposons tout d'abord le groupe G cyclique d'ordre n. Soit N_k le nombre d'orbites avec n/k éléments. Alors les nombres N_k $(k > 1, k|n)$ sont totalement déterminés par les représentations de Hurwitz.*

Preuve: Soient $e_1 \leq \cdots \leq e_r$ les ordres des stabilisateurs des orbites singulières rangés dans l'ordre croissant. Du fait de 3.10, la multiplicité de la représentation triviale dans $H^0(C, \omega_C^{\otimes m})$ est donnée par

$$\begin{cases} g' & \text{si } m = 1 \\ 3g' - 3 + r & \text{si } m = 2 \end{cases}$$

Pour $m \geq 3$, le résultat est, en tenant compte de $r = N_2 + N_3 + \cdots$

$$5(g'-1) + 3r - \sum_{i=1}^{r} \left(\langle -\frac{3}{e_i} \rangle + \frac{3}{e_i} \right) = 5(g'-1) + 3r - (2N_2 + N_3 + \cdots)$$

$$= 5(g'-1) + 2r - N_2$$

expression qui visiblement détermine N_2. Supposons maintenant connaître inductivement $N_2, \cdots, N_{k-1}$ avec $k \geq 3$. La multiplicité de la représentation triviale dans le kG-module $H^0(C, \omega_C^{k+1})$ est, par la relation (3.9),

$$(2k+1)(g'-1) + (k+1)r - \sum_{i=1}^{r} \left(\langle -\frac{k+1}{e_i} \rangle + \frac{k+1}{e_i} \right)$$

$$= (2k+1)(g'-1) + (k+1)r - \sum_{2 \leq d \leq k} N_d \left(\langle -\frac{k+1}{d} \rangle + \frac{k+1}{d} \right) + 2N_k + N_{k+1} + \cdots$$

ce qui permet de déduire la valeur de N_k.

□

Revenons maintenant au cas général. Si H est un sous groupe cyclique de G de cardinal h, on notera pour tout diviseur k de h, $N_k(H)$ le nombre de H-orbites à $\frac{h}{k}$ éléments. Le lemme 3.3 appliqué à la restriction de l'action à H, montre que le cardinal $\mathrm{Card}(C^H) = N_h(H)$ de l'ensemble des points de C fixés par H est déterminé par la seule connaissance des représentations de Hurwitz. Notons Δ_H l'ensemble des points de C dont le stabilisateur est exactement H. On a alors (3.1)

$$\Delta_H = C^H - \bigcup_{K, H \subsetneq K} C^K \tag{3.11}$$

Une orbite singulière qui contient un point de stabilisateur H coupe Δ_H en $\beta = [N_G(H) : H]$ points. La technique usuelle d'inversion de Möbius, conduit à:

Lemme 3.8. *Considérons des opérations du groupe G sur les courbes lisses C_1 et C_2. On suppose que pour tout $m \geq 1$ on a un isomorphisme de kG-modules $H^0(C_1, \omega_{C_1}^{\otimes m}) \cong H^0(C_2, \omega_{C_2}^{\otimes m})$. Alors un sous-groupe cyclique H de G est le stabilisateur d'un point de C_1 si et seulement si H est le stabilisateur d'un point de C_2.*

Preuve: On utilise implicitement un argument bien connu, souvent appelé le Lemme de Brauer ([65], p 67), qui rappelons le, dit que si X, Y sont deux ensembles finis munis d'une action du groupe fini

G, alors les représentations par permutations de G définies par X et Y sont équivalentes si et seulement si pour tout sous-groupe cyclique H de G on a $\mathrm{Card}\, X^H = \mathrm{Card}\, Y^H$. Il découle tout d'abord du lemme 3.7, que si H est un sous-groupe cyclique de G, alors $\mathrm{Card}\, C_1^H = \mathrm{Card}\, C_2^H$. Posons si $i = 1, 2$

$$f_i(H) = \mathrm{Card}\, C_i^H \quad \text{et} \quad g_i(H) = \mathrm{Card}\, \Delta_i(H)$$

de sorte que $f_1(H) = f_2(H)$ pour tout sous-groupe cyclique H de G. L'ensemble $\mathcal{C}$ des sous-groupes cycliques de G étant ordonné par l'inclusion, on peut définir la fonction de Möbius correspondante $\mu_G : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \{0, \pm 1\}$. Si μ représente la fonction de Möbius usuelle, on a pour $H, K \in \mathcal{C}$, $H \subset K$, $\mu_G(H, K) = \mu([K : H])$. De (3.11) on tire immédiatement l'égalité

$$f_i(H) = \sum_{K, H \subset K} g_i(K) \tag{3.12}$$

La relation d'inversion de Möbius conduit de suite à la relation $g_i(H) = \sum_{K, H \subset K} \mu_G(H, K) f_i(K)$. Comme $f_1 = f_2$, on a bien $g_1 = g_2$, ce qui est en substance le résultat annoncé.

□

Preuve du théorème 3.1: On suppose avoir pour tout $m \geq 1$ un isomorphisme de kG - modules: $H^0(C_1, \omega_{C_1}^m) \cong H^0(C_2, \omega_{C_2}^m)$. Il s'agit de prouver que les données de Hurwitz $\{\xi_i\}$ $(i = 1, 2)$ attachées à C_1 et C_2 sont identiques, c'est-à-dire que la multiplicité dans ξ_1 et ξ_2 d'une quelconque classe $[H, \chi]$, est la même. La première observation, qui découle du lemme 3.2, est qu'un sous-groupe cyclique H stabilise un point de C_1 si et seulement si il stabilise un point de C_2. Il faut donc maintenant prouver, en travaillant avec $C = C_1$ ou C_2, que la classe de conjugaison de H étant fixée, on peut extraire des représentations de Hurwitz de C la multiplicité d'une classe (H_i, χ_i), avec H_i conjugué à H. Ces classes sont en bijection avec les $N_G(H)$-orbites dans Δ_H, où $N_G(H)$ est comme déja indiqué le normalisateur de H, et rappelons le $\Delta_H = \{x \in C, G_x = H\}$. On est ainsi ramené par restriction de l'action à H, au cas $G = H$ cyclique. Ceci étant, notons

$$2 \leq e_1 \leq \cdots \leq e_r \leq n = \mathrm{Card}\, G \tag{3.13}$$

les ordres des stabilisateurs des orbites singulières, et $H_1, \cdots, H_r$ ces stabilisateurs. Extraire la donnée de Hurwitz revient à expliciter pour chaque H_i, l'entier $\nu_i, 1 \leq \nu_i < e_i$, $(\nu_i, e_i) = 1$. La multiplicité du caractère χ^l dans la représentation $Hurw_m$ étant connue (noter que les entiers g' et r sont déterminés), on peut supposer que l'expression

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\langle \frac{l\nu_i - m}{e_i} \rangle + \frac{m}{e_i} \right)$$

est déterminée pour tout $m \geq 1$, et tout l. En particulier si $m = n$, l'expression $\sum_{i=1}^{r} \langle \frac{l\nu_i}{e_i} \rangle$ est déterminée pour tout l. Ainsi l'expression

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\langle \frac{l\nu_i - m}{e_i} \rangle - \langle \frac{l\nu_i}{e_i} \rangle - \langle -\frac{m}{e_i} \rangle \right)$$

peut donc être considérée comme acquise pour tout $m \geq 1$ et tout l. Si $m = an - 1$ $(a \geq 1)$, cette dernière expression vaut

$$\sum_{i=1}^{r} \left(\langle \frac{l\nu_i + 1}{e_i} \rangle - \langle \frac{l\nu_i}{e_i} \rangle - \langle -\frac{1}{e_i} \rangle \right) \tag{3.14}$$

mais pour tout $q \in \mathbb{Z}$, $\langle \frac{q+1}{e} \rangle - \frac{1}{e} - \frac{q}{e} = -1$ si $e|q+1$, 0 sinon. On obtient ainsi que l'expression (3.14) compte le nombre d'indices $i \in [1, r]$, tels que $l\nu_i \equiv -1 \pmod{e_i}$. Pour terminer la preuve, notons que si $n = \mathrm{Card} G = p$ est premier, la conclusion est claire, car alors $H_1 = \cdots = H_r = G$, et le nombre des ν_i tels que $\nu_i \equiv q \pmod{p}$ pour tout q premier à p. Si maintenant n est quelconque, on peut raisonner par induction croissante sur l'ordre des sous-groupes, et supposer que la donnée relative à tout sous-groupe strict $H \subsetneqq G$ est déterminée. Si $\Delta_G \neq \emptyset$, la preuve est terminée; dans le cas contraire, il faut pouvoir compter pour tout q premier à n, le nombre des $\{\nu_i\}$ égaux à q pour lesquels $e_i = n$. Supposons que la liste (3.14) soit telle que

$$e_1 \leq \cdots \leq e_t < e_{t+1} = \cdots = e_r = n \quad (0 \leq t < r)$$

Alors connaissant les entiers $\nu_1, \cdots, \nu_t$, et pout tout l premier à n le nombre d'indices $i \in [1, r]$ tels que $l\nu_i \equiv -1 \pmod{e_i}$, on peut finalement obtenir la totalité de la donnée de Hurwitz, ce qui démontre le théorème.

□

Il est maintenant clair que si C/S est une courbe (lisse) sur une base connexe, munie d'une action de G, alors la donnée de Hurwitz de l'action de G le long des fibres géométriques est constante. Cela découle immédiatement du théorème 3.1 joint au résultat suivant, qui est une extension au cas équivariant du résultat classique qui établit que sous les hypothèses du présent énoncé, la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{L}_s)$ est constante. De manière précise:

Proposition 3.9. *Sous les hypothèses ci-dessus, soit $\mathcal{L}$ un $(\mathcal{O}_C, G)$ faisceau localement libre de rang fini. La trace de Lefschetz $L_G(\mathcal{L}_s)$ est constante de long des fibres géométriques. En particulier la représentation $H^0(C_s, (\omega_{C/S})_s)$ est indépendante de $s \in S$.*

□

4. Familles de G-courbes stables.

Dans cette section on étend les résultats de la section 3 aux familles de courbes préstables. On introduit la stabilité de l'action d'un groupe fini G, sur une courbe préstable, et on propose la définition des revêtements galoisiens stables, respectivement stables marqués.

4.1. Actions stables, revêtements stables

4.1.1. Courbes stables et stables marquées

Les définitions générales en ce qui concerne les courbes préstables et stables marquées sont dans [40], [53], ou dans les articles de Deligne-Mumford [20], et Knudsen [48]. Nous suivrons essentiellement la terminologie de Manin ([53], Chap.5), en particulier nous utiliserons la terminologie préstable, comme équivalente à celle de courbe nodale ou semi-stable. Les restrictions sur les caractéristiques des corps résiduels sont identiques à celles des sections précédentes.

Définition 4.1. *1) Une courbe préstable, de base un schéma S, est un morphisme propre et plat $\pi : C \to S$ dont les fibres géométriques sont des courbes nodales connexes (voir §2.1). Si S est connexe, le genre (arithmétique) d'une fibre est constant, c'est le genre de la courbe.*
2) Une courbe préstable est dite stable si les fibres géométriques $\{C_s\}$sont des courbes stables dans le sens de Deligne-Mumford, donc si le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}\,(C_s)$ est fini.

On sait que la stabilité pour une courbe définie sur un corps algébriquement clos, de genre $g \geq 2$, équivaut à propriété suivante : Si E est une composante non singulière rationnelle de C, alors E rencontre les autres composantes en au moins trois points. Usuellement cette condition s'exprime de manière particulièrement agréable sur le graphe dual classiquement attaché à C; cela sera rappelé dans la suite (§7.1). Du fait que pour une courbe préstable le morphisme $\pi : C \to S$ est un morphisme localement d'intersection complète, le faisceau dualisant relatif, défini par ([46], §1)

$$\omega_{C/S} = \det(\Omega^1_{C/S}) \tag{4.1}$$

est localement libre de rang un. On sait que sa formation est compatible avec les changements de base. Dans loc.cit. il est prouvé que la courbe préstable $\pi : C \to S$ est stable si et seulement si $\omega_{C/S}$ est relativement ample. La définition (4.1) se généralise, comme il est bien connu, à la considération de courbes stables marquées (Harris-Morrison [40], Knudsen [48], Manin [53], Wewers [67]):

Définition 4.2. *Soit $\pi : C \to S$ une courbe préstable de base S. Soit $B \subset C$ un diviseur de Cartier relatif de degré $d \geq 1$. i) On dit que B définit un marquage de C/S, ou que C/S est marquée par B, si B est étale sur S, et si de plus le support de B est contenu dans la partie lisse de π, donc si pour tout point géométrique $s \in S$, les points de $B_s \subset C_s$ sont des points non singuliers. On parlera dans la suite de $(C/S, B)$ comme d'une courbe marquée.*
ii) La courbe marquée $(C/S, B)$ est dite stable, ou encore C/S est dite stable marquée par B, si pour tout point géométrique $s \in S$, l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite:
- *Le groupe $Aut(C_s, B_s)$ des automorphismes de C_s préservant B_s est fini.*
- *Toute composante de la normalisation de C_s qui est rationnelle (resp. de genre 1), contient au moins trois points exceptionnels (resp. un). On appelle point exceptionnel un point qui est soit dans le support de B, soit l'origine d'une branche issue d'un point double.*

Quitte à effectuer un changement de base étale, on peut supposer que B est une somme de sections disjointes $B = \sum_i P_i$, avec en tout point géométrique $s \in S$ la condition de stabilité satisfaite, $P_i(s)$ est

un point non singulier, et si $i \neq j$, $P_i(s) \neq P_j(s)$. On montre alors, et cela sert de définition alternative, qu'une courbe préstable marquée $\pi : C \to S$ est stable si et seulement si le faisceau $\omega_{C/S}(B)$ est relativement ample ([53] Ch 5, §1). Rappelons qu'il importe de distinguer deux situations, dans l'une la courbe est marquée par B, et dans l'autre B est une somme de sections disjointes numérotées, la courbe est alors *piquée*.

Dans les deux cas les isomorphismes sont contraints de respecter le marquage, respectivement les piqûres. On rencontrera aussi la situation intermédiaire dans laquelle les points marqués sont affectés d'une couleur, mais pas de manière univoque, les isomorphismes devant dans ce cas simplement respecter la couleur. Cela équivaut à numéroter les points par paquets. Dans ce cas $B = B_1 + \cdots + B_r$ est décomposé en une somme de diviseurs disjoints deux à deux, les points de B_α étant vus comme les points d'une même couleur, disons la couleur α. Posons $d_\alpha = \deg(B_\alpha)$, et $d = \deg(B) = \sum_\alpha d_\alpha$.

On suppose maintenant, comme dans le paragraphe précédent dont on conserve les notations, que le groupe fini G agit fidèlement sur C/S. Sous les hypothèses fixées au début, le groupe G est réductif, ce qui assure que l'opération de passage au quotient se comporte comme dans le cas lisse, en particulier on a l'analogue de la proposition 3.2:

Proposition 4.3. *Soit $\pi : C \to S$ une courbe préstable munie d'une action de G. Alors la courbe quotient $D = C/G$ est préstable, et sa formation commute aux changements de bases. En particulier, pour tout point géométrique $s \in S$, $D_s = C_s/G$.*

Preuve: Le point essentiel, qui est la commutation du quotient à tout changement de base est aisé; voir la proposition 3.2.

□

4.1.2. Actions stables

Il est maintenant tout à fait clair que la conclusion de la proposition 3.9 s'applique sans changement à la situation de la proposition 4.3, avec dans ce cas pour G-faisceau, le faisceau dualisant relatif $\omega_{C/S}$ [20]. La représentation de G dans $H^0(C_s, (\omega_{C/S})_s)$ est indépendante de $s \in S, S$ étant connexe. Revenons aux conditions de la proposition 4.1. Soit $x \in C_s$ un point qui correspond à un point double d'une fibre géométrique, de sorte que $\hat{\mathcal{O}}_{C_s,x} \cong k[[X,Y]]/(XY)$. Dans l'anneau local complété, $X = 0$ et $Y = 0$ définissent les branches formelles en x. Supposons que le stabilisateur G_x soit non trivial, alors G_x opère sur l'ensemble à deux éléments composé par les deux branches. Remarquons aussi qu'on obtient de manière analogue au cas lisse une représentation fidèle de G_x dans l'espace cotangent au point x, soit un morphisme injectif $G_x \hookrightarrow GL(2,k)$.

La définition suivante trouvera sa motivation ultérieurement; elle est réservée pour le moment aux courbes dépourvues de marquage, et ne porte que sur l'action de G au voisinage des points doubles:

Définition 4.4. *L'action de G sur la courbe préstable C/S est dite stable (certains disent Kummerienne [63]), si pour tout point double x d'une fibre géométrique, la représentation de G_x dans l'espace cotangent de la fibre en x possède la propriété suivante: pour tout $\sigma \in G_x$:* $\det(\sigma) = 1$ *si σ fixe les branches, et* $\det(\sigma) = -1$ *si σ échange les branches.*

Il est clair que la condition de stabilité équivaut à dire que le stabilisateur d'un point double est soit cyclique, soit diédral, et dans ce dernier cas les éléments de déterminant -1 dans la représentation cotangente sont les éléments qui échangent les branches. Plus précisément soit $H = G_x^0 \triangleleft G_x$ le sous groupe d'indice au plus deux formé des éléments qui fixent les branches. Ce groupe est cyclique, et l'action de H sur l'espace cotangent en x sur la branche $X = 0$ (resp. $Y = 0$), définit un caractère primitif χ_X (resp. χ_Y) de H. La condition sur le déterminant est alors équivalente à

$$\chi_X \cdot \chi_Y = 1 \tag{4.2}$$

Si G_x est d'ordre deux, et s'il y a échange des branches, le groupe est diédral. Soit G agissant stablement sur la courbe préstable C, définie sur le corps algébriquement clos k. Les considérations ci-dessous s'appliqueront donc à une fibre géométrique. On peut classer les points à isotropie non triviale en trois familles disjointes deux à deux:

(I) points fixes non singuliers

(II) points doubles à isotropie cyclique

(III) points doubles à isotropie diédrale

L'observation suivante, élémentaire, mais néanmoins cruciale, revient à dire que les points de type II ne doivent pas être considérés comme des points de ramification. On verra cependant qu'ils contribuent de manière non triviale à la déformation universelle du revêtement, à la différence des points de ramification. Soit $\omega_{C/S}$ la faisceau dualisant de la courbe préstable $\pi : C \to S$. On a $\omega_{C/S} = \det(\Omega^1_{C/S})$ avec la description locale suivante [48],[53]. Supposons que localement (pour la topologie étale) sur U, on réalise C comme une hypersurface d'équation $f = 0$ dans un schéma lisse de dimension relative 2 sur S. Alors on a une identification canonique, avec $I = (f)$:

$$\omega_{C/S_{|U}} = \mathrm{Hom}_U(I/I^2, \wedge^2 \Omega^1{}_{M/S} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{C}_{|U}}) \tag{4.3}$$

Il découle de la suite exacte (sur U) $O \to I/I^2 \to \Omega^1{}_{M/S} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}} \to \Omega^1{}_{C/S} \to 0$ un morphisme canonique $\Omega^1{}_{C/S_{|U}} \to \omega_{C/S_{|U}}$ qui est un isomorphisme en dehors du lieu singulier [48]. Rappelons que si $S = \mathrm{Spec}\,(k)$, et si P un point double, on a $\widehat{\omega}_{C,P} = \hat{\mathcal{O}}_{C,P}.\omega$, où ω est la forme méromorphe qui sur la normalisation de C, vaut $\frac{dX}{X}$ sur la branche $Y = 0$, et $-\frac{dY}{Y}$ sur la branche $X = 0$. Dans le cas d'une base arbitraire, et pour un quotient $\pi : C \to D = C/G$, d'une courbe préstable C par une action stable de G (Définition 4.4), on va prouver que le morphisme naturel $d\pi : \pi^*(\Omega^1_{D/S}) \to \Omega^1_{C/S}$, s'étend canoniquement en un morphisme (noté encore $d\pi$):

$$d\pi : \pi^*(\omega_{D/S}) \to \omega_{C/S} \tag{4.4}$$

Ce morphisme est un isomorphisme en dehors des points fixes de types I et III. On le construit d'abord localement, et par naturalité on l'étend en un morphisme global. On obtient ce morphisme en

combinant le morphisme $d\pi : \pi^*\Omega^1_{D/S} \to \Omega^1_{C/S}$ avec la flèche $\Omega^1_{C/S} \to \omega_{C/S}$, et la flêche analogue. Au voisinage d'un point double P de type II, d'image $s \in S$, on peut utiliser un système de coordonnées locales pour décrire le morphisme π (par exemple Wewers [67], §2.1, Jarvis [44] §5.1). On peut de la sorte choisir étale-localement des coordonnées (x, y) en P , telles que C soit sur ces coordonnées la courbe relative

$$(xy - a = 0) \subset \mathbb{A}_S{}^2$$

et que l'action du stabilisateur G_P (d'ordre $e \geq 2$) est décrite par $\sigma(x) = \zeta x, \quad \sigma(y) = \zeta^{-1}y$, σ étant un générateur de G_P[4]. On en déduit immédiatement une description locale-étale de D par l'intermédiaire des coordonnées $u = x^e$, $v = y^e$ soumises à l'équation $uv - a^e = 0$. Ces descriptions fournissent des générateurs locaux $\omega(x, y)$ et $\omega(u, v)$ pour respectivement $\omega_{C/S}$, et $\omega_{D/S}$. Le morphisme local requis est l'isomorphisme défini par $\pi^*(\omega(u, v)) \mapsto \omega(x, y)$. Il est facile de voir que ce morphisme est canonique, du fait que tout autre système de coordonnées locales se déduit de (x, y) par $x' = \alpha x$, $y' = \beta y$, et $a' = \alpha\beta a$, après localisation étale. On peut d'une autre manière invoquer l'argument suivant. Le faisceau $\omega_{C/S}$ est le faisceau dualisant, de sorte qu'on a un isomorphisme fonctoriel $\mathrm{Hom}_C(\mathcal{F}, \omega_{C/S}) \cong \mathrm{Hom}_S(R^1p_*(\mathcal{F}), \mathcal{O}_S)$. Si $\mathcal{F} = \pi^*(\omega_{D/S})$, alors le morphisme global cherché provient par dualité du morphisme trace

$$Tr = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g : \pi_*(\mathcal{O}_C) \to \mathcal{O}_D$$

On notera que les faisceaux $\omega_{C/S}$ et $\Omega^1_{C/S}$ sont de manière naturelle des G-faisceaux, et seront en permanence pris comme tels. La structure du morphisme 4.4 peut être précisée:

Lemme 4.5. *Soit $p : C \to S$ une courbe préstable munie d'une action de G. On suppose que G agit fidèlement et stablement sur les fibres géométriques. Soit $\pi : C \to B = C/G$ le morphisme de C sur la courbe quotient. Pour tout entier $l \geq 1$, on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \pi^*\omega^{\otimes l}_{D/S} \longrightarrow \omega^{\otimes l}_{C/S} \longrightarrow \mathcal{V}_l \longrightarrow 0 \tag{4.5}$$

où $\mathcal{V}_l$ est un $\mathcal{O}_S$-module cohérent plat, dont la formation est compatible avec les changements de base. Le support de $\mathcal{V}_l$ est concentré aux points de type (I) et (III).

Preuve: Partant du morphisme $\pi^*(\omega_{D/S}) \to \omega_{C/S}$, par passage à la puissance tensorielle l-ième, on obtient un morphisme $\pi^*\omega^{\otimes l}_{D/S} \longrightarrow \omega^{\otimes l}_{C/S}$. Soit $\mathcal{V}_l$ le conoyau. Pour décrire ce faisceau, supposons d'abord $S = \mathrm{Spec}\,(k)$, le corps k étant algébriquement clos. Il n'est pas difficile dans ce cas de décrire (localement) explicitement le morphisme $\pi^*(\omega^{\otimes l}_D) \longrightarrow \omega^{\otimes l}_C$, et de la sorte $\mathcal{V}_l$. Traitons d'abord le cas $l = 1$. En un point non singulier $x \in C$, d'image $y \in D$, soit t un paramètre local, tel que le stabilisateur G_x agisse par $\sigma.t = \chi(\sigma)t, \quad (\sigma \in G_x)$, où $\chi \in \widehat{G}_x$ est un caractère primitif. Soit e l'ordre de G_x. Alors $u = t^e$ est un paramètre local en y et le morphisme (4.5) a pour description locale en x

$$\mathcal{O}_x du \longrightarrow \mathcal{O}_x dt, \quad \text{avec} \quad du = et^{e-1}dt \tag{4.6}$$

[4] Il est bien connu que ces coordonnées sont bien définies aux changements suivants: image réciproque par localisation étale, substitution $(x, y, a) \mapsto (\alpha x, \beta y, \gamma a)$ où $\alpha, \beta \in \mathcal{O}^*_P,\ \gamma = \alpha\beta \in \mathcal{O}^*_s$ [44].

On trouve ainsi que $\dim(\mathcal{V}_x) = e-1$. Si maintenant x est un point double de type (II), selon la nomenclature précédente, on peut supposer que formellement l'action de G_x sur les branches est donnée par l'intermédiaire de deux caractères opposés, χ et χ^{-1}, d'ordre $e > 1$ (condition de stabilité (1)). On peut ainsi considérer des paramètres locaux X, Y le long des branches de sorte que

$$\widehat{\mathcal{O}}_x = k[[X,Y]]/(XY)\ ,\ \widehat{\mathcal{O}}_y = k[[U,V]]/(UV), \quad \textbf{avec} \quad U = X^e, V = Y^e$$

où U, V définissent des paramètres locaux le long des branches en y. Notons par une lettre minuscule x, y, u, v, les classes respectives de X, Y, U, V; alors le morphisme (4.5) a pour description locale au point x

$$\widehat{\mathcal{O}}_x(\frac{du}{u}, -\frac{dv}{v}) \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_x(\frac{dx}{x}, -\frac{dy}{y}) \tag{4.7}$$

avec $\frac{du}{u} = e\frac{dx}{x}$, et $\frac{dv}{v} = e\frac{dy}{y}$. Le morphisme (4.5) est bien en un tel point un isomorphisme, comme imposé dans la construction du morphisme 4.4.

Supposons maintenant que x est un point fixe de type (III), et que $G_x \cong \mathbb{D}_e, (e \geq 1)$. Dans ce cas il est clair que y est non singulier, et que les paramètres le long des branches étant choisis comme au dessus, $t = x^e + y^e$ est un paramètre en y. La description locale de (4.5) est dans ce cas:

$$\widehat{\mathcal{O}}_x dt \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_x(\frac{dx}{x}, -\frac{dy}{y}), \quad \text{avec} \quad dt = (ex^e, -ey^e)(\frac{dx}{x}, -\frac{dy}{y}) \tag{4.8}$$

En particulier cette description donne $\mathcal{V}_x \neq 0$, en fait le rang est $\dim(\mathcal{V}_x) = 2e-1$. Revenons au morphisme (4.5); on vient de voir qu'il est injectif sur les fibres, il est donc injectif avec un conoyau $\mathcal{V}_l$ plat sur S, comme il résulte du critère local de platitude, et donc de formation compatible aux changements de base. Le support de $\mathcal{V}_l$ est concentré exclusivement en les points fixes de type (I) ou (III).

□

Dans le cas $l = 1$, on posera dans la suite $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1$. On conserve les notations du Lemme 4.5. La suite exacte 4.5 justifie la définition suivante, dans laquelle Div est le diviseur de cartier construit dans [58]:

Définition 4.6. *Le diviseur de Cartier relatif* $R_\pi = \mathrm{Div}\,\mathcal{V} = \mathrm{Div}\,(\pi^*(\omega_{D/S} \to \omega_{C/S})$ *est appelé le diviseur de ramification du morphisme* $\pi : C \to D$.

On notera que le support de R_π est l'ensemble des points de type I ou de type III. Par ailleurs, de la définition, jointe à la suite exacte 4.4, il vient l'égalité (formule de ramification)

$$\omega_{C/S} \cong \pi^*(\omega_{D/S}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{R}_\pi) \tag{4.9}$$

On souhaite relier le diviseur R_π aux sous-schémas de points fixes des sous-groupes cycliques de G, comme dans le cas lisse. Soit H un sous-groupe cyclique de G, $H \neq 1$. Ce qui précède justifie la définition d'apparence peu naturelle suivante:

Définition 4.7. *Soit une action stable de G sur la courbe préstable C définie sur k. Soit $p \in C$: On dit que H fixe strictement p, si p étant non singulier, on a $Hp = p$, et p étant un point double, si on a d'une part $Hp = p$, et d'autre part tout élément $\sigma \in H, \sigma \neq 1$, inverse les branches.*

On observera que si H fixe strictement le point double p, alors H est d'ordre deux, et l'élément distinct de l'identité de H est une reflexion, i.e. inverse les branches. On étend la définition au cas relatif. La proposition suivante précise la structure du sous-schéma des points fixes d'un sous-groupe cyclique en présence de points doubles.

Proposition 4.8. *Soit $\phi : C \to S$ une courbe préstable sur laquelle le groupe G agit stablement, et soit $\pi : C \to D = C/G$ le revêtement associé.*
1) Pour tout sous-groupe cyclique H de G, le sous-schéma $Fix(H) = C^H$ des points fixes de H est réunion disjointe d'une partie horizontale et d'une partie verticale:

$$Fix(H) = Fix(H)_{hor} \sqcup Fix(H)_{ver} \tag{4.10}$$

où $Fix(H)_{hor}$ est un diviseur de Cartier relatif qui a pour support les points fixés strictement par H. Le support de $Fix(H)_{ver}$ est inclus dans les points doubles de type (II) de H.
2) Comme dans le cas lisse on a l'égalité de diviseurs, la somme étant étendue aux sous-groupes cycliques non triviaux

$$R_\pi = \sum_H \phi(|H|) Fix(H)_{hor} \tag{4.11}$$

Preuve: Fixons σ un générateur de H, avec $\operatorname{Card} H = e$. Soit $x \in Fix(H)$ un point fixe de type (I), donc non singulier dans sa fibre, et soit $\phi(x) = s \in S$. C'est un fait standard, observé dans la proposition 4.4, qu'au point x, $Fix(H)$ est un diviseur de Cartier relatif étale sur S. Supposons maintenant que x soit du type (II). Quitte à passer aux anneaux locaux complétés, on peut supposer que $\widehat{\mathcal{O}}_x \cong \widehat{\mathcal{O}}_s[[X,Y]]/(XY-a)$, $\quad (a \in \hat{\mathcal{M}}_s)$, l'action de H étant décrite par $\sigma(X) = \zeta X,\ \sigma(Y) = \zeta^{-1}Y$, pour une racine primitive d'ordre e convenable de l'unité. Il est immédiat que l'idéal du sous-schéma fermé $Fix(H)$ en x est engendré par les classes de $\sigma(X)-X$ et $\sigma(Y)-Y$, il est donc égal à (X,Y). On voit ainsi qu'en ce point $Fix(H)$ n'est pas un diviseur de Cartier. Supposons maintenant le point x de type (III), et que x soit un point fixe strict de H; alors avec les notations précédentes, $\sigma(X) = Y, \sigma(Y) = X$, et dans ce cas H est d'ordre deux. L'idéal de $Fix(H)$ est engendré par la classe de $X - Y$, en particulier c'est un diviseur de Cartier en ce point. L'anneau local complété de $Fix(H)$ en x est $\widehat{\mathcal{O}}_{Fix(H),x} \cong \widehat{\mathcal{O}}_s[[X]]/(X^2 - a)$, avec $a \in \hat{\mathcal{M}}_s$. Il n'est pas étale sur $\widehat{\mathcal{O}}_s$.

L'ensemble (ouvert) des points de $Fix(H)$ en lesquels $Fix(H)$ est un diviseur de Cartier, est égal au support du diviseur de ramification du morphisme quotient $C \to D = C/H$ (définition 4.6). Finalement $Fix(H)$ se décompose en une somme disjointe

$$Fix(H) = Fix(H)_{hor} \sqcup Fix(H)_{ver}$$

où $Fix(H)_{hor}$ est un diviseur de Cartier relatif supporté par les points fixes stricts de H, et $Fix(H)_{ver}$ a un support inclus dans l'ensemble des points fixes de type (II) de H, ce qui prouve 1).

2) L'égalité 4.10 a été observée précédemment pour les points fixes non singuliers dans leur fibre. Reste a vérifier l'égalité en les points de type III. Soit x un tel point, avec un stabilisateur diédral d'ordre $2e$. Les notations étant comme au-dessus, une équation locale de R_π en x, est $X^e - Y^e$. Si le stabilisateur G_x a pour générateurs σ et τ, avec $\sigma^e = \tau^2 = (\tau\sigma)^2 = 1$, alors l'équation locale en x de $Fix(\tau\sigma^i)_{hor}$ est comme obtenu ci-dessus $X - \zeta_e^i Y$. Le résultat se réduit à l'égalité $X^e - Y^e = \prod_{i=0}^{e-1}(X - \zeta_e^i Y)$.

□

Corollaire 4.9. *Sous les hypothèses de la proposition 4.2, la base S étant supposée connexe, notons d le degré de $Fix(H)_{hor}$ relativement à S. Pour tout point géométrique $s \in S$, on a*

$$d = \#\{x \in Fix(H)_{hor}(s), x \textbf{ de type (I)}\} + 2\#\{x \in Fix(H)_{hor}(s), x \textbf{ de type (III)}\}$$

Preuve: On vient de voir que $Fix(H)_{hor}$ est étale sur S en les points de type (I), et que si $x \in Fix(H)_{hor}$ est un point de type (III) d'image s, alors $\dim(\widehat{\mathcal{O}}_{Fix(H)_{hor},x} \otimes k(s)) = 2$. Le résultat en découle.

□

4.1.3. Géométrie du quotient par une action stable

Pour utilisation ultérieure, la courbe préstable C étant toujours définie sur le corps k, nous allons comparer les G-faisceaux $\pi^*(\Omega^1_{D/k})$ et $\Omega^1_{C/k}$. Les notations précédentes étant toujours en vigueur, rappelons que le foncteur $\pi_\star^G : (G - Coh\, C) \to (Coh\, D)$ transforme un G-faisceau (cohérent) $\mathcal{F}$ sur C en le faisceau sur D des sections G-invariantes $\pi_\star(\mathcal{F})^G$ de $\pi_\star(\mathcal{F})$. Le premier résultat est:

Proposition 4.10. *1) Le morphisme $\Omega^1_{D/k} \to \pi_*^G(\Omega^1_{C/k})$ est injectif et le conoyau est concentré aux points images des points doubles de type (II).*
2) Le morphisme $\pi_*^G(\theta_C) \to \theta_D$ est injectif et le conoyau est concentré aux points de B images d'un point de type (I), donc nonsingulier, ou un point double de type (III); en ces points le conoyau est de dimension un.
En particulier, s'il n'y a pas de point fixe de type (III), on a $\pi_*^G(\theta_C) = \pi_*^G(\theta_C(-R)) = \theta_D(-\Delta)$, où $\Delta = \sum_j Q_j$ (resp. $R = \sum_i P_i$) désigne le diviseur de branchement (resp. de ramification) réduit.

Preuve: Partons de la suite exacte $\pi^*(\Omega^1_{D/k}) \longrightarrow \Omega^1_{C/k} \longrightarrow \Omega^1_{C/D} \longrightarrow 0$. Appliquant le foncteur π_*^G, on obtient un morphisme $\Omega^1_{D/k} \longrightarrow \pi_*^G(\Omega^1_{C/k})$ qui est un isomorphisme en dehors des points de branchement (lisses), et des points doubles. Soit $y = \pi(x) \in B$ un point de branchement non singulier, et soit e l'indice de ramification correspondant. Si on choisit des paramètres locaux t et u en x et y respectivement, comme dans le lemme 4.5, le morphisme (4.11) admet alors la description locale suivante:

$$g(u)du \in (\Omega^1_{B/k})_y \longmapsto eug(u)\frac{dt}{t} \tag{4.12}$$

Comme il est clair que $\pi_*^G(\Omega^1_{C/k})_y = u\frac{dt}{t}\mathcal{O}_{D,y}$, on trouve bien que le morphisme (4.11) est bijectif en un tel point. Soit maintenant le cas de x point double avec isotropie cyclique, d'ordre $e \geq 2$. En utilisant

les coordonnées locales le long des branches, introduites dans le lemme 4.5, on obtient la description suivante pour les deux termes du morphisme (4.11); pour le premier de ces termes:

$$(\Omega^1_{D/k})_y = \frac{\widehat{\mathcal{O}}_y\, du \oplus \widehat{\mathcal{O}}_y\, dv}{(udv + vdu)}$$

et pour l'autre:

$$(\pi^G_* \widehat{(\Omega^1_{C/k})}_y = \left(\frac{\widehat{\mathcal{O}}_x\, dx \oplus \widehat{\mathcal{O}}_x\, dx}{(xdy + ydx)} \right)^{G_x}$$

Soit σ un générateur de G_x, agissant par $\sigma x = \zeta x$, et $\sigma y = \zeta^{-1} y$. Un calcul élémentaire conduit à l'expression suivante d'une forme ω, G_x - invariante:

$$\omega = (\frac{A(u)}{x}, by)dx + (0, \frac{D(v)}{y})dy, \quad (b \in k, \quad A(0) = D(0) = 0) \tag{4.13}$$

On voit alors immédiatement que le morphisme (4.11) est injectif en x, et que son image est l'ensemble des 1-formes qui dans l'expression (4.13) ont $b = 0$. En particulier le conoyau est de dimension un, comme indiqué. Pour la seconde assertion, en dualisant le morphisme 4.11, on obtient un morphisme $\pi^G_*(\theta_C) \to \theta_D$; la conclusion relève des mêmes calculs locaux que nous omettons.

□

Remarque 4.1 Si l'action stable du groupe G sur C/S n'a pas de points du type III, alors le diviseur de ramification est de la forme habituelle. La partie horizontale (Proposition 4.8) de $Fix(H)$, H sous-groupe cyclique, est une somme de diviseurs de Cartier relatifs à supports disjoints $Fix_{hor}(H) = \sum_{C \subset H} \Delta_C$, en notant Δ_C le lieu des points de stabilisateur exactement C. Il est immédiat de retrouver l'expression usuelle du diviseur de ramification $R = \sum_H (|H| - 1)\Delta_H$. $\Diamond$

4.2. Collision des points de ramification

4.2.1. G-type d'un G-diviseur

Soit une action stable de G sur C. On suppose que $D \subset C$ est un diviseur de Cartier relatif, étale de degré N sur S, de support contenu dans la partie lisse de $\pi : C \to S$, et G-stable. Cela permet de parler du G-type de la fibre D_s en un point géométrique $s \in S$ (section 2.1). Tout d'abord une remarque élémentaire:

Lemme 4.11. *Le G-type de D_s en un point géométrique $s \in S$ est constant.*

Preuve: Par changement de base étale, on peut supposer que D est somme de N sections disjointes $\{P_i\}$, donc $D = \sum_{i=1}^{N} P_i$. Un élément $\sigma \in G$ agit par permutation sur les $\{P_i\}$. Soit pour tout indice i, H_i le stabilisateur de P_i. Le faisceau conormal le long de la section P_i, $\mathcal{N}^{\vee}_{P_i/S} \cong P_i^*(\Omega^1_{C/S})$ est un G-faisceau inversible sur S. On peut donc l'écrire $\mathcal{N}^{\vee}_{P_i/S} \cong \mathcal{L}_i \otimes V_i$, pour une certaine représentation V_i de degré un de H_i; soit χ_i le caractère de V_i. Alors le type de D_s est $\sum_{i=1}^{N}[H_i, \chi_i]$, donc constant le long des fibres.

□

Notre objectif est maintenant de préciser le comportement des points de ramification lorsqu'un revêtement (galoisien de groupe G) dégénère, c'est à dire lorsque le revêtement se déplace dans une famille de courbes stables. Le résultat principal de cette section est l'observation que seuls les points de type (III) (4.3), donc ceux à isotropie diédrale, sont responsables de la collision éventuelle des points de ramification. Ce comportement pathologique sera éliminé par le marquage à priori de la courbe au moyen d'un diviseur contenant les points de ramification.

4.2.2. Chevalley-Weil (bis repetita)

On suppose maintenant que C/S est une courbe stable et que l'action de G sur C est stable. Dans ce contexte si D marque la courbe, on suppose que D est G-invariant. Si la base est connexe le G-type de D (Lemme 4.11), ou de (C, D) est défini. Si en plus π est génériquement lisse, on peut attacher une donnée de ramification à l'action de G, qui est celle attachée à la fibre générique. Cette donnée est dorénavant fixée. Nous allons suivre les caractéristiques combinatoires lorsque la fibre C_s dégénère. Par inversion des formules de Chevalley-Weil au point générique, les représentations de Hurwitz (théorème 3.1),

$$Hurw_m = H^0(C_s, \omega_{C_s}^{\otimes m}) \quad (m \geq 1,\ s \in S) \tag{4.14}$$

sont acquises. On fixe une fibre singulière, donc une G-courbe stable définie sur un corps algébriquement clos k. Soit $D = C/G$ la courbe quotient. Les points doubles de D sont donc les images des points doubles de type (II) de C.

Installons quelques notations et remarques préliminaires. Rappelons que la suite exacte (4.4) définit un faisceau $\mathcal{V}_l$ concentré en les points fixes de types (I) et (III). Pour $l \geq 2$, cette suite entraîne, par l'hypothèse de stabilité de C, et par le fait que pour $l \geq 2$, $H^1(C, \omega_C^{\otimes l}) = 0$ ([19] Thm 1.2), donc

en notant provisoirement $B = C/G$ la courbe quotient, pour éviter des confusions avec le diviseur de marquage D, on note que

$$\dim(H^0(C, \omega_C^{\otimes l})^G) = \chi(B, \omega_B^{\otimes l}) + dim(\mathcal{V}_l^G) \tag{4.15}$$

Si $l = 1$, des considérations similaires conduisent à $H^0(B, \omega_B) = H^0(C, \omega)^G$, en particulier $p_a(B) = g'$. Pour $l \geq 2$, $\dim(\mathcal{V}_l^G)$ est la contribution significative à $\dim(H^0(C, \omega_C^{\otimes l})^G)$. Nous sommes maintenant en mesure de reprendre les calculs à la Chevalley-Weil de la section 3.2 dans le contexte de cette section, donc pour une courbe nodale (stable). Rappelons tout d'abord quelques faits élémentaires sur les représentations irréductibles des groupes diédraux.

On identifie le groupe diédral $\mathbb{D}_e$ ($e \geq 1$), d'ordre $2e$ avec le sous-groupe de $\mathrm{GL}(2, k)$ engendré par les matrices

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

où ϵ est une racine primitive e-ième de l'unité. Notons ψ_1 et ψ_1' les caractères de degré un de $\mathbb{D}_e$ définis par $\psi_1 = 1, \quad$ et $\quad \psi_1'(\sigma) = 1, \ \ \psi_1'(\tau) = -1$. Pour tout $j \geq 0$, soit le caractère ϕ_j de degré deux donné par

$$\phi_j(\tau) = 0, \quad \phi_j(\sigma) = \epsilon^j + \epsilon^{-j} \quad (2\cos(\frac{2\pi j}{e}) \quad \text{si} \quad k = \mathbb{C})$$

de sorte que ϕ_j est le caractère de la représentation décrite par

$$\tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma \mapsto \begin{pmatrix} \epsilon^j & 0 \\ 0 & \epsilon^{-j} \end{pmatrix}$$

On observe les relations de périodicité $\phi_{je} = \phi_j$, et ϕ_j est irréductible sauf si $j \equiv 0 \pmod{e}$ ou bien $e = 2m$ et $j \equiv m \pmod{e}$. Dans ces deux cas les représentations se décomposent en

$$\phi_0 = \psi_1 + \psi_1', \quad \text{et si} \quad e = 2m, \ \phi_m = \phi_m' + \phi_m'' \tag{4.16}$$

ϕ_m' et ϕ_m'' étant deux caractères de degré un donnés par $\phi_m'(\sigma) = \phi_m''(\sigma) = -1, \quad$ et $\quad \phi_m'(\tau) = 1$, $\phi_m''(\tau) = -1$.

On suppose maintenant que les orbites singulières de l'action de G sur C sont, en dehors des orbites de type (II), composées de b-orbites de type (I) et de s-orbites de type (III). Intuitivement, en un point double de type (III), si on regarde la courbe comme spécialisation équivariante d'une courbe lisse, alors il y a coalescence de deux orbites de points fixes. Cela va être précisé sous peu; on va voir que dans cette hypothèse le stabilisateur est d'ordre deux, donc diédral, engendré par une reflexion qui échange les deux branches.

Rappelons, pour éviter toute confusion, la terminologie utilisée (voir en particulier la définition 4.7), lorsqu'on a affaire à un point double à isotropie non triviale.

Un sous-groupe cyclique $H \subset G$ *fixe strictement* x, si lorsque x est non singulier $H \subset G_x$, et si x est un point double, H fixe x dans le sens de la définition 4.5, donc H est d'ordre deux engendré par une réflexion échangeant les branches. On dira aussi que H est un *stabilisateur* de x, si $H = G_x$ lorsque x est non singulier, et si x est un point double, comme ci-dessus, H fixe strictement x, donc

est en particulier "diédral d'ordre deux". Dans ce dernier cas, si $G_x = \mathbb{D}_l$, il y a donc l sous-groupes de G_x qui sont des stabilisateurs de x !. Si $l > 1$, G_x tout entier n'est ainsi pas considéré comme un sous-groupe stabilisateur de x.

Rappelons que dans le problème de classification qui nous occupe, on a fixé au préalable une donnée de Hurwitz ξ, qui spécifie r classes de conjugaison de caractè res primitifs de sous-groupes cycliques, comptées avec leurs multiplicités respectives, donc fournit en particulier une liste de classes de sous-groupes cycliques, non nécessairement distinctes, notées $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_r$. On suppose que les ordres respectifs sont $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \cdots \leq \delta_r$. Pour tout $e \geq 2,\ e \mid \mathrm{Card}\, G$, posons

$$N_e = \mathrm{Card}\,\{i \in [1, r]\ ,\ \delta_i = e\} \tag{4.17}$$

de sorte que N_e représente le nombre d'orbites singulières de cardinal $\frac{\mathrm{Card}\, G}{e}$ dans toute courbe lisse C supportant une action de G du type spécifié. Les mêmes conventions de notations s'appliquent à un quelconque sous-groupe H de G, et $N_e(H)$ aura donc la signification ci-dessus. Sous les mêmes conditions sur e, on notera N'_e le nombre de G-orbites singulières de cardinal $\frac{\mathrm{Card}\, G}{e}$ qui sont contenues dans la partie lisse de C, donc

$$r' = \sum_{2 \leq e, e \mid \mathrm{Card}\, G} N'_e \tag{4.18}$$

Pour tout sous-groupe H, on peut aussi définir $r'(H), s(H), N'_e(H)$. Le résultat qui suit est crucial pour clarifier la coalescence éventuelle des points de ramification:

Théorème 4.12. *On a les égalités: i) $r = r' + 2s$, et ii) $N_e = N'_e$ si $e \geq 3$, et $N_2 = N'_2 + 2s$.*

Preuve: L'assertion (2) est visiblement plus forte que (1) et donc l'implique; on commence cependant par prouver (1). Choisissons dans chaque orbite singulière un point x_i $(1 \leq i \leq r')$, de stabilisateur $H_i = G_{x_i}$ pour celles formées de points non singuliers, et y_j, $(1 \leq j \leq s)$ avec $K_j = G_{y_j}$ pour celles formées de points doubles. Posons $\lambda_i = (\mathcal{V}_l)_{x_i},\ \mu_j = (\mathcal{V}_l)_{y_j}$ $(l = 1, 2, \cdots)$. On a une décomposition de G-modules

$$\Gamma(C, \mathcal{V}_l) = \left(\bigoplus_i \mathbf{Ind}_{H_i}^G(\lambda_i)\right) \bigoplus \left(\bigoplus_j \mathbf{Ind}_{K_j}^G(\mu_j)\right) \tag{4.19}$$

d'où par réciprocité de Frobenius

$$\dim \Gamma(C, \mathcal{V}_l)^G = \sum \dim(\lambda_i^{H_i}) + \sum_j \dim(\mu_j^{K_j}) \tag{4.20}$$

L'analyse de la partie H_i-invariante de λ_i relève de la description faite dans la section 3.2; on trouve de manière analogue:

$$\dim(\lambda_i^{H_i}) = l - 1 + \left(\langle\langle \frac{l}{e} \rangle\rangle - \frac{l}{e}\right) \quad \text{si} \quad e = \mathrm{Card}\, H_i$$

Supposons maintenant $K_j = \mathbb{D}_e$. On peut linéariser l'action de K_j relativement à des coordonnées x, y le long des branches au point y_j, et ainsi supposer que les générateurs σ et τ de K_j agissent

par $\sigma(x) = \epsilon x$, $\sigma(y) = \epsilon^{-1}y$; $\tau(x) = y$, $\tau(y) = x$, avec $\epsilon \in k^*$ une racine primitive d'ordre e. Le morphisme quotient a pour forme locale au point y_j: $(x, y) \to u = x^e + y^e$, de sorte que la 1-forme $\omega = (\frac{dx}{x}, -\frac{dy}{y})$ est une base locale de ω_C en y_j. On a $\sigma^*(\omega) = \omega$ et $\tau^*(\omega) = -\omega$. Le module μ_j admet la description

$$\mu_j = \frac{\mathcal{O}_{C,y_j}\omega^{\otimes l}}{\mathcal{O}_{C,y_j}(du)^{\otimes l}} \cong \left(\frac{\mathcal{O}_{C,y_j}}{(x^{el}, (-1)^l y^{el})}\right)\omega^{\otimes l} \tag{4.21}$$

du fait que $(du)^{\otimes l} = (x^{el}, (-1)^l y^{el})\omega^{\otimes l}$.

Il est aisé de décomposer le K_j-module μ_j en représentations irréductibles du groupe $K_j = \mathbb{D}_e$. Le résultat est

$$\mu_j = \begin{cases} \left(2\psi_1 + \sum_{i=1}^{el-1}\phi_i\right)\psi_1' & \text{si } l \text{ impair} \\ \psi_1 + \psi_1' + \sum_{i=1}^{el-1}\phi_i & \text{si } l \text{ pair} \end{cases} \tag{4.22}$$

Si $l = 2$, ceci conduit à $\dim \mathcal{V}_2^G = r' + 2s$. Du fait que $\chi(B, \omega_B^{\otimes 2}) = 3g' - 3$, l'égalité (4.14) entraine $r = r' + 2s$, c'est à dire l'assertion (1).

Maintenant si $l \geq 2$, on a par les mêmes égalités

$$\dim \mathcal{V}_l^G = (l-1)r' + \sum_{i=1}^{r'}\left(\langle\langle\frac{l}{e_i}\rangle\rangle - \frac{l}{e_i}\right) + \begin{cases} s(l-1) & \text{si } l \text{ impair} \\ sl & \text{si } l \text{ pair} \end{cases}$$

$$= (l-1)r' + \sum_{2 \leq e | \mathrm{Card}\, G} N_e\left(\langle\langle\frac{l}{e}\rangle\rangle - \frac{l}{e}\right) + \begin{cases} s(l-1) & \text{si } l \text{ impair} \\ sl & \text{si } l \text{ pair} \end{cases}$$

Ces relations pour $l = 3$ donnent $2r - N_2 = 2r' - N_2' + 2s$, ce qui tenant compte de l'assertion (1) conduit à $N_2 = N_2' + 2s$. Avec $l = 4$, on obtient de la même manière $3r - N_2 - N_3 = 3r' - N_2' - N_3' + 4s$, d'où on tire l'égalité $N_3 = N_3'$. Si on continue ce raisonnement, on obtient de proche en proche l'égalité $N_e = N_e'$ pour tout $e \geq 3$, c'est à dire l'assertion (2).

□

Les arguments combinatoires utilisés ci-dessus pour relier la donnée de Hurwitz aux représentations $Hurw_m$ peuvent être repris sans changement dans le cas stable. Dans cette situation on peut encore lire la donnée de Hurwitz.

Proposition 4.13. *Sous les hypothèses du théorème 4.12, les sous-groupes cycliques de G qui sont des stabilisateurs stricts de points (réguliers ou points doubles) de C, sont les conjugués des sous-groupes $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_r\}$ spécifiés par la donnée de Hurwitz.*

Preuve: On reprend la méthode de dénombrement du paragraphe 3.2 (Lemme 3.4). Pour tout sous-groupe cyclique $H \subset G, H \neq 1$, soit

$$C^H = \{x \in C, H \text{ fixe strictement } x\} \tag{4.23}$$

Posons:

$$f(H) = \begin{cases} \mathrm{Card}\, C^H & \text{si } e = \mathrm{Card}\, H \geq 3 \\ N_2'(H) + 2s(H) & \text{si } e = 2 \end{cases}$$

Donc $f(H) = \mathrm{Card}\, C^H$, chaque point double étant si $e = 2$ compté deux fois. Il résulte du théorème 4.1 que f est totalement déterminé par les seules représentations de Hurwitz. Soit encore $\Delta_H = \{x \in C, H$ est un stabilisateur de $x\}$. Rappelons que si x est un point double cela signifie que $e = \mathrm{Card}\, H = 2$, et que H est engendré par une reflexion qui échange les branches en x. Il découle des définitions que si $H \neq 1$, on a:

$$C^H = \bigsqcup_{H \subseteq K} \Delta_K$$

On peut poser $C^H = \Delta_H = \emptyset$ si H n'est pas cyclique. Si $x \in C^H$ est un point double, alors $\mathrm{Card}\, H = 2$ et $x \in \Delta_H$. Si on pose de nouveau $g(H) = \mathrm{Card}\, \Delta_H$, un point double étant toujours compté deux fois, on retrouve avec la convention $f(H) = g(H) = 0$ si H n'est pas cyclique, la relation familière (voir (3.12)) $f(H) = \sum_{H \subseteq K} g(K)$. Par un argument similaire à celui utilisé dans le lemme 3.4, on obtient par inversion de Möbius

$$g(H) = \sum_{H \subseteq K} \mu(H, K) f(K) \tag{4.24}$$

où comme dans le § 3.2, $\mu(.,.)$ désigne la fonction de Möbius de l'ensemble ordonné des sous-groupes de G. La preuve se poursuit comme dans la section 3.2; on obtient que $\mathrm{Card}\, \Delta_H$ ne dépend finalement que de la donnée de Hurwitz du problème modulaire. Le résultat en découle.

□

4.3. Courbes stables marquées et actions de groupes

Parallèlement à la stabilité de la courbe C qui supporte l'action de G, on aura à imposer la stabilité de la courbe marquée par un diviseur G-invariant[5] . Le diviseur sera alors contraint de contenir le diviseur de ramification. Lorsque le diviseur se réduit au diviseur de ramification, la stabilité de la courbe marquée sera en fait équivalente à la stabilité de la courbe sans le marquage, sauf en présence d'isotropie diédrale, ce dysfonctionnement pouvant être éliminé par ailleurs. Stabiliser la courbe par les points de ramification, reviendra de fait à éliminer les points fixes de type III.

Dorénavant C/S est une G-courbe stable marquée par le diviseur G-invariant D (Définition 4.2). Pour compléter l'étude précédente limitée au cas stable non marqué, on doit maintenant faire une étude à la Chevalley-Weil du G-faisceau $\omega_{C/S}(D)^{\otimes m}$, substitut naturel à $\omega_{C/S}^{\otimes m}$. Il s'agit, s étant un point géométrique, d'extraire des informations des kG-modules $H^0(C_s, \omega_{C_s}(D_s)^{\otimes m})$. On sait que le faisceau dualisant modifié $\omega_{C/S}(D)$ possède la propriété d'annulation (Knudsen [48]) $R^1\pi_\star(\omega_{C/S}(D)^{\otimes m}) = 0$ si $m \geq 2$. De plus si $m \geq 1$, $\pi_\star(\omega_{C/S}(D)^{\otimes m})$ est localement libre de rang $(2g - 2 + N)m - (g - 1)$. On montre aussi que la formation de faisceau $\omega_{C/S}(D)^{\otimes m}$ commute aux changements de base. Le lemme suivant découle d'arguments déja utilisés, la preuve ne sera donc pas répétée.

[5] Dans la section 7, on aura besoin d'un marquage plus précis que le seul marquage par un diviseur G-invariant. On peut souhaiter numéroter les points du diviseur, i.e piquer la courbe. Cela doit être fait en cohérence avec l'action de G, donc on doit prendre en compte l'holonomie en chaque point P du diviseur, i.e le couple (H, χ), formé du stabilisateur de P, et du caractère local de l'action de H sur l'espace cotangent en P (§ 2.2.1). Dans une numérotation des points de D les points de même rang doivent avoir une même holonomie.

Lemme 4.14. *Si $\pi : C \to S$ est une courbe stable marquée par le diviseur G-invariant $D = \sum_{i=1}^{N} P_i$, avec S connexe. Les kG-modules $H^0(C_s, \omega_{C_s}(D_s)^{\otimes m})$ sont indépendants de la fibre géométrique C_s, $s \in S$ $(m \geq 1)$.*

$\square$

Supposons d'abord la fibre C_s lisse. La suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \omega_{C_s}^{\otimes m} \longrightarrow \omega_{C_s}(D_s)^{\otimes m} \longrightarrow \bigoplus_i N_{P_i(s)}^{\otimes m-1} \longrightarrow 0$$

avec $N_{P_i(s)} = T^*_{C_s, P_i(s)}$, montre que le G-type (section 2.1) étant supposé connu, alors les représentations de Hurwitz $H^0(C_s, \omega_{C_s}^{\otimes m})$ sont elles aussi connues. Il en est donc de même pour la donnée de ramification, évaluée le long des fibres non singulières. Pour tout sous-groupe cyclique H de G, considérons le diviseur de Cartier relatif $Fix(H)_{hor}$ (Proposition 4.8). Le corollaire de cette proposition montre que le degré d de ce diviseur est égal à $d = d_1 + 2d_2$ avec

$$\begin{cases} d_1 & = \text{Card (nombre des points fixes de type } (I)) \\ d_2 & = \text{Card (nombre des points fixes de type } (III)) \end{cases} \tag{4.25}$$

Ce degré coincide avec $f(H)$, fonction introduite dans la proposition 4.3. De sorte que l'argument combinatoire invoqué dans cette proposition conduit clairement à un résultat identique. Pour l'énoncer, posons $g(H) = g_1(H) + 2g_2(H)$, avec

$$\begin{cases} g_1(H) & = \text{Card (points fixes de type } (I) \text{ de stabilisateur } H) \\ g_2(H) & = \text{Card (points fixes stricts de } H \text{ de type } (III)) \end{cases} \tag{4.26}$$

de sorte que $g(H)$ est constant le long des fibres géométriques, qui plus est, totalement déterminé par la donnée de Hurwitz, conjointement avec le G-type de D.

Introduisons quelques notations. Fixons une fibre géométrique que nous noterons pour simplifier C, les points marqués seront notés P_i, de sorte que $D = \sum_i P_i$. Soit b_1 le nombre d'orbites singulières (points de type I) contenues dans les points marqués $\{P_i\}$ i.e. dans D; noter que ce nombre est fixépar le G-type de D, et indépendant de la fibre. Soit aussi b_2 le nombre d'orbites singulières (points de type (I)) disjointes de D. Ce nombre dépend de la fibre choisie; on a $b = b_1 + b_2$ si la fibre est non singulière. Soit enfin s le nombre d'orbites constituées de points de type (III), à isotropie diédrale.

Le résultat suivant étend le théorème 4.12 aux courbes stables marquées, fournissant ainsi une explication à la coalescence éventuelle des points de ramification, cela en fonction des conditions initiales, de marquage, et la donnée de ramification.

Soit $\pi : C \to S$ une courbe de base connexe, le lieu de lissité de π étant supposé partout dense, de la sorte une quelconque fibre est spécialisation d'une fibre non singulière. La donnée de ramification est ainsi définie. Dire que le G-type de D contient la donnée de ramification a alors un sens.

Theoreme 4.15. *Sous les hypothèses précédentes, donc le groupe G agissant stablement sur la courbe stable marquée $\pi : C \to S$, on a le long des fibres géométriques l'égalité*

$$b = b_1 + b_2 + 2s \tag{4.27}$$

Preuve: Montrons en premier que pour toute fibre, on a l'égalité relative à la fonction g (4.26):

$$b = \frac{1}{\mathrm{Card}\, G} \sum_{H \neq 1} (\mathrm{Card}\, H)\ g(H)$$

La somme est limitée aux sous-groupes cycliques. Comme $g(H)$ ne dépend pas de la fibre, il suffit de vérifier cette égalité pour une fibre non singulière, dans ce cas b représente le nombre d'orbites singulières de la fibre. On peut alors écrire $b = \sum_{H \neq 1} b_H$, avec b_H égal au nombre de ces orbites telles que le stabilisateur d'un de ses points est dans la classe de conjugaison de H. Soit ω une telle orbite; le nombre de points de ω de stabilisateur H est égal à $\frac{\mathrm{Card}\, N_G(H)}{\mathrm{Card}\, H}$, d'où:

$$g(H) = \mathrm{Card}\, \Delta_H = b_H \frac{\mathrm{Card}\, N_G(H)}{\mathrm{Card}\, H}$$

On peut ainsi écrire (4.27), la somme portant maintenant sur les classes de conjugaison, notation $\langle - \rangle$

$$b = \sum_{\langle H \rangle \neq 1} g(H) \frac{\mathrm{Card}\, N_G(H)}{\mathrm{Card}\, H} = \frac{1}{\mathrm{Card}\, G} \sum_{H \neq 1} (\mathrm{Card}\, H) g(H) \tag{4.28}$$

la dernière somme portant elle sur les sous-groupes, et non sur les classes de conjugaison. Supposons maintenant la fibre singulière, avec s-orbites de type (III). En substituant à $g(H)$ l'expression (4.26), on trouve

$$b = \frac{1}{\mathrm{Card}\, G} \sum_{H \neq 1} (\mathrm{Card}\, H) g_1(H) + \frac{2}{\mathrm{Card}\, G} \sum_{H \neq 1} (\mathrm{Card}\, H) g_2(H) \tag{4.29}$$

Il est clair que le premier terme de la somme de droite est égal à $b_1 + b_2$. Reste à prouver que le second, qui ne fait intervenir que les sous-groupes d'ordre deux, conduit à:

$$\mathrm{Card}\, G.s = 2 \left(\sum_{H, \mathrm{Card}\, H = 2} g_2(H) \right)$$

Dans ce but, on écrit $s = \sum_{m \geq 1} s_m$, où s_m est le nombre d'orbites à groupe d'isotropie $\mathbb{D}_m$. Soit ω une orbite à groupe d'isotropie $\mathbb{D}_m$; notons $g_{2,\omega}(H)$ le nombre de points fixes stricts de H contenus dans ω. Dans la somme $\sum_{H, \mathrm{Card}\, H = 2} g_{2,\omega}(H)$ un point est en fait compté m fois, car $\mathbb{D}_m$ contient m réflexions. Cette somme vaut donc $m \mathrm{Card} \omega = m \frac{\mathrm{Card}\, G}{2m} = \frac{\mathrm{Card}\, G}{2}$; alors

$$\sum_{H, \mathrm{Card}\, H = 2} g_2(H) = \sum_{H, m \geq 1} s_m g_{2,\omega_m}(H) \tag{4.30}$$

ω_m désignant une orbite avec isotropie $\mathbb{D}_m$. En reportant (4.30) dans la relation qui précède, on obtient aisémment le résultat.

□

Corollaire 4.16. *Les hypothèses du théorème 4.15 étant conservées, supposons en outre que le G-type du marquage $\{P_i\}$ contienne la donnée de ramification. Alors pour toute fibre géométrique $s = 0$. En d'autres termes, il n'y a pas d'orbite à isotropie diédrale.*

Preuve: En effet on a $b = b_1$.

□

5. Déformations des revêtements modérément ramifiés .

5.1. Déformations équivariantes des courbes

5.2.1. La déformation universelle

On décrit la déformation formelle universelle d'un revêtement galoisien modérément ramifié $\pi : C \to B = C/G$. On notera B la courbe quotient pour éviter tout conflit avec le diviseur D qui marque la courbe). Dans ce contexte la théorie des déformations se simplifie de manière substantielle (comparer avec [12]). Les seules contributions locales à la déformation verselle viennent des points doubles et des points marqués, points de ramification exceptés, car la ramification étant modérée, ceux-ci n'apportent aucune contribution au foncteur des déformations. On comparera ensuite la déformation formelle verselle équivariante de la courbe marquée C, à la déformation formelle verselle de la base B marquée par les images des points exceptionnels de C.

On fixe une courbe stable marquée $(C, \{P_i\}_{i=1,\dots,N})$ munie d'une action du groupe G. Il n'est pas nécessaire à ce stade de préciser la manière dont les points marqués P_i sont traités, c'est-à-dire, ordonnés, ordonnés par paquets, ou pas. Le diviseur $D = \sum_i P_i$ est supposé G-invariant, contenant les points de ramification. Dans ces conditions on sait qu'une déformation formelle verselle existe, et qu'elle est universelle du fait de l'absence d'obstructions. Pour une discussion plus précise voir Bertin-Mézard ([12],§3).

On peut présenter le foncteur des déformations de la manière suivante. Considérons un relèvement de la courbe marquée $(C, \{P_i\})$, avec oubli de l'action de G, à une k-algèbre locale artinienne A de corps résiduel k (une $W(k)$-algèbre si la caractéristique p de k est positive). Cela signifie qu'on a une courbe $\mathcal{C}$ au dessus de A, plate sur A, marquée par des sections que nous noterons encore $\{P_i\}_{i=1,\dots,N}$. La donnée contient aussi un isomorphisme

$$j : C \to \mathcal{C} \otimes k \tag{5.1}$$

tel que $P_i \circ j$ soit le point marqué initial P_i de C, ceci pour tout indice $i, 1 \leq i \leq N$. La courbe C étant supposée stable marquée, et donc sans automorphisme infinitésimal, si l'action de G se relève à $\mathcal{C}$, ce relèvement est alors unique [20]. Deux relèvements sont dits équivalents, s'ils sont isomorphes par un isomorphisme qui relève l'identité. On notera finalement $D(A)$ l'ensemble des déformations, i.e. des classes de relèvements de $(C, \{P_i\})$ à A; une classe étant notée $[(\mathcal{C}, \{P_i\}, j)]$. On étend comme d'habitude le foncteur des déformations à tout anneau local noethérien complet qui est une k-algèbre (resp. une $W(k)$-algèbre). Le groupe G opère sur le foncteur des déformations de la manière évidente suivante. L'action de $\sigma \in G$ sur $[\mathcal{C}, \{P_i\}, j]$ est

$$\sigma[\mathcal{C}, \{P_i\}, j] = [\mathcal{C}, \{P_i\}, j \circ \sigma^{-1}] \tag{5.2}$$

Avec ces définitions, la déformation $[\mathcal{C}, \{P_i\}, j]$ est un point fixe de l'action de G si et seulement si il existe un A-automorphisme Σ de la courbe marquée $(\mathcal{C}, \{P_i\})$ qui relève σ, c'est à dire tel que

$\Sigma \circ j = j \circ \sigma$. Ce relèvement est unique et définit ainsi un relèvement de l'action de G à $(\mathcal{C}, \{P_i\})$. On observe donc que le foncteur des déformations équivariantes D_G est exactement le foncteur des points fixes relativement à l'action (5.2) de G sur le foncteur des déformations D. Il est bien connu que le foncteur des déformations D de la courbe C est effectivement pro-représentable et formellement lisse [20], [40]. La déformation universelle de la courbe pointée $(\mathcal{C}, \{P_i\})$ a donc pour base le spectre d'une algèbre de séries formelles en $3g-3+N$ variables

$$R_{ver} = W(k)[[t_1, \dots t_{3g-3+N}]], \quad (g = \text{genre de } C) \tag{5.3}$$

La théorie cohomologique qui gouverne le foncteur D est $\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{O}_C}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\sum_i P_i))$. On sait que $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_C}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\sum_i P_i)) = 0$, et que l'espace tangent s'identifie canoniquement à

$$D(k[\epsilon]) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\sum_i P_i)) \tag{5.4}$$

Dans le cas équivariant, le foncteur D_G des classes de déformations équivariantes étant le foncteur des points fixes, et comme par ailleurs l'ordre de G est inversible dans k, la théorie cohomologique qui gouverne D_G est particulièrement simple (comparer avec ([12], §3.1)), c'est le groupe des Ext équivariants

$$\mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\sum_i P_i)) \cong \mathrm{Ext}^\bullet_{\mathcal{O}_C}, (\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\sum_i P_i))^G \tag{5.5}$$

On a ainsi $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\sum_i P_i)) = 0$, il n'y a donc pas d'obstructions au relèvement infinitésimal, et l'espace tangent est

$$D_G(k[\epsilon]) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\sum_i P_i))^G \tag{5.6}$$

En conséquence, la déformation universelle G-équivariante se déduit de la déformation universelle $\mathcal{C} \to \mathrm{Spec}(R) = \mathcal{B}$ de $(C, \{P_i\})$, simplement par restriction au sous schéma fermé $\mathcal{B}^G$ des points fixes, donc $\mathcal{C}^G = \mathcal{C} \times_{\mathcal{B}} \mathcal{B}^G$.

L'absence d'obstruction pour le problème équivariant signifie que $\mathcal{B}^G$ est formellement lisse, donc est aussi le spectre d'une algèbre de séries formelles. Pour être plus précis, rappelons la forme du discriminant dans la déformation universelle $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ de $C \to B$ [20]. Notons pour cela $x_1, \dots, x_k$ les points doubles de C. Par localisation en x_i, on obtient un morphisme

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\sum_i P_i)) \to \prod_{i=1}^k \mathrm{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}}(\widehat{\Omega}^1_{C,x_i}, \widehat{\mathcal{O}}_{x_i}) \tag{5.7}$$

qui représente l'application linéaire tangent au morphisme de localisation en le k-uplet des points doubles x_i. Cette application est surjective, et pour tout i

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}}(\widehat{\Omega}^1_{C,x_i}, \widehat{\mathcal{O}}_{x_i}) = 1 \tag{5.8}$$

Choisissons des coordonnées $t_1, \dots, t_{3g-3+N}$ sur la base $\mathcal{B}$, numérotées de telle sorte que si $1 \leq i \leq k$, t_i soit le paramètre induit par la déformation verselle du point double x_i. Le discriminant de la déformation universelle, c'est à dire le lieu paramétrant les fibres singulières, a donc pour équation

$$t_1 \dots t_k = 0 \tag{5.9}$$

Si on retourne à la situation équivariante, on voit que l'action de G est lissifiable, si et seulement si la fibre générique de la déformation universelle $\mathcal{C}^G \to \mathcal{B}^G$ est lisse, donc si $\mathcal{B}^G$ n'est pas inclus dans le lieu discriminant (5.9). La traduction de cette condition donne le résultat suivant (comparer avec Ekedahl [27]):

Théorème 5.1. *L'action de G sur la courbe stable marquée $(C, \{P_i\}_{1\leq i\leq N})$ admet une déformation équivariante non singulière si et seulement si l'action de G est stable dans le sens de la définition 4.4.*

Preuve: Notons que les points marqués sont sans effet sur la stabilité de l'action, vu que celle-ci ne porte que sur l'isotropie aux points doubles. On peut donc les ignorer de manière provisoire. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathcal{B}^G$ dans l'anneau $R = k[[t_1, \ldots, t_{3b-3+N}]] = \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$, et soit $\mathcal{M}$ l'idéal maximal de R. Posons par ailleurs

$$W_i = \mathrm{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}}(\widehat{\Omega^1_{C,x_i}}, \widehat{\mathcal{O}}_{x_i})^* \ , \ V = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\sum_i P_i))^* \tag{5.10}$$

L'application (5.7) transposée donne un morphisme G-équivariant

$$W = \prod_{i=1}^{k} W_i \to V \tag{5.11}$$

Décomposons l'ensemble des points doubles en G-orbites $\{x_1, \ldots, x_k\} = \coprod_{j=1}^{s} Gy_j, \quad y_j = x_{i_j}$ de sorte qu'au niveau des G-modules, on a $\bigoplus_{x_i \in Gy_j} W_i = \mathbf{Ind}_{H_j}^G(W_{i_j}), \quad (H_j = G_{y_j})$. Soit $\chi_j \in \hat{H}_j$ le caractère attaché à l'action de H_j sur W_{i_j}. Soit la décomposition du G-module V en $V = V^G \oplus V_G$, les notations étant les notations usuelles, alors l'idéal $\mathcal{I}$ est engendré par V_G. Dès lors la condition à vérifier est la suivante: pour tout indice i, $t_i \notin V_G$, condition équivalente à $\mathbf{Ind}_{H_j}^G(W_{i_j})^G \neq 0$, ou encore par réciprocité de Frobenius, $W_{i_j}^{H_j} \neq 0$. Finalement la condition s'exprime par $\chi_j = 1$ pour $1 \leq j \leq s$. Pour en faire la traduction, il est commode de passer à l'anneau local complété $\mathcal{O} = \widehat{\mathcal{O}}_{y_j}$ du point double y_j. On a la résolution libre de $\Omega^1_{\mathcal{O}}$:

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow \mathcal{O}dx \oplus \mathcal{O}dy \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}} \longrightarrow 0$$

où $I = (xy))$, la flèche de gauche étant définie par $xy \mapsto xdy + ydx \pmod I$. On en tire l'identification standard

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\Omega^1_{\mathcal{O}}, \mathcal{O}) = \mathrm{Hom}\,(I/I^2, \mathcal{O})/\mathrm{Hom}\,(\mathcal{O}dx \oplus \mathcal{O}dy, \mathcal{O}) \tag{5.12}$$

L'application $\phi : I/I^2 \to \mathcal{O}, \quad \phi(xy) = 1$ est un élément non nul de cet espace vectoriel. Soit $\sigma \in H = H_j$; si σ fixe les branches, on peut supposer que les coordonnées sont choisies de telle sorte que

$$\sigma(x) = \alpha x + \ldots, \quad \sigma(y) = \beta y + \ldots$$

On a $\sigma(\phi) = \alpha\beta\phi$, de sorte que la condition s'exprime alors par $\alpha\beta = \det(d\sigma) = 1$. S'il y a échange des branches, on peut dans ce cas supposer que $\sigma(x) = \alpha y + \ldots, \quad \sigma(y) = \beta x + \ldots$, de sorte que dans ce cas la condition est encore $\alpha\beta = 1$, soit $\det(d\sigma) = -1$. On retrouve bien de la sorte la condition de stabilité de la définition 4.4.

□

Dans la suite, nous noterons $\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ la déformation universelle équivariante de la courbe stable marquée $(C, \{P_i\})$, oubliant à partir de maintenant l'exposant G dans les notations. On pourra supposer que les points $(P_1, \cdots, P_s)$, $(s \leq N)$ sont les points de ramification. La base notée $\mathcal{B}$ est donc le spectre d'une algèbre de séries formelles sur k, ou $W(k)$ selon les cas. Si le nombre d'orbites de points doubles

est d, alors on peut choisir des variables $t_1, \ldots, t_M$, de sorte que $t_1, \ldots, t_d$ correspondent aux paramètres de déformation des points doubles. L'équation du discriminant est alors $t_1 \ldots t_d = 0$. Il est facile de voir que l'espace tangent (5.6) s'insère dans une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1_G(C, \Theta_C(-\sum_j P_j)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\sum_j P_j)) \longrightarrow \\ \longrightarrow \prod_{i=1}^{d} \mathrm{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}}(\widehat{\Omega}^1_{C,x_i}, \widehat{\mathcal{O}}_{x_i}) \to 0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

où dans cette suite exacte, on a fait le choix d'un point x_i dans chaque orbite singulière, et $H^1_G(-)$ désigne la cohomologie équivariante ([12] , §3). On note comme d'habitude $\pi^G_\star$ le fonteur $\mathcal{F} \mapsto \pi_\star(\mathcal{F})^G$; on prouve facilement que $H^1_G(C, \Theta_C(-\sum_j P_j)) \cong H^1(C/G, \pi^G_\star(\Theta_C(-\sum P_j)))$, notant toujours $\pi : C \to B = C/G$ le morphisme quotient. On observera que dans le terme de droite de la suite exacte (5.13), le stabilisateur G_{x_j} est omis en exposant, du fait que par la condition de stabilité, il agit trivialement. On en tire la dimension [6], soit $\dim(R) = M = 3g' - 3 + b + r$, où g' est le genre de C/G, b est le degré de la donnée de ramification (d'une déformation lisse), et r est le nombre d'orbites de points marqués à isotropie triviale. Si $r = 0$, donc si le diviseur de marquage est exactement le diviseur de ramification (réduit), alors on voit que la dimension de l'espace tangent est identique à celle correspondante au problème sans marquage. Comme application du théorème 5.1, notons le résultat suivant:

Proposition 5.2. *Soit A un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k algébriquement clos, et de corps des fractions K. Soit $\mathcal{C} \to \mathrm{Spec}\, A$ une courbe stable marquée par les points $\{P_i\}_{i=1}^N$, de fibre générique lisse. On suppose la fibre générique $\mathcal{C}_K$ munie, d'une action du groupe G. Alors l'action de G s'étend de manière unique en une action stable sur $(\mathcal{C}, \{P_i\})$.*

Preuve: Du fait de l'unicité du modèle stable marqué $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}_K$, l'action de G se prolonge de manière unique, et donc G s'étend en un groupe d'automorphismes de $\mathcal{C} \to \mathrm{Spec}(A)$. Le seul point non évident est que l'action de G sur la fibre spéciale $C = \mathcal{C} \otimes k$ est stable. Pour le voir, soit $\Sigma \to \mathrm{Spec}(R)$ la déformation universelle équivariante de la courbe marquée C. L'absence d'automorphismes infinitésimaux justifie l'existence d'un morphisme unique $u : R \to A$ tel que $\mathcal{C} \cong \Sigma \otimes_R A$. Soit $x = x_i$ un quelconque point double de C, alors l'anneau local complété de $\mathcal{C}$ en x est de la forme

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},x} \cong A[[X,Y]]/(XY - a), \quad (a \in \mathcal{M}_A) \tag{5.14}$$

Les hypothèses en vigueur i.e. $\mathcal{C}_K$ lisse en particulier exigent $a \neq 0$. Il en découle que x doit se déformer dans la déformation universelle de C, donc que le paramètre $t = t_i$ qui mesure la déformation de x

[6] Une manière d'obtenir ce résultat est de calculer $\dim H^1(C/G, \pi^G_\star(\Theta_C(-\sum P_j)))$. Si C est une courbe préstable de composantes normalisées C_α $(1 \leq \alpha \leq d)$, et si $i_\alpha : C_\alpha \to C$ est le morphisme canonique, on vérifie facilement que $\theta_C = \bigoplus_\alpha i_{\alpha,*}(\theta_{C_\alpha}(-\sum p_j)$, les points p_j étant les origines des branches sur la composante C_α. Cela ramè ne le calcul à un simple calcul de dimension sur une courbe lisse. Appelons pour toute composante D_β de C/G, v_β le nombre des images des origines des branches de type III, et l_β le nombre de points de branchement situés sur D_β. La conclusion vient de la relation $b = \sum_\beta v_\beta + \sum_\beta l_\beta$, identique à la relation $b = r + 2s$ (Théorème 4.15).

dans la déformation universelle non équivariante, doit avoir une restriction non nulle à $\mathrm{Spec}(R)$. La preuve du théorème 5.1 montre que cette condition, exprimée en chaque point double, revient à dire que l'action de G est stable.

$\square$

5.2.2. Stabilité de la courbe quotient

On conserve les notations de la section précédente. Soit $(C, \{P_i\}_{1\leq i\leq N})$ une courbe stable marquée, équipée d'une action stable du groupe G. En particulier le diviseur $D = \sum_i P_i$ est G-invariant. On suppose que les stabilisateurs des points doubles ne sont pas diédraux, excluant les points fixes du type (III) (voir 4.3). On verra comment ramener la situation générale à cette condition. Soit le quotient $\pi : C \to B = C/G$, de sorte que B est préstable (proposition 4.3), marquée par les images $\{Q_j\}_{1\leq j\leq r}$ des $\{P_i\}$. On supposera que les points de ramification, qui sont tous lisses par hypothèse, sont inclus dans les points marqués. Il n'y a aucune perte de généralité car les points de ramification sont des points marqués d'office. On a donc $b \leq r$, b étant le nombre de points de branchement. Notons la remarque élémentaire suivante:

Proposition 5.3.
i) Sous les hypothèses précédentes, la courbe quotient $(B, \{Q_j\}_{1\leq j\leq r})$ est stable marquée.
ii) Réciproquement, si $P_1, \ldots, P_m$ sont les points de C d'images $Q_1, \ldots, Q_r$, alors la stabilité de $(B, \{Q_j\}_{1\leq j\leq r})$ implique la stabilité de $(C, \{P_i\}_{1\leq i\leq m})$.

Preuve: i) Soit $\mathcal{E} = \{Q_j\}_{1\leq j\leq r}$, l'ensemble des points exceptionnels. On doit vérifier la condition de stabilité (définition 4.4), donc si Δ est une composante de B, $\Delta \cong \mathbb{P}^1$, alors

$$(\#\text{ points doubles de } B \in \Delta) + \#(\Delta \cap \mathcal{E}) \geq 3 \tag{5.15}$$

Soit Γ une composante de C d'image Δ. Comme l'action de G est supposée sans inversion de branches, Γ est non singulière. Notons H le stabilisateur de Γ. Si $Q \in \delta$ est un point double de Σ, nécessairement Q est l'image d'un point double $P \in C$, situé sur Γ. Si P' est un second point double d'image Q, il y a un élément $g \in G$ tel que $gP = P'$. Mais Δ étant non singulière, on doit avoir $g \in H$ et ainsi les points doubles de Σ situés sur Γ correspondent bijectivement aux H-orbites de points doubles de C situés sur Γ. Distinguons plusieurs cas:
i) Le genre h de Γ est non nul. Soit $t \geq 1$ le nombre de points de branchement du revêtement $\Gamma \to \Delta = \Gamma/H$; notons $e_1, \ldots, e_t$ les indices de ramification respectifs. Si $\mathrm{Card}\, H = N$, la formule de Riemann-Hurwitz donne $2h-2 = -2N + N\left(\sum_{i=1}^{t}(1-\frac{1}{e_i})\right)$, en particulier $\frac{2h-2}{N} = t-2-\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{e_i} \geq 0$, donc $t \geq 3$ et la condition de stabilité est satisfaite.
ii) Le genre h est nul. On peut supposer que, avec les notations précédentes, $t < 3$. Si $t = 2$, alors H est cyclique et opère sur $\Gamma = \mathbb{P}^1$ avec deux points fixes. La courbe C étant stable marquée, Γ contient au moins un point parmis les points doubles de C, ou parmis les points $\{P_i\}$ hors les points de ramification. La condition de stabilité est encore satisfaite. Reste pour conclure à examiner les deux cas: Δ est une courbe rationnelle avec un point double, et Δ est non singulière de genre un. Dans ces deux cas, la

conclusion, immédiate, est laissée sans vérification.
ii) La preuve reprend les mêmes arguments que i) i), nous l'omettons.

□

Il est nécessaire à ce stade de clarifier le statut des points de ramification parmi les points marqués. Rappelons que par convention (voir section 4.2) la courbe C est marquée par un diviseur G-invariant, supposé contenir les points de ramification. On peut donc légitimement demander de quelle manière ces points participent effectivement à la stabilisation de la courbe. Dans la suite, on fera systématiquement l'hypothèse que dans un revêtement $C \to B$, la courbe C étant marquée par les points $P_1, \ldots, P_N$, alors $P_1, \ldots, P_m$ sont les points de ramification (donc $m \leq N$).

Lemme 5.4. *Soit comme ci-dessus une courbe stable marquée $(C, \{P_i\}_{1 \leq i \leq N})$ supportant une action stable de G. La courbe $(C, \{P_i\}_{m+1 \leq i \leq N})$ (on omet les points de ramification) est stable marquée (stable si $N = m$) si et seulement si C n'a pas de composante non singulière rationnelle Γ telle que, notant η le nombre des P_i, $m+1 \leq i \leq N$, situés sur Γ, et H le stabilisateur de Γ, alors on n'est pas dans l'une ou l'autre des situations suivantes:*

i) La courbe Γ contient un seul point double de C, $H \neq 1$ et $\eta = 0$. *ii) La courbe Γ contient deux points doubles de C, $H \neq 1$ est diédral, et $\eta = 0$.*

Preuve: Il est clair que la non stabilité est conséquence de l'existence de composantes $\Gamma = \mathbb{P}^1$, telles que si μ est le nombre de points doubles de C situés sur Γ, alors $\mu + \eta \leq 2$. On peut exclure le cas trivial $\mu = 0$, et supposer $\mu \geq 1$.
Supposons $\mu = 1$. La stabilité initiale de la courbe permet d'exclure le cas $H = 1, \eta \leq 1$. Si maintenant $H \neq 1$, H est nécessairement cyclique et si $p \in \Gamma$ est le seul point double de C sur Γ, on a $Hp = p$, et H doit avoir un second point fixe $p' \in \Gamma$. La stabilité est mise en défaut que si $\eta = 0$ car dans le cas contraire, H étant non trivial, on a $\eta \geq 2$.

Supposons maintenant $\mu = 2$ et $\eta = 0$. Soient p, q les deux points doubles de C situés sur Γ. Si $p \notin Hq$, alors $Hp = p$, et $Hq = q$, et H est alors cyclique. Ce cas est exclu par la stabilité initiale. Si maintenant $q \in Hp$, le sous-groupe H a une orbite à deux éléments sur Γ, il est donc en vertu de la nature des groupes finis de transformations homographiques, cyclique ou diédral. Si H est cyclique, alors $\mathrm{Card}\, H = 2$ par la stabilité de l'action, et ce cas rentre dans le cas diédral. Donc finalement, le seul cas pour lequel les points de ramification contribuent à la stabilité intiale de la courbe est $H = \mathbb{D}_l,\ l \geq 1,\ \mu = 2$, et $\eta = 0$, ce qui prouve le lemme.

□

Dans le cas $N = m$, donc si le marquage initial $\{P_i\}$ est exactement l'ensemble des points de ramification, alors seul le point 2) du lemme 5.4 peut arriver; dans ce cas, après stabilisation de la courbe [48],[53], voir aussi §6.4.1, on tombe sur un point double à isotropie diédrale.

5.2.3. Déformations, versus déformations du diviseur de branchement

On souhaite comparer les déformations universelles respectives de la courbe $(C, \{P_i\}_{1 \leq i \leq N})$ munie de l'action de G, avec celles de la base $(B, \{Q_j\}_{1 \leq j \leq r})$. Les points doubles de la base B, qui

correspondent aux G-orbites de points doubles de C, contribuent individuellement par un paramètre indépendant, cela dans les deux déformations universelles. Notons $\{y_1, \ldots, y_d\}$ les points doubles de B; soit alors $e_i \geq 1$ l'ordre du stabilisateur, cyclique par hypothèse, d'un point au-dessus de y_i. Le passage au quotient par G commute avec un changement de base arbitraire (Proposition 4.3), il est alors clair que le morphisme $\pi : C \to B = C/G$ induit un morphisme entre les foncteurs de déformations

$$d\pi : D_{(C,G,\{P_i\})} \longrightarrow D_{(B,\{Q_j\})} \tag{5.16}$$

On a finalement le résultat important suivant, qui peut être comparé avec l'interprétation en termes de log-structures donnée dans [44], [55], [67]. Il dit en substance que pour avoir un espace de déformations formelles d'un revêtement non galoisien formellement lisse, il faut déformer simultanément la clôture galoisienne.

Théorème 5.5. *On peut choisir des systèmes de coordonnées* $(t_1, \ldots, t_d, \ldots$ $\ldots, t_{3g'-3+r})$ *et* $(\tau_1, \ldots, \tau_d, \ldots, \tau_{3g'-3+r})$*, respectivement sur les bases des déformations universelles de* $(C, G, \{P_i\})$ *et* $(B, \{Q_j\})$*, de sorte que le morphisme* $d\pi$ *est donné relativement à ces coordonnées par*

$$d\pi^* : W(k)[[\tau_1, \ldots, \tau_d, \ldots, \tau_{3g'-3+r}]] \longrightarrow W(k)[[t_1, \ldots, t_d, \ldots, t_{3g'-3+r})]] \tag{5.17}$$

avec $(d\pi)^*(\tau_i) = t^{e_i}$ *si* $1 \leq i \leq d$*, et* $(d\pi)^*(\tau_i) = t_i$ *si* $i > d$*.*

Preuve: On sait, voir la suite exacte (5.13), que la base de la déformation équivariante universelle admet d'une part une contribution venant des déformations localement triviales autour des points doubles, c'est-à-dire au niveau de l'espace tangent le sous-espace vectoriel $H^1_G(C, \Theta_C(-\sum_i P_i))$, et d'autre part une contribution de dimension un apportée par chaque orbite de points doubles. L'action du groupe étant stable et sans isotropie diédrale, la proposition 4.10 montre que la première contribution apparaît de manière identique dans le foncteur des déformations de $(B, \{Q_j\})$. Seule la contribution des points doubles diffère dans les deux foncteurs. Au niveau des espaces tangents, cela correspond au diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to & H^1_G(C, \Theta_C(-\sum P_i)) & \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_C, \mathcal{O}_C(-\sum_i P_i)) & \to \prod_{i=1}^d \mathrm{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}}(\widehat{\Omega}_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}}, \widehat{\mathcal{O}_{x_i}}) \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
0\to & H^1_G(B, \Theta_B(-\sum Q_j)) & \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_B}(\Omega^1_B, \mathcal{O}_B(-\sum_j Q_j)) & \to \prod_{j=1}^d \mathrm{Ext}^1_{\widehat{\mathcal{O}}_{y_j}}(\widehat{\Omega}_{\widehat{\mathcal{O}}_{y_j}}, \widehat{\mathcal{O}_{y_i}})
\end{array}$$

Cela ramène à comparer par le principe local-global ([12] thm 3.3.4) les foncteurs de déformations locaux, c'est-à-dire pour un point double. Supposons donc maintenant que $x \in C$ un point double d'image $y \in B$. On suppose que le stabilisateur de x est $H \cong \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, et que σ en est un générateur, qui agit le long des branches au point x, relativement à des paramètres convenablement choisis, par

$$\sigma X = \zeta X \quad , \quad \sigma Y = \zeta^{-1} Y$$

ζ étant une racine primitive d'ordre e. La déformation verselle équivariante du point x est, du fait de la stabilité de l'action (voir la preuve du théorème 5.1), représentée par $k[[X, Y, \lambda]]/(XY - \lambda)$ (on

remplace k par l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$ dans le cas d'inégales caractéristiques). De manière analogue, la déformation universelle du point double y est représentée par $k[[U,V,\mu]]/(UV-\mu)$, où $U = X^e, V = Y^e$. Le morphisme $d\pi$ correspond alors à

$$k[[U,V,\mu]]/(UV-\lambda) \longrightarrow k[[X,Y,\lambda]]/(XY-\lambda) \tag{5.18}$$

avec $d\pi(U) = X^e, d\pi(V) = Y^e, d\pi(\mu) = \lambda^e$. Le résultat en découle.

□

5.3. Modèle stable marqué d'un revêtement

Pour un revêtement $C \to B = C/G$ on a essentiellement deux définitions de la stabilité. La première définition revient à imposer la stabilité de C, jointe à celle de l'action (Définition 4.4). La seconde plus flexible à certains égards, revient à demander à côté de la stabilité de l'action, la stabilité de C marquée maintenant par un diviseur G-invariant contenant les points de ramification. Le cas non galoisien sera traité dans la section 6.6.

Avec l'une ou l'autre de ces deux définitions, on est en mesure de formuler un théorème de réduction stable. Fixons un anneau de valuation discrète complet R, de corps des fractions K, et de corps résiduel k, supposé algébriquement clos. Donnons nous un revêtement $\pi : C_K \to B_K$, séparable, les courbes étant supposées lisses connexes. Si la caractéristique de K est $p > 0$, on suppose que p ne divise pas l'ordre du groupe de monodromie. Sous ces conditions on s'attend à ce que le revêtement donné, défini sur le corps K, se prolonge de manière unique, après extension de degré fini éventuelle de R, en un revêtement stable (resp. stable marqué) $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. On notera cependant, qu'en général, on ne peut pas prendre pour $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ les modèles stables respectifs. La clarification viendra de la remarque que la seule difficulté provient des isotropies diédrales (éventuelles) dans la clôture galoisienne. La définition suivante est essentiellement la notion de stabilité utilisée par Harris-Mumford pour compactifier le schéma de Hurwitz "classique" [35], [40], [42].

Définition 5.6. *Soit un revêtement entre courbes préstables $\pi : C \to B = C/G$, galoisien de groupe G, au dessus de la base S. Il est dit stable, mieux stable marqué (ou HM-stable), si d'une part l'action de G est stable (Définition 4.3), et si d'autre part la courbe C/S est stable marquée par les points de ramification.*

Noter que la courbe étant marquée par les points de ramification, cela signifie en particulier que les points de ramification sont toujours non singuliers, il n'y a donc pas de points à isotropie diédrale (points de type III) (cor 4.16). Sous ces hypothèses on sait aussi que la courbe quotient B est stable marquée par les points de branchement (Proposition 5.3). La variante du théorème de réduction stable s'énonce alors, la stabilité étant prise dans l'un ou l'autre des deux sens (Def 4.4 , Def 5.6):

Proposition 5.7. *Soit $S = \mathrm{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K, et de corps résiduel k. Soit donné un revêtement galoisien $\pi : C_K \to B_K$ entre courbes lisses connexes définies sur K, et de groupe de Galois G. Si* $\mathrm{Card}\, G$ *est inversible dans R, alors après extension finie éventuelle de R, le revêtement admet un modèle stable unique $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$.*

Preuve: C'est simplement une reformulation de la proposition 5.2. En effet celle-ci entraîne comme conséquence directe du théorème de réduction stable (resp. stable marqué), que si on considère le modèle stable (resp. stable marqué) $\mathcal{C}$ de C_K, alors l'action de G s'étend stablement à $\mathcal{C}$.

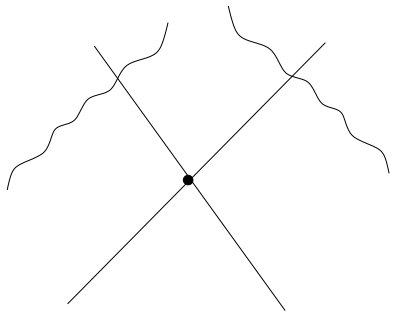
□

Remarque 5.1 On notera qu'on ne peut, sauf si la donnée de Hurwitz l'interdit, exclure à priori les points doubles à isotropie diédrale dans la réduction stable (non marquée) $\mathcal{C}$ d'un revêtement. Pour éliminer ces points il faut stabiliser la courbe $\mathcal{C}$ au moyen des points de ramification, c'est à dire déployer ceux qui sont localisés en les points doubles de type III, et ainsi aboutir au modèle stable marqué. Illustrons cette procédure bien connue. Soit $C = \mathcal{C}_k$ la fibre spéciale; soit aussi $P \in C$ un point double de C d'épaisseur $k \geq 1$, donc $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C}_P} \cong R[[X,Y]]/(XY - a)$, avec $a \in \mathcal{M}_R$ de valuation k. Si $k \geq 2$, P est un point singulier de la surface normale $\mathcal{C}$, de type A_{k-1}. Il est dans ce cas bien connu qu'on résoud cette singularité par $\left[\frac{k}{2}\right]$ éclatements successifs de l'idéal maximal (par exemple [20]). Le graphe de la fibre exceptionnelle correspondante étant une chaine de $(k-1)$-droites projectives, chaque brin étant de self-intersection -2.

Pour rendre à chaque étape la procédure d'éclatement équivariante on éclate en fait chacun des points de l'orbite de P. Soit $H \cong \mathbb{D}_m$ le stabilisateur de P, et supposons ce groupe engendré par σ et τ agissant sur les branches en P par $\sigma x = \zeta x$, $\sigma y = \zeta^{-1} y$ et $\tau x = y$, pour une certaine racine m-ième de l'unité. Distinguons deux cas selon la parité de k.

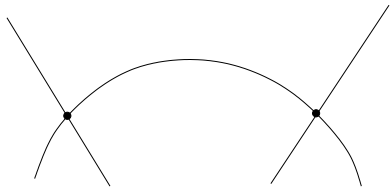
- k pair

Si $k \geq 4$, l'éclatement des points de l'orbite de P produit au dessus de chacun de ces points, une paire de courbes rationnelles se coupant en un point de type A_{k-3}. Il est facile de voir que ce point reste à isotropie $\mathbb{D}_m$, les transformées strictes des branches en P étant par contre séparées et coupant respectivement les deux composantes du lieu exceptionnel en deux points à isotropie cyclique. Noter que la stabilité de l'action est préservée.



Après $\frac{k}{2}-1$ éclatements ponctuels on arrive finalement à un point d'épaisseur deux, et d'isotropie diédrale $\mathbb{D}_m$. Un dernier éclatement produit une courbe $E=\mathbb{P}^1$, et résoud la singularité A_{k-1} initiale.

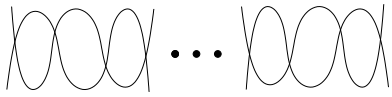
Il est immédiat à ce stade que les stabilisateurs sont tous cycliques, l'action de H sur la composante E, de paramètre t, étant l'action standard $\sigma t=\zeta t$, $\tau t=t^{-1}$. Notons que la courbe obtenue n'est pas stable marquée; pour obtenir cette condition on doit contracter les deux chaînes de longueur $\frac{k}{2}-1$ de part et d'autre de E, conduisant à la situation



où les points P_1 et P_2 sont des points singuliers de type $A_{\frac{k}{2}}$. Les points fixes de H sur la composante E maintenant stabilisent la courbe.

- k impair

Dans ce cas, on résoud le point singulier par une suite de $[\frac{k}{2}]$ éclatements. On doit noter que le point d'intersection des deux brins qui proviennent du dernier éclatement est encore à isotropie diédrale $H=\mathbb{D}_m$ au contraire du cas k pair.



L'éclatement de ce dernier point (régulier) conduit à une composante exceptionnelle rationnelle E. Supposons le point donné par l'équation $xy-z=0$; on peut prendre pour paramètre sur E, $t=\frac{x}{y}$, l'action de H étant alors donnée par $\sigma t=\zeta^2 t$, $\tau t=t^{-1}$. La stabilité de l'action impose m impair, ce qui nous ramène à une situation identique à la précédente. Par contraction des deux chaînes de longueur $[\frac{k}{2}]$ de part et d'autre de la courbe centrale, on arrive au modèle stable marqué. La construction montre clairement l'unicité du modèle stable marqué. $\Diamond$

Remarque 5.2 On conserve les hypothèses du théorème 5.7. Soit un revêtement galoisien $\pi : C_K \to B_K$, défini sur K, de groupe de Galois G.

- Il est facile de voir que si C admet un modèle stable $\mathcal{C}$ sur R, alors B possède un modèle stable $\mathcal{B}$ sur R et π se prolonge en un morphisme, non nécessairement fini, $\mathcal{C}\to\mathcal{B}$. Soit en effet le modèle stable $\mathcal{C}'\to\mathcal{B}'$ du revêtement $\pi : C_K \to B_K$ (Théorème 5.7); la preuve donnée montre en fait qu'un tel modèle existe sur R. La courbe quotient $\mathcal{B}'$ est alors stable marquée par les points de branchement. Le procédé de stabilisation de Knudsen [48] conduit à un morphisme $\mathcal{B}'\to\mathcal{B}$, où $\mathcal{B}$ est le modèle stable de

B, donc défini sur R. Il est par ailleurs clair que le morphisme composé $\mathcal{C}' \to \mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ factorise par la stabilisation $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}'$. On notera que même si $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$, en général $\mathcal{B}' \neq \mathcal{B}$; l'égalité n'est réalisée que si le revêtement générique est étale.

• Sous les mêmes hypothèses, supposons maintenant que B_K possède un modèle lisse sur R (B_K a bonne réduction sur R), et soit $D \subset B$ un diviseur de Cartier relatif étale sur R. On suppose que D_K est le diviseur de branchement de $\pi : C_K \to B_K$. Alors sous ces conditions, C_K a bonne réduction sur R, plus précisément, $\mathcal{C}$ étant le modèle lisse de C_K sur R, le revêtement générique se prolonge en un revêtement $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ de lieu de branchement D. On prouve cela de la manière suivante: soit une extension finie galoisienne L/K de groupe de Galois I, relativement à laquelle C_K, équipée de l'action de G, acquiert un modèle stable marqué $\mathcal{C}$. Alors la courbe quotient $B = C/G$ est le modèle stable sur la normalisation de R de la courbe B_K marquée par les points de branchement. La lissité de B_k implique celle de C_k. Reste à prouver que C est en fait définie sur R. Pour cela notons que le théorème 5.5 montre que le foncteur des déformations G-équivariantes infinitésimales de C_k est isomorphe à celui de (B_k, D_k). Donc si $\sigma \in I$, le modèle tordu $\mathcal{C}^\sigma$ est une déformation formelle de C_k de quotient $\mathcal{B}$ et de discriminant D. On a donc un isomorphisme unique $\mathcal{C}^\sigma \cong \mathcal{C}$, donc en fait une donnée de descente, ce qui permet de descendre le modèle $\mathcal{C}$ à R.

On déduit facilement de cette remarque, par le raisonnement indiqué dans [29], le théorème de S.Beckmann (loc.cit) qui montre que le corps des modules d'un revêtement $C \to B$ défini sur la clôture algébrique de K, et dont la base est définie sur K, a bonne réduction sur K, et est non ramifié en R si les points de branchement ne coalescent pas dans la fibre spéciale.

6. Champs de Hurwitz .

On définit le champ de Hurwitz qui classifie les revêtements, galoisiens ou non, entre courbes lisses de genres fixés, et à monodromie fixée. On construit le champ compactifié par addition des revêtements stables. Le cas non galoisien est ramené au cas galoisien par un argument de clôture galoisienne.

Un G-revêtement galoisien stable $\pi : C \to D$ peut être interprété comme induisant sur D, courbe stable marquée par les points de branchement, une structure additionnelle. Dans le langage de Abramovich,Vistoli, et al [1] cela équivaut à un morphisme $D \longrightarrow BG$, la courbe D étant munie de sa structure d'orbifold, et BG étant le champ classifiant de G (§ 6.1). Par passage à la clôture galoisienne, on réduit la construction dans le cas général à celle classifiant les revêtements galoisiens à groupe de monodromie G fixé.

Une difficulté courante dans les problèmes modulaires est que les objets, c'est à dire dans le cas présent les revêtements, ont en général des automorphismes permanents, par exemple ceux donnés par le centre de G. Il est souhaitable de les éliminer pour arriver à une définition raisonnable du champ de Hurwitz. De cette manière, le champ de Hurwitz est relié au champ $\overline{\mathcal{M}}_{g',n}(BG)$ introduit par Abramovich Corti et Vistoli [1],[2],[3], par [7]

$$\coprod_{[\xi]} \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}//Z(G) = \overline{\mathcal{M}}_{g',n}(BG)$$

[7] On peut prendre cette description comme une définition. Dans ce cas les propriétés de $\overline{\mathcal{M}}_{g',n}(BG)$ découlent des propriétés correspondantes du champ de Hurwitz, développées dans cette section.

Bien que des résultats généraux assurent l'existence des espaces grossiers de modules, appelés les espaces de Hurwitz, nous donnerons une construction projective directe de ces espaces grossiers en suivant la construction de $\overline{M_g}$ par Gieseker [37]. La projectivité des espaces de Hurwitz conduit, si on le désire, à une preuve uniforme de la projectivité des $\overline{M}_{g,n}$, preuve qui se réduit essentiellement à $\overline{M}_g$.

6.1. G-champs et champs quotients

Pour la commodité du lecteur on rassemble une série de définitions et constructions sur les champs algébriques utilisées dans la suite. Les détails, opérations dans une 2-catégorie, sont dans [61]. Un champ $\mathcal{M}$ est un champ de Deligne-Mumford au dessus d'un schéma de base S. On rappelle que BG désigne le champ classifiant du groupe (fini) G [51].

6.1.1. Quotient d'un champ par un groupe fini

La définition d'un $G-$champ est comme suit [61]. Notons $m : G \times G \to G$ la multiplication de G, et $e : \operatorname{Spec} k \to G$ l'élément neutre.

Définition 6.1. *i) Une action de G sur $\mathcal{M}$ est un morphisme $\mu : G \times \mathcal{M}$ rendant 2-commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} G \times G \times \mathcal{M} \arrow[r, "m\times 1"] \arrow[d, "1\times\mu"'] & G \times \mathcal{M} \arrow[d, "\mu"] \\ G \times \mathcal{M} \arrow[r, "\mu"] & \mathcal{M} \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

En d'autres termes il existe un 2-morphisme (isomorphisme fonctoriel) $\alpha : \mu.(m \times 1) \xrightarrow{\sim} \mu.(1 \times \mu)$, satisfaisant à une relation d'associativité d'ordre supérieur, que nous n'écrirons pas (voir [61], Definition 1.3 i)). L'action est stricte si $\alpha = 1$.
ii) Un morphisme de G-champs $(\mathcal{M}, \mu, \alpha) \to (\mathcal{M}', \mu', \alpha')$ est une paire (f, σ), avec $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ un morphisme de champs, et $\sigma : \mu'.(1 \times f) \to f.\mu$ un 2-morphisme vérifiant une relation de compatibilité avec α et α' (loc.cit iii).

On montre que tout G-champ est équivalent à un G-champ "strict" [61], ce qui permet de se limiter en principe à des actions strictes. Dans la suite cependant certaines constructions conduiront à des actions non strictes, qui seront rendues strictes par "strictification" (loc.cit proposition 1.5). Dans la suite l'indice sera souvent omis, on écrira si $x \in \mathcal{M}(U), gx$ pour l'image $\mu(g, x)$, et aussi $gf : gx \xrightarrow{\sim} gx'$ pour l'image de $f : x \xrightarrow{\sim} x'$ par g. Noter que par définition $f^*(gx) = gf^*(x)$.

Définition 6.2. *Soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ deux G-champs. Un G-isomorphisme $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$, est un G-morphisme $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ qui est un isomorphisme de champs (équivalence de catégories). Il existe un quasi-inverse qui est un G-morphisme.*

Une action triviale est une action équivalente à l'action strictement triviale $\mu = \mathrm{pr}_2$. On rencontrera la situation suivante que nous décrivons sans détail. Soit $\mathcal{M}$ un G-champ, et soit $H \triangleleft G$ un sous-groupe

distingué. Si la restriction de l'action à H est "triviale", la trivialisation étant compatible à l'action de G sur H par automorphismes intérieurs, il en découle une action de G/H sur $\mathcal{M}$. On peut par exemple passer par une transversale de G modulo H. On notera que l'action construite peut ne pas être stricte.

De manière plus explicite si $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ est un morphisme de G-champs, le 2-morphisme σ est contraint par la relation de compatibilité $g, g' \in G$:

$$f(\alpha^x_{g,g'}).\sigma^x_{g.g'} = \sigma^{g'x}_g.g\sigma^x_{g'}.\alpha'^x_{g,g'} \tag{6.2}$$

Si X est un G-schéma, un G-morphisme $X \to \mathcal{M}$ est déterminé par un objet $x \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ G-linéarisé, donc équipé pour tout $g \in G$ d'un isomorphisme $\alpha_g(x) : gx \xrightarrow{\sim} g^*(x)$, les $\alpha_g(x)$ étant contraints par une relation de cocycle

$$\alpha_{hg}(x) = g^*(\alpha_h(x)).h(\alpha_g(x)) \tag{6.3}$$

Il est aisé de voir que si $p : \mathcal{M} \to \mathcal{Y}$, $\mathrm{II} : \mathcal{N} \to \mathcal{Y}$ sont G-équivariants, alors le produit fibré $\mathcal{M} \times_{p,\mathcal{Y},q} \mathcal{N}$ supporte une action canonique de G. Les G-champs forment une 2-catégorie.

Le champ quotient $[\mathcal{M}/G]$ du G-champ $\mathcal{M}$ par l'action de G est caractérisé par une propriété universelle dans la 2-catégorie des G-champs ([61], Définition 2.3).

Définition 6.3. *Le champ quotient $[\mathcal{M}/G]$ est caractérisé par le fait qu'il existe un G-morphisme (pour l'action triviale de G sur $[\mathcal{M}/G]$) $\mathcal{M} \to [\mathcal{M}/G]$ qui au sens des 2-catégories est universel pour les morphismes de but un champ avec action triviale de G. On montre (sous des hypothèses plus générales) que le quotient $[\mathcal{M}/G]$ existe en tant que champ algébrique.*

Si on se réfère au cas $\mathcal{M}$ représentable, on peut interpréter $[\mathcal{M}/G]$ comme un champ de G-torseurs. Les sections de $[\mathcal{M}/G]$ au dessus de U sont les diagrammes

$$\mathcal{M} \xleftarrow{\ f\ } E \xrightarrow{\ p\ } U \tag{6.4}$$

où $p : E \to U$ est un G-torseur, et le morphisme $f : E \to \mathcal{M}$ est G-équivariant (Définition 6.2). Les morphismes sont les morphismes de diagrammes, avec comme stipulé, la 2-commutativité. Un morphisme est représenté par un carré cartésien de G-torseurs

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ U \arrow[r, "u"] & U' \end{tikzcd}$$

Les G-morphismes companions $f : E \to \mathcal{M}$, et $f' : E' \to \mathcal{M}$ étant augmentés d'un 2-morphisme $\Phi : f \xrightarrow{\sim} f'h$. Les objets qui définisent f et f' étant $x \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$ et $x' \in \mathcal{M}(\mathcal{E}')$, le 2-morphisme Φ est déterminé par $\phi : x \xrightarrow{\sim} h^*(x')$. La compatibilité aux actions de G se traduit pour tout $g \in G$, par la relation de cobord

$$g^*(\phi).\alpha_g(x) = h^*(\alpha_g(x')).g\phi \tag{6.5}$$

Pour résumer ([61] Théorème 4.1):

Théorème 6.4. *i) La catégorie fibrée en groupoïdes $[\mathcal{M}/G]$ est un champ algébrique, de Deligne-Mumford si $\mathcal{M}$ l'est.*
ii) Le morphisme $\mathcal{M} \longrightarrow [\mathcal{M}/G]$ est un G-torseur, qui génère un carré 2-cartésien

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] & BG \\ \mathcal{M} \arrow[u] \arrow[r] & {[\mathcal{M}/G]} \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{6.6}$$

iii) Le morphisme $\mathcal{M} \to [\mathcal{M}/G]$ est un quotient catégorique universel (au sens des 2-catégories).
iii) Si $\mathcal{M}$ a un espace grossier des modules M, G agit sur M, et l'espace algébrique M/G est un espace grossier des modules pour $[\mathcal{M}/G]$.

□

Dans (6.6) le morphisme $[\mathcal{M}/G] \to BG$ est celui qui à un objet $(E \to U, f)$ du champ $[\mathcal{M}/G]$ associe le G-torseur $E \to U$ objet de BG au dessus de U. Par exemple pour l'action triviale de G sur $\mathcal{M}$, le champ quotient est $\mathcal{M} \times BG$. Soit H un sous-groupe distingué de G; il y a une action "naturelle" non stricte en général de G/H sur $[\mathcal{M}/H]$, d'où on tire une équivalence [61]

$$[([\mathcal{M}/H])/(G/H)] \xrightarrow{\sim} [\mathcal{M}/G] \tag{6.7}$$

Du fait de la propriété universelle dont jouit le quotient, si $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ est un G-morphisme, alors il induit par passage au quotient, un morphisme $\overline{\Phi} : [\mathcal{M}/G] \longrightarrow \mathcal{N}/G$, le carré suivant étant 2-cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathcal{N} \arrow[d] \\ {[\mathcal{M}/G]} \arrow[r, "\overline{\Phi}"] & {[\mathcal{N}/G]} \end{tikzcd} \tag{6.8}$$

Observons d'autre part que si $P \to \mathcal{M}$ est un atlas, alors le morphisme composé $P \to \mathcal{M} \to [\mathcal{M}/\mathcal{G}]$ définit un atlas de $\mathcal{M}/G$. En sens inverse si $Q \to [\mathcal{M}/G]$ est un atlas de $[\mathcal{M}/G]$, alors la projection $q : Q \times_{\mathcal{M}/G} \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ définit un G-atlas, i.e. un atlas muni d'une action libre de G, le morphisme q étant G-équivariant.

La catégorie des faisceaux cohérents sur le champ quotient $[\mathcal{M}/G]$ s'identifie canoniquement à la catégorie des G-faisceaux cohérents sur $\mathcal{M}$. Un G-faisceau cohérent sur $\mathcal{M}$ se définit comme la donnée pour tout G-atlas $P \to \mathcal{M}$, d'un G-faisceau $\mathcal{F}$ sur P, avec la compatibilité usuelle si $P \to P' \to \mathcal{M}$ est un G-atlas qui domine un autre G-atlas.

Remarque 6.1 Supposons l'action de G sur $\mathcal{M}$ libre, c'est à dire libre sur les objets ($gx \neq x$ si $g \neq 1$), et donc sur les flèches. Sous cette hypothèse on décrit le champ quotient comme suit. Soit le préchamp dont les objets sont les classes modulo G d'objets de $\mathcal{M}$. Si $\overline{x}, \overline{y}$ sont deux tels objets, un morphisme $\overline{x} \to \overline{y}$ est représenté par une classe de $\sqcup_{s,t \in G} \mathrm{Hom}\,(sx, ty)/G$. La composition se définit de

manière évidente. Cela définit un préfaiseau, de sorte que le faisceau des morphismes de $\overline{x}$ vers $\overline{y}$ est le faisceau associé, c'est à dire le faisceau somme

$$\mathrm{Hom}\,(\overline{x},\overline{y}) \;=\; \sqcup_{s,t\in G}\,\mathrm{hom}(sx,ty)/G = \sqcup\mathrm{Hom}_{s\in G}\mathrm{Hom}\,(x,sy) \tag{6.9}$$

Il y a une obstruction à l'effectivité d'une donnée de descente d'objets au dessus de S, qui réside dans $H^1(S,G)$. En effet, soit $(\overline{x}_i,\sigma_{i,j})$ un objet donné localement; il en découle un élément $\theta_{i,j}\in G$ tel que (en notation exponentielle) $\sigma_{j,i} : x_i \xrightarrow{\sim} {x_j}^{\theta_{i,j}}$. La condition de cocycle se résumant à

$$\theta_{i,j}\sigma_{k,j}.\sigma_{j,i} = \sigma_{k,i}, \quad \theta_{i,j}\theta_{j,k} = \theta_{i,k} \tag{6.10}$$

La classe d'obstruction est la classe $[\theta_{i,j}]\in H^1(S,G)$. Le champ quotient $[\mathcal{M}/G]$ s'identifie au champ associé à ce préchamp [51]. L'identification des deux constructions est immédiate.

6.1.3. 2-quotient $\mathcal{M}//\mathrm{G}$

La seconde opération que nous aurons à utiliser est le 2-quotient (ou G-rigidification) $\mathcal{M}//G$, notation distinguant cette opération du 1-quotient défini au-dessus [2], [61]. Dans cette construction on suppose que pour tout objet x de $\mathcal{M}$ on a une inclusion (G un groupe fini)

$$i_x : G \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,(x) \tag{6.11}$$

où par commodité on notera g à la place de $i_x(g)$. On impose la relation de compatibilité aux diagrammes cartésiens $f^*(g) = g$, cela pour tout morphisme $f : T \to S$, et tout $x \in \mathcal{M}(\mathcal{S})$. Pour rendre cette notion opérationnelle, on doit exiger que pour tout couple d'objets $x, y \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ l'ensemble $\mathrm{Hom}\,(x,y)$, sur lequel G opère des deux côtés, est un G-bi-ensemble normal, donc si $u \in \mathrm{Hom}\,(x,y)$, $g \in G$, $u^{-1}Gu = G$. Il est alors clair que la composition des morphismes passe au quotient par G. On a ([61], théorème 5.1):

Proposition 6.5. *Soit $\mathcal{M}$ un S-champ algébrique, et soit G un groupe fini qui admet un plongement $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}\,(x)$ pour tout objet x, avec les conditions de dessus. Alors il existe un champ algébrique noté $\mathcal{M}//G$ et un morphisme $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}//G$, avec la propriété universelle suivante: tout morphisme de source $\mathcal{M}$ qui envoie les éléments de G sur l'identité factorise par $\mathcal{M}//G$.*
i) Si $\mathcal{M}$ est de Deligne-Mumford, alors $\mathcal{M}//G$ l'est aussi, et le morphisme $\mathcal{M} \to \mathcal{M}//G$ est une gerbe étale de lien G, de degré $\frac{1}{|G|}$ ($\mathcal{M}$ étant intègre).
ii) Si $\mathcal{M}$ est propre, $\mathcal{M}//G$ l'est également, et si M est un espace des modules grossier de $\mathcal{M}$, c'est aussi l'espace des modules de $\mathcal{M}//G$.

□

Remarque 6.2 On peut penser à un objet $x \in (\mathcal{M}//G)(S)$ comme la donnée d'un recouvrement $(S_i \to S)_i$, et pour tout i d'un objet $x_i \in \mathcal{M}(S_i)$, avec en sus une donnée de descente $\sigma_{j,i} : x_{i|S_{i,j}} \xrightarrow{\sim} x_{j\,|S_{i,j}}$ à un élément de G-près, donc tel que pour tout triplet i,j,k,

$$\sigma_{k,i}^{-1}\sigma_{k,j}\sigma_{j,i}{}_{|S_{i,j,k}} \in G \tag{6.12}$$

Si $G \neq 1$, le morphisme $\mathcal{M} \to \mathcal{M}//G$ n'est pas représentable. Par exemple $\mathrm{B}G//G = \mathrm{Spec}\, k$. Soit $H \triangleleft G$. Si H agit trivialement sur $\mathcal{M}$, alors on peut former d'une part le double quotient $[\mathcal{M}/G]//H$, et d'autre part $[\mathcal{M}/(G/H)]$. Il n'est pas difficile d'observer l'identification

$$[\mathcal{M}/G]//H \cong [\mathcal{M}/(G/H)] \tag{6.13}$$

En fait $[\mathcal{M}/G] = [[\mathcal{M}/H]/(G/H)]$ ([61], remark 2.3), mais $[\mathcal{M}/H] = \mathcal{M} \times \mathrm{B}H$, donc $[\mathcal{M}/G]//H = [\mathcal{M}/(G/H)] \times \mathrm{B}H//H = [\mathcal{M}/(G/H)]$.

6.2. Champs de Hurwitz

Un champ de Hurwitz classifie les revêtements $\pi : C \to D$ entre courbes projectives lisses de genres respectifs, g et h fixés, et de degré fixé d. La relation de Riemann-Hurwitz relie g, h et d par

$$2g - 2 = d(2h - 2) + B \tag{6.14}$$

où B est le degré du diviseur de ramification. Si on fixe D, et les b points de branchement, il n'y a qu'un nombre fini de revêtements de degré fixé, donc la dimension du champ de Hurwitz est $3h - 3 + b$. Si $B > 0$, on voit que cette dimension est maximum lorsque B est minimum, donc si la ramification est simple. Si $h = 0$, i.e. $D = \mathbb{P}_1$, c'est la situation classique étudiée par Fulton [35], et plus recémment par Harris-Mumford [42], Mochizuki [55] et Wewers [68], [69].

6.2.1. Champs de revêtements: cas galoisien

Supposons les revêtements galoisiens de groupe G, le cas général non galoisien sera abordé en fin de paragrahe. Comme cela a été défini dans les sections 2.1 et 2.2, on fixe une donnée de ramification $\xi = \sum_{i=1}^{r} b_i[H_i, \chi_i]$ de degré $b = \sum b_i$, b est le nombre de points de branchement. Le degré du diviseur de branchement est alors

$$B = \mathrm{Card}\, G \left(\sum_i b_i \left(1 - \frac{1}{\mathrm{Card}\, H_i} \right) \right) \tag{6.15}$$

Nous allons construire le champ de Hurwitz $\mathcal{H}_{h,G,\xi}$, puis décrire sa compactification stable $\overline{\mathcal{H}}_{h,G,\xi}$. Le résultat est un champ non connexe en général, mais lisse sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{Card}\, G}]$. Il en résultera que les composantes connexes sont identiques aux composantes irréductibles. Le nombre de composantes connexes de $\mathcal{H}_{\langle,\mathcal{G},\xi}$, qui est aussi celui de $\overline{\mathcal{H}}_{h,G,\xi}$, est le nombre de Nielsen $h(\xi)$ introduit dans la définition 2.7.

Rappelons que la définition retenue pour classifier les revêtements en général (galoisiens ou non), par opposition avec les G-revêtements est l'équivalence (2.1). Fixons dorénavant le groupe G, ainsi qu'une donnée de Hurwitz afférente $\xi \in R_+(G)$. La définition suivante sera ultérieurement renforcée par le marquage au moyen du diviseur de ramification.

Définition 6.7. *i) Le champ de Hurwitz $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ a pour objets au dessus de S les G-revêtements $\pi : C \to D \to S$, $\quad S \in Sch[\frac{1}{\mathrm{Card}\, G}]$, les courbes C et D étant lisses, propres sur S, à fibres géométriques connexes de genre g, et pour morphismes les isomorphismes $(f, h) : (C \to D) \longrightarrow (C' \to D')$, i.e. les diagrammes cartésiens de la définition 6.1.*
ii) Le champ de Hurwitz $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ a pour objets au dessus de S les G-revêtements $\pi : C \to D \to S$, où $C \to S$ est une G-courbe stable, donc une courbe stable munie d'une action stable de G (Définition 4.4); les morphismes étant définis de la même manière que dans 1).

Notons que $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ (resp.$\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$) n'est a priori qu'une catégorie fibrée en groupoïdes au dessus de $Sch[\frac{1}{\mathrm{Card}\, G}]$. Par des arguments standards ce groupoïde est un champ de Deligne-Mumford lisse [19] , [54], et que le champ $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ est un sous champ ouvert de $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, ce dernier étant propre sur $Sch[\frac{1}{\mathrm{Card}\, G}]$. Noter aussi que pour un G-revêtement $\pi : C \to D$, le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}\,(\pi)$ est égal au centre $Z(G)$. D'une manière un peu différente, on a observé que la considération d'un G-revêtement $\pi : C \to D$, se réduit à la seule donnée de la courbe C munie de l'action de G. En d'autres termes, le foncteur $C \mapsto (C \to C/G)$ établit une équivalence entre le champ dont les objets au-dessus de S, sont les S- courbes lisses (resp. stables) munies d'une action de G (resp. action stable) de donnée ξ le long des fibre géométriques, et le champ $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ (resp. $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$). Noter que fixer la donnée de ramification équivaut, comme cela a été vérifié dans le théorème 3.1, à fixer les représentations de Hurwitz, définition plus commode que la définition initiale, du moins dans le cadre des familles de courbes stables. Les morphismes sont dans cette interprétation les isomorphismes G-équivariants, et l'isomorphisme inverse est simplement l'oubli de la base $D \cong C/G$. Dans la suite $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ désignera l'une ou l'autre des deux définitions équivalentes précédentes.

6.2.2. Fonctorialité des champs de Hurwitz

Un champ de Hurwitz est la source, ou le but, de foncteurs naturels que nous allons préciser. Soit $H \subset G$ un sous-groupe de G. Les opérations (2.2) et (2.3) sur les données de Hurwitz définies dans la section 2.2 apparaissent dans le présent contexte comme des morphismes de champs. Par exemple, la restriction de l'action de G au sous-groupe H, soit $(C \to S, G) \mapsto (C \to S, H)$, définit un morphisme $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,H,\mathrm{Res}_H^G(\xi)}$. Un second morphisme correspond au passage au quotient par le sous-groupe H (si $H \triangleleft G$), opération justifiée par la proposition 3.2, $\quad (C, G) \to (C/H, G/H)$ définissant un morphisme (voir Proposition 2.1)

$$\mathcal{H}_{g,G,\xi} \longrightarrow \mathcal{H}_{g',G/H,Cores_H^G(\xi)} \tag{6.16}$$

Il n'y a pas a priori d'extension naturelle directe du morphisme (6.16) à $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, car la courbe préstable quotient peut ne pas être stable. Cela justifie la nécessité d'un renforcement du concept de stabilité. Notons les deux cas particuliers, $H = 1$, c'est à dire l'oubli de l'action de G, et $G = H$. Dans ce second cas, on associe à un revêtement $\pi : C \to D$ la base D, marquée par les points de branchement, ou plus généralement un ensemble de points les contenant.

Remarque 6.3 Le morphisme oubli de l'action de G, $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$, $(\pi : C \to D) \mapsto C$ est représentable, même fini. Notons l'action libre naturelle, par torsion de l'action, du groupe $\mathrm{Aut}_\xi(G)$ (stabilisateur de ξ) sur le champ $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$. $\Diamond$

Il est nécessaire maintenant d'étendre la définition 6.2 aux G-courbes stables marquées, ce qui conduit à la définition des champs de Hurwitz versus Harris-Mumford:

Définition 6.8. *Soit $\eta \in R_+(G)$ spécifiant le G-type d'un diviseur (§ 2.2). On note $\overline{\mathcal{HM}}_{g,G,\xi,\eta}$ le champ (de Harris-Mumford) dont les objets sont les courbes munies d'une action stable de G, et qui sont stables marquées par un diviseur G-invariant de G-type fixé η, la donnée de ramification étant fixée égale à ξ.*

Dans la suite on supposera que $\xi \leq \eta$, en d'autres termes que les points de ramification sont inclus dans les points marqués. Rappelons que cela implique (corollaire 4.6 du Théorème 4.5) que les stabilisateurs des points doubles sont maintenant cycliques, ces points ne devant pas être considérés comme des points de ramification. Si la base est $\mathbb{P}^1$, et si la ramification est simple, on retrouve essentiellement le champ introduit par Harris et Mumford [42]. Pour être plus précis, $\overline{\mathcal{HM}}_{g,G,\xi,\eta}$ en est comme nous le verrons, une désingularisation.

6.2.3. Compactification stable du champ de Hurwitz (I)

Le résultat suivant suivant est bien connu; comparer avec Jarvis [43], [44], ou [1], [59]:

Théorème 6.9. *$\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ (resp. $\overline{\mathcal{HM}}_{g,G,\xi,\eta}$) est un champ de Deligne-Mumford lisse et propre sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\operatorname{Card} G}]$.*

Preuve: Rappelons que le contenu de ce résultat se réduit essentiellement à la vérification de deux choses:

• a) Si C_1 et C_2 sont deux objets de l'un des champs considérés, au dessus de $S \in Sch_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\operatorname{Card} G}]}$, alors le foncteur $\operatorname{Isom}_{S,G}(C_1, C_2)$ qui en T, objet au dessus de S est égal à $\operatorname{Isom}_{T,G}(C_1 \times_S T, C_2 \times_S T)$ est représentable par un schéma fini et non ramifié sur S.

• b) Mettre en évidence un atlas $X \to \overline{\mathcal{H}_{g,G,\xi}}$, ce qui signifie un morphisme étale surjectif du champ représenté par X sur le champ de Hurwitz sus-mentionné.

La preuve de a) est claire car le foncteur $\operatorname{Isom}_{S,G}(C_1, C_2)$ est visiblement un sous-foncteur fermé du foncteur $\operatorname{Isom}_S(C_1, C_2)$ (i.e. non équivariant); le résultat découle alors du résultat classique ([20], Theorem 1.11). Avant de procéder à une vérification plus détaillée de l'assertion b), on peut observer que par le procédé d'adjonction de points marqués (section 2.3), on peut se limiter sans perte de généralité au cas $\xi = \eta$. Dans ce cas, pour simplifier les notations, les champs seront notés $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ et $\overline{\mathcal{HM}}_{g,G,\xi}$ (on omet l'indice η). On obtient l'atlas X en associant à un point de $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ un point de Hilbert convenable, selon la méthode de Gieseker-Mumford (Gieseker [36]).

Rappelons les points essentiels de cette construction, en traitant en premier le cas lisse, donc en se concentrant sur le champ $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$. Fixons un entier $m \geq 3$, le choix de m sera précisé ultérieurement, et fixons le G-module (de Hurwitz) $V = V_m = H^0(C, \omega_c^{\otimes m})$; soit $\dim(V) = n + 1$. Considérons le schéma de Hilbert noté pour abréger Hilb, qui classifie les courbes de genre g et de degré $m(2g-2)$ dans $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$, c'est-à-dire de polynôme de Hilbert $P(\nu) = (2m\nu - 1)(g-1)$; on peut fixer pour schéma de base $\mathbb{Z}[\frac{1}{\operatorname{Card} G}, \zeta]$, la racine de l'unité ζ convenablement choisie, assurant l'existence de V comme G-module sur ce schéma de base. Il y a une action naturelle du groupe $PGL(n)$ sur Hilb ainsi

que, par restriction, sur la courbe universelle $Z \subset \mathbb{P}^n \times Hilb$. Si C est une telle courbe, définie par exemple sur le corps algébriquement clos k, on a pour $\nu >> 0$, une surjection

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\nu)) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(\nu)) \tag{6.17}$$

définissant le ν^e point de Hilbert, qui est le point de l'espace projectif $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}\left(\bigwedge^{P(\nu)} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\nu))\right)$ fourni par la surjection

$$\bigwedge^{P(\nu)} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\nu)) \longrightarrow \bigwedge^{P(\nu)} H^0(C, \mathcal{O}_C(\nu)) \tag{6.18}$$

Il y a une version équivariante de cette construction, dans laquelle les courbes plongées m-canoniquement dans $\mathbb{P}^n$, non dégénérées i.e $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cong H^0(C, \mathcal{O}_C(1))$ et invariantes par l'action de G. La courbe C hérite alors canoniquement d'une action de G. Ces courbes correspondent dans l'interprétation par les points de Hilbert, aux surjections (6.17) équivariantes. Soit $\pi : \Sigma \to K$ la courbe universelle de Gieseker-Mumford [37]; le groupe G agit sur Σ et K, soit alors $H = K^G$ le sous-schéma des points fixes. Comme K est lisse, il en est de même de H; alors si $\Gamma = \pi^{-1}(H)$, le morphisme $\Gamma \to H$ obtenu par restriction, est la courbe universelle cherchée. On notera que la lissité de H se déduit aussi des résultats sur la structure des déformations équivariantes du paragraphe 5. En conclusion H conduit à un morphisme représentable $H \to \mathcal{H}_{g,G,\xi}$, et qui par la propriété de lissité assure que $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford.

Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que la procédure précédente s'étend à $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, resp. à $\overline{\mathcal{HM}}_{g,G,\xi}$. On donne quelques détails pour le premier cas, les modifications de routine pour traiter le second sont omises; notons pour rassurer le lecteur, qu'en corollaire, les deux champs seront identifiés. Soit encore, en conservant les mêmes notations utilisées au dessus, $V = V_m$ la représentation de Hurwitz de degré m, de rang $n + 1 = (2m - 1)(g - 1)$, et $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$. Maintenant rappelons q'un résultat fondamental de Gieseker et Mumford, assure l'existence d'un $m >> 0$, puis d'un $\nu >> 0$, de sorte que le ν^e point de Hilbert de toute courbe connexe lisse (définie sur un corps algébriquement clos k) soit G.I.T-stable pour l'action du groupe linéaire. Une fois ν fixé, on peut considérer la courbe universelle $Z \to H$ de base le schéma de Hilbert. Soit alors W défini comme étant l'ensemble des points $h \in H$, tels que les deux conditions de dessous sont satisfaites:

- i) $h \in H^{ss}$, l'indice supérieur signifiant que le ν^e point de Hilbert est semi-stable,
- ii) La courbe Z_h est connexe et plongée m-canoniquement dans $\mathbb{P}^n$.

Il est prouvé dans [37] que W est un sous-schéma fermé de H^{ss}, et que si $h \in H$, la courbe Z_h est réduite avec seulement des points doubles ordinaires. Rappelons que l'espace modulaire grossier classifiant les courbes stables de genre $g \geq 2$, s'identifie au quotient géométrique[8] $\overline{M_g} = W//SL(n)$. De manière identique a ce qui a été fait au-dessus, on doit traiter la situation équivariante, ce qui amène d'abord à former le sous-schéma des points fixes $T = W^G$; l'action de G est celle naturelle décrite dans la section 6.1. Le schéma T est lisse, du fait de la lissité de W, ou si on préfère par la théorie des déformations équivariantes du paragraphe 5. Les composantes connexes $\{T_\alpha\}$ de T sont alors irréductibles, et le long d'une telle composante, les représentations de Hurwitz $H^0(C_h, \omega_{C_h}^{\otimes t})$ sont

[8] Ne pas confondre avec le 2-quotient de la section 6.1.

constantes (Lemme 4.3); noter que pour $t = m$, cela résulte des hypothèses. Si on travaille avec les objets du champ $\overline{\mathcal{HM}}_{g,G,\xi}$, le même argument que celui utilisé au-dessus nous assure que le G-type du diviseur des points marqués est constant le long des T_α. Parmi les composantes $\{T_\alpha\}$, on ne retient que celles dont le point générique définit une courbe lisse, et le long desquelles la donnée de Hurwitz, et éventuellement le G-type du marquage sont constants égaux à ξ et ν; la réunion de ces composantes est encore notée T. La restriction à T de la famille universelle fournit un morphisme représentable surjectif $T \to \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, prouvant que $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ est un champ algébrique, de Deligne-Mumford. Notons pour conclure que la propreté dans l'un ou l'autre des deux cas résulte du théorème de réduction stable sous sa forme équivariante (Proposition 5.1).

□

Remarque 6.4 Si $k = \mathbb{C}$, le type topologique de l'action sépare les composantes connexes. On invoque la version équivariante de la théorie de Teichmüller [25], de laquelle on déduit que deux points de H qui correspondent à des actions topologiquement conjuguées peuvent être joints par un arc. On a donc (voir aussi Théorème 2.1) $\mathrm{Card}\,\pi_0(H) = h(\xi)$ = le nombre de Nielsen. ◊

6.3. Compactification du schéma de Hurwitz: Gieseker-Mumford

On se concentre dorénavant sur les espaces de modules $\overline{H}_{g,G,\xi}$ (resp.$\overline{HM}_{g,G,\xi}$) associés aux champs $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ (resp. $\overline{\mathcal{HM}}_{g,G,\xi}$). La construction G.I.T esquissée ci-dessus (§ 6.2) conduit à la projectivité des schémas modulaires de Hurwitz, et en corollaire à la projectivité des $\overline{M}_{g,n}$. On remarquera que finalement tout est réduit à une et une seule construction, la projectivité de $\overline{M_g}$.

Identifions G à son image dans $GL(V)$, et notons A (resp. B) le centralisateur (resp. le normalisateur) de G. Si $V = \bigoplus_i n_i V_i$ est la décomposition de V en représentations irréductibles deux à deux distinctes, alors $A \cong \prod_i GL(n_i)$. Notons que A opère sur H en fixant individuellement les composantes connexes. La construction de $H_{g,G,\xi}$ (resp. $\overline{H}_{g,G,\xi}$), résulte de la proposition suivante:

Proposition 6.10. *Si m est assez grand, le quotient géométrique H/A existe, et*

$$H_{g,G,\xi} = H/A \quad (\text{resp.}\overline{H}_{g,G,\xi} = \overline{H}/A.) \tag{6.19}$$

Preuve: C'est une simple adaptation à la situation équivariante présente des arguments de Mumford et Gieseker [37]. Traitons en premier, pour plus de lisibilité, l'espace modulaire $H_{g,G,\xi}$. On observe qu'une courbe $C \subset \mathbb{P}^n$,lisse, connexe, de genre $g \geq 2$, est Chow-stable ou Hilbert-stable, si son degré est grand par rapport à g. La stabilité d'abord relative au groupe linéaire, entraîne a fortiori celle relative à A. Pour que la preuve de la proposition soit complète, on doit tout d'abord noter la validité des deux points suivants:

- i) Toute action de G sur C, du type indiqué, apparaît dans une fibre de la courbe universelle
- ii) Si C_1 et C_2 sont deux fibres G-isomorphes, alors l'isomorphisme est induit par un élément de A. En fait si $\pi : C \to S$ est un objet de $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$, on prouve que localement pour la topologie de Zariski

sur S, C/S appartient à $\frac{\mathrm{Hom}\,(S,H)}{\mathrm{Hom}\,(S,A)}$. Pour cela, on considère le faisceau $\mathcal{E} = \pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes m})$; on a clairement $R^1\pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes m}) = 0$, et $\mathcal{E}$ est localement libre, muni d'une action de G. On peut alors décomposer $\mathcal{E}$ en facteurs isotypiques

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{V_i \in Irrep(G)} \mathcal{E}_i \otimes V_i \tag{6.20}$$

il suffit alors de noter que les modules de covariants $\mathcal{E}_i$ sont localement libres, et que $V = \oplus rg(\mathcal{E}_i)V_i$.

On peut réaliser de la même manière l'espace modulaire grossier $\overline{H}_{g,G,\xi}$, prouvant ainsi que c'est un schéma projectif, et que $H_{g,G,\xi}$ s'identifie à un ouvert partout dense de $\overline{H}_{g,G,\xi}$; en particulier les deux schémas ont le même nombre de composantes connexes, nombre égal au nombre de Nielsen $h(\xi)$ (Théorème 2.1). Conservant les notations du début de section, on prouve comme ci-dessus que le quotient géométrique $T//A$ existe et que finalement $\overline{H}_{g,G,\xi} = T//A$. On doit dans une seconde étape s'assurer que toute courbe stable C munie d'une action stable de G de donnée de ramification prescrite, apparaît dans le bord. On sait, du fait de la structure de la déformation universelle de (C, G) (section 5.1) qu'on peut étendre de manière équivariante C en une courbe stable $\pi : X \to S = \mathrm{Spec}\,(R)$, l'anneau R étant de valuation discrète et complet, de sorte que si on note a le point fermé , et b le point générique, alors $\pi^{-1}(a) \cong C$ et la courbe $\pi^{-1}(b)$ est lisse. Cette courbe définit un morphisme classifiant $f : \mathrm{Spec}\,(R) \longrightarrow H^G$ avec $f(b) \in W$. L'argument de Gieseker ([36], thm 2.0.2) montre qu'il existe une courbe appartenant à la A-orbite de X et qui correspond à un morphisme classifiant $\mathrm{Spec}\,(R) \to \sqcup T_\alpha$. Les fibres au dessus du point fermé sont ainsi dans une même A-orbite. Cela étant, la projectivité de $\overline{H}_{g,G,\xi}$ découle bien évidemment de la construction de cet espace modulaire comme quotient. On peut aussi, la propreté étant conséquence du théorème de réduction stable sous sa forme équivariante, s'appuyer sur la projectivité connue de $\overline{M}_g$ et utiliser le morphisme oubli de l'action de G

$$\overline{H}_{g,G,\xi} \longrightarrow \overline{M_g} \tag{6.21}$$

qui est alors propre et quasi-fini, donc fini.

□

Proposition 6.11. *Soit ξ une donnée de Hurwitz attachée au groupe G, et soit $h(\xi)$ le nombre de Nielsen correspondant. Si k est un corps algébriquement clos de caractéristique non facteur de* $\mathrm{Card}\,G$, *alors*

$$h(\xi) = \mathrm{Card}\,\pi_0(\overline{H}_{g,G,\xi}) = \mathrm{Card}\,\pi_0(H_{g,G,\xi}) \tag{6.22}$$

Preuve: On reprend la construction de la proposition 6.1, maintenant sur un schéma de base $S = \mathrm{Spec}\,(R)$, où R est un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique zéro, et de corps résiduel k. Si G agit stablement sur une courbe stable définie sur k, on sait qu'on peut relever la courbe, ainsi que l'action de G, à R, cela à donnée de ramification constante. Notons a (resp. b) le point fermé (resp. le point générique) de S. Considérons le morphisme quotient $\sqcup_\alpha T_\alpha \longrightarrow \overline{H}_{g,G,\xi} = (\sqcup_\alpha T_\alpha)//A$. Rappelons que chaque composante connexe T_α est lisse sur S. Si on prend la fibre en a (resp. b), on a par un résultat de Seshadri (rappelé dans [35]),

$$(T_\alpha//A)_a = (T_\alpha)_a//A \quad \text{(resp.)} \quad (T_\alpha//A)_b = (T_\alpha)_b//A$$

Le théorème de connexion de Zariski montre que $(T_\alpha//A)_a$ est connexe; il s'ensuit que $(T_\alpha)_a$ est connexe, donc irréductible, car lisse. On en déduit que $(T_\alpha)_a//A = (\overline{H}_{g,G,\xi})_\alpha$ est irréductible, d'où le résultat annoncé.

□

Corollaire 6.12. *Sous les conditions précédentes, et si maintenant G est un groupe cyclique, alors pour tout corps algébriquement clos k de caractéristique ne divisant pas* $\mathrm{Card}G$*, l'espace de Hurwitz $\overline{H}_{g,G,\xi}$ est irréductible.*

Preuve: On sait en effet que sous ces hypothèses que $h(\xi) = 1$ (Proposition 2.3).

□

6.4. Compactification stable du champ de Hurwitz (II)

6.4.1. Le champ de Hurwitz versus Harris-Mumford

La construction du schéma de Hurwitz au moyen d'un quotient géométrique conduit avec des modifications mineures, à la construction des espaces modulaires $HM_{g,G,\xi}$ (resp. $\overline{HM}_{g,G,\xi}$). Rappelons que dans le cas Harris-Mumford les objets du champ sont les G-courbes stables marquées par les points de ramification, ou plus généralement marquées par un diviseur G-invariant les contenant. On va prouver ci-après que les espaces de modules $\overline{H}_{g,G,\xi}$ et $\overline{HM}_{g,G,\xi}$ sont en fait isomorphes, même si cela n'est pas en général le cas pour les champs. Rappelons au préalable les constructions de Knudsen [48], [53]:

• Soit $(C', \{y_j\})$ est une courbe préstable marquée, connexe. Parmi tous les morphismes surjectifs $(C', \{y_j\}) \longrightarrow (C, \{x_i\})$ de but une courbe stable marquée, les (y_j) s'envoyant surjectivement sur les (x_i), il y a si l'ensemble des $\{y_j\}$ est non vide un morphisme *minimal*. Il s'obtient en contractant en un point les composantes instables (de genre zéro) contenues dans C'. On montre que ce morphisme est défini par une puissance convenable du faisceau inversible $\omega_{C'}(\sum y_j)$. Il est clair que si G agit sur C' en permutant les y_j, alors l'action de G descend à C, de sorte que le morphisme commute à l'action de G. On applique cette procédure lorsque l'oubli de certains points marqués d'une courbe stable $(C', \{y_j\})$ détruit la stabilité. Les sections oubliées induisent des sections de C, eventuellement non disjointes et passant par des points doubles. Important pour la suite est que cette opération de contraction (ou de stabilisation) est compatible aux changements de base, donc définit après oubli du marquage par les points de ramification, un morphisme

$$\mathrm{st} : \overline{\mathcal{HM}}_{g,G,\xi} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \tag{6.23}$$

• Il y a un foncteur en sens inverse ([46], cor 2.6). Ce morphisme qui revient à éclater certains points doubles, transforme une courbe stable marquée par un ensemble de n sections, à laquelle on ajoute une section supplémentaire, en une courbe stable marquée par $n+1$ sections, la $(n+1)$-ième étant la section additionnelle. Ces deux opérations conjointes montrent que le morphisme $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, oubli de la section $n+1$, représente la courbe universelle n-piquée. Le résultat suivant clarifie en partie la situation.

Proposition 6.13. *Le morphisme (6.23) est un isomorphisme au-dessus du sous-champ ouvert partout dense $\mathcal{HM}_{g,G,\xi}$ sur son image; il induit un isomorphisme d'espaces modulaires grossiers: $\overline{HM}_{g,G,\xi} \xrightarrow{\sim} \overline{H}_{g,G,\xi}$.*

Preuve: Soit $\pi' : C' \to S$ une G-courbe stable marquée par les points de ramification. Rappelons que cela impose en particulier que pour tout sous-groupe cyclique H de G, le diviseur de Cartier relatif $Fix(H)_{hor}$ (Proposition 4.8) est une somme de sections disjointes. Par oubli du marquage, suivi d'une contraction éventuelle des composantes instables, on obtient une G-courbe stable $\pi : C \to S$. Le morphisme π' factorise en $\pi' = \pi\gamma$, où $\gamma : C' \to C$ contracte les orbites de composantes lisses rationnelles à isotropie diédrale (Lemme 5.4). l'image d'une telle composante E est un point double à isotropie diédrale $\mathbb{D}_m$ $(m \geq 1)$, si m est le nombre de sections de points fixes qui rencontrent E. Ces points sont les points fixes des reflexions de $\mathbb{D}_m$. Notons ainsi que $C' \cong C$ sauf si C possède des fibres avec des points doubles à isotropie diédrale. On peut comme expliqué ci-dessus reconstruire C' partant de C munie des images des sections de points fixes, en séparant les sections de points fixes qui coalescent en les points d'istropie diédrale. Le morphisme st est clairement un isomorphisme au-dessus du sous-champ ouvert formé des revêtement de courbes lisses. Ce n'est cependant pas un isomorphisme en général. Si $C \to S = st\,(C' \to S)$, et si $Q \in C_s$ est un point double à isotropie diédrale $H = \mathbb{D}_m$, pour une réflexion $\tau \in H$, on a noté que le diviseur des points fixes (horizontal) est de manière spécifique la réunion de deux sections.

Soit $\hat{\mathcal{O}}_Q = \hat{\mathcal{O}}_s[[x,y]]/(xy-a)$ l'anneau local complété de C en Q. On suppose que $\tau(x) = y$ et $\tau(y) = x$. Si l'une des sections de points fixes est $x = b, y = c$, alors $b = c$ et $a = b^2$. Si on se place sur $S = k[\epsilon]$, $\epsilon^2 = 0$, on voit que si C' et C sont définies sur un corps algébriquement clos k, alors l'application st au niveau des espaces tangents des déformations universelles respectives n'est pas surjective. En fait les déformations qui sont dans l'image sont topologiquement triviales en les points doubles à isotropie diédrale.

Si pour tout sous-groupe cyclique H d'ordre deux le diviseur $Fix(H)_{hor}$ est une somme de deux sections, alors on peut inverser st. L'action de G sur les composantes exceptionnelles se réduit à l'action d'un groupe diédral $\mathbb{D}_m$. On notera que st est un monomorphisme car il est clair que $\mathrm{Aut}_G(C) \cong \mathrm{Aut}_G(\mathrm{st}\,(C))$. Finalement le fait qu'au niveau des espaces modulaires grossiers st est un isomorphisme est clair, car il est propre, birationnel et bijectif entre variétés normales.

□

Dans la suite nous travaillerons avec le champ $\overline{\mathcal{HM}}_{g,G,\xi}$, qui pour alléger les notations sera noté $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$. Rappelons que si $H \triangleleft G$, on peut réaliser $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ comme une correspondance entre $\overline{\mathcal{H}}_{g,H,Res^G_H(\xi)}$ et $\overline{\mathcal{H}}_{g',G/H,Cores^G_H(\xi)}$. Si $H = 1$ et $H = G$, on obtient les deux morphismes fondamentaux

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,r} \xleftarrow{\imath} \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \xrightarrow{\delta} \overline{\mathcal{M}}_{g',b} \tag{6.24}$$

r étant le nombre de points de ramification, b le nombre de points de branchement, et g' le genre de la base. Le morphisme de gauche est l'oubli de l'action de G, δ est le passage au quotient par G. Le morphisme δ sera appelé le morphisme discriminant. Son existence est justifiée par la Proposition 5.2, qui assure que si $\pi : C \to S$ est un objet de $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, alors la courbe quotient $C/G \to S$, marquée par le diviseur des points de branchement (resp. piquée par les points de branchement) est stable. En résumé:

Proposition 6.14. *1) Le morphisme $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \xrightarrow{\imath} \overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$ est fini (représentable) non ramifié; c'est une immersion régulière locale dans le sens de Vistoli ([66], 1.20) .*
2) Le morphisme discriminant $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \xrightarrow{\delta} \overline{\mathcal{M}}_{g',b}$ est propre quasi-fini et plat [9].
3) Au niveau des espaces de modules grossiers, le morphisme discriminant δ est fini, surjectif.

Preuve: 1) Si $\Sigma \to S$ est une courbe stable marquée, la catégorie fibre de $\imath$ en C/S a pour objets au-dessus de $T \to S$ les plongements $G \hookrightarrow \mathrm{Aut}_T(\Sigma \times_S T)$. Ces plongements correspondent aux T-points de $\mathrm{Aut}_S(\Sigma) \times_S \cdots \times_S \mathrm{Aut}_S(\Sigma)$ ($|G|$ facteurs), dont l'image est disjointe de la diagonale. Du fait que $\mathrm{Aut}_S(\Sigma)$ est fini non ramifié sur S, le premier point est clair. Comme les champs sont lisses, $\imath$ est une immersion locale régulière dans le sens de Vistoli, i.e. représentable non ramifié et localement d'intersection complète.
2) La propreté de δ découle du critère de réduction stable pour les revêtements stables (Proposition 5.7). La platitude découle du théorème 5.5 donnant la structure locale de π. Le caractère étale de δ (au-dessus de $\mathcal{M}_{g',b}$) découle alors du théorème 5.5. Le dernier point est clair.

□

Remarque 6.5 La définition des revêtements stables donnée ci-dessus permet de retrouver d'une manière uniforme les objets étudiés par Abramovich, Corti et Vistoli [1], [3] sous le terme *balanced twisted stable maps.* Les objets étudiés par ces auteurs sont les morphismes $\pi : D \longrightarrow BG$ où la source D, est la courbe D munie de sa structure d'orbifold, i.e. donnée par $D = C/G$. Dans cette structure, on ignore les automorphismes induits par le centre de G. En conséquence, on a (notation de [3])

$$\coprod_{[\xi]} \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}//Z(G) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{M}}_{g',b}(BG) \tag{6.25}$$

◊

6.4.2. Le revêtement "universel"

On continue d'explorer les aspects fonctoriels des champs de Hurwitz. Soit $[H, \chi]$ une classe apparaîssant dans la donnée de ramification ξ. Soit $\Delta_{(H,\chi)}$ la composante de Δ_H, lieu des points fixes d'holonomie exacte (H, χ). Il y a une action libre de $C_G(H)/H$ sur $\Delta_{(H,\chi)}$, le quotient étant la composante $B_{[H,\chi]}$ de B, définissant un fibré principal $\Delta_{(H,\chi)} \longrightarrow B_{[H,\chi]}$. Supposons que B soit somme de sections $Q_1, \ldots, Q_b$ (D est piquée) contenant les points de branchement. Par image réciproque, la section Q_i, si d'holonomie (H_i, χ_i), définit un fibré principal de base S, et de groupe $C(H_i)/H_i$. Cela fournit un foncteur *d'évaluation* en Q_i [45]:

$$ev_{Q_i} : \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \longrightarrow B(C_G(H_i)/H_i) \tag{6.26}$$

Soit $\mathrm{Spec}\, k \to B(C(H_i)/H_i)$ l'atlas correspondant au fibré principal trivial, alors le 2-produit fibré $\mathcal{H}_{g,G,\xi} \times_{B(C(H_i)/H_i)} \mathrm{Spec}\, k$ a pour objets les revêtements $\pi : C \to D$ équipés d'un point $P : S \to C$ qui est un point de ramification d'holonomie (H_i, χ_i).

[9] Non représentable si le centre $Z(G)$ est non trivial.

Soit $\imath : \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$ le morphisme oubli[10]de l'action de G, et considérons $\overline{\mathcal{C}}_{g,(r)} = \overline{\mathcal{M}}_{g,(r),1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$ la courbe universelle (marquée) au-dessus de $\overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$ [48]. Une section de $\overline{\mathcal{C}}_{g,(r)}$ au-dessus de S est la donnée d'une courbe r-marquée $q : C \to S$ équipée d'une section supplémentaire $P : S \to C$. Il n'est pas nécessaire d'exiger que cette section soit disjointe des points doubles ou des points marqués. Formons le carré 2-cartésien

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{C}}_{g,(r)} \arrow[r, "q"] & \overline{\mathcal{M}}_{g,(r)} \\ \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi} \arrow[u] \arrow[r, "q"] & \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \arrow[u, "\imath"'] \end{tikzcd}$$

Une section de $\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}$ au-dessus de S est la donnée d'un G-revêtement $q : C \xrightarrow{\pi} D \xrightarrow{p} S$ équipé d'une section $P : S \to C$ de q. Le groupe G agit (dans le sens de la section 6.1) sur le champ $\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}$ par $g(C \xrightarrow{\pi} D, P) = (C \xrightarrow{\pi} D, g \circ P)$. Soit le morphisme $S \to \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ défini par le G-revêtement $\pi : C \to D$ au-dessus de S. Il est clair qu'on a une identification de G-champs $\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi} \times_{\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}} S \cong C$, justifiant le fait que $\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ est la G-courbe universelle au-dessus de $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$. Le foncteur

$$\Delta : (C \xrightarrow{\pi} D, P) \mapsto (D, Q = \pi P), \quad \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi} \longrightarrow \overline{\mathcal{C}}_{g',b}$$

fait office de *revêtement universel*.

Soit $A : U \to \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ un atlas, et notons $\pi : C_U \to U$ le G-revêtement définissant A. La seconde projection $p_2 : C_U \times_U C_U \to C_U$ définit un G-revêtement, le groupe G agissant sur le facteur de gauche dans le produit fibré. La diagonale $\Delta : C_U \to C_U \times_U C_U$ vue comme section de p_2, fait de $p_2 : C_U \times_U C_U \to C_U$ un objet de $\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}$ (on peut stabiliser cette section additionnelle si on veut), donc conduit à un morphisme $C_U \to \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ rendant le carré suivant

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi} \arrow[r, "q"] & \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \\ C_U \arrow[u] \arrow[r, "p_2"] & U \arrow[u, "A"'] \end{tikzcd} \tag{6.27}$$

2-cartésien. En particulier le morphisme $C_U \to \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}$ définit un atlas de $\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}$. Pour faire le lien avec la base, notons le diagramme 2-commutatif

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "q"'] & \overline{\mathcal{C}}_{g',b} \arrow[d, "p"'] \\ \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \arrow[r, "\delta"] & \overline{\mathcal{M}}_{g',b} \end{tikzcd}$$

Le morphisme Δ n'est cependant pas le quotient de $\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}$ par G. Retenons cependant:

[10] Rappelons que dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$ le marquage est par parquets, déterminés par la donnée ξ.

Proposition 6.15. *Le morphisme* $\psi : \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{g',b}} \overline{\mathcal{C}}_{g',b}$ *est fini de degré* $|G|$.

Preuve: En effet le champ fibre de ψ en le revêtement $\pi : C \to D$ de base S, et muni de la section $Q : S \to D$, est clairement représenté par le schéma $\pi^{-1}(Q) \subset C$.

□

Noter que les sections universelles $Q_\alpha\,(\alpha = 1, \cdots, b)$ font de $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{g',b}} \overline{\mathcal{C}}_{g',b}$ une courbe b-marquée de base $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$.

6.5. Champs de revêtements stables: cas non galoisien

Dans cette section on construit le champ de Hurwitz classifiant les revêtements non galoisiens stables à monodromie fixée. Nous le comparerons au champ des revêtements admissibles [40], [42], [55], [68], [69].

6.5.1. Revêtements admissibles

Le point clé dans la construction du champ de Hurwitz classifiant les revêtements galoisiens est le fait de considérer la base comme une courbe marquée par les points de branchement (lisses), qui en conséquence ne sont pas autorisés à se rencontrer spécialisation. Les revêtements appelés admissibles par Harris-Mumford (loc.cit.p 57, et Définition 6.15) satisfont à cette condition, mais cependant ont une mauvaise théorie des déformations, en particulier la base de la déformation verselle n'est en général pas lisse, même pas normale. Ce défaut a été corrigé par Mochizuki [55] et Wewers [68], en proposant d'enrichir un tel revêtement d'une log-structure, ce qui a pour effet de rétablir la lissité du foncteur des déformations.

Dans la construction qui suit on procède en sens inverse. Un revêtement stable sera décrit, du moins étale-localement, comme quotient d'une clôture galoisienne, qui est un G-revêtement stable marqué par les points de branchement. Fixer une collection de clôtures galoisiennes locales ajoute une structure supplémentaire qui cependant n'est pas équivalente à celle fournie par une log-structure. C'est une structure plus faible. Rappelons la définition des revêtements admissibles ([40], [42] p 61, ou [68]):

Définition 6.16. *Soit une courbe stable marquée* $D \to S$*, de genre* g'*, avec* S *connexe, le marquage étant défini par un diviseur de Cartier relatif* B/S*, étale de degré* b*. Un revêtement admissible* $\pi : C \to D$ *au-dessus de* S*, de base* D/S*, est défini par:*

• *i) Une courbe préstable* C/S*, munie de la donnée d'un morphisme fini surjectif* $\pi : C \to D$*, et d'un diviseur de Cartier relatif* $R \subset C$*, étale sur* S*, et disjoint du lieu de non lissité, tel que* $\pi(R) = B$*. On fait l'hypothèse que* π *est (modérement) ramifié exactement le long de* R*. On suppose en outre que la monodromie le long des fibres géométriques est constante, égale à celle fixée initialement.*

• *ii) (structure locale aux points doubles) Si* $Q \in D_s$ *est un point double d'une fibre géométrique, on suppose que localement pour la topologie étale la structure du morphisme* π *en* $P \in \pi^{-1}(Q)$ *est*

décrite par[11]*:* $\pi_P^* : \hat{\mathcal{O}}_{D,Q} \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{C,P}$ *avec* $\hat{\mathcal{O}}_{C,P} = \mathcal{O}_s[[x,y]]/(xy-t)$, $\hat{\mathcal{O}}_{D,Q} = \hat{\mathcal{O}}_s[[u,v]]/(uv-\tau)$, *où* $t \in \hat{\mathcal{M}}_P, \tau \in \hat{\mathcal{M}}_Q$, *et pour un certain* $d \geq 1$, $u = x^d, v = y^d$ *(donc* $\tau = t^d$*).*

Etale-localement on peut préciser le sens de l'hypothèse π est ramifié le long de R. On peut en effet supposer que $B = \sum_j Q_j$ est une somme de sections disjointes, et de même $R = \sum_{i,j} P_{i,j}$, où les $(P_{i,j})_i$ sont les points d'image Q_j. On suppose alors que, l'indice de ramification le long de P_i étant $e_{i,j}$, on a $\pi^{-1}Q_j = \sum_i e_{i,j}P_{i,j}$. Il reste à expliquer la condition sur la monodromie dans la définition 6.15, condition qui n'est pas à priori définie le long des fibres singulières. On passe par une clôture galoisienne.

6.5.2. Clôture galoisienne: cas des courbes lisses

L'opération fondamentale pour la suite est l'opération de clôture galoisienne dans le contexte d'une famille de courbes lisses ou préstables. Pour une famille de courbes, même lisses, cette opération exige quelques précisions. Soit un revêtement $\pi : C \to D$, les courbes C, D étant lisses et définies sur un corps algébriquement clos k, de points de branchement $Q_1, \ldots, Q_b$.

L'hypothèse sur la monodromie, assertion (ii) de la définition 6.15, revient à fixer en premier le groupe de Galois d'une clôture galoisienne de $\pi : C \to D$, c'est à dire le groupe de Galois G de l'extension $k(C)/k(D)$. Soit $\phi : Z \to D$ une G-clôture galoisienne de π. Cela signifie d'abord que le revêtement $\phi : Z \to D$ est galoisien, et que le groupe des automorphismes de $\pi : Z \to D$ est identifié à G. Il y a d'autre part une factorisation (non unique) de ϕ en $\phi = \pi h : Z \xrightarrow{h} C \xrightarrow{\pi} D$. La classe de conjugaison du sous-groupe $H = \mathrm{Aut}\,(h) \subset G$ est par contre bien définie. Comme on a une clôture galoisienne

$$\bigcap_{s \in G} sHs^{-1} = 1 \tag{6.28}$$

Si $\phi' : Z' \to D$ est une autre clôture galoisienne, et si $\phi' = \pi h'$, la théorie de Galois, ou du groupe fondamental, nous assure qu'il y a un isomorphisme $\psi : Z \xrightarrow{\sim} Z'$, pas nécessairement un G isomorphisme, tel que $h'\psi = h$.

Soit $\xi \in R_+(G)$ la donnée de ramification du G-revêtement galoisien $\phi : Z \to D$. Nous définissons la monodromie de $\pi : C \to D$ de la manière suivante:

Définition 6.17. *Un type de monodromie est un triplet* $m = (G, H, \xi)$ *composé de i) un groupe fini* G*, ii) un sous-groupe* $H \subset G$ *tel que* $\bigcap_{s \in G} sHs^{-1} = 1$ *(condition 6.28), et iii) une donnée de ramification* $\xi \in R_+(G)$*. Le revêtement* $\pi : C \to D$ *défini sur* k *est dit à monodromie* $m = (G, H, \xi)$*, s'il existe une* G*-clôture galoisienne* $\phi = \pi h : Z \to C \to D$*, telle* $\mathrm{Aut}\,(h) = H$*, de donnée de ramification* ξ*. On parlera alors de* m*-clôture galoisienne.*

Posons (voir § 2.2.2)

$$\mathrm{Aut}\,(m) = \{\theta \in \mathrm{Aut}\,(G), \quad \theta(H) = H, \quad \text{et} \quad \theta(\xi) = \xi\} \tag{6.29}$$

[11] On peut exprimer la structure locale en disant que le système de coordonnées (u, v) en Q admet une racine e-ième (x, y) dans $\hat{\mathcal{O}}_{C,P}$ [69]. On vérifie facilement en utilisant le lemme de Hensel que tout système de coordonnées en Q admet une racine e-ième.

Soit $Z(G)$ le centre de G. Du fait de (6.28), $H \cap Z(G) = 1$, de la sorte H se réalise par automorphismes intérieurs comme sous-groupe distingué $H \lhd \mathrm{Aut}\,(m)$, on posera

$$\Delta(m) = \mathrm{Aut}\,(m)/H \tag{6.30}$$

Noter que $\overline{N}_G(H) = N_G(H)/Z(G)$ est un sous-groupe distingué de $\mathrm{Aut}\,(m)$ contenant H. Fixons un type de monodromie m, et soit un revêtement $\pi : C \to D$ défini sur k (algébriquement clos).

Deux m-clôtures galoisiennes (Z, h, ϕ) et (Z', h', ϕ') sont isomorphes s'il existe un C-isomorphisme G-équivariant $f : Z \xrightarrow{\sim} Z'$ qui est l'identité sur C. On sait que pour deux telles clôtures, il existe un isomorphisme $f : Z \xrightarrow{\sim} Z'$ tel que $h'f = h$. Cela définit un automorphisme θ de G unique tel que $f : Z \to Z'^{\theta}$ est G-équivariant. Notons que cela force à avoir $\theta \in \mathrm{Aut}\,(m)$.

Soit $G(\pi)$ le groupoïde des m-clôtures galoisiennes de $\pi : C \to D$. Le groupe $\mathrm{Aut}\,(m)$ agit à droite sur $G(\pi)$ par torsion de l'action. Notons la remarque évidente:

Lemme 6.18. *$G(\pi)$ est un groupoïde équivalent à $\mathrm{Aut}\,(m)$.*

Preuve: Il suffit de noter que si Z et Z' sont deux clôtures galoisiennes, il existe un isomorphisme $f : Z \to Z'$ tel que $h'f = h$, et alors un unique $\theta \in \mathrm{Aut}\,(m)$ tel que $f : Z^{\theta} \xrightarrow{\sim} Z'$ soit G-équivariant. Pour θ donné, f est unique car $Z(G) \cap H = 1$.

□

Notons que $\theta \in \mathrm{Aut}\,(m)$ fixe la classe d'équivalence du G-revêtement galoisien $\phi : Z \to D$ si et seulement si $\theta \in \overline{N}_G(H)$ (automorphisme intérieur), conduisant en accord avec la théorie de Galois au fait que $N_G(H)/H$ s'identifie au groupe des automorphismes de $\pi : C \to D$.

La définition d'une clôture galoisienne s'étend aux revêtements entre courbes lisses, de base quelconque. On conserve le triplet $m = (G, H, \xi)$.

Définition 6.19. *Soit $\pi : C \to D$ un revêtement entre $S-$ courbes lisses. Une m-clôture galoisienne de π est un G-revêtement galoisien $\phi : Z \to D$ de base S, augmenté d'une factorisation $\phi : Z \xrightarrow{h} C \xrightarrow{\pi} D$. On demande l'égalité $\mathrm{Aut}\,(h) = H$, et que la monodromie le long des fibres géométriques est fixe égale à m.*

Le G-revêtement $\pi : C \to D$ est dit à monodromie $m = (G, H, \xi)$ si la monodromie est constante égale à m le long des fibres géométriques, par exemple s'il existe une m-clôture galoisienne. Les revêtements entre courbes lisses, de genres fixés, et à monodromie m fixée forment de manière évidente un champ de Deligne-Mumford $\mathcal{H}_{g,g',m}$, excepté si $g = g' = 0$ et $b = 2$. C'est essentiellement une conséquence de la théorie du groupe fondamental modéré, comme noté dans [42], ou de manière plus détaillée dans [69]. Si $\phi : Z \to D = Z/G$ est un G-revêtement galoisien de donnée de Hurwitz ξ, le revêtement $C = Z/H \to D$ est à monodromie m, et ϕ en est une m-clôture galoisienne. Cela définit un morphisme de champs

$$\imath : \mathcal{H}_{g,G,\xi} \longrightarrow \mathcal{H}_{g',g,m} \tag{6.31}$$

Le groupe $\mathrm{Aut}\,(m)$ agit sur le champ $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ (définition 6.1) par torsion de l'action. Comme l'action du sous-groupe distingué H est triviale dans le sens de la section 6.1.1, il en résulte une action de $\Delta(m)$, non stricte.

Théorème 6.20. *Le morphisme (6.31) est représentable. Il identifie $\mathcal{H}_{g',g,m}$ au champ "quotient"* $\bar{\imath} : \mathcal{H}_{g',g,m} \xrightarrow{\sim} [\mathcal{H}_{g,G,\xi}/\Delta(m)] \cong [\mathcal{H}_{g,G,\xi}/\mathrm{Aut}\,(m)]//H$.

Preuve: On supprime le préfixe m. Montrons d'abord que $\imath$ (6.31) est un epimorphisme, i.e. localement pour la topologie étale π admet une clôture galoisienne. C'est en fait une conséquence de la théorie du groupe fondamental (voir [20] par exemple). On peut préfère utiliser un argument de déformation, bien qu'essentiellement équivalent. Soit $\pi : C_s \to D_s$ une fibre géométrique définie sur une clôture algébrique de $k(s)$. Soient $(Q_j)_{1\leq j\leq b}$ les points de branchement. Comme les courbes sont lisses, on sait que le foncteur des déformations formelles de $\pi_s : C_s \to D_s$ est isomorphe à celui de la courbe marquée $(D_s, B = \sum_{j=1,\ldots,b} Q_j)$. Soit alors $h : Z \to C_s$ une clôture galoisienne de $\pi : C_s \to D_s$. Considérons la déformation universelle $\mathcal{Z} \to \mathcal{D}$ du G-revêtement $\phi : Z \to D_s$, et soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ le diviseur de branchement réduit. On sait, voir par exemple le théorème 5.5, que $(\mathcal{D}, \mathcal{B})$ est la déformation universelle de la courbe marquée (D_s, B_s). On sait que la base de cette déformation est formellement lisse. On sait par ailleurs que le foncteur des déformations du revêtement π_s peut être identifié à celui de la base marquée par les points de branchements [68]. Donc $\mathcal{Z}/\mathcal{H} \to \mathcal{D}$ est la déformation universelle de π, et $\mathcal{Z} \to \mathcal{Z}/\mathcal{H}$ en est une clôture galoisienne. Des arguments classiques d'algébrisation montrent que cette clôture galoisienne existe sur un voisinage étale du point $s \in S$.

Prouvons la représentabilité de $\imath$. Il suffit de prouver que le morphisme diagonal est un monomorphisme ([51], Prop. 4.4). En d'autres termes si $\alpha \in \mathrm{Aut}\,(Z)$ pour un G-revêtement galoisien $\varphi : Z \to D$ de base S, et si $\imath(\alpha) = 1$, alors $\alpha = 1$. Le groupe $\mathrm{Aut}_D(Z)$ des G-automorphismes de Z qui induisent l'identité sur D est le groupe constant $G \times S$. En effet ce groupe est fini non ramifié sur S, contient $G \times S$. Comme sur les fibres géométriques il y a égalité, ces deux groupes sont égaux. Donc par ce type d'argument $\alpha \in H \cap Z(G) = 1$.

Passons à la seconde assertion. Du fait de la propriété universelle du quotient, le morphisme $\imath$ factorise en $\mathcal{H}_{g,G,\xi} \to [\mathcal{H}_{g,G,\xi}/\mathrm{Aut}\,(m)] \to \mathcal{H}_{g',g,m}$. Pour tout objet $Z \to D \in \mathcal{H}_{g,G,\xi}$, et tout $\sigma \in H$, on a $\sigma : Z \cong Z^\sigma$, on a $H \subset \mathrm{Aut}\,[Z]$, en notant $[Z]$ l'image de Z dans le quotient. Il s'ensuit une factorisation de $\imath$

$$\bar{\imath} : [\mathcal{H}_{g,G,\xi}/\Delta(m)] = [\mathcal{H}_{g,G,\xi}/\mathrm{Aut}\,(m)]//H \to \mathcal{H}_{g',g,m}$$

qui est un epimorphisme. Pour conclure que $\bar{\imath}$ est un isomorphisme, il suffit de prouver que c'est un monomorphisme. Le champ de gauche tant un quotient, cela se réduit prouver que $\pi : C \to D$ et $\pi' : C' \to D'$ sont deux revêtement de base connexe S et si $\phi : Z \to C \to D$, $\phi' : Z' \to C' \to D'$ sont deux clôtures galoisiennes, alors on a un isomorphisme de schémas

$$\coprod_{\theta\in\Delta(m)} \mathrm{Isom}_G(Z^\theta, Z') \cong \mathrm{Isom}\,((C \to D), (C' \to D'))$$

Dans la somme de gauche $\theta \in \Delta(m)$ signifie un systme de représentants de $\mathrm{Aut}\,(m)$ modulo H. Le S-schéma $\mathrm{Isom}_{G,C}(Z^\theta, Z')$ a pour points $\mathrm{Isom}_{G,C}(Z^\theta, Z')(T) = \{f : Z^\theta \times_S T \xrightarrow{\sim} Z' \times_S T\,,\, h'f = h\}$.

Il est clair que $\mathrm{Isom}_G(Z^\theta, Z')$ qui est un sous-schéma fermé de $\mathrm{Isom}\,(Z, Z')$, est fini et non ramifié sur S [20], de sorte que les membres sont finis non ramifiés sur S. Le lemme 6.18 montre que sur les fibres

géométriques le morphisme est bijectif. Pour conclure qu'on a bien un isomorphisme, il suffit de prouver que si $C = C'$, le sous-schéma fibre au-dessus de l'identité de C/S, soit $\coprod_{\theta\in\Delta(m)} \mathrm{Isom}_{G,C}(Z^\theta, Z')$ est isomorphe à S. Il est clair qu'il y a un θ unique tel que $\mathrm{Isom}_{G,C}(Z^\theta, Z') \to S$ est fini, non ramifié bijectif. Il est en fait étale, donc un isomorphisme. C'est local sur S, et devient clair si on passe à la déformation universelle comme dans la première partie, car elle est lisse, donc réduite.

□

Remarque 6.6 Pour un revêtement de base S, l'obstruction à l'existence d'une G-clôture galoisienne dans le sens (6.19), est dans $H^1(S, \Delta(m))$ (voir section 6.2). ◊

6.5.3. Clôture galoisienne: cas des courbes (pré)stables

La discussion précédente suggère qu'une définition alternative des revêtements admissibles, les revêtements stables, est comme suit:

Définition 6.21. *Soit $m = (G, H, \xi)$ un type de monodromie. Un revêtement stable de base D défini au dessus du schéma de base S, de monodromie m, est un revêtement obtenu par factorisation $\pi : C = Z/H \longrightarrow D = Z/G$ d'un G-revêtement galoisien $\phi : Z \to D$ à donnée de ramification ξ.*

Le G-revêtement galoisien $\phi : Z \to D$, clôture galoisienne de $\pi : C \to D$, doit être vu comme un élément structurel du revêtement stable $\pi : C \to D$. Noter que dans cette définition Z étant stable marquée par les points de ramification du revêtement $Z \to Z/G$, la courbe D est en conséquence stable marquée par les points de branchement de $\pi : C \to D$, et C est stable marquée par les préimages des points de branchement de $Z \to D$, ces points pouvant ne pas être des points de ramification de π. D'autre part le revêtement $Z \to C$ est un H-revêtement galoisien stable marqué par un diviseur H-invariant qui en général contient strictement les seuls points de ramification de $Z \to C$.

Il est clair qu'un revêtement stable est admissible. Du fait de l'imposibilité de recoller les uniformisations galoisiennes locales un revêtement stable ne sera donc en définitive que localement pour la topologie fppf (étale suffit) de la forme 6.21.

Définition 6.22. *Soit $m = (G, H, \xi)$ un type de monodromie. Un revêtement stable au dessus de la base S, de monodromie m, est une section au-dessus de S du champ "quotient"*

$$[\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}/\Delta(m)] = [\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}/\mathrm{Aut}\,(m)]//H \tag{6.32}$$

Le champ de Hurwitz compactifié $\overline{\mathcal{H}}_{g,g',m}$ paramétrant les revêtements stables de monodromie m, entre courbes stables marquées de genres respectifs g, g' est par définition le champ quotient $\overline{\mathcal{H}}_{g,g',m} = [\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}/\mathrm{Aut}\,(m)]//H = [\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}/\Delta(m)]$.

Soit un revêtement stable $\pi : C \to D$ défini sur le corps k. On suppose qu'il dérive d'un revêtement galoisien stable $\tilde{\pi} : \tilde{C} \to D$. Nous allons comparer la déformation formelle verselle du revêtement admissible $\pi : C \to D$ à la déformation verselle de sa clôture galoisienne $\phi : \tilde{C} \to D$, qui est aussi celle du revêtement stable π, c'est à dire enrichi par l'uniformisation galoisienne

$$\phi : \tilde{C} \xrightarrow{h} C \xrightarrow{\pi} D$$

Notons $Q_1, \ldots, Q_r$ les points doubles de D, et $\{Q_{\alpha,j}\}$ les points de C au dessus de Q_α. Soit $\tilde{Q}_\alpha$ un quelconque point de $\tilde{C}$ au dessus de Q_α. On notera que par définition les $Q_{\alpha,j}$ sont les points doubles de C. Notons d_α l'ordre du stabilisateur de $\tilde{Q}_\alpha$, et enfin $d_{\alpha,j}$ l'indice ("de ramification") décrivant la structure locale (définition 6.15 (ii)) de π en $Q_{\alpha,j}$. On a le résultat suivant dont la preuve est en tout point analogue au cas lisse:

Lemme 6.23. *Sous les hypothèses qui précèdent, on a* $d_\alpha = \mathrm{ppcm}_j d_{\alpha,j}$.

Preuve: Le résultat découle de la cyclicité de $I = G_{\tilde{Q}_\alpha}$, et de la condition (6.28). On a d'abord clairement pour tout j, $d_{\alpha,j}/q_\alpha$, donc $\mathrm{ppcm}\{d_{\alpha,j}\}_j$ divise d_α. Par ailleurs la fibre $\tilde{\pi}^{-1}(Q_\alpha) = G.\tilde{Q}_\alpha \cong G/I$ est une réunion de H-orbites $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_{r_\alpha}$, où $\mathcal{O}_j$ est la H-orbite des points doubles de $\tilde{C}$ qui sont au dessus de $Q_{\alpha,j}$. Soit δ_j "l'indice de ramification" (l'ordre du stabilisateur) relativement à H des points de $\mathcal{O}_j$.; on a donc $\delta_j = \frac{d_\alpha}{d_{\alpha,j}}$. Le résultat se ramène en fait à prouver que $\mathrm{pgcd}(\delta_1, \ldots, \delta_{r_\alpha}) = 1$. Notant δ ce pgcd, si K est le sous-groupe de I d'ordre δ, on voit de suite que $K \subset \bigcap_{s\in G} sHs^{-1} = 1$. D'où la conclusion.

□

D'après Harris-Mumford la base de la déformation universelle du revêtement admissible $\pi : C \to D$ est ([42], p 62):

$$R_\pi = W(k)[[\tau_1, \ldots, \tau_r, \ldots, \tau_{3g'-3+b}, \{\tau_{\alpha,j}\}]]/\mathcal{I} \tag{6.33}$$

où $\mathcal{I}$ désigne l'idéal engendré par les relations $\tau_\alpha = \tau_{\alpha,j}^{d_{\alpha,j}}$, $\quad (\alpha = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, r_\alpha)$. Dans cette description, τ_α représente le paramètre de déformation du point double $Q_\alpha \in D$; on sait par ailleurs que la base de la déformation universelle de la courbe marquée $(D, \{Q_\alpha\})$ est $\quad W(k)[[\tau_1, \ldots, \tau_{3g'-3+b}]]$. L'anneau R_π est réduit, mais en général pas intégralement clos dans son anneau total des fractions. La structure de R_π peut être précisée comme suit:

Proposition 6.24. *Posons* $N = 3g' - 3 + b$. *Pour tout entier* d *premier à* p, *soit* $\mu_d \subset W$ *le groupe des racines* d*-ième de l'unité.*
i) L'anneau R_π *est réduit, ses idéaux premiers minimaux sont les noyaux* $\mathcal{P}_\zeta$ *des morphismes*

$$\varphi_\zeta = R_\pi \to W[[t_1, \cdots, t_N]],\ \tau_i \mapsto t_i^{d_i},\ \tau_{i,j} \mapsto \zeta_{i,j} t_i^{r_{i,j}}$$

où, $\zeta = \{\zeta_{i,j}\} \in \prod_{i,j} \mu_{d_{i,j}}$, $r_{i,j} = d_i/d_{i,j}$. *On a* $\mathcal{P}_\zeta = \mathcal{P}_{\zeta'}$ *si et seulement si* $\zeta'_{i,j} = \epsilon_i^{r_{i,j}} \zeta_{i,j}$ *pour des racines de l'unité* $\epsilon_i \in \mu_{d_i}$. *En particulier le nombre des idéaux premiers minimaux est*

$$N_\pi = \prod_i \left(\frac{\prod_j d_{i,j}}{d_i} \right) \tag{6.34}$$

ii) La fermeture intégrale de R_π *dans son anneau total des fractions est le produit de* N_π *copies de* $W[[t_1, \cdots, t_N]]$.

Preuve: Posons $R = W[[t_1, \cdots, t_N]]$. Si ζ' et ζ sont reliés comme indiqué, il est clair que $\mathcal{P}_\zeta = \mathcal{P}_{\zeta'}$ car si ψ est l'automorphisme de R tel que $\psi(t_i) = \epsilon_i t_i$, alors $\varphi_{\zeta'} = \psi\varphi_\zeta$. Montrons que si $\varphi = \prod \varphi_\zeta$ alors $\ker\varphi = 0$. On peut se limiter à $N = 1$, ce qui permet de supprimer l'indice i, et de supposer que $1 \le j \le m$. Posons $\mu = \prod \mu_{d_j}$, et $\tau = \tau_1$. L'algèbre R_π a pour base sur $W[[\tau]]$ les monômes $\prod_j \tau_j^{\alpha_j}$, $\alpha_j < d_j$. De la sorte un élément du noyau est

$$\xi = \sum_{k,\alpha=\alpha_1,\cdots,\alpha_m} a_{\alpha,k} \prod_j \tau_j^{\alpha_j}$$

tel que pour $l \geq 0$

$$\sum_{k,\alpha=\alpha_1,\cdots,\alpha_m} a_{\alpha,k} \prod_j \zeta_j^{\alpha_j} = 0$$

la somme étant étendue aux couples (k, α) tels que $kd + \sum_j \alpha_j r_j = l$. Si on regarde $\prod_j \zeta_j^{\alpha_j}$ comme définissant un caractère sur le groupe μ, le théorème d'indépendance des caractères conduit à $a_{\alpha,k} = 0$.

Observons que R est la fermeture intégrale de l'image de φ_ζ. Du fait que $\mathrm{pgcd}(r_1, \cdots, r_m) = 1$, il existe avec $e_j \in \mathbb{Z}$, une relation de la forme: $\sum_j e_j r_j = 1$, qui entraine la relation $t = \prod_j \tau_j^{e_j}$. Le résultat est alors clair. De cela on tire le fait que si φ_ζ et $\varphi_{\zeta'}$ ont un noyau identique, alors il y a un W-automorphisme γ de R tel que $\varphi_{\zeta'} = \gamma\varphi_\zeta$. Alors nécessairement $\gamma(t) = \epsilon t$ pour une certaine racine d-ième de l'unité. Cela termine la preuve de la proposition

□

La structure de l'anneau des déformations R_π explique la non unicité d'une clôture galoisienne pour un revêtement stable $\pi : C \to D$ défini sur k.

Théorème 6.25. *Un revêtement admissible $\pi : C \to D$ au-dessus de k admet une clôture galoisienne, i.e. peut être stabilisé. Le nombre de classes de clôtures galoisiennes (sous l'action de $\Delta(m)$) de π est $N_\pi = \prod_i \left(\frac{\prod_j d_{i,j}}{d_i} \right)$, c'est à dire le nombre de facteurs intègres de la fermeture intégrale de R_π. Dans cette correspondance, les facteurs (isomorphes à $W[[t_1, \cdots, t_N]]$) correspondent bijectivement aux anneaux de déformation des clôtures galoisiennes respectives.*

Preuve: Admettons d'abord le premier point. Soit une G-clôture galoisienne $Z \to C \to D$ de π, de déformation universelle $\mathcal{Z} \to \mathcal{D}$. On sait (théorème 5.2) que la base de cette déformation s'identifie à $\mathrm{Spec}(R_Z)$, avec $R_Z = W(k)[[t_1, \ldots, t_r, \ldots, t_{3g'-3+b}]]$. Posons $N = 3g' - 3 + b$. Si $R = W[[\tau_1, \cdots, \tau_N]]$ est la base de la déformation universelle $\mathcal{D}$ de D, on peut supposer que le morphisme discriminant $R \to R_Z$ est donné par $\tau_\alpha = t_\alpha^{d\alpha}$ si $\alpha = 1, \ldots, r$, et $\tau_\alpha = t_\alpha$ si $\alpha > r$.

La considération de la déformation $\mathcal{Z}/\mathcal{H}$ de C conduit à une factorisation $R \to R_\pi \xrightarrow{\varphi} R_Z$. On peut supposer que φ est donné par

$$\tau_{\alpha,j} = t_\alpha^{\frac{d_\alpha}{d_{\alpha,j}}}, (\alpha = 1, \ldots, r; j = 1, \ldots, r_\alpha)$$

Soit une autre clôture galoisienne $Z' \to C \to D$, telle pour $\theta \in \mathrm{Aut}(m)$, on a un isomorphisme de clôtures $f : Z \xrightarrow{\sim} Z'^\theta$. Si $\iota' : Z' \hookrightarrow \mathcal{Z}'$ est le plongemenr canonique de Z', la considération de $(\mathcal{Z}', \iota' f)$ comme une autre déformation universelle de Z, permet d'étendre f en un isomorphisme de diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z} \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d] & \mathcal{Z}'^\theta \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}\, R_Z \arrow[r, "f", "\sim"'] & \mathrm{Spec}\, R_{Z'}
\end{tikzcd}$$

Passant au quotient par H il s'ensuit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\, R_Z \arrow[r, "f", "\sim"'] \arrow[d] & \mathrm{Spec}\, R_{Z'} \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}\, R_\pi \arrow[r, "="] & \mathrm{Spec}\, R_\pi
\end{tikzcd}$$

Cela montre que les deux clôtures galoisiennes conduisent à la même classe de morphisme $R_\pi \to W[[t_1, \cdots, t_N]]$, donc au même facteur de la fermeture intégrale.

Prouvons la réciproque. Cela revient à supposer qu'on a en mains les diagrammes commutatifs de dessus, exepté l'isomorphisme $f : \mathcal{Z} \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}'^{\theta}$. On peut se ramener à $R_Z = R_{Z'}$. De la sorte on a deux G-revêtements $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$ au-dessus d'une même base R_Z, avec $\mathcal{Z}/\mathcal{H} \cong \mathcal{C} \otimes \mathcal{R} \cong \mathcal{Z}'$. On sait que pour les clôtures galoisiennes induites au-dessus de la fibre générique ν (lisse) de $\operatorname{Spec} R_Z$, il y a $\theta \in \operatorname{Aut}(m)$ tel que $\mathcal{Z}_\nu \cong \mathcal{Z}'^{\theta}_\nu$. Les courbes étant stables marquées, cet isomorphisme se prolonge en un isomorphisme global $\mathcal{Z} \cong \mathcal{Z}'^{\theta}$. Par restriction à la fibre spéciale, on a obtient un isomorphisme $Z \cong Z'^{\theta}$ de clôtures galoisiennes de π. Pour terminer la preuve, reste à prouver que tout revêtement admissible $\pi : \overline{C} \to \overline{D}$ admet une clôture galoisienne, i.e. peut être stabilisé.

On peut dans ce but supposer qu'on a une courbe stable marquée $D \to S = \operatorname{Spec}(R)$, où R est un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k, le marquage étant défini par un diviseur étale $B \to S$, et de fibre spéciale $\overline{D}$. On suppose que la fibre générique est lisse. Il y a des obstructions à trouver un revêtement admissible $C \to D$, relevant $\overline{C} \to \overline{D}$. Par contre on peut trouver un tel revêtement après extension finie de R. Quitte à agrandir R, faisons le choix d'un tel relèvement $C \to D$. Rappelons que si $B = \sum_j Q_j$, cela implique l'existence de points $P_{i,j}$ au dessus de Q_j en lesquels est concentrée la ramification. La courbe C n'est pas forcément stable marquée par les $P_{i,j}$, mais elle l'est par l'ensemble de toutes les préimages des Q_j. Soit $\tilde{C}_K \to C_K \to D_K$ une clôture galoisienne de $C_K \to D_K$, les groupes de Galois respectifs étant G et H. Quitte à agrandir si nécessaire R, soit $\tilde{C} \to D$ le modèle stable marqué. Du fait que $\tilde{C}/H$ est stable marquée par les préimages des Q_j, on a $\tilde{C}/H = C$, il en découle une factorisation

$$\tilde{C} \to C \to D \quad \text{et} \quad C = \tilde{C}/H$$

Si on prend les fibres spéciales, ceci montre que $\overline{C}$ possède une clôture galoisienne, en d'autres termes, qu'on peut enrichir le revêtement admissible $\pi : \overline{C} \to \overline{D}$ en un revêtement stable.

□

Il y a un morphisme naturel de source le champ de Hurwitz $\overline{\mathcal{H}}_{g,g',m}$ de but le champ $\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{adm}}_{g,g',m}$ des revêtements admissibles au sens de Harris-Mumford [42]. On a le résultat (comparer avec l'approche de [2])

Proposition 6.26. *$\overline{\mathcal{H}}_{g,g',m}$ est une désingularisation (normalisation) de $\overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{adm}}_{g,g',m}$.*

□

Le champ $\overline{\mathcal{H}}_{g,g',m}$ (classifiant les revêtements stables) n'est pas en général isomorphe au champ, plus "fin" des revêtements log-admissibles (comparer avec Wewers [69]). Si la base S d'un revêtement stable est arbitraire, on ne peut en général décrire un tel revêtement comme un quotient $\pi : Z/H \to Z/G$, partant d'un G-revêtement stable. On peut cependant, partant de la définition abstraite (6.8), donc d'un objet de $\overline{\mathcal{H}}_{g,g',m}(S)$, donner un contenu plus visible à la structure d'un tel revêtement. Les définitions de la section 6.1 relatives aux quotients, disent qu'un objet de ce champ peut être décrit comme d'une part la donnée d'un recouvrement $(S_i \to S)$ de S, et ensuite pour tout i, d'un G-revêtement $Z_i \to Z_i/G$

de base S_i, l'action de G sur Z_i étant fixée à une torsion près par un élément $\mathrm{Aut}\,(m)$. L'objet inclut en plus une donnée de descente, qui en posant $S_{i,j} = S_i \times_S S_j$ se ramène à une collection d'isomorphismes: $\sigma_{j,i} : Z_{i|S_{i,j}} \xrightarrow{\sim} Z_{j|S_{i,j}}^{\theta_{j,i}}$ qui vérifient après restriction à $S_{i,j,k}$ la condition de cocycle

$$\sigma_{k,j}^{\theta_{j,i}} \circ \sigma_{j,i} = \sigma_{k,i}, \quad \theta_{k,j}\theta_{j,i} = \theta_{k,i} \tag{6.35}$$

L'égalité (6.35) est à prendre à un automorphisme interieur près par un élément $h_{i,j,k} \in H$. En particulier, passant aux quotients par G et H, et faisant abstraction de la torsion de l'action on obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd}
Z_{i|S_{i,j}}/H \arrow[r, "\sigma_{i,j}"] \arrow[d] & Z_{j|S_{i,j}}/H \arrow[d] \\
Z_{i|S_{i,j}}/G \arrow[r, "\sigma_{i,j}"] & Z_{j|S_{i,j}}/G
\end{tikzcd}$$

les isomorphismes horizontaux définissant des données de descente sur les courbes définies localement par (Z_i/H), et (Z_i/G). De la sorte on récupère par descente à S un revêtement admissible $C \to D$, et aussi un revêtement $Z \to D$, qui est localement un G-revêtement galoisien. Pour installer une action globale de G, il y a lieu de passer à un recouvrement étale de S, alors dans ce cas $C = Z/G$ et $D = Z/G$.

6.5.4. Le morphisme discriminant: cas général

Il a été observé dans la section 3.1 que le discriminant d'un G-revêtement galoisien $\pi : C \to D$, entre courbes lisses, de base S, pouvait s'exprimer comme une somme avec multiplicités de diviseurs de Cartier relatifs étales sur S. Ces diviseurs sont les images des diviseurs (étales sur S):

$$\Delta_H = \text{diviseur des points fixes de stabilisateur égal à } H$$

de sorte que pour tout sous-groupe cyclique K de G, $Fix(K) = \sum_{K \subset C} \Delta_C$. Ce fait s'étend à un G-revêtement galoisien stable (voir remarque section 4.1), en se limitant alors à la partie horizontale $Fix_{hor}(K)$ (Proposition 4.8). Dans le cas général, c'est à dire des revêtements non galoisiens, on a implicitement supposé la validité d'une telle description (Définition 6.21). Nous revenons sur ce point. Soit un revêtement de base S, et degré d, qu'on peut sans perte de généralité supposer de la forme $\phi : Z \xrightarrow{p} C = Z/H \xrightarrow{\pi} D = Z/G$, donc de clôture galoisienne au-dessus de S, $Z \xrightarrow{\phi} D = Z/G$. Soit le diviseur de ramification (§ 4.6) défini par

$$R_\pi = \mathrm{Div}\,(\pi^*(\omega_{D/S}) \to \omega_{C/S}) \tag{6.36}$$

Le diviseur de branchement est $B_\pi = \pi_*(R_\pi)$. Notons $[K]$ la H-classe de conjugaison du sous-groupe cyclique K.

Proposition 6.27. *i) Le diviseur de ramification du revêtement $\pi : C \to D$ de base S, a pour expression*

$$R_\pi = \sum_{[K]} \left(\frac{|K|}{|H \cap K|} - 1 \right) R_{[K]} \tag{6.37}$$

pour des diviseurs de Cartier relatifs $R_{[K]}$ disjoints et étales sur S. Le terme $\frac{|K|}{|H \cap K|}$ représente un indice de ramification.
ii) Le diviseur de branchement est $B_\pi = \sum_{[K] \not\subseteq H} (d - e_{H,K}) B_{[K]}$, expression dans laquelle $e_{H,K}$ signifie un indice de ramification, et $B_{[K]}$ un diviseur de Cartier relatif étale sur S.

Preuve: Preuve i) On a clairement $R_\phi = p^*(R_\pi) + R_p$. Utilisant l'expression de la section (3.2) pour le diviseur de ramification dans le cas galoisien, c'est à dire $R_\phi = \sum_K (|K| - 1) \Delta_K$, et l'expression analogue pour R_p, on obtient de suite

$$p^*(R_\pi) = R_\phi - R_p = \sum_{K, K \not\subset H} (|K| - |H \cap K|) \Delta_K \tag{6.38}$$

D'autre part les diviseurs $\Delta_K, \Delta_{K'}$ ont une même image dans C si et seulement si K' est conjugué à K par un élément de H. Le nombre de ces conjugués est $[H : N_G(K) \cap H]$, et le degré de Δ_K sur son image $R_{[K]}$ est $[N_G(K) \cap H : K \cap H]$. Comme $p_* p^*(R_\pi) = |H| R_\pi$, il vient

$$|H| R_\pi = \sum_{K, K \not\subseteq H} (|K| - |H \cap K|) \, p_*(\Delta_K) = |H| \sum_{[K]} \left(\frac{|K|}{|H \cap K|} - 1 \right) R_{[K]}$$

ii) La preuve de 6.37 en tout point analogue est omise.

□

Exemple 6.7 Soit le cas du champ de Hurwitz, classifiant les revêtements simples de degré $n \geq 3$ de $\mathbb{P}^1$, avec $b = 2g + 2n - 2$ points de branchement. Le groupe de monodromie est $G = \mathbf{S}_n$, et $H = \mathbf{S}_{n-1}$. Dans ce cas Δ se réduit à H (automorphismes intérieurs). La compactification lisse du champ de Hurwitz-Fulton est alors $\overline{\mathcal{H}}_{g, \mathbf{S}_n, b(12)} / \mathbf{S}_{n-1}$.

◊

Soit $m = (G, H, \xi)$ un type de monodromie, et b le degré du diviseur de branchement. Le champ de Hurwitz $\overline{\mathcal{H}}_{g,g',m}$ est comme dans le cas galoisien la source du morphisme discriminant:

$$\delta : \overline{\mathcal{H}}_{g,g',m} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g',b} \tag{6.39}$$

explicitement $\delta(\pi : C \to D) = (D, B = \sum B_{[K]})$. Le morphisme (6.39) est un morphisme plat, propre, quasi-fini et génériquement étale, i.e étale sur un sous-champ ouvert partout dense. On peut voir δ comme un revêtement entre champs de Deligne-Mumford lisses. Sous ces conditions, il n'est pas difficile de définir le diviseur de ramification de δ.

Proposition 6.28. *Soit un revêtement $\delta : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ entre champs de Deligne-Mumford lisses sur k (un morphisme quasi-fini, génériquement étale). Il existe un diviseur de Cartier effectif $\mathcal{R} \subset \mathcal{H}$ (le diviseur de ramification), tel que*

$$\omega_{\mathcal{H}} \cong \delta^*(\omega_{\mathcal{M}}) \otimes \mathcal{O}(\mathcal{R}) \tag{6.40}$$

Preuve: Le champ $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{M}$) étant lisse, de dimension N disons, le faisceau localement libre $\Omega^1_{\mathcal{H}/k}$ (de rang N) est défini (resp. $\Omega^1_{\mathcal{M}/k}$). Soit $q : V \to \mathcal{M}$ un atlas. Formons le 2-produit fibré

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\delta"] & \mathcal{M} \\ \mathcal{H} \times_{\mathcal{M}} U \arrow[u] \arrow[r] & V \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd}$$

avec flêches verticales étales surjectives. Si $U \to \mathcal{H} \times_{\mathcal{M}} U$ est un atlas, de sorte que le morphisme composé $p : U \to \mathcal{H}$ est un atlas de $\mathcal{H}$, on obtient le carré 2-commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "\delta"] & \mathcal{M} \\ U \arrow[u, "p"] \arrow[r, "\sigma"] & V \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd} \tag{6.41}$$

Le morphisme $\sigma : U \to V$ est quasi-fini, génériquement étale, par conséquent le conoyau $\Omega^1_{U/V}$ de $d\sigma : \sigma^*(\Omega^1_{V/k}) \to \Omega^1_{U/k}$ est de torsion. Noter que σ^* une injection. On peut former $R = \mathrm{Div}\,(\omega^1_{V/U})$, qui est un diviseur de Cartier effectif de U, définissant de manière évidente un diviseur de cartier $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{H}$. Dans la situation de (6.39), si $C \to D$ est un revêtement, avec r points doubles sur D, on décrit la struture locale de $\mathcal{R}$ comme suit. Soit $k[[t_1, \cdots, t_r, \cdots, t_N]] \hookrightarrow k[[\tau_1, \cdots, \tau_r, \cdots, \tau_N]]$ le morphisme induit entre les bases des déformations universelles respectives, avec $t_i = \tau^{e_i}$ si $1 \leq i \leq r$, et $t_j = \tau_j$ si $j > r$. Il est clair que l'équation locale de $\mathcal{R}$ est $\prod_{i,\, e_i > 1} \tau_i^{e_i - 1}$.

□

7. Graphes et revêtements.

Dans cette section le champ de Hurwitz $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, ou l'espace modulaire de Hurwitz $\overline{H}_{g,G,\xi}$, est étudié d'un point de vue combinatoire. Rappelons (section 6) que les points du bord $\partial\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} = \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} - \mathcal{H}_{g,G,\xi}$ (resp. $\partial\overline{H}_{g,G,\xi}$) sont représentés par les courbes stables munies d'une action stable de G (resp. par les classes à isomorphisme G-équivariant près).

7.1. Graphes modulaires de Hurwitz

La combinatoire d'une courbe préstable se décrit commodément à l'aide du graphe dual, appelé aussi graphe modulaire [53]. Fixons les notations utilisées dans cette section. Dans la suite un graphe est un graphe fini.

Définition 7.1. *([53]) i) Un graphe (fini, combinatoire)* Γ *est la donnée de:*
i) un ensemble $\mathcal{F}$ *(de demi-arêtes) muni d'une involution* $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$
ii) un ensemble $\mathcal{V}$ *de sommets et d'une application bord (ou incidence) :* $\partial : \mathcal{F} \to \mathcal{V}$. *Si* $e \in \mathcal{F}$, $\partial(e)$ *est le sommet (initial) de* e.

Les orbites à deux éléments de τ constituent les arêtes géométriques du graphe, tandis que les points fixes de τ correspondent aux feuilles (ou pattes) du graphe. En modifiant légèrement la terminologie, on a ainsi une partition $\mathcal{F} = \mathcal{E} \sqcup \mathcal{L}$, $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{L}$) étant l'ensemble des arêtes orientées (resp. des pattes). La valence d'un sommet c est le nombre $v(c)$ des demi-arêtes incidentes à ce sommet. Si on ignore l'involution τ, on obtient l'ensemble des drapeaux $\mathcal{F}l(\Gamma)$, c'est à dire des couples $(v, e) \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}$, $\partial(e) = v$.

Un graphe *modulaire* est un graphe Γ, muni en plus de la donnée d'une application $g : \mathcal{V} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Le graphe modulaire est dit *stable* si pour tout sommet c tel que $g(c) = 0$ (resp. $g(c) = 1$), on $v(c) \geq 3$ (resp. $v(c) \geq 1$). Le graphe modulaire Γ est *marqué* si les pattes sont indexées.

Un isomorphisme $\Gamma \xrightarrow{\sim} \Gamma'$ est la donnée d'un couple de bijections $f : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, $h : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$, tel que $h\partial = \partial f$, et $f\tau = \tau' f$, pour les graphes, avec en plus la condition $g'h = g$ pour les graphes modulaires [12]. Ainsi, si Γ est un graphe (modulaire), on peut définir le groupe $\mathrm{Aut}\,(\Gamma)$, et parler d'une action du groupe fini G sur le graphe (resp. graphe modulaire) Γ. Sous ces conditions, il n'est pas difficile de définir le graphe (resp. graphe modulaire) quotient Γ/G. Il est défini par les ensembles $\mathcal{F}/G$, $\mathcal{V}/G$, et les applications déduites de τ, ∂, par passage au quotient. Il y a un morphisme de graphes $\Gamma \to \Gamma/G$, naturellement induit par le passage au quotient dans les ensembles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}$. Dans la suite on notera par la même lettre, dans la mesure où cela n'induit pas de confusion, un graphe modulaire et le graphe (ordinaire) sous-jacent. La définition (7.1) conduit à la définition du graphe modulaire $\Gamma(C)$ associé à une courbe préstable marquée (C, P) [20], [53].

Rappelons cette définition. L'ensemble P est dans cette construction l'ensemble des piqûres, ou points marqués de C. Soit $\{C_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des composantes irréductibles de C, ou ce qui est la même chose l'ensemble des composantes $\{\tilde{C}_i\}$ de la normalisation $\tilde{C}$ de C. Soit aussi $\{b_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ l'ensemble formé des branches (points de $\tilde{C}$) en les différents points doubles de C, augmenté des points marqués. De manière équivalente l'ensemble des points de $\tilde{C}$ qui se projettent sur un point double, ou bien un point marqué. Le graphe (dit dual) $\Gamma(C)$ est alors défini par

i) $\mathcal{F} = \Lambda$, $\mathcal{V} = I$,

[12] Si pour toute demi-arête, f(e) $\neq \tau(e)$, l'automorphisme f est dit sans inversion. Nous ne considérerons dans la suite que des automorphismes sans inversion. Noter qu'il est possible de définir plus généralement un morphisme de graphes $\Gamma \to \Delta$ [6]. C'est encore la donnée d'un couple d'applications $f : \mathcal{F}_\Gamma \to \mathcal{F}_\Delta$, $h : \mathcal{V}_\Gamma \to \mathcal{V}_\Delta$ avec les relations de commutation analogues.

ii) $\tau(b_\alpha) = b_\beta$ ssi $b_\alpha \neq b_\beta$ sont les deux branches d'un même point double, ou alors $\tau(b_\alpha) = b_\alpha$, et dans ce cas b_α est un point marqué,

iii) $\partial b_\alpha = C_i$ ssi b_α est une branche d'un point double, ou bien un point marqué, situé sur la composante C_i,

iv) $g(C_i)$ est le genre géométrique de C_i (le genre de $\tilde{C}_i$).

De manière alternative on peut voir les demi-arêtes comme des arêtes orientées. Ce qui revient à dire que les arêtes géométriques sont dédoublées, en une arête orientée et l'arête opposée (graphes épais[13]). Dans cette description les piqûres (les pattes du graphe) sont alors vues comme des arêtes orientées dépourvues d'arêtes opposeés. L'involution τ, que nous noterons aussi $a \to \overline{a}$, renverse de fait l'orientation des arêtes, et fixe les pattes. Notons pour une composante C_i, l_i le nombre des branches d'origine C_i, et h_i le nombre des piqûres d'origine C_i. De sorte que la condition de stabilité s'écrit de manière équivalente, si $g_i = g(C_i)$ est le genre :

$$2g_i - 2 + h_i + l_i > 0 \ (i = 1, \ldots, s = \mathrm{Card}\, I) \tag{7.1}$$

Rappelons aussi la relation bien connue qui donne le genre arithmétique de la courbe C, supposée connexe, en fonction des paramètres contenus dans le graphe dual [52], c'est à dire le nombre d de points doubles (arêtes géométriques), et le nombre de sommets s:

$$g = \sum_i g_i + \dim H_1(\Gamma) = \sum_i g_i + d - s + 1 \tag{7.2}$$

Revenons maintenant à la situation d'origine, donc C est une G-courbe stable. Il est clair que G agit de manière naturelle sur le graphe modulaire $\Gamma = \Gamma(C)$. Du fait de la stabilité de l'action, G agit sans inversion, i.e. pour toute branche a, et tout $\sigma \in G, \sigma \neq 1$, $\sigma(a) \neq \overline{a}$. Il n'est pas difficile d'implémenter sur Γ la donnée de Hurwitz. Plus précisemment on attache à chaque élément de $\mathcal{F}$ une décoration matérialisée par un couple (H, χ), l'holonomie, H étant le stabilisateur (cyclique) soit d'un point non-singulier, soit d'une branche, et χ étant le caractère de l'action de H sur l'espace tangent du point distingué . De plus si l'arête e est décorée par (H, χ), alors l'arête opposée $\overline{e} \neq e$ est décorée par (H, χ^{-1}). Si on ne regarde que les classes de conjugaison des décorations qui de fait sont constantes sur les G-orbites on obtient en particulier la donnée de Hurwitz. En résumé, appelons graphe modulaire de Hurwitz, un graphe modulaire muni d'une action sans inversion d'un groupe fini G qui satisfait aux conditions précédentes. Pour une arête, ou patte, décorée par le couple (H, χ), on parlera de ce couple comme étant l'holonomie. L'holonomie en ge est $(gHg^{-1}, {}^g\chi)$ (§ 2.2.1). Ce qu'on doit comprendre comme isomorphisme de graphes modulaires de Hurwitz est clair.

Définition 7.2. *On appelle graphe modulaire de Hurwitz associé au revêtement galoisien stable $C \to D$, le graphe modulaire $\Gamma = \Gamma(C)$ muni de l'action de G, et décoré par les caractères locaux attachés aux orbites de points de ramification (points spéciaux) et branches de C. Le graphe est marqué si les orbites de pattes sont indexées.*

Soit Γ un graphe modulaire de Hurwitz attaché à (g, G, ξ). Un G-revêtement $\pi : C \to D$ est dit de type Γ, si $\Gamma(C) \cong \Gamma$.

On utilisera une notation identique pour le graphe modulaire de Hurwitz du revêtement $\pi : C \to D$ et le graphe modulaire de la courbe C. Les graphes seront comme les revêtements, marqués.

[13] Dans un graphe épais, on impose un ordre cyclique sur les arêtes incidentes en un sommet.

7.2. Graphes de groupes et revêtements de graphes

Notre objectif est de décrire Γ, partant du graphe quotient, qui est est un graphe ordinaire $\Delta = \Gamma/G$, et d'un morphisme de monodromie, défini dans le but d'assurer la validité du dictionnaire usuel. La théorie de Bass [6] des revêtements de graphes, est particulièrement utile pour mener à bien ce programme.

7.2.1. Graphes modulaires quotients

Soit C une courbe stable marquée définie sur k, munie d'une action stable de G, donc C est marquée par un diviseur G-invariant contenant le diviseur des points de ramification (§4.3). Soit $\Gamma = \Gamma(C)$ le graphe modulaire de Hurwitz attaché à C (Définition 7.2). Notons pour débuter la remarque élémentaire suivante:

Proposition 7.3. *Le graphe quotient $\Delta = \Gamma/G$ possède une structure canonique de graphe modulaire de genre g', à b piqûres. Il s'identifie au graphe modulaire de la courbe stable marquée $D = C/G$.*

Preuve: Par définition du graphe combinatoire quotient [6]

$$\mathcal{V}(\Delta) = \mathcal{V}(\Gamma)/G \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\Delta) = \mathcal{F}(\Gamma)/G \tag{7.3}$$

L'action de G commute avec l'involution τ_Γ, celle-ci induit donc une involution sur l'ensemble quotient, définissant ainsi la structure du graphe quotient Δ. Noter aussi que les piqûres (points fixes de τ_Δ) du quotient, sont les images des piqûres de Γ. Pour finir de décrire Δ comme graphe modulaire, il faut assigner une valeur g'_α pondérant le sommet v'_α associé à la composante D_α de D. Par convention, g'_α est le genre (géométrique) de D_α. Il est clair que g'_α s'exprime en fonction des seules données de Γ. Soit une composante C_i de C, d'image D_α, et soit G_i le stabilisateur de C_i, i.e. du sommet v_i de Γ. Donc $D_\alpha = C_i/G_i$. L'expression cherchée est la formule de Riemann-Hurwitz, appliquée au revêtement $\tilde{C}_i \to \tilde{D}_\alpha$:

$$2g_i - 2 = |G_i|(2g'_\alpha - 2) + \sum_\lambda B_\lambda$$

où les B_λ sont les contribution des points de branchement, contributions dépendantes de la seule combinatoire du graphe de modulaire de Hurwitz Γ. Il est facile de prouver que l'on définit ainsi une structure de graphe modulaire (quotient) sur Δ. Le dernier point est clair.

□

Pour éviter toute confusion avec d'autres définitions de revêtements de graphes[14], insistons sur le fait que l'action de G sur les sommets et arêtes n'est dans cette définition pas nécessairement libre, le quotient $\Gamma \to \Gamma/G$ est donc à prendre dans le sens d'un revêtement ramifié. Avant de discuter en détail le cas général, il peut être utile de traiter deux cas particuliers importants; ce sont les graphes

[14] On peut exiger, ce qui n'est pas le cas dans notre définition, la propriété de relèvement des chemins (revêtements non ramifiés).

modulaires de Hurwitz qui sont associés aux composantes de codimension un du bord de $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, ou de l'espace modulaire grossier de même nom. Ce sont les deux cas pour lesquels Δ n'a qu'une seule arête géométrique, Δ est donc soit un segment, soit une boucle.

- Δ *est un arbre*

Du fait de cette hypothèse, il est bien connu que la projection $\Gamma \to \Delta$ admet une section [6]; nous noterons pour simplifier par la même lettre Δ l'image d'une section supposée choisie. Notant toujours $\mathcal{V}$ l'ensemble des sommets, et $\mathcal{F}$ l'ensemble des arêtes orientées, nous noterons pour simplifier $a \in \Gamma$ au lieu de $a \in \mathcal{F}$, même chose pour les sommets; la notation est analogue pour Δ. On a alors les identifications

$$\mathcal{F} = \bigsqcup_{a \in \Delta} G/H_a \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \bigsqcup_{v \in \Delta} G/G_v \tag{7.4}$$

On note G_v le stabilisateur du sommet v, et H_a le stabilisateur de l'arête (orientée, ou géométrique) a. Décrivons la relation d'incidence. Si e est une arête d'extrémités g_1v_1 et g_2v_2, il existe alors $a \in \Delta$ tel que $e = ga \in Ga$; alors $g^{-1}g_1v_1 = v_1$ et $g^{-1}g_2v_2 = v_2$. Cela montre que l'ensemble des arêtes d'extrémités g_1v_1 et g_2v_2 est en bijection naturelle avec les classes gH_a, a étant l'unique arête de Δ joignant v_1 et v_2, qui vérifient l'inclusion $gH_a \subset g_1G_{v_1} \cap g_2G_{v_2}$.

Exemple 7.1 (Le peigne)

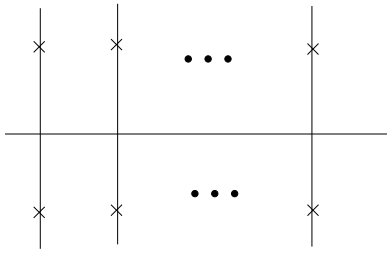
Détaillons le cas particulier où Γ est un "peigne", ce qui correspond à choisir Δ sous la forme d'une étoile à $k \geq 3$ branches. Les notations pour Δ sont:

- v_0 est la racine de l'étoile, qui est un sommet de valence k
- $v_1, \ldots, v_k$ sont les sommets terminaux des k-branches.

On doit installer sur Δ une structure de graphe modulaire, et implémenter la donnée de Hurwitz. Pour la structure de graphe modulaire, on pose $g_0 = g_1 = \ldots = g_k = 0$. La donnée de Hurwitz dans cet exemple est du type "Harbater-Mumford" [16], [30], c'est à dire de la forme

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} ([H_i, \chi_i] + [H_i, \chi_i^{-1}]) \tag{7.5}$$

La forme spécifique de la donnée de Hurwitz impose à chaque sommet $v_1, \ldots, v_k$ d'être la source de deux piqûres. En effet si C_i est une composante de C au-dessus du brin d'indice i de D, alors $C_i \to \mathbb{P}^1$ est ramifié en trois points au plus. La forme de la donnée de ramification impose que le nombre de ponts de branchement est deux, le point double étant d'isotropie triviale.



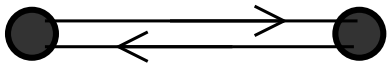
Pour décrire la structure de graphe de Hurwitz sur Γ, choisissons un sommet s_i au dessus de v_i ($i = 0, \ldots, k$), et posons $H_i = G_{s_i}$; notons que nécessairement $H_0 = 1$. Observons aussi que G est en conséquence engendré par la réunion des H_i. On obtient finalement la description suivante de Γ:

$$\mathcal{V}_\Gamma = (\bigsqcup_{i=1}^{k} G/H_i) \bigsqcup G, \quad \mathcal{F}_\Gamma = \bigsqcup_{1}^{2k} G \tag{7.6}$$

Notons que le genre g de C est donné par

$$g = 1 + k\mathrm{Card}\, G - \sum_{i=1}^{k} [G : H_i] \tag{7.7}$$

Exemple 7.2 (Le segment) Dans cet exemple, Δ est un segment de sommets v_1 et v_2, et d'arêtes orientées e et $\overline{e}$, e pointant vers v_2.



On relève Δ en un segment de Γ de sommets s_1 et s_2, de stabilisateurs respectifs G_1 et G_2. L'arête orientée a relève e: soit H le stabilisateur de a, alors $H \subset G_1 \cap G_2$, et la connexité impose que $G_1 \cup G_2$ engendre G. La description du graphe (ordinaire) Γ est aisée: on a

$$\mathcal{F}_\Gamma = G/H \times \{\pm 1\}, \quad \mathcal{V}_\Gamma = G/G_1 \bigsqcup G/G_2 \tag{7.8}$$

Une arête géométrique est dans ce modèle représentée par un élément de G/H; l'arête gH joint les sommets g_1G_1 et g_2G_2 ssi $gH \subset g_1G_1 \cap g_2G_2$. L'involution est donnée par $\tau(gH, \epsilon) = (gH, -\epsilon)$. D'une manière plus géométrique, supposons que les composantes C_1 et C_2 correspondent à s_1 et s_2. Posons

$$\mathbf{Ind}_{G_1}^{G}(C_1) = C_1 \times_{G_1} G \tag{7.9}$$

Cela signifie qu'on effectue le quotient de $C_1 \times G$ par l'action de $G_1 : \alpha(x, g) = (\alpha x, g\alpha^{-1})$. Le résultat est une courbe avec $[G : G_1]$ composantes irréductibles disjointes, toutes identiques à C_1, et munie de l'action de G donnée par $g[x, h] = [x, gh]$. La courbe C est alors de la forme

$$C = \mathbf{Ind}_{G_1}^{G}(C_1) \bigvee \mathbf{Ind}_{G_2}^{G}(C_2) \tag{7.10}$$

expression dans laquelle $\vee$ signifie que l'on recolle les deux facteurs en identifiant des paires de points, selon la combinatoire des arêtes de Γ. Les points doubles forment une unique G-orbite; soit $p \in C_1 \cap C_2$ l'un d'eux, d'isotropie H. Si H agit sur la branche C_1 par le caractère χ, et sur la branche C_2 par χ^{-1} (stabilité oblige), alors la donnée de Hurwitz ξ de l'action de G sur C s'obtient par $\xi = \xi_1 + \xi_2$, où on suppose que la donnée définie par l'action de G_1 sur C_1 est $\tilde{\xi}_1 = \xi_1 + [H, \chi]$, et celle définie par l'action de G_2 sur C_2 est $\tilde{\xi}_2 = \xi_2 + [H, \chi^{-1}]$. La combinatoire est donc totalement contenue dans la donnée $(G_1, G_2, H, \chi, \xi_1, \xi_2)$. Noter qu'il n'est pas nécessaire de s'assurer que le genre g de C est celui fixé

initialement. En effet le genre résulte de la donnée du genre $g' = g'_1 + g'_2$ de la base $D = C_1/G_1 \vee C_2/G_2$ joint à la donnée de Hurwitz. On a donc si g_i est le genre de C_i l'égalité

$$g = [G : G_1]g_1 + [G : G_2]g_2 + [G : H] - [G : G_1] - [G : G_2] + 1$$

Exemple 7.3 (La boucle)

Si Δ est une boucle, alors G est une "extension " HNN. On distingue deux cas selon que Γ a, ou n'a pas de boucle. Traitons d'abord le second cas:

• On suppose que Γ ne contient pas de boucle, et que $\Delta = \Gamma/G$ se réduit à une boucle. Alors Γ est défini par la donnée (à conjugaison près) par un triplet (G_0, H, g_0) formé de deux sous-groupes H et G_0 de G, H étant cyclique, et $H \subset G_0 \subset G$, et d'un élément $g_0 \in G, g_0 \notin G_0$. On impose à cette donnée les conditions $g_0 H g_0^{-1} \subset G_0$ et $G_0 \cup \{g_0\}$ engendre G. Il est facile de voir qu'on reconstruit le graphe Γ en posant:

$$\mathcal{F}_\Gamma = (G/H) \times \{\pm 1\}, \quad \mathcal{V}_\Gamma = G/G_0 \tag{7.11}$$

L'involution τ est comme dans l'exemple 7.2 la multiplication par -1 sur le facteur de droite. L'incidence est donnée par

$$(\alpha H, +1) \to (\alpha G_0, \alpha g_0 G_0) \quad , \quad (\alpha H, -1) \to (\alpha g_0 G_0, \alpha G_0) \tag{7.12}$$

en particulier $\dim H_1(\Gamma) = [G : H] - [G : G_0] + 1$. Par exemple, si $G_0 = 1$, alors G est cyclique engendré par g_0, et Γ est un n-circuit, avec $n = \mathrm{Card} G$. Par construction il y a dans Γ une seule orbite de sommets, soit v l'un d'entre eux et soit G_0 le stabilisateur de v. Si C_0 est la composante représentée par v, la donnée de Hurwitz définie par l'action de G_0 sur C_0 est de la forme

$$\tilde{\xi} = \xi + [H, \chi] + [H, \chi^{-1}] \in R_+(G_0) \tag{7.13}$$

L'hypothèse de stabilité de l'action qui impose aux caractères locaux en v et $g_0 v$ d'être opposés, ajoute une contrainte sur χ, à savoir $\chi(g_0^{-1} s g_0) = \chi^{-1}(s)$, $(s \in H)$.

• Reste le cas où Γ contient une boucle; il est facile de voir que dans ce cas Γ n'a qu'un seul sommet, et que toutes les arêtes sont des boucles, i.e. Γ est une fleur à $m \geq 1$ pétales.

7.2.2. Revêtements ramifiés de graphes (Bass [6])

Pour reconstruire le graphe Γ partant du quotient Δ, et d'une donnée additionnelle à définir, on compense le fait que l'action de G n'est pas supposée libre, par une structure de graphe de groupes sur le graphe quotient Δ (théorie de Bass-Serre: [6], et les références contenues dedans).

Rappelons qu'un graphe de groupes Δ (tous les graphes sont finis), est la donnée d'un graphe Δ, tel qu'à chaque sommet v (resp. à chaque arête orientée e) est associé un groupe (fini) G_v, (resp. un groupe H_e); si e pointe vers v, on a un morphisme injectif $\partial_e^1 : H_e \to G_v$, cette donnée étant telle que $H_e = H_{\overline{e}}$. On pose $\partial_e^0 = \partial_{\overline{e}}^1$. On définit alors le groupe fondamental d'un graphe de groupes Δ de la manière suivante (loc.cit)

Définition 7.4. *Soit F_Δ le groupe libre de base l'ensemble des arêtes orientées $\mathcal{F}_\Delta$; choisissons aussi un arbre maximal $T \subset \Delta$. Le groupe fondamental $\pi_1(\Delta; T)$ est défini comme étant le quotient du produit libre $F_\Delta \star (\star_v G_v)$ par le sous-groupe distingué engendré par les relations*

$$e = 1 \text{ si } e \in T \ , \ e\overline{e} = 1 \ (e \in \Gamma), \text{ et } e\partial_e^1(h)\overline{e} \ = \ \partial_e^0(h) \quad (e \in \Delta, h \in H_e) \tag{7.14}$$

Le groupe $\pi_1(\Delta; T)$ ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix de T. On a la description alternative suivante du groupe fondamental [6]; appelons chemin de Δ une suite

$$\gamma = (g_0, e_1, g_1, \ldots, e_n, g_n) \tag{7.15}$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une chemin "ordinaire", a_i désignant le sommet terminal de e_i (donc aussi le sommet initial de e_{i+1} si $i < n$), a_0 étant le sommet initial de e_1, on a $g_i \in G_{a_i}$, $(0 \leq i \leq n)$. Si $a_0 = a_n, \gamma$ est un lacet en $v = a_0$. Ceci étant, on forme le groupe des chemins

$$\pi(\Delta) = [(\star_v G_v) \star F_\Delta] \ / \ R \tag{7.16}$$

R désignant le sous-groupe distingué engendré par les relations

$$e\overline{e} = 1 \ (e \in \Delta) \ , \ e\partial_e^1(h)\overline{e} \ = \ \partial_e^0(h) \quad (e \in \Delta, h \in H_e) \tag{7.17}$$

Si γ est le chemin (7.15), on pose

$$|\gamma| = g_0 e_1 g_1 \ldots e_n g_n \in \pi(\Delta) \tag{7.18}$$

Les éléments (7.18), lorsque γ est un lacet en $v = a_0$, forment un sous-groupe noté $\pi_1(\Delta, v)$. On montre alors [6] que la surjection $\pi(\Delta) \to \pi_1(\Delta, T)$, restreinte au sous-groupe $\pi_1(\Delta, v)$ est un isomorphisme $\pi_1(\Delta, v) \cong \pi_1(\Delta, T)$.

Formons $\Delta = \Gamma/G$ le graphe quotient, et soit $p : \Gamma \to \Delta$ le morphisme quotient. On sait munir Δ d'une structure de graphe de groupes, structure qui capture les informations sur l'action de G, i.e. définissant sur Δ une structure "d'orbifold" [6]. Disons seulement, et cela sera suffisant pour la suite, que si s est un sommet de Δ, alors le groupe G_s est essentiellement le stabilisateur d'un sommet $v \in \Gamma$ tel que $p(v) = s$; définition analogue pour H_e si e est une arête de Δ. La construction nécessite le choix de sections de p au niveau des sommets et arêtes. On notera dans la suite $\Gamma//G$ le graphe Δ muni de la structure de graphe de groupes quotient. On a besoin du résultat suivant de Bass-Serre (Bass [6], Theorem 3.6):

Théorème 7.5. *Il existe une surjection naturelle $\psi : \pi_1(\Gamma//G) \to G$, appelée morphisme de monodromie, telle que $\ker\psi \cong \pi_1(\Gamma)$ (groupe fondamental du graphe ordinaire quotient).*

□

La définition de ψ mime la définition usuelle de l'action de monodromie. Noter que par simplicité on ne fait pas référence aux sommets de base. Le théorème 7.5 dit qu'on peut reconstruire le graphe Γ muni de l'action de G, partant de la structure de graphe de groupes sur $\Delta = \Gamma//G$, et du morphisme de monodromie, comme dans le cas classique. Le graphe Γ apparaît comme le quotient du revêtement universel de $\Gamma//G$ par $\pi_1(\Gamma)$.

Définition 7.6. *Sous les hypothèses précédentes, notons D le sous-groupe distingué de G engendré par les stabilisateurs des sommets (sous-groupe de décomposition) , et notons I le sous-groupe distingué engendré par les stabilisateurs des arêtes (sous-groupe d'inertie).*

On a donc $I \triangleleft D \triangleleft G$. On peut préciser la structure du groupe fondamental ordinaire de $\Delta = \Gamma/G$, comme suit:

Proposition 7.7. *Il y a une surjection naturelle $\phi : \pi_1(\Gamma/G) \to G/D$, qui conduit à une suite exacte*

$$\pi_1(\Gamma) \to \pi_1(\Gamma/G) \to G/D \to 1 \tag{7.19}$$

Preuve: Définissons d'abord le morphisme ϕ. Soit $a_0 \in \Gamma$ un sommet, et posons $\overline{a}_0 = p(a_0)$. Si $\overline{\gamma} = (\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n)$ représente un lacet de Δ basé en $\overline{a}_0$, on peut le relever en un lacet $\gamma = (e_1, \ldots, e_n)$ d'origine a_0. Soit s le sommet terminal de l'arête e_n; alors $p(s) = p(a_0)$. Il y a donc $g \in G$ tel que $s = ga_0$. On doit vérifier que la classe de g modulo D ne dépend pas du relèvement choisi. Soit en effet $(e'_1, \ldots, e'_n)$ un autre choix de relèvement; il y a $g_1 \in G, e'_1 = g_1 e_1$. L'action de G étant sans inversion, $g_1 a_0 = a_0$, donc $g_1 \in D$. le relèvement $(e_1, g_1 e'_2, \ldots, g_1 e'_n)$ diffère de $(e_1, \ldots, e_n)$ par au plus $(n-1)$ arêtes. Par une récurrence immédiate, on peut supposer que si s' est le sommet terminal de e'_n, alors pour le sommet terminal de $g_1 e'_n$, on a $g_1 s' \in gDa_0$. On en tire immédiatement que $s' \in gDa_0$, et donc g et g' sont dans la même classe modulo D. Le morphisme ϕ assigne à γ, la classe modulo D de l'élément g ci-dessus. La vérification du fait que le morphisme ϕ est bien défini est évidente.

On sait par ailleurs que si R est le sous-groupe distingué de G engendré par les sous-groupes $G_s, s \in \Gamma//G$, alors

$$\pi_1(\Gamma//G)/R \cong \pi_1(\Gamma/G)$$

La construction montre qu'en fait ϕ coïncide avec le morphisme déduit de ψ par passage au quotient par les groupes R et D respectivement. Cela a pour traduction un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(\Gamma//G) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & \pi_1(\Gamma//G)/R \arrow[r, "\sim"] & \pi_1(\Gamma/G) \arrow[r, "\phi"] & G/D &
\end{tikzcd} \tag{7.20}$$

De ce diagramme on tire un morphisme composé $\theta : \pi_1(\Gamma) \to \pi_1(\Gamma/G)$ qui n'est pas autre chose que le morphisme canonique déduit de p, et aussi l'égalité $\psi(R) = D$. La conclusion vient alors immédiatement d'une chasse au diagramme.

□

Passant à l'homologie, la suite exacte 7.20, donne immédiatement comme corollaire:

Corollaire 7.8. *Sous les hypothèses précédentes, on a une suite exacte canonique:*

$$H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\Gamma/G, \mathbb{Z}) \longrightarrow \big(G/D\big)_{ab} \longrightarrow 1. \tag{7.21}$$

□

7.3. Groupe de Picard et revêtements

7.3.1. Sous-groupes de décomposition et d'inertie

La proposition 7.2 admet une interprétation géométrique simple lorsque Γ est le graphe dual (modulaire) d'une courbe préstable, sur laquelle le groupe G agit stablement. Soit C une telle courbe (définie sur le corps algébriquement clos k), de composantes irréductibles $C_1 \ldots, C_s$, de sorte que s représente le nombre d'arêtes géométriques de Γ. Soit la normalisation $\tilde{C} = \bigsqcup_i \tilde{C}_i \longrightarrow C$ de C. On considère $\tilde{C}$ comme munie de l'action induite de G; même chose pour Γ. On note G_i le stabilisateur de C_i; si p est un point double, on notera G_p son stabilisateur (cyclique). Soient comme dans la section précédente les sous-groupes distingués D et I (de décomposition et d'inertie). On notera pour simplifier $H^1(\Gamma)$ le groupe $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$. Rappelons tout d'abord la description bien connue du groupe de Picard de C; on le décrit au moyen de la suite exacte

$$1 \longrightarrow H^1(\Gamma) \otimes k^* \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(C) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(\tilde{C}) = \prod_i \mathrm{Pic}\,(\tilde{C}_i) \longrightarrow 1 \tag{7.21}$$

Considérons la courbe quotient $D = C/G$, qui est préstable, et soit $\pi : C \to D = C/G$ le morphisme quotient. Une suite exacte analogue à celle utilisée pour décrire $\mathrm{Pic}\,(C)$, appliquée à $\mathrm{Pic}\,(C/G)$, conduit à un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H^1(\Gamma) \otimes k^* \arrow[r] & \mathrm{Pic}\,(C) \arrow[r] & \prod_i \mathrm{Pic}\,(\tilde{C}_i) \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & H^1(\Gamma/G) \otimes k^* \arrow[r] \arrow[u, "\pi^*"] & \mathrm{Pic}\,(C/G) \arrow[r] \arrow[u, "\pi^*"] & \prod_i \mathrm{Pic}\,(\tilde{C}_i/G_i) \arrow[r] \arrow[u, "\prod \pi_i^*"] & 1
\end{tikzcd} \tag{7.22}$$

dans lequel les flèches verticales sont induites par les morphismes quotients respectifs, notés π. On peut noter que la flèche verticale de gauche, c'est à dire π^*, est celle qui dérive du morphisme de graphes $\pi : \Gamma \to \Gamma/G$.

On va préciser le contenu du diagramme (7.22) en étudiant la suite exacte formée par les noyaux des flèches verticales. Si A est un groupe fini, on notera $\hat{A}$ le groupe des caractères, soit $\hat{A} = \mathrm{Hom}\,(A, k^*)$, sous entendu que $\mathrm{Card}\,A$ est premier à la caractéristique de k. Le résultat suivant est important pour la suite:

Théorème 7.8. *Le sous-groupe d'inertie de $(\tilde{C}_i, G_i)$ étant noté I_i, la suite exacte des noyaux du diagramme précédent s'identifie canoniquement à:*

$$1 \longrightarrow \widehat{G/D} \longrightarrow \widehat{G/I} \longrightarrow \prod_i \widehat{G_i/I_i} \tag{7.23}$$

Preuve: La preuve utilise la structure naturelle de G-faisceau supportée par $\pi_*(\mathcal{O}_C)$ sur C/G. Du fait de la présence de points doubles (éventuels) avec un groupe d'isotropie non trivial, ce faisceau n'est pas en général localement libre, il est seulement de type fini et sans torsion. Cependant comme la

ramification est modérée, on a toujours une décomposition en facteurs isotypiques (voir §3.2): $\pi_*(\mathcal{O}_C) = \bigoplus_{\chi\in Irrep(G)} \mathcal{L}_\chi \otimes V_\chi$, V_χ désignant l'espace supportant la représentation irréductible χ, et $\mathcal{L}_\chi$ étant un faisceau sans torsion donné par

$$\mathcal{L}_\chi = \pi_*^G\left(\mathcal{O}_C \otimes \check{V}_\chi\right) \tag{7.24}$$

Analysons plus en détail cette décomposition au voisinage d'un point double $q = \pi(p)$ de $D = C/G$, le point double p étant de stabilisateur H. Après localisation, et complétion, on est amené à décomposer $\pi_*(\widehat{\mathcal{O}}_C)_q$ en tant que $\left(\widehat{\mathcal{O}}_{D,q}, G\right)$- module. La décomposition suivante est immédiate:

$$\pi_*(\widehat{\mathcal{O}}_C)_q \;\cong\; \mathbf{Ind}_H^G\left(\widehat{\mathcal{O}}_{C,p}\right) \tag{7.25}$$

On est de la sorte ramené à supposer que $\widehat{\mathcal{O}}_{C,p} = k[[x,y]]/(xy)$, et que l'action sur les deux branches d'un générateur $\sigma \in H$ de H, soit réduite à la forme usuelle, $\sigma(x) = \zeta x$, $\sigma(y) = \zeta^{-1}y$, pour une certaine racine de l'unité d'ordre $e = \mathrm{Card}\, H$. Ainsi, si on pose $u = x^e$, $v = y^e$, on a $\widehat{\mathcal{O}}_{D,q} = k[[u,v]]/(uv)$. La décomposition cherchée est alors totalement explicite

$$\widehat{\mathcal{O}}_{C,p} \;\cong\; \widehat{\mathcal{O}}_{D,q} \bigoplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{e-1} (x^j, y^{e-j}) \widetilde{\widehat{\mathcal{O}}_{D,q}}\Big) \tag{7.26}$$

où le symbole tilde désigne la normalisation. Notons μ_j la représentation de degré un de caractère $\mu_j(\sigma) = \zeta^j$, de sorte que la décomposition (7.26) équivaut à

$$\widehat{\mathcal{O}}_{C,p} \;\cong\; \widehat{\mathcal{O}}_{D,q} \bigoplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{e-1} \mu_j \otimes \widetilde{\widehat{\mathcal{O}}_{D,q}}\Big) \tag{7.27}$$

Cela donne finalement

$$\pi_*(\widehat{\mathcal{O}}_C)_q \;\cong\; \widehat{\mathcal{O}}_{D,q} \otimes \mathbf{Ind}_H^G(1_H) \bigoplus \Big(\bigoplus_{j=1}^{e-1} \widetilde{\widehat{\mathcal{O}}_{D,q}} \otimes \mathbf{Ind}_H^G(\mu_j)\Big) \tag{7.28}$$

De cette décomposition on extrait le fait que le facteur $\mathcal{L}_\chi$ est sans torsion de rang égal au degré de χ. Par réciprocité de Frobenius un caractère irréductible de G apparaît dans $\mathbf{Ind}_H^G(\mu_j)$ que si la restriction de χ à H contient μ_j. On voit ainsi que $\mathcal{L}_\chi$ est localement libre en $q = \pi(p)$ si et seulement si la restriction de χ à H est le caractère trivial.[15] En particulier, $\mathcal{L}_\chi$ est localement libre si et seulement si χ est non ramifié, signifiant par définition $\chi(I) = 1$, i.e. χ est trivial sur le sous-groupe d'inertie.

Pour terminer la preuve, on montre d'abord que le noyau de $\pi^* : \mathrm{Pic}\,(C/G) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(C)$ s'identifie canoniquement à $\widehat{G/I}$. C'est un fait bien connu, du moins dans le cas lisse. Adaptons la démonstration aux conditions de la présente situation. Soit $\mathcal{L}$ un élément du noyau, de sorte que $\pi^*(\mathcal{L}) \cong \mathcal{O}_C$ définit une G-linéarisation de $\mathcal{O}_C$. La courbe C étant réduite et connexe, une telle linéarisation est définie par un caractère χ de G. Soit alors $\mathcal{O}_C(\chi)$, le faisceau structural de C, ainsi G-linéarisé. On a sous ces conditions

$$\mathcal{L} \cong \pi_*^G \pi^*(\mathcal{L}) \;\cong\; \pi_*\left(\mathcal{O}_C(\chi)\right) = \mathcal{L}_\chi$$

[15] La décomposition 7.28 montre en fait que $(\mathcal{L}_\chi)_q \cong \widehat{\mathcal{O}}_{D,q}^r \oplus (\widetilde{\widehat{\mathcal{O}}_{D,q}})^s$, avec $r = \langle 1, \chi\rangle_H$.

Noter qu'alors χ est non ramifié. Inversement, si χ est un tel caractère, on a un morphisme canonique $\pi^*(\mathcal{L}_\chi) \to \mathcal{O}_C$, entre faisceaux inversibles qui est un isomorphisme sur un ouvert dense, donc un isomorphisme. Cela prouve que le facteur isotypique $\mathcal{L}_\chi$ de la décomposition (7.23), dans le cas où c'est un faisceau inversible, c'est à dire si χ est non ramifié, est dans le noyau de π^*. L'identification cherchée est sous une forme explicite $\chi \in \widehat{G/I} \rightsquigarrow \mathcal{L}_\chi$. Le même argument appliqué aux composantes $\tilde{C}_i$ de la normalisation donne

$$\ker \pi^* : \mathrm{Pic}\left(\tilde{C}_i/G_i\right) \longrightarrow \mathrm{Pic}\left(\tilde{C}_i\right) \cong \widehat{G_i/I_i} \tag{7.29}$$

Le résultat découle alors, après identification, de la suite exacte des noyaux.

□

Corollaire 7.9. *Le facteur isotypique $\mathcal{L}_\chi$ de la décomposition (7.23) est localement libre (de rang égal au degré de χ) si et seulement si χ est non ramifié, soit $\chi(I) = 1$.*

□

Remarque 7.4 Le corollaire précédent apporte une réponse équivalente à l'alternative qu'on rencontre usuellement lorsque dans une compactification, un faisceau inversible dégénère lors d'une spécialisation en un point du bord. Pour comparaison avec l'étude du bord de l'espace modulaire des courbes à spin, problème au parallélisme frappant, la correspondance avec la terminologie employée par Jarvis [42],[43] est

$$\chi \quad \text{est} \quad \begin{cases} \text{non ramifié si} & \chi \text{ est R-R (Ramond-Ramond)} \\ \text{ramifié si} & \chi \text{ est N-S (Neveu-Schwarz)} \end{cases}$$

◊

7.3.2. Faisceaux sans torsion de rang un et revêtements stables

Soit $p : D \to S$ une courbe préstable. Un faisceau cohérent E sur D est dit sans torsion de rang n, relativement à S, si E est plat sur S, et si sur chaque fibre D_s, le faisceau induit E_s est sans torsion de rang n. En particulier E est localement libre sur l'ouvert de lissité de p. Un théorème de Faltings ([31] Theorem 3.5, voir aussi [43]) précise la structure locale de E en un point singulier, point en lequel E n'est pas libre. Pour décrire le résultat on peut choisir des coordonnées locales le long des branches, et supposer que E est un module sans torsion de rang n sur l'anneau local noetherien complet $A = R[[x, y]]/(xy - \pi)$, où $R = \hat{\mathcal{O}}_s$ et $\pi \in \mathcal{M}_R$. Si $\overline{A} = A \otimes k$, alors on sait que

$$E \otimes k \cong \overline{A}^r \oplus \tilde{\overline{A}}^s \ (r + s = n) \tag{7.30}$$

Comme indiqué dans [31], on peut se limiter au cas $n = s$. La construction d'une déformation verselle de $\tilde{\overline{A}}^n$ est comme suit. Noter que seul le cas $n = 1$ sera en fait utilisé. Supposons que $P, Q \in \mathrm{M}_n(R)$ sont deux matrices $n \times n$, telles que $P.Q = Q.P = \pi 1_n$. Définissons deux matrices $2n \times 2n$, à coefficients dans A, par

$$\Phi = \begin{pmatrix} x.1 & P \\ Q & y.1 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} y.1 & -P \\ -Q & x.1 \end{pmatrix}$$

Alors $\Phi\Psi = \Psi\Phi = 0$, et $E(P,Q) = \ker\Psi = \operatorname{Im}\Phi$ est sans torsion de rang n, de réduction $\overline{\tilde{A}}^n$. Réciproquement, tout module sans torsion de rang n, de réduction $\overline{\tilde{A}}^n$, est isomorphe à un $E(P,Q)$. On peut prouver (loc.cit) que si $P \equiv Q \equiv 0 \pmod{\mathcal{M}}_{\mathcal{R}}$, alors le couple (P,Q) est déterminé à la transformation près

$$P' = UPV^{-1},\ Q' = VQU^{-1} \quad (U,V \in \mathrm{GL}_n(R))$$

Revenons à un G-revêtement galoisien stable $\pi : C \to D$ au-dessus de la base $S = \operatorname{Spec}(R)$, l'anneau R étant local noethérien complet. Soit $P \in C$ un point double de la fibre spéciale, et soit $Q = \pi(P)$. Il s'agit de décrire selon les termes de la construction de Faltings, le module sans torsion $E = (\widehat{\pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{C}})})_Q$, de rang $n = |G|$. Soient x, y des coordonnées locales le long des branches en P, telles qu'un générateur τ du stabilisateur H de P agisse par $\tau(x) = \zeta x$, $\tau(y) = \zeta^{-1}y$, pour une certaine racine e-ième de l'unité. On peut supposer que $A = \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{C}}}_P = R[[x,y]]/(xy - \pi) \quad (\pi \in \mathcal{M}_R)$, en conséquence $B = A^H = \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{D}}}_Q = R[[u,v]]/(uv - \pi^e)$, avec $u = x^e$, $v = y^e$. Un élément $\xi \in A$ admet une écriture unique de la forme

$$\xi = f(x) + g(y),\ f(x) \in R[[x]], g(y) \in yR[[y]]$$

Il est facile de voir que le facteur isotypique de caractère ζ^α de A, est le sous B-module $\mathcal{L}_\alpha$ formé par les éléments de la forme

$$x^\alpha f(u) + y^{e-\alpha} g(v),\ (f \in R[[u]],\ g \in R[[v]])$$

Il est aisé d'identifier ce module; on note dans la suite $\beta = e - \alpha$.

Lemme 7.10. *Le module $\mathcal{L}_\alpha$ est le conoyau de l'application $B^2 \to B^2$ définie par la matrice $\Phi = \begin{pmatrix} u & \pi^\alpha \\ \pi^\beta & v \end{pmatrix}$; il est en particulier sans torsion de rang un, et $\mathcal{L}_\alpha \cong \mathcal{E}(\pi^\alpha, \pi^\beta)$.*

Preuve: *Soit l'application $\Psi : B^2 \to A$ définie par la matrice $(\, y^\beta \quad , -x^\alpha\,)$. On a clairement $\Psi.\Phi = 0$. Montrons que $\ker\psi = \operatorname{Im}\Phi$. Soit $(f,g) \in B^2$ tel que $y^\beta f - x^\alpha g = 0$. Ecrivons f et g sous la forme*

$$\begin{cases} f = f_+(u) + a_0 + f_-(v) \\ g = g_+(u) + b_0 + g_-(v) \end{cases}$$

les séries f_+, f_-, g_+, g_- étant sans terme constant, et $a_0, b_0 \in R$. Un calcul élémentaire montre que l'équation $y^\beta f - x^\alpha g = 0$ implique les deux égalités:

$$\begin{cases} g_+(u) = \frac{\pi^\beta}{u} f_+(u) - b_0 \\ f_-(v) = \frac{\pi^\alpha}{v} g_-(v) - a_0 \end{cases}$$

En posant $\phi(u) = \frac{f_+(u)}{u}$, $\psi(v) = \frac{g_-(v)}{v}$, on obtient bien que

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & \pi^\alpha \\ \pi^\beta & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(u) \\ \psi(v) \end{pmatrix}$$

□

En utilisant les notations de dessus notons que

$$\widehat{\mathcal{O}}_{C,P} = \widehat{\mathcal{O}}_{D,Q} \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha=1}^{e-1} E(\pi^\alpha, \pi^\beta) \otimes W_\alpha \right)$$

où W_α désigne la représentation de degré un de H telle que $\tau \in H$ agisse par la multiplication par ζ^α. D'où par induction de H à G

$$\widehat{\pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{C}})}_Q = \widehat{\mathcal{O}}_{D,Q} \otimes \mathbf{Ind}_H^G(1) \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha=1}^{e-1} E(\pi^\alpha, \pi^\beta) \otimes \mathbf{Ind}_H^G(W_\alpha) \right) \tag{7.31}$$

Soit pour tout caractère irréductible χ de G, $n_{\alpha,\chi}$ la multiplicité de W_α dans la restriction de χ à H. Le facteur isotypique $\mathcal{L}_\chi$ admet finalement la structure suivante en le point double $Q \in D$:

Proposition 7.11. *La structure du module sans torsion $(\widehat{\mathcal{L}}_\chi)_Q$ est donnée par:*

$$(\widehat{\mathcal{L}}_\chi)_Q \cong \bigoplus_{\alpha=0}^{e-1} E(\pi^\alpha, \pi^\beta)^{n_{\alpha,\chi}} \tag{7.32}$$

□

On notera que la situation correspond à une matrice P diagonale. Le cas G abélien sera détaillé dans le paragraphe 8. Le fait que les faisceaux $\mathcal{L}_\chi$ peuvent être sans torsion de rang un, non inversibles, peut être contourné par la construction suivante, inspirée par la procédure de stabilisation de Knudsen [48] (voir aussi Jarvis [44] §3.1.2). Soit une courbe préstable $D \to S$, et soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_D$-module sans torsion de rang un relativement à S. Soit le D-schéma

$$\rho : \tilde{D} = \mathrm{Proj}\ (Sym^\bullet(\mathcal{L}) \to D \tag{7.33}$$

Si $\mathcal{L}$ est localement libre, alors $\tilde{D} = D$. Si $\mathcal{L}$ n'est que sans torsion de rang un de lieu singulier $Sing(\mathcal{L})$, alors le faisceau inversible $\mathcal{O}_{\tilde{D}}(1)$ sur $\tilde{D}$ résoud les singularités de $\mathcal{L}$ dans le sens suivant (Jarvis [44]):

Proposition 7.12. *Le schéma $\tilde{D}$ est une S-courbe préstable.*
i) On a $\rho_*(\mathcal{O}_{\tilde{D}}) = \mathcal{O}_D$ et $\rho_*(\mathcal{O}_{\tilde{D}}(1)) = \mathcal{L}$.
ii) Si $j > 0$ et $n \geq 0$, $R^j\rho_*(\mathcal{O}(n)) = 0$.
iii) La formation de $\tilde{D}$ ainsi que de $\rho_*(\mathcal{O}_{\tilde{D}}(1))$ commute à tout changement de base. De plus $\omega_{\tilde{D}/S} = \rho^*(\omega_{D/S})$, de sorte que la restriction de $\omega_{\tilde{D}/S}$ à toute composante exceptionnelle est triviale.

Preuve: La preuve est contenue dans les références précédentes, particulièrement [44], Lemma 3.1.4, [48], Theorem 2.4.

□

Il est clair que dans cette construction le morphisme ρ est un isomorphisme en dehors du lieu singulier de $\mathcal{L}$. Il est utile d'avoir une description explicite de $\tilde{D}$ au voisinage d'un point singulier de $\mathcal{L}$. Soit $Q \in D_s$ un tel point, et remplaçons D par $\mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_{D,Q}$ et $\mathcal{L}$ par $\hat{\mathcal{L}}_D$. On suppose que $\hat{\mathcal{O}}_{D,Q} = \hat{\mathcal{O}}_s[[x,y]]/(xy - \pi)$ et que $\hat{\mathcal{L}}_D = E(p,q)$ avec $pq = \pi,\ p,q \in \hat{\mathcal{M}}_s$. Du fait de la présentation

$$\hat{\mathcal{O}}_{D,Q}^2 \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & -p \\ -q & x \end{pmatrix}} \hat{\mathcal{O}}_{D,Q}^2 \longrightarrow E(p,q) \longrightarrow 0 \tag{7.34}$$

on a localement en Q

$$Sym^\bullet{}_Q(E(p,q) = \hat{\mathcal{O}}_Q[\xi, v]/(y\xi - qv, -p\xi + xv)$$

En particulier $\tilde{D} \subset \mathbb{P}^1 \times D$ est le sous-schéma d'équations $y\xi - qv = -p\xi + xv = 0$. La fibre au-dessus du point Q est $E = \mathbb{P}^1$. Noter que les deux branches du point double Q ont des transformées strictes disjointes. Elles coupent E en deux points qui sont des points doubles de la fibre de $\tilde{D}$, d'équations respectives $ys = q$ et $xt = p$. Le morphisme ρ est donc une contraction au sens de Knudsen[16], D est la stabilisation de $\tilde{D}$. Il en découle aisément la relation $\omega_{\tilde{D}/S} = \rho^*(\omega_{D/S})$ ([48], Cor 1.5), en particulier la trivialité de $\omega_{\tilde{D}/S}$ sur chaque composante exceptionnelle, ce qui est ailleurs clair directement. La désingularisation de $\mathcal{L}$ ainsi construite est unique à un isomorphisme près [44].

7.4. Stratification canonique du bord

Une propriété appréciable de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ est que le bord admet une stratification naturelle par le type combinatoire d'une courbe stable marquée (resp. piquée) ([53] § 2.7). Fixons un graphe modulaire Γ de genre g, avec n pattes (Définition 7.1). Pour fixer les idées on suppose le graphe marqué, les pattes sont alors numérotées de 1 à n. Soit pour tout sommet $v \in V$, h_v (resp. l_v) le nombre de pattes (resp. d'arêtes) incidentes en v. On définit un morphisme

$$\beta_\Gamma : \prod_{v \in V} \overline{\mathcal{M}}_{g_v, h_v + l_v} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \tag{7.35}$$

de la manière suivante. On commence par numéroter l'ensemble V, donc $V = \{v_1, \cdots, v_c\}$, et pour tout sommet $v = v_i$, $e_1^v, \ldots, e_{l_v}^v$ les arêtes d'origine v. Noter que le graphe étant marqué, les pattes incidentes à v sont ordonnées par l'ordre induit de $[1, n]$, soit $p_1^v, \ldots, p_{h_v}^v$ cette liste ordonnée. La donnée d'un objet $((C_i, x_1^i, \ldots x_{h_i+l_i}^i)_{v_i \in V})$ au-dessus de la base S de $\prod_{v \in V} \overline{\mathcal{M}}_{g_v, h_v + l_v}$ peut s'interpreter comme un "plongement", ou réalisation de $\mathcal{F}l(\Gamma)$:

$$\imath : \mathcal{F}l(\Gamma) \hookrightarrow \bigsqcup_{v \in V} C_v = \bigsqcup_{v_i \in V} C_i \tag{7.36}$$

Cela signifie que $\imath$ identifie les arêtes de Γ avec l'ensemble des points spéciaux de la somme disjointe $\bigsqcup_{v \in V} C_v$. Par convention les pattes d'origine v ont pour images (ordonnées) $x_1^v, \ldots, x_{h_v}^v$, et les arêtes d'origine v, ont pour images (ordonnées) $x_{h_v+1}^v, \ldots, x_{h_v+l_v}^v$. Réciproquement un plongement (7.36) conduit à un objet de $\prod_{v_i \in V} \overline{\mathcal{M}}_{g_v, h_v + l_v}$. Par identification des sections x_i^v, x_j^w qui correspondent à un couple d'arêtes opposées (clutching morphism [17] de Knudsen [47]), on forme la courbe $C =$

[16] C'est une contraction particulière car les courbes exceptionnelles sont reliées à deux autres composantes, et donc se contractent en un point double. La fibre au-dessus d'un point singulier de $\mathcal{L}$ est donc de la forme $E_1 \cup E \cup E_2$, E étant la composante exceptionnelle, et $E_1 \cap E = p$, $E_2 \cap E = q$. Il est clair que le faisceau dualisant a une restriction à E triviale.

[17] Rappelons la définition de l'opération de recollement (clutching morphism) le long d'une paire de sections (Knudsen [48], Manin [53] chapter 5). La construction se résume par le résultat suivant:

Soit C' une courbe préstable de base S, dont on ne suppose pas à priori les fibres géométriques connexes. Soient deux sections $s_1, s_2 : S \to C'$, dont les images sont formées de points non singuliers le long des fibres. Il existe une courbe préstable C', un morphisme fini $p : C \to C'$ tel que $ps_1 = ps_2$, le couple (C', p) étant universel en un sens évident. En particulier, il est défini à un isomorphisme canonique près. Une fibre géométrique étant donnée, si la fibre image de C' est connexe, deux cas se présentent:

- La fibre est irréductible, dans ce cas on crée dans la fibre correspondante de C' une boucle, on a: $g' = g + 1$.
- La fibre de C est somme disjointe de deux courbes connexes C_1 et C_2, avec $s_i \in C_i (i = 1, 2)$. Dans ce cas la fibre (connexe) de C' a pour genre $g' = g_1 + g_2$.

$\bigsqcup_{v\in V} C_v/\Gamma \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(S)$. Observer qu'il en découle une identification bien définie $\Gamma = \Gamma(C)$. On note aussi qu'il y a une action évidente (à droite) de $\mathrm{Aut}\,(\Gamma)$ (en fait de $\mathrm{Aut}\,(\mathcal{F}l(\Gamma))$) sur de tels plongements, i.e. $\sigma.(\{C_v\}_v, \imath) = (\{C_v\}, \imath.\sigma)$. Alors le morphisme β_Γ est un $\mathrm{Aut}\,(\Gamma)$-torseur (dans le sens de la section 6.1) sur son image [18] $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\Gamma)$; qui est en conséquence le quotient

$$\prod_{v\in V} \overline{\mathcal{M}}_{g_v,h_v+l_v}/\mathrm{Aut}\,(\Gamma) \tag{7.37}$$

Soit maintenant (Γ, G) un graphe modulaire de Hurwitz (Définition 7.2). On considère le sous champ localement fermé $\mathcal{H}_{g,G,\xi}(\Gamma)$ de $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, dont les objets sont les G-courbes stables de type combinatoire fixé Γ, i.e. dont les fibres géométriques sont de type Γ. Si $\Gamma = \emptyset, \mathcal{H}_{g,G,\xi}(\Gamma) = \mathcal{H}_{g,G,\xi}$. Les sous-champs (resp. sous-schémas) localement fermés $\mathcal{H}_{g,G,\xi}(\Gamma)$ (resp. les espaces de modules grossiers $H_{g,G,\xi}(\Gamma)$) forment une stratification de $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ (resp. $\overline{H}_{g,G,\xi}$), analogue à stratification de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ par le type combinatoire des courbes stables marquées [53]. On a la décomposition

$$\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} = \bigsqcup_{\Gamma} \mathcal{H}_{g,G,\xi}(\Gamma) \tag{7.38}$$

Le morphisme "discriminant", associant à un revêtement sa base marquée par les points de branchement $\delta : \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g',b}$ est visiblement compatible aux stratifications, ce qu'on peut traduire par le fait que δ induit un morphisme $\mathcal{H}_{g,G,\xi}(\Gamma) \to \mathcal{M}_{g',b}(\Delta)$, $\Delta = \Gamma/G$. D'une autre manière, si r est le nombre de points de branchement, soit le morphisme (oubli de l'action de G) $\imath : \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,r}$. On a clairement $\mathcal{H}_{g,G,\xi}(\Gamma) = \imath^{-1}\left(\mathcal{M}_{g,r}(\Gamma)\right)$ Dans le terme de droite, Γ est le graphe modulaire, allégé de la donnée de Hurwitz.

Avant de préciser la structure de la strate $\mathcal{H}_{g,G,\xi}(\Gamma)$ des revêtements de type combinatoire Γ, revenons à un graphe modulaire de Hurwitz Γ (Définition 7.2). Soit $v \in \Gamma$ un sommet et notons $st(v)$ l'étoile de v. Les arêtes éléments de $st(v)$, décorées par l'holonomie (H, χ), sont de deux sortes. D'une part les arêtes orientées d'origine un sommet v et d'extrémité w, $v = w$ étant possible (boucle), et d'autre part les arêtes monovalentes correspondantes aux pattes issues de v. Faisons tout d'abord le choix d'un système de représentants $v_1, \ldots, v_k$ pour l'action de G sur V, ensemble des sommets de Γ, i.e une section de $V \to V/G$. Soit G_i le stabilisateur de v_i, et notons $\mathrm{st}_i = \mathcal{E}_i \bigsqcup \mathcal{L}_i$ l'étoile de v_i, union de l'ensemble $\mathcal{E}_i$ des arêtes (décorées) issues de v_i et de l'ensemble $\mathcal{L}_i$ des pattes d'origine v_i. Du point de vue des G-ensembles, on a si $\mathcal{A} = \mathcal{L} \bigsqcup \mathcal{E}$

$$\mathcal{L} = \bigcup_i \mathbf{Ind}_{G_i}^G \mathcal{L}_i, \;\; \mathcal{E} = \bigcup_i G \times^{G_i} \mathcal{E}_i$$

Pour avoir l'analogue équivariant de (7.37), il nous faut un plongement équivariant $\mathcal{F}l(\Gamma)$ dans ce qui remplace le second membre de (7.36), c'est à dire

$$\tilde{C} = \bigsqcup_{1\le i\le k} \mathbf{Ind}_{G_i}^G C_i$$

[18] Le morphisme β_Γ est fini, en particulier représentable [48], de sorte que son image, en tant que sous champ fermé de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ est définie.

Comme seules les orbites de points spéciaux sont indexées, il est nous faut ce stade choisir un marquage plus strict pour un revêtement galoisien.

Outre un système de représentants des sommets, on va choisir pour chaque classe de conjugaison d'holonomie décorant une G_i-orbite de pattes ou arêtes d'origine v_i, un représentant d'holonomie $(H_{i,\alpha}, \chi_{i,\alpha})$ pour les arêtes, et $(H_{i,\lambda}, \chi_{i,\lambda})$ pour les orbites de pattes. Ceci étant, on fait ensuite le choix d'un point $e_{i,\alpha}$ (resp. $l_{i,\lambda}$) dans chaque orbite d'arêtes qui a pour holonomie le représentant choisi. D'une autre manière on se donne des sections de $\mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i/G_i$, $\mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_i/G_i$ avec holonomie prescrite.

Soit maintenant un revêtement $\pi : C \to D$ de type combinatoire Γ, et $\widetilde{C} = \bigsqcup_v \widetilde{C}_v$ la normalisation de C. La composante $\widetilde{C}_v$ munie de l'action du stabilisateur G_v a pour donnée de Hurwitz

$$\tilde{\xi}_v = \xi_v + \eta_v \tag{7.39}$$

où ξ_v représente la contribution des points de ramification de C, et η_v est la contribution des arêtes orientées d'origine v, branches des points doubles. Ceci nous conduit à voir $\widetilde{C}_v$ comme un objet de $\mathcal{H}_{g_v,G_v,\xi_v,\eta_v}$ champ classifiant les courbes de genre g_v, munies d'une action de G_v de donnée de Hurwitz $\tilde{\xi}_v = \xi_v + \eta_v$. Dans cette définition les courbes sont marquées par un diviseur G_v- invariant, ce qui signifie que seules les G_v-orbites de points spéciaux sont numérotées.

Avec la normalisation fixée sur le graphe modulaire de Hurwitz Γ, soit un objet $C_i \in \mathcal{H}_{g_{v_i},G_{v_i},\xi_{v_i},\eta_{v_i}}$. Sur cette courbe, seules les orbites de points speciaux sont numérotées. Pour tout i, et dans chaque orbite de tels points, on fait comme pour le graphe le choix d'un point $x_{i,\alpha}$ (resp. $y_{i,\lambda}$) dans chaque G_i-orbite, dont l'holonomie est celle sélectionnée. On a donc pour $1 \leq \alpha \leq h_i$, $x_{i,\alpha}$ d'holonomie $(H_{i,\alpha}, \chi_{i,\alpha})$, et si $1 \leq \lambda \leq l_i$ le point $x_{i,h_i+\lambda} = y_{i,\lambda}$ d'holonomie $(H_{i,\lambda}, \chi_{i,\lambda})$. Notons alors pour tout $1 \leq i \leq k$, $\mathcal{H}^*_{g_{v_i},G_{v_i},\xi_{v_i},\eta_{v_i}}$ le champ de Hurwitz modifié, résultat de ce marquage plus strict. Noter que l'oubli de ce choix supplémentaire conduit à un morphisme

$$\mathcal{H}^*{}_{g_{v_i},G_{v_i},\xi_{v_i},\eta_{v_i}} \to \mathcal{H}_{g_{v_i},G_{v_i},\xi_{v_i},\eta_{v_i}}$$

de degré $\prod_{\alpha,\lambda} |Z_{G_i}(H_{i,\alpha})/H_{i,\alpha}||Z_{G_i}(H_{i,\lambda})/H_{i,\lambda}|$ ($Z_G(H)$ est le centralisateur de H dans G). Ce morphisme est le quotient par un produit de groupes symétriques convenables.

On définit de même le champ $\mathcal{H}^*_{g,G,\xi}(\Gamma)$, avec le morphisme $\mathcal{H}^*_{g,G,\xi}(\Gamma) \to \mathcal{H}^*_{g,G,\xi}(\Gamma)$ de degré $\prod_{i,\lambda} |Z_{G_i}(H_{i,\lambda})/H_{i,\lambda}|$. On peut formuler l'analogue de (7.37):

Proposition 7.13. *Il y a un morphisme naturel* $\xi_\Gamma : \prod_{i=1}^k \mathcal{H}^*_{g_{v_i},G_{v_i},\xi_{v_i},\eta_{v_i}} \longrightarrow \mathcal{H}^*_{g,G,\xi}(\Gamma)$ *qui identifie le terme de droite au quotient de la source par le groupe* $\mathrm{Aut}_G(\Gamma)$. *Ce morphisme s'insère dans un diagramme*

$$\prod_{i=1}^k \mathcal{H}_{g_{v_i},G_{v_i},\xi_{v_i},\eta_{v_i}} \longleftarrow \prod_{i=1}^k \mathcal{H}^*_{g_{v_i},G_{v_i},\xi_{v_i},\eta_{v_i}} \xrightarrow{\xi_\Gamma} \mathcal{H}^*_{g,G,\xi}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{H}_{g,G,\xi}(\Gamma) \tag{7.40}$$

Preuve: Il faut tout d'abord définir le morphisme ξ_Γ. Cela revient à préciser la procédure d'identification des branches par paires. Cette procédure doit être G-équivariante. Elle revient comme dans le cas $G = 1$, à plonger de manière équivariante l'ensemble $\mathcal{F}l(\Gamma)$ sur l'ensemble correspondant

des points spéciaux de $\bigsqcup_i \mathbf{Ind}_{G_{v_i}}^G(C_i)$, puis à transporter l'involution canonique. Il est clair que les bijections entre points sélectionnés s'étendent en un plongement G-équivariant

$$\mathcal{F}l(\Gamma) \hookrightarrow \tilde{C} = \bigsqcup_i \mathbf{Ind}_{G_{v_i}}^G(C_i)$$

typiquement $ge_{i,\alpha} \to gx_{i,\alpha}$. On peut alors transporter l'involution $\tau : a \to \overline{a}$ sur l'image dans le terme de droite, donnant de la sorte un procédé d'identification par paires des points distingués de $\tilde{C}$. Par recollement le long de ces paires de sections, on obtient une G-courbe stable marquée connexe de donnée de ramification ξ. De manière plus concise on peut écrire:

$$C = \bigvee_i \mathbf{Ind}_{G_{v_i}}^G(C_i) \in \mathcal{H}_{g,G,\xi}(\Gamma) \tag{7.41}$$

On pose alors $\xi_\Gamma(\{C_i\}) = C$. Cette construction définit le foncteur ξ_Γ. Le reste est conséquence des remarques qui précèdent l'énoncé.

□

Notons que la codimension de $\mathcal{H}_{g,G,\xi}(\Gamma)$ est Card $\mathcal{F}_{\Gamma/G}$, et que la construction est définie en fait au niveau des champs compactifiés.

Les revêtements sont marqués par les points de branchement réels ou virtuels. Supposons que la donnée de ramification ξ soit telle que l'un des sous-groupe H_i soit trivial, par exemple $H_{b+1} = 1$, signifiant que le point marqué Q_{b+1} n'est pas un point de branchement au sens strict. On a donc avec les notations du §2, $\xi = \xi' + [1]$. Par contraction (stabilisation) on peut effacer ce point.

Proposition 7.14. *L'effacement du point de "branchement" d'indice $b+1$ définit un morphisme de champs $\rho : \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi'}$.*

Preuve: Soit un revêtement stable $\pi : C \to D$ de base S. L'oubli du point de branchement Q_{b+1}, suivi d'une stabilisation, donne un morphisme $\psi : D \to D'$. Soit d'autre part l'oubli suivi d'une stabilisation des points de l'orbite réguliè re $\pi^{-1}(Q_{b+1})$, conduisant à un morphisme $\phi : C \to C'$. Par le caractè re universel de cette opération, l'action de G se descend à C', et le morphisme $\psi\pi$ factorise par C'. Soit $\pi' : C' \to D'$ cette factorisation. Le morphisme π' factorise en $C' \to C'/G \to D'$ et ψ en $D = C/G \to C'/G \to D'$. Comme la courbe C'/G est stable marquée par les images des points $Q_1, \cdots, Q_b$, il y a un morphisme $D' \to C'/G$ qui est clairement l'inverse de $C'/G \to D'$. Donc $D' = C'/G$. Le morphisme ρ est ainsi donné par $\rho(C \to D) = (C' \to D')$.

□

On reprend les notations et hypothèses de la section 7.2.1. Considérons donc $G_i \subset G\,(i = 1, 2)$ deux sous-groupes, et un sous-groupe cyclique $H \subset G_1 \cap G_2$. Soit des données de ramification

$$\xi_1^* = \xi_1 + [H, \chi] \in R_+(G_1), \quad \xi_2^* = \xi_2 + [H, \chi^{-1}] \in R_+(G_2)$$

Posons $\xi = \mathbf{Ind}_{G_1}^G \xi_1 + \mathbf{Ind}_{G_2}^G \xi_2 \in R_+(G)$. Par recollement le long de deux sections, on obtient:

Proposition 7.15. *Il existe un morphisme de recollement le long de deux sections d'holonomie opposées:*

$$\rho : \overline{\mathcal{H}}_{g_1,G_1,\xi_1^*} \times \overline{\mathcal{H}}_{g_2,G_2,\xi_2^*} \to \overline{\mathcal{H}}_{g_1+g_2,G,\xi} \tag{7.42}$$

Si $G = G_1 = G_2$, et si $\xi^* = \xi + [H,\chi] + [H,\chi^{-1}]$ (Harbater-Mumford), par recollement des deux sections, on a le morphisme analogue $\rho : \overline{\mathcal{H}}_{g-1,G,\xi^*} \to \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$.

Preuve: Soit $C_i \to D_i\,(i = 1,2)$ un point du terme de gauche, et soient $Q_i \in D_i$ les points de branchement d'holonomie $[H,\chi_1 = \chi]$ et $[H,\chi_2 = \chi^{-1}]$. Soit $P_i \in C_i$ un point d'holonomie exacte (H,χ_i). Par identification des paires de points (gP_1, gP_2), on donne un sens au revêtement

$$C = \mathbf{Ind}_{G_1}^G C_1 \bigvee \mathbf{Ind}_{G_2}^G C_2 \to D = D_1 \bigvee D_2 \tag{7.43}$$

Cette construction est bien définie à isomorphisme unique près. Elle définit le morphisme cherché. Une construction similaire fonctionne dans le cas d'une donnée de ramification du type *Harbater-Mumford* $\xi^* = \xi + [H,\chi] + [H,\chi^{-1}]$, et donne le second morphisme.

□

Soit le morphisme discriminant $\delta : \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \to \overline{\mathcal{M}}_{g',b}$. C'est un revêtement entre champs de Deligne-Mumford, dont a peut préciser le diviseur de ramification. Le résultat est une simple traduction de la proposition 6.28.

Proposition 7.16. *Le diviseur de ramification du discriminant est*

$$\mathcal{R} = \sum_{\Delta = NS} (|H| - 1)\Delta \tag{7.44}$$

la somme étant étendue aux composantes NS du bord, donc celles telles que $H \neq 1$.

□

7.5. Type topologique d'un point du bord

Dans cette section $k = \mathbb{C}$. Soient $H_1, \ldots, H_{h(\xi)}$ les composantes irréductibles de $H_{g,G,\xi}$, $h(\xi)$ étant le nombre de Nielsen (Définition 2.4). Le schéma des modules compactifié est somme disjointe des "compactifications" $\overline{H}_\alpha$, $(\alpha = 1, \ldots, h(\xi))$ (§6, Proposition 6.2). Si $C \to D$ représente un point du bord, on peut légitimement chercher à quelle composante ce point appartient, c'est à dire trouver un procédé pour lire sur $C \to D$ le nom de la composante à laquelle le point est rattaché. Si C est lisse, le type topologique qui fixe la composante à laquelle ce point appartient, est entièrement donné par le morphisme de monodromie $\psi : \pi_1(D - \beta) \to G$ (Proposition 2.2). En fait une réponse similaire peut être donnée dans le cas singulier. Elle découle directement des résultats de [5]. Supposons donc la courbe C singulière, et considérons la déformation universelle équivariante, ici prise dans un sens analytique

$$\pi : \mathcal{C} \longrightarrow D^{3g'-3+b}, \quad (D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}) \tag{7.45}$$

avec par conséquent un isomorphisme (équivariant) $\pi^{-1}(0) = C$. Si $t \in D$ est en dehors du discriminant, la fibre $\mathcal{C}_t$ est non-singulière, et indique donc le type topologique de la composante qui contient C. En fait, et c'est le point que nous allons retenir, le type topologique peut être lu directement sur C. La raison est que le morphisme de monodromie associé à la fibre générale $\mathcal{C}_t$, peut être construit directement à partir de données lisibles sur C. C'est essentiellement le résultat de ([5], thm 2.1), appelé théorème de Seifert-van Kampen. Il est nécessaire dans un tel énoncé de remplacer le groupe fondamental ordinaire par le groupe fondamental d'un graphe de groupes.

Résumons la construction de ([5], §2.5). Soit Γ le graphe modulaire défini par C, et $\Delta = \Gamma/G$ le graphe quotient. Il y a sur Δ une structure de graphe de groupes plus riche que celle utilisée dans la section 7.2 qui permet de reconstruire non seulement Γ mais C (loc.cit. Définition 2.9).

Notons par S_v, $(v \in \Delta)$ les composantes irréductibles normalisées de $D = C/G$, et notons $D_v \subset S_v$ les points qui ont pour images dans D un point double, donc les origines des branches. Notons aussi β_v l'ensemble des points marqués portés par la composante S_v. Ces points contiennent donc l'ensemble des points de ramification. On note alors $\pi_v = \pi_1(S_v - (\beta_v \cup D_v), *_v)$ le groupe fondamental de la courbe S_v privée des points exceptionnels, relativement à un point de base $*_v$. La structure de graphe de groupes portée par Δ est définie ainsi: tout d'abord, on associe à v le groupe π_v. Soit $(e, \overline{e})$ une arête qui pointe vers v, et $\overline{e}$ pointant vers w. On pose alors $H_e = H_{\overline{e}} = \mathbb{Z}$, en fixant un générateur privilégié t_e tel que $t_e + t_{\overline{e}} = 0$. On définit ensuite

$$\partial_e^0(1) = \alpha(e) \quad , \quad \partial_e^1(1) = \alpha(\overline{e})$$

expression dans laquelle on note $\alpha(e)$ et $\alpha(\overline{e})$, des lacets de "pointe" autour des origines p_v et p_w des branches définies par le point double a. La classe de conjugaison d'un tel lacet de pointe est bien définie, ce qui assure que le graphe de groupes est bien défini à isomorphisme près. Notons Δ_π ce graphe de groupes pour éviter toute confusion avec la définition de la section 7.2. Rappelons le résultat ([5], théorème 2.1), de spécialisation du groupe fondamental:

Proposition 7.17. *Le groupe fondamental $\pi_1(\Delta_\pi)$ du graphe de groupes Δ_π est isomorphe au groupe fondamental d'une fibre générique $\mathcal{C}_t$ de la déformation universelle de C; en outre on peut choisir l'isomorphisme de sorte qu'il préserve les classes de lacets autour des piqûres.*

□

La preuve de la Proposition 7.17 pour laquelle on réfère à [5], fournit en outre un algorithme pour expliciter un système de générateurs canoniques de "groupe de surface" pour le groupe fondamental. Pour lire directement sur le revêtement $\pi : C \to D$, le nom de la composante qui contient de point du bord, on voit qu'il suffit de pouvoir reconstruire le morphisme de monodromie, au niveau de D, donc sous la forme

$$\psi : \pi_1(\Delta_\pi) \longrightarrow G \tag{7.45}$$

les images des lacets autour des piqûres étant soumises aux contraintes imposées par la donnée de ramification (§2.4). En résumé:

Proposition 7.18. *La correspondance explicitée dans le lemme 2.1 reste valable en les points du bord de l'espace de Hurwitz. De manière précise, le morphisme de monodromie (7.41) permet de reconstruire le revêtement $\pi : C \to D$. La classe double (voir 2.10) définit le type topologique, i.e. le nom de la composante du schéma de Hurwitz qui contient $\pi : C \to D$.*

Preuve: La donnée de ψ nous permet de contruire le revêtement $\pi : C \to D$. En bref, la restriction de ψ à π_v donne un G-revêtement (non connexe peut être) $C_v \to D$. Sur la courbe C_v il y a une collection d'orbites exceptionnelles (les origines des branches) qui autorisent que l'on recolle les C_v pour obtenir C. Noter que d'une autre manière on récupère le graphe de groupes de la proposition 7.3, et donc Γ. On prend pour G_v (resp. H_a) l'image par ψ de π_v (resp. H_a). utilise alors le théorème 7.1 (théorème de Bass [6]). Ensuite, c'est à quelques détails près la répétition de la construction utilisée dans la proposition 7.3.

□

8. Structures de niveau sur les courbes stables .

Dans cette section on revisite le champ compactifié des courbes de genre g (fixé) équipées d'une structure de niveau G. Le langage des champs de Hurwitz permet donner une définition directe du champ $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$ classifiant les courbes stables de genre g, munies d'une structure de niveau G. En corollaire on obtient une interprétation modulaire claire de ses points y compris au bord. Le champ $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$ bien que distinct du champ ${}_G\overline{\mathcal{M}}_g$ construit par Deligne-Mumford [18],[19] a le même espace des modules grossiers. Le premier qui est lisse est la désingularisation du second. Cette section précise la section 7 de [61].

La définition classique d'une structure de niveau sur une courbe lisse, définie par le groupe fini G, ne s'étend pas de manière directe au cas singulier (Brylinski [14], voir aussi [20], et Oort-Van Geemen [36]). Cela explique pourquoi la compactification "naturelle" ${}_G\overline{\mathcal{M}}_g$ de Deligne-Mumford n'est pas définie

comme l'espace des modules grossiers attaché à un foncteur contravariant naturel défini sur la catégorie des courbes stables. Cela suggère qu'il peut être utile d'attribuer une interprétation modulaire aux points du bord. C'est l'objectif de la présente section. On va observer que $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$ est "essentiellement" le champ des G-revêtements principaux, éventuellement dégénérés (stables), de base une courbe stable.

Bien que rédigée en des termes assez différents notre approche est équivalente à celle suggérée récemment par Abramovich, Corti et Vistoli [1], [2], [3]. Nous verrons aussi qu'elle permet de retrouver d'une manière simple et directe, comme application des §7.1 et §7.2, quelques résultats sur la structure du bord, essentiellement pour le niveau abélien (n), $n \geq 3$ (Boggi- Pikaart - De Jong [13], Oort-Van Geemen [36]).

On fixe un groupe fini G de cardinal $|G|$. On note pour abréger $\mathcal{H}_g(G)$ (resp. $\overline{\mathcal{H}}_g(G)$), le champ de Hurwitz classifiant les G-revêtements stables de base une courbe lisse (resp. stable) de genre $g \geq 2$, de donnée de ramification $\xi = \emptyset$, c'est à dire $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\emptyset}$. Le cas $g = 1$ peut être inclus avec quelques modifications.

8.1. Le champ des courbes stables avec structure de niveau G

8.1.1. Structures de niveau sur les familles de courbes lisses

Soit C une courbe algébrique projective et lisse définie sur le corps algébriquement clos k. On rappelle que $|G| \neq 0$ dans k. Une structure de niveau G sur C est la donnée d'une surjection extérieure $\phi : \pi_1(C) \longrightarrow G$ ([14], [20] Définition 5.6). On suppose que G est quotient du groupe fondamental $\pi_1(C)$ d'une telle courbe. On supposera en fait un peu plus, à savoir que G est un quotient caractéristique (quotient par un sous-groupe caractéristique). Le niveau G' est dit dominer le niveau G si la surjection $\phi : \pi_1(C) \longrightarrow G$ factorise par G'. Le niveau abélien (n) correspond à $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. Une structure de niveau (n) sur la courbe lisse C revient à spécifier un isomorphisme

$$\alpha : \mathrm{Pic}\,(C)[n] \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \tag{8.1}$$

ou si $k = \mathbb{C}$, $H^1(C, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. Un niveau G est *géométrique* si notant π_g le groupe fondamental d'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$, le noyau d'une surjection $\phi : \pi_g \to G$ est indépendant de ϕ. Les niveaux abéliens sont géométriques, ainsi que les niveaux diédraux [19]de Brylinski [14] et Looijenga [52]. On se limite dans la suite aux seuls niveaux géométriques.

La définition d'une structure de niveau s'étend avec l'aide de la théorie du groupe fondamental de SGA 1, [34]) aux familles de courbes lisses ([13], [14], [20] §5). Soit $\pi : C \to S$ une courbe lisse au-dessus de la base S, et de genre $g \geq 2$. Le cas $g = 1$ rentre dans ce cadre, mais avec quelques précautions supplémentaires. On se limite en conséquence à $g \geq 2$. Soit une section $s : S \longrightarrow C$ (une telle section existe localement pour la topologie étale), alors on peut définir, $\mathbb{L}$ étant un ensemble de nombres premiers exclus, un groupe fondamental relatif $\pi_1^{\mathbb{L}}(C/S, s)$ [14]. Cela permet de définir sur S_{et} le faisceau localement constant $\mathcal{H}om^{ext}(\pi_1(C/S), G)$ des homomorphismes "extérieurs". Alors ([14] Définition 2.3.1), [20] Définition 5.6), la définition précise d'une structure de niveau G sur C/S est la suivante:

[19] Le niveau diédral d'ordre $m \geq 2$, est défini par $G = \pi_g/[\pi_g^{(2)}, \pi_g^{(2)}]\pi_g^{(2m)}$, $[-,-]$ désignant le sous-groupe des commutateurs, et $\pi_g^{(k)}$ étant le sous-groupe engendré par les puissances d'ordre k .

Définition 8.1. *Une G-structure de niveau sur une S-courbe lisse C/S, est la donnée d'une "surjection extérieure" $\phi : \pi_1^{\mathbb{L}}(C/S) \longrightarrow G$, en des termes plus précis, d'une section globale $\phi \in \Gamma(S, \mathcal{H}om^{ext}(\pi_1^{\mathbb{L}}(C/S), G))$.* m

Une structure de niveau[20] ϕ n'est donc que localement (pour la topologie étale) définie par un homomorphisme du π_1 dans G. La catégorie des courbes lisses de genre $g \geq 2$, équipées d'une structure de niveau G, définit un champ algébrique ${}_G\mathcal{M}_g$. On a le résultat suivant ([14] Theorem 2.3.2, [20] Lemma 5.7):

Théorème 8.2. *1) Le champ ${}_G\mathcal{M}_g$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford.*
2) Le morphisme ${}_G\mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{M}_g$, oubli de la structure de niveau, est fini, étale et surjectif.
3) Le nombre de composantes connexes de ${}_G\mathcal{M}_g$ est indépendant de k.
4) Si le niveau G domine le niveau $(n), n \geq 3$, alors ${}_G\mathcal{M}_g$ est représentable (un espace de modules fin). On a

$$\mathcal{M}_g(G) := \mathcal{H}_g(G)//Z(G) =_G \mathcal{M}_g \tag{8.2}$$

et le morphisme naturel $\mathcal{M}_g(G) \to \mathcal{M}_g$ est un $\mathrm{Out}\,(G)$-torseur.

□

La preuve de 3) nécessite une "compactification" de ${}_G\mathcal{M}_g$([20], cor 5.11). Faute d'une définition directe raisonable du champ compactifié ${}_G\overline{\mathcal{M}}_g$, la procédure usuellement retenue est de prendre pour définition du champ compactifié ${}_G\overline{\mathcal{M}}_g$ la normalisation de $\overline{\mathcal{M}}_g[\frac{1}{|G|}]$ dans ${}_G\mathcal{M}_g$ (loc.cit. §5). Seul le point 4) du théorème 8.2 demande une vérification. Débutons par un lemme élémentaire:

Lemme 8.3. *1) Soient $\pi_i : \Sigma_i \to C$ deux G-revêtements principaux de C/S, une S-courbe lisse, avec S connexe. Il existe $\theta \in \mathrm{Aut}\,(G)$, d'image unique dans $\mathrm{Out}\,(G)$, tel que le morphisme $Isom_{C,G}(\Sigma_1^\theta, \Sigma_2) \to S$ soit un $Z(G)$-torseur.*
2) Si $\pi : \Sigma \to C$ est un G-torseur de base S, $\mathrm{Aut}_C(\Sigma) = G$, et $\mathrm{Aut}_{C,G}(\Sigma) = Z(G)$.

Preuve: Les notations, en particulier la définition du foncteur $\mathrm{Isom}_{C,G}(\Sigma_1^\theta, \Sigma_2)$ sont celles du théorème 6.20. Des arguments identiques conduisent au fait que pour un certain $\theta \in \mathrm{Aut}\,(G)$, le morphisme $\mathrm{Isom}_{C,G}(\Sigma_1^\theta, \Sigma_2) \to S$ est fini, étale et surjectif. Notons que $Z(G)$ opère naturellement sur $\mathrm{Isom}_{C,G}(\Sigma_1^\theta, \Sigma_2)$. Comme cette action est simplement transitive sur les fibres géométriques, on conclut que $\mathrm{Isom}_{C,G}(\Sigma_1^\theta, \Sigma_2)/Z(G) = S$.
Le point 2) se traite de la même manière, en observant que la courbe $\pi : \Sigma \to S$ étant lisse, $\mathrm{Aut}_C(\Sigma)$ est étale sur S, et égal à G sur les fibres géométriques, donc égal à G. Notons que cela prouve que dans 1), l'automorphisme θ a une image bien déterminée dans $\mathrm{Out}\,(G)$, d'où le lemme.

□

Pour terminer la preuve du point 4) de (8.2), on peut invoquer la théorie du groupe fondamental comme dans [13], [20]. On peut aussi, et de manière plus directe, noter que si on forme le champ algébrique $\mathcal{N}_{C/S}(G) = \mathcal{H}_g(G) \times_{\mathcal{M}_g} S$ défini par le morphisme $S \to \mathcal{M}_g$, i.e. C/S, le groupoïde des

[20] Une structure de Teichmüller de niveau G dans [14],[20].

objets au dessus du S-schéma T, sont les G-fibrés principaux de base $C \times_S T$. Le Lemme 8.3, dit que le champ $\mathcal{N}_{C/S}(G)//Z(G)$ est représentable, et que c'est un $\mathrm{Out}\,(G)$-torseur de base S. Noter qu'au sens strict, il n'y a pas d'action de $\mathrm{Out}\,(G)$ sur $\mathcal{M}_g(G)$, seulement une action faible (non stricte § 6). Le lemme 8.3 dit que ce champ est en fait isomorphe au champ formé des courbes de genre g, plus une structure de niveau G, qui lui supporte une action stricte de $\mathrm{Out}\,(G)$.

□

Le point de vue des schémas de Hurwitz (le point 4 de 8.2), conduit de fait à renverser la Définition 8.1, et donc à considérer une structure de niveau comme dérivant d'un G-fibré principal de base C. Cela suggère qu'on doit voir le champ ${}_G\overline{\mathcal{M}}_g$ comme une sorte de "compactification" de $\mathbf{B}G$, le champ classifiant du groupe fini G (on pourra comparer avec le point de vue voisin mais plus sophistiqué de Abramovich-Corti-Vistoli [2]).

Exemple 8.1 Le niveau étant le abélien (n), donc $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, on notera le champ correspondant $\mathcal{M}_g(n)$. La correspondance entre les deux définitions est aisée à expliciter. Si $\pi : \Sigma \longrightarrow C$ est un G-revêtement principal, l'algèbre $\pi_\star(\mathcal{O}_\Sigma)$ se décompose canoniquement en une somme directe de faisceaux inversibles (sous-faisceaux propres) $\pi_\star(\mathcal{O}_\Sigma) = \bigoplus_{\chi \in \hat{G}} \mathcal{L}_\chi$. Le choix d'une racine primitive n-ième permet d'identifier G et $\hat{G}$; par suite les faisceaux $\mathcal{L}_\chi$ conduisent à une identification de $\mathrm{Pic}_{C/S}[n]$ et $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. Un avantage de cette définition, est qu'elle garde un sens comme on va le voir, si on spécialise C en un point du bord de $\overline{\mathcal{M}}_g$. Le nombre de composantes connexes de $\mathcal{M}_g(n)$ (le nombre de Nielsen), est l'indice $[\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) : \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})]$ [20]. ◊

8.1.2. Structures de niveau sur les courbes stables

Lorsque C est singulière (stable), le théorème 8.2 (4), suggère qu'une structure de niveau G sur C, doit pouvoir se définir en termes de G-fibrés "principaux" de base C, mais maintenant dégénérés.

Définition 8.4. *Soit C une courbe stable de genre $g \geq 2$ définie sur k. On définit un G- revêtement principal ou torseur, stable (ou dégénéré) $\pi : \Sigma \longrightarrow C$, comme étant un G-revêtement stable (dans le sens de la Définition 6.7) , à donnée de Hurwitz $\xi = \emptyset$. Cela signifie (Définition 4.3) que Σ est une courbe stable et que l'action de G sur Σ est stable, c'est à dire libre en dehors des points doubles, et agissant "stablement" aux points doubles. Une G-préstructure de niveau sur C/S, est la donnée d'une classe d'équivalence (stricte) de G-revêtements principaux stables de base C.*

Si d'une autre manière un G-fibré principal de base C lisse, est interprété comme un morphisme $C \longrightarrow \mathbf{B}G$, de C dans le champ classifiant de G [1], [2], on voit que cette définition diffère de manière essentielle de la Définition 8.1 si C dégénère.

Soit $p : C \longrightarrow S$ une courbe stable de genre $g \geq 2$. Pour tout S-schéma T, soit $F_{C/S}(T)$ l'ensemble des *G-préstructures de niveau* sur $C \times_S T$. Le préfaisceau $F_{C/S}$ n'est bien sûr pas en général un faisceau sur S_{fppf}, même si le centre $Z(G)$ est non trivial. Une des raisons est que le groupe des automorphismes d'un G-torseur peut contenir strictement $Z(G)$. On définit alors $\mathbf{Ni}_{C/S,G}$, le faisceau des G-structures de niveau sur $p : C \longrightarrow S$ comme étant le faisceau fppf associé au préfaisceau $F_{C/S}$.

Naïvement une G-structure de niveau sur C/S est une section $\alpha \in \Gamma(S, Ni_{C/S,G})$. Pour obtenir la bonne définition, on considère

$$\overline{\mathcal{H}}_g(G) := \overline{\mathcal{H}}_{h,G,\emptyset}$$

Si le niveau G' domine le niveau G, signifiant que G est un quotient de G', il y a un morphisme naturel de champs $\overline{\mathcal{H}}_g(G') \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_g(G)$, et un morphisme analogue $\overline{M}_g(G') \longrightarrow \overline{M}_g(G)$ entre schémas modulaires. Le point 4) du Théorème 8.2 suggère que la compactification naturelle de ${}_G\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_g(G) = \mathcal{H}_g(G)//Z(G)$ est

$$\overline{\mathcal{M}}_g(G) = \overline{\mathcal{H}}_g(G)//Z(G) \tag{8.3}$$

Cela est justifié par le résultat suivant:

Théorème 8.5. *Soit ${}_G\overline{\mathcal{M}}_g$ la normalisation de $\overline{\mathcal{M}}_g$ dans ${}_G\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_g(G)$ (compactification de Deligne-Mumford). Il existe un morphisme propre, birationnel*

$$\overline{\mathcal{M}}_g(G) := \overline{\mathcal{H}}_g(G)//Z(G) \longrightarrow_G \overline{\mathcal{M}}_g \tag{8.4}$$

Les deux champs ont les même espaces grossiers de modules, en particulier si le champ de droite est représentable, par exemple si G domine le niveau (n), $n \geq 3$, c'est l'espace grossier de modules de $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$.

Preuve: Il est clair que le groupe des automorphismes de tout objet de $\overline{\mathcal{H}}_g(G)$ contient $Z(G)$, ce qui permet de former le 2-quotient $\overline{\mathcal{H}}_g(G)//Z(G) = \overline{\mathcal{M}}_g(G)$ (voir § 6.1). Ce champ est de Deligne-Mumford et lisse (Proposition 6.5). Il contient comme sous-champ ouvert dense ${}_G\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_g(G)$. Il en résulte, suite à la définition de la normalisation (Deligne [19]), qu'il existe bien un morphisme naturel

$$\overline{\mathcal{H}}_g(G)//Z(G) \longrightarrow_G \overline{\mathcal{M}}_g \tag{8.5}$$

étendant le morphisme ${}_G\mathcal{M}_g \to \mathcal{M}_g$. On peut préférer un argument plus direct ([61], Theorem 7.2.3). Ce morphisme est propre car les champs invoqués le sont. Reste à prouver l'égalité des espaces grossiers de modules. On suppose que ${}_G\overline{\mathcal{M}}_g$ est représentable, par exemple si le niveau G domine (n) avec $n \geq 3$ (Deligne [19], Proposition 3.5). Si M (resp. N) sont les espaces grossiers de modules respectifs, alors comme conséquence directe de la définition, on a un morphisme naturel $M \to N =_G \overline{\mathcal{M}}_g$. Ce morphisme est fini, et un isomorphisme sur un sous-schéma ouvert partout dense. Comme par construction M est normal, ainsi que N (par définition), on a $M = N$.

□

Remarque 8.2 Le morphisme $\overline{\mathcal{M}}_g(G) = \overline{\mathcal{H}}_g(G)//Z(G) \longrightarrow {}_G\overline{\mathcal{M}}_g$ est un isomorphisme sur les sous-champs ouverts formés par les structures de niveau sur les courbes lisses de genre g. Noter que le champ de gauche est lisse, mais en général non représentable, et celui de droite est connu comme représentable lorsque le niveau domine le niveau (n), $n \geq 3$ [19], mais non lisse en général. Ces deux champs ont le même espace modulaire grossier $\overline{M}_g(G)$ (fin pour ${}_G\overline{\mathcal{M}}_g$ sous les conditions précédentes).
◊

Il est clair que $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$ est défini sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$. Comme conséquence immédiate de la construction, chaque point possède du champ possède une interprétation modulaire précise. Si $\pi : \Sigma \to C$ est un revêtement principal (dégénéré) de base la courbe stable C, i.e. définissant une "structure de niveau" G sur C, le groupe des G-automorphismes du revêtement $\mathrm{Aut}_G(\Sigma)$ gouverne la structure locale de l'espace des modules. Sa détermination explicite, en particulier savoir s'il contient strictement ou non le centre de G, peut s'avérer difficile. Le fait que ce groupe puisse être différent de $Z(G)$, est le fait essentiel qui distingue le cas stable du cas lisse. On peut être un peu plus précis sur ce groupe, lorsque le niveau G domine le niveau $(n), n \geq 3$, comme le montre la proposition suivante, conséquence facile du lemme de rigidité (par exemple: Brylinski [14], Deligne [19], Oort [36]) :

Proposition 8.6. *i) Soit $\pi : \Sigma \longrightarrow C$ un G-fibré principal de base la S-courbe stable C. Si $f \in \mathrm{Aut}_G(\Sigma)$, alors f induit l'automorphisme identité de C, i.e. $\mathrm{Aut}_G(\Sigma) \subset \mathrm{Aut}_C(\Sigma)$.*
ii) Soit C/S une courbe stable. Soit un niveau G ($|G| \in \mathcal{O}_S^*$). Alors C/S a une G-struture de niveau (naïve) après extension fppf de S.

Preuve: On se ramène de suite pour la première assertion à $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. On considère pour cela une surjection $G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; soit H le noyau. Le revêtement $\pi : \Sigma \to C$ factorise en $\Sigma \to \Sigma/H \to C$. Un G-automorphisme de Σ induit un G/H-automorphisme de la courbe quotient $\Sigma \to \Sigma/H$, ce qui justifie la réduction annoncée. Le résultat se teste sur les fibres géométriques, ce qui permet de supposer aussi $S = \mathrm{Spec}\,(k)$, k corps algébriquement clos. Le niveau étant maintenant le niveau (n), $n \geq 3$, notons h l'automorphisme de $\pi : C \to S$ induit par le passage au quotient de f; on a donc $\pi f = h\pi$. En particulier f définit un automorphisme de $\mathcal{O}_C$-algèbre

$$h^\star(\pi_\star(\mathcal{O}_\Sigma)) \longrightarrow \pi_\star(\mathcal{O}_\Sigma) \tag{8.6}$$

commutant à l'action de G, et donc un automorphisme qui fixe chaque facteur isotypique. En particulier, cela entraîne que h induit l'identité sur $\mathrm{Pic}^0(C)[n]$, voir Proposition 8.7 ci-dessous. Mais on sait que sous cette condition le lemme de rigidité de Serre entraine $h = 1$ [19]. Ainsi $\mathrm{Aut}_G(\Sigma) \subset \mathrm{Aut}_C(\Sigma)$.

Prouvons le point ii). C'est local sur S. Soit un point géométrique $s \in S$. On montre d'abord que C_s admet une G-structure de niveau. Soit une déformation $\mathcal{C} \to \mathrm{Spec}\, R$ de C_s de base un anneau de valuation dicrète complet de corps résiduel k, de corps des fractions K, à fibre générique lisse. On peut équiper après extension finie séparable de K, et remplacement de R par le normalisé, la fibre générique C_∞ d'une G-structure de niveau $\Sigma_\infty \to C_\infty$. Par réduction stable on peut même supposer que Σ_∞ se prolonge en une G-courbe stable $\Sigma \to \mathrm{Spec}\, R$. Alors il est clair que $\Sigma/G = \mathcal{C}$ (voir §5.3). Pour conclure, on reprend l'argument utilisé pour prouver l'existence locale d'une clôture galoisienne (Théorème 6.21). Soit une structure de niveau représentée par un G-torseur stable $\Sigma_s \to C_s$. La déformation universelle de ce G-torseur existe sur une extension finie plate $\mathrm{Spec}\, R^* \to \mathrm{Spec}\, R$ de la base de la déformation universelle de C_s. Ce sont les points doubles de type NS qui sont responsables de la ramification de cette extension. Quitte à effectuer une extension étale de S en s, on peut supposer que la déformation universelle est définie sur S. Il suffit alors d'effectuer le changement de base par $\mathrm{Spec}\, R^* \to \mathrm{Spec}\, R$ pour obtenir une structure de niveau (naîve).

Des arguments différents basés sur le théorème de de Jong-Pickaart [17], permettent de prouver qu'une structure de niveau existe après une extension finie fidèlement plate (Romagny [61], Cor 7.2.4).

□

8.2 Le niveau abélien (n)

8.2.1. Groupes de décomposition et d'inertie

On fixe pour niveau, le niveau abélien $(n), n \geq 3$, donc $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. Les résultats de la section 7.3 permettent de décrire la structure combinatoire du bord. Pour cela, nous reprenons les suites exactes (7.22) et (7.23) de la section 7.3, et les traduisons dans le cas d'un G-fibré principal. Soit $\pi : \Sigma \longrightarrow C = \Sigma/G$ une structure de niveau (n) sur la courbe stable C, définie sur le corps algébriquement clos k. La suite exacte (7.22), donne sous les présentes hypothèses, et en notant $\tilde{C} = \coprod_i \tilde{C}_i$ la normalisation de C, et Γ le graphe dual:

$$1 \longrightarrow H^1(\Gamma) \otimes \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(C)[n] \longrightarrow \prod_i \mathrm{Pic}\,(\tilde{C}_i)[n] \longrightarrow 1 \tag{8.7}$$

En particulier cela donne $\mathrm{Pic}\,(C)[n] \xrightarrow{\sim} H^1_{et}(C, \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\sim} (\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})^{2g-h(\Gamma)}$. Notons que si Δ est le graphe modulaire associé à Σ, on a $\Gamma = \Delta/G$. On peut peut rendre plus explicite les groupes de décomposition et d'inertie (Définition 7.4); pour les notations relatives à ces groupes, voir la section 7.2:

Proposition 8.7. *Pour les groupes introduits ci-dessus, on a:*
i) $G/D \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{h(\Gamma)}, \quad G/I \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g-h(\Gamma)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}\,(C)[n]$
ii) On a pour toute composante irréductible C_i *de* C, $I_i = I \cap G_i, \quad G_i/I_i \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g_i}$ *et* $D \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g-h(\Gamma)}$
iii) Si C_i *correspond à un sommet de valence* v_i *de* Γ, *on a* $I_i \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{v_i-1}, \quad G_i \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g_i+v_i-1}$.

Preuve: Considérons le diagramme suivant à lignes exactes, et avec les flèches verticales injectives

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & H^1(\Gamma) \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}\,(C)[n] \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i \mathrm{Pic}\,(\tilde{C}_i)[n] \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \widehat{G/D} \arrow[r] & \widehat{G/I} \arrow[r] & \prod_I \widehat{G_i/I_i} &
\end{tikzcd} \tag{8.8}$$

L'exactitude de la suite horizontale du bas est le contenu du Théorème 7.2. On montre d'abord que la flèche verticale du milieu est une bijection. Cela se ramène à prouver que si $L \in \mathrm{Pic}\,(C)[n]$, alors $\pi^*(L) \cong \mathcal{O}_\Sigma$ (voir la preuve du Théorème 7.2). Supposons L d'ordre d, d/n, et considérons le revêtement étale connexe de degré d, $\tau : C^* \longrightarrow C$ défini par L, c'est à dire tel que

$$\tau_\star(\mathcal{O}_{C^*}) = \bigoplus_{i=0}^{d-1} L^i \tag{8.9}$$

La courbe C^* est connexe du fait que L est d'ordre exact d, et par ailleurs certainement stable. Notons que par construction $\tau^*(L) \cong \mathcal{O}_{C^*}$. Considérons une déformation du G-revêtement $\pi : \Sigma \longrightarrow C$ de base $\mathrm{Spec}\,(R)$, où R est un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k, à fibre générique lisse, donc décrite par un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathrm{Spec}\,(R) \\ \cup & & \cup & & \\ \Sigma & \longrightarrow & C & & \end{array}$$

Du fait que $C^* \longrightarrow C$ est étale, on sait qu'il existe une déformation $\mathcal{X}^* \longrightarrow \mathcal{X}$ de ce revêtement de base une quelconque base prescrite, en particulier $\mathcal{X}$; on peut se référer par exemple au Théorème 5.2. Notons η le point générique de Spec (R), et Y_η (resp. X_η) les fibres génériques respectives. Alors le revêtement induit au dessus de η, $Y_\eta \longrightarrow X_\eta$ factorise par X^*_η. Cela force $\pi : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ à factoriser par X^*, et au bout du compte $\pi : \Sigma \longrightarrow C$ factorise par C^*, ce qui entraine bien $\pi^*(L) \cong \mathcal{O}_\Sigma$.

Prouvons maintenant les points 1) à 3). Partant de de l'égalité $\widehat{G/I} = \mathrm{Pic}(C)[n]$, et des identifications connues

$$H^1(\Gamma) \otimes \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{h(\Gamma)}, \quad \text{et } \mathrm{Pic}(\tilde{C}_i)[n] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g_i}$$

le diagramme ci-dessus montre que les applications verticales sont des bijections, donc d'une part $\widehat{G/D} \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{h(\Gamma)}$, et pour tout indice i, $\widehat{G_i/I_i} = \mathrm{Pic}(\tilde{C}_i)[n]$. Par rapport à la suite exacte (7.23) on a maintenant la suite exacte

$$1 \longrightarrow \widehat{G/D} \longrightarrow \widehat{G/I} \longrightarrow \prod_i \widehat{G_i/I_i} \longrightarrow 1 \tag{8.10}$$

Par dualité, on obtient une injection $\prod_i G_i/I_i \mapsto G/I$, et donc pour tout indice i, $G_i \cap I = I_i$. Comme $G_i/I_i \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g-h(\Gamma)}$, on a finalement $I \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{h(\Gamma)}$, et pour une raison identique, $D \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{h(\Gamma)}$.

Notons maintenant v_i la valence du sommet d'indice i du graphe Γ. Le groupe I_i est engendré par v_i éléments $\{\sigma_{i,\alpha}\}, (\alpha = 1, \ldots, v_i)$, dont l'ordre divise n, et soumis à une relation $\sum_\alpha \sigma_{i,\alpha} = 0$. Dans le groupe I qui est le sous-groupe engendré par les I_i, un décompte naif des générateurs conduit du fait que chaque $\sigma_{i,\alpha}$ apparaît deux fois, via une arête orientée et l'arête opposée, à une majoration

$$\sum_i v_i - A - (S-1) = h(\Gamma) \tag{8.11}$$

Les S relations $\sum_\alpha \sigma_{i,\alpha}$ sont dépendantes, car liées par $\sum_i(\sum_\alpha \sigma_{i,\alpha}) = 0$, ce qui explique la contribution $S-1$. Par ailleurs on sait que $I \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{h(\Gamma)}$, on voit donc ainsi qu'entre les générateurs indiqués, il ne peut y avoir d'autres relations que les relations imposées par le graphe (les usuelles relations de courant). Cela conduit aux égalités $I_{i,\alpha} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\quad I_i = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{v_i-1}$, donc finalement $G_i \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g_i+v_i-1}$ comme indiqué.

□

8.2.2. Composantes irréductibles du bord

La description des composantes irréductibles du bord de $\overline{M}_g(n)$ est aisée. La description générale donnée dans les sections 7.2 et 7.4 montre que les composantes irréductibles correspondent au choix d'un graphe modulaire Γ, qui est soit un segment, soit une boucle.

segment: dans ce cas, l'image de la composante dans $\overline{M}_g$ est isomorphe au produit $\overline{M}_{g_1} \times \overline{M}_{g_2}$, $(g_1 + g_2 = g)$. On a visiblement pour les groupes I et D

$$I = 1, \; D = G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \tag{8.12}$$

De manière plus précise, le groupe G se décompose en $G = G_1 \times G_2, \quad G_i \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g_i}, (i = 1, 2)$. Il en résulte en particulier que la composante irréductible correspondante s'identifie à $\overline{M}_{g_1,1}(n) \times \overline{M_{g_2,1}}(n)$, espaces modulaires de structure de niveau (n) avec un point marqué.

boucle: on a (§7.2):

$$I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \text{ et } D = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g-1} \tag{8.13}$$

Avec les notations de la section 7.2 , l'élément g_0 est d'ordre n, et $G = D \times \langle g_0 \rangle$. La composante correspondante du bord s'identifie avec l'espace modulaire classifiant les structures de niveau (n) sur une courbe de genre $g-1$ avec une seule piqûre, c'est à dire essentiellement à un espace de Hurwitz défini par le groupe $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$, et une donnée de Hurwitz réduite à un élément d'ordre n. L'image d'une telle composante dans $\overline{M}_g$ est la strate notée $\Delta_0 = \overline{M}_{g_1,2}$.

On peut étendre la description précédente des composantes de codimension un du bord à un groupe de niveau arbitraire, c'est à dire au champ $\overline{\mathcal{M}}_g(G)$. Cela permet par exemple de retrouver de manière naturelle quelques résultats de Boggi-Pikaart ([13], §2).

Le niveau étant toujours le niveau abélien $(n), n \geq 3$, on obtient facilement en corollaire des méthodes précédentes, la structure connue des sous-groupes d'inertie pour les points doubles [36]. On conserve dans le corollaire suivant les hypothèses de la Proposition 8.2:

Corollaire 8.8. *Soit Q_α un point double de C, et soit H_α le stabilisateur d'un quelconque point double de Σ au dessus de Q_α. Alors $H_\alpha = 1$ si et seulement si Q_α disconnecte C, sinon $H_\alpha = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Preuve: Notons tout d'abord que le resultat est clair si C n'a qu'un seul point double, comme il résulte de la preuve précédente. On va ramener le cas général à ce cas particulier par un argument de déformation. Supposons d'abord que le point double $Q = Q_\alpha$ ne disconnecte pas C. Dans ce cas la normalisation partielle C^* de C en Q est une courbe stable de genre $g-1$ marquée par deux points Q' et Q'', et C se déduit de C^* par l'identification $Q' = Q''$. Cette construction, le "clutching" morphism de Knudsen [48], s'étend à la déformation universelle de (C^*, Q', Q''), et conduit à une déformation $\mathcal{C}^* \longrightarrow \operatorname{Spec} R^*$ de C dans laquelle le point double Q s'étend. Comme le clutching morphism est un morphisme représentable, fini et non ramifié (loc.cit. cor 3.9), on voit que cette déformation n'est pas autre chose que la déformation universelle de C qui préserve le point double Q. Elle peut se décrire comme étant la restriction de la déformation universelle $\mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ de C à l'hypersurface $t_1 = 0$, si t_1 désigne le paramètre de déformation de Q. On peut donc conclure que la fibre générique de cette déformation est une courbe avec un unique point double Q qui reste du type "boucle".

Le niveau étant toujours le niveau abélien $(n), n \geq 3$, l'interprétation modulaire des points du bord permet de décrire en des termes simples la ramification du morphisme $\overline{M_g}(n) \longrightarrow \overline{M}_g$ en d'autres termes sa structure logarithmique [55]. Fixons C un point de $\overline{M}_g$ sur le corps algébriquement clos k, n étant comme toujours inversible dans k. Soit $\mathbf{Ni}_G(C)$ l'ensemble des structures de niveau "naïves" $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ sur C (Définition 8.5). Il y a une action évidente de $\operatorname{Out}(G) = \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ sur $\mathbf{Ni}_G(C)$; alors:

Lemme 8.9. *L'action de* $\mathrm{Out}\,(G) = GL_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ *sur* $\mathbf{Ni}_G(C)$ *est transitive.*

Preuve: On suppose d'abord $S = \mathrm{Spec}\ k$ avec k algébriquement clos. Dans le cas lisse le résultat est clair, du fait qu'une structure de niveau naïve est identique à une vraie structure de niveau. Si maintenant C est singulière, le corollaire précédant montre que les points doubles de C qui sont les images des points doubles de Σ avec une isotropie non triviale, ne dépendent en fait que de C, plus précisément du graphe Γ, et pas de la structure de niveau représentée par $\pi : \Sigma \longrightarrow C$. En ces points l'indice de ramification est égal à n. Soit maintenant X la déformation universelle équivariante de Σ, de base

$$\mathrm{Spec}\ k[[t_1, \ldots, t_r, \ldots, t_{3g-3}]]$$

t_α étant le paramètre de déformation de l'orbite de points doubles au dessus du point Q_α de C. La courbe quotient $Y = X/G$ se déduit de la déformation universelle $\mathcal{C}$ de C, ayant pour base $\mathrm{Spec}\ k[[\tau_1, \ldots, \tau_r, \ldots, \tau_{3g-3}]]$, par le changement de base donné par $\tau_\alpha = t_\alpha^{e_\alpha}$ (Théorème 5.2). Ce qui vient d'être dit montre que Y, à isomorphisme de déformation près, ne dépend pas du choix de la structure de niveau.

Soient maintenant deux structures de niveau (n), $\pi_i : \Sigma_i \longrightarrow C$, $(i = 1, 2)$ sur la courbe C; soient aussi $X_i, (i = 1, 2)$, les déformations universelles équivariantes respectives. On peut ainsi supposer que les déformations X_1/G et X_2/G de C sont isomorphes, donc que $X_1/G \cong X_2/G \cong Y$ est une déformation donnée de C de base $S = \mathrm{Spec}\ k[[\tau_1, \ldots, \tau_r, \ldots, \tau_{3g-3}]]$. On peut en outre, par une spécialisation convenable, la base étant ramenée à $S = \mathrm{Spec}(R)$, avec R anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k, supposer que les fibres génériques de $X_i, (i = 1, 2)$ et de Y sont lisses et définissent des structures de niveau situées dans une même orbite de $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. De manière équivalente, il existe $\theta \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ tel que le schéma $\mathrm{Isom}\,(X_1^\theta, X_2)$ classifiant les isomorphismes équivariants au dessus de Y, soit fini, non ramifié et surjectif. Il y a donc au moins une composante connexe de $\mathrm{Isom}_\pi(X_1^\theta, X_2)$ qui domine S et qui alors étale sur S, donc isomorphe à S. On en déduit un Y-isomorphisme $X_1^\theta \xrightarrow{\sim} X_2$, d'où finalement un isomorphisme au dessus de C, $\Sigma_1^\theta \xrightarrow{\sim} \Sigma_2$, d'où la conclusion.

□

Il a été observé que le morphisme $\mathcal{M}_g(G)//Z(G) \to \mathcal{M}_g$ est un $\mathrm{Out}\,(G)$-torseur. Il n'en n'est plus de même pour le morphisme $\overline{\mathcal{M}}_g(G)//Z(G) \to \overline{\mathcal{M}}_g$. Au niveau des espaces grossiers de modules, le morphisme $\overline{M}_g(n) \longrightarrow \overline{M}_g$ est un revêtement galoisien de groupe de Galois $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Pour préciser cela, soit un point ξ de $\overline{M}_g(n)$ sur le corps k, représenté par $\pi : \Sigma \longrightarrow C$. Le groupe d'inertie I_ξ dans ce revêtement a la description suivante:

$$I_\xi = \{\theta \in GL_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\,,\ \Sigma^\theta \cong \Sigma\} \tag{8.14}$$

Un élément de I_ξ déterminé par $f : \Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma^\theta$ définit donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \Sigma^\theta \arrow[d, "\pi"] \\ C \arrow[r, "h"] & C \end{tikzcd}$$

dans lequel l'automorphisme horizontal du bas $h : C \xrightarrow{\sim} C$ est celui induit par f par passage au quotient. Notons $\widehat{I}_\xi$ le sous-groupe formé des couples (f, θ) comme ci-dessus. On a la suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}_G(\Sigma) \longrightarrow \widehat{I}_\xi \longrightarrow I_\xi \longrightarrow 1 \tag{8.15}$$

Considérons aussi le groupe $\mathrm{Aut}_\pi(\Sigma)$ des C-automorphismes (non équivariants à priori) de Σ qui commutent avec π, et qui préservent globalement G. Du fait que $n \geq 3$, le lemme de rigidité implique que $\mathrm{Aut}_G(\Sigma) \subset \mathrm{Aut}_\pi(\Sigma)$. L'application $(f, \theta) \mapsto h$ est alors bien définie; il en résulte une suite exacte

$$1 \longrightarrow \frac{\mathrm{Aut}_\pi(\Sigma)}{\mathrm{Aut}_G(\Sigma)} \longrightarrow I_\xi \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(C) \longrightarrow 1 \tag{8.16}$$

Noter que la surjectivité à droite découle du Lemme 8.9. Si C est lisse, on a certainement $\mathrm{Aut}_\pi(\Sigma) = \mathrm{Aut}_G(\Sigma) = G$, et $I_\xi = \mathrm{Aut}\,(C)$. Dans le cas général, on a le résultat suivant:

Proposition 8.10. *Soit m le nombre de points doubles de C (arêtes de Γ) qui ne disconnectent pas Γ, alors*

$$\frac{\mathrm{Aut}_\pi(\Sigma)}{G} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m \tag{8.17}$$

Preuve: Soit $f \in \mathrm{Aut}_\pi(\Sigma)$, il existe $\theta \in \mathrm{Aut}\,(G)$ qui rende l'isomorphisme $f : \Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma^\theta$ G-équivariant. Si X est une déformation infinitésimale équivariante de Σ, et si $\imath : C \hookrightarrow X$ est le plongement équivariant correspondant, le couple $(X, \imath f^{-1})$ définit donc une déformation notée X_f de Σ^θ. Si $\mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Spec}\,(S)$ avec $S = k[[t_1, \ldots, t_{3g-3}]]$ est la déformation universelle équivariante de Σ, alors $\mathcal{X}^\theta \longrightarrow \mathrm{Spec}\,(S)$ est celle de Σ^θ. Il vient alors de f, un automorphisme $\hat{f}$ de $\mathrm{Spec}\,(S)$, qui conduit au diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_f \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathcal{X}^\theta \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,(S) \arrow[r, "\hat{f}"] & \mathrm{Spec}\,(S) \end{tikzcd} \tag{8.18}$$

où h induit f sur les fibres au dessus de l'origine $0 \in S$. Comme $\pi f = \pi$, les déformations de C obtenues par passage au quotient par g sont équivalentes, ce qui force $\hat{f}$ a être l'identité sur $\mathrm{Spec}\,(R)$ base de la déformation universelle de C. Ainsi $\hat{f}$ appartient au groupe de galois du revêtement $\mathrm{Spec}\,(S) \longrightarrow \mathrm{Spec}\,(R)$, groupe identifié à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m$. Noter que si $\hat{f} = 1$, alors par examen au point générique, on obtient en conséquence que f est une translation par un élément de G.

Réciproquement partons d'un élément $\hat{f}$ du groupe de Galois $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^m$, et notons $\mathcal{X}_{\hat{f}}$ la déformation déduite du carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_f \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,(S) \arrow[r, "\hat{f}"] & \mathrm{Spec}\,(S) \end{tikzcd}$$

Par passage au quotient par G, on obtient un isomorphisme $\mathcal{X}_{\hat{f}}/G \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}/G$. Par le Lemme 8.9 on conclut qu'il y a au dessus de $\mathrm{Spec}\,(S)$ un isomorphisme équivariant $\mathcal{X}_{\hat{f}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}^\theta$ pour un θ convenable.

Le diagramme cartésien qui en découle, analogue à (8.18), assure que tout élément du groupe de galois est dans l'image de $\mathrm{Aut}_\pi(\Sigma)$.

□

En général pour un revêtement principal dégénéré, et pour un niveau arbitraire (dominant (n), $n \geq 3$) l'une des deux inclusions

$$G \subset \mathrm{Aut}_G(\Sigma) \subset \mathrm{Aut}_\pi(\Sigma) \tag{8.19}$$

peut être stricte, eventuellement les deux. Notons que l'anneau local complété de $\overline{M}_g(G)$ au point défini par Σ est $\hat{\mathcal{O}}_\Sigma \cong k[[\tau_1, \ldots, \tau_{3g-3}]]^{\mathrm{Aut}_G(\Sigma)}$. La singularité eventuelle de cet anneau local provient donc du groupe $\mathrm{Aut}_G(\Sigma)/G$ et de son action sur l'espace tangent $H^1_G(\Sigma, \Theta_\Sigma)$. Comme application donnons une preuve différente du résultat connu suivant (Oort-Van Geemen [36]):

Proposition 8.11. *Soit un revêtement principal dégénéré $\pi : \Sigma \to C$ définissant une structure de niveau (n), $n \geq 3$. On suppose que C a deux composantes irréductibles se coupant transversalement en deux points, alors on a*

$$\frac{\mathrm{Aut}_\pi(\Sigma)}{G} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \tag{8.20}$$

Preuve: On suppose donc $C = C' \cup C''$, avec C' (resp. C'') lisse de genre $g' \geq 1$ (resp $g'' \geq 1$), et $g = g' + g'' + 1$. Soit $C' \cap C'' = \{Q', Q''\}$. Comme $h(\Gamma) = 1$, les stabilisateurs des points doubles de Σ , donc au dessus de Q' ou Q'', sont égaux disons à $H \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit Σ', resp. Σ'' une composante de Γ qui relève C', resp. C'', et supposons que $P' \in \Sigma' \cap \Sigma''$ soit au dessus de Q'. Si $f \in \mathrm{Aut}_G(\Sigma)$, on a $f(P') \in GP'$, on peut donc se ramener ne modifiant f par un élément de $g \in G$ à $f(P') = P'$. Alors $f(\Sigma') = \Sigma'$ et $f(\Sigma'') = \Sigma''$. La restriction de f à Σ' commute à l'action de G', donc est définie par un élément de G', du fait que Σ' est lisse. Par une nouvelle réduction on peut supposer de plus que $f|\Sigma' = id$. Alors on doit avoir $f|\Sigma'' \in H \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il est facile de voir qu'inversement un automorphisme f de Σ défini par ces deux conditions centralise l'action de G. Le résultat en découle.

Si maintenant $P'' \in \Sigma''$ est un point au dessus de Q'', il est clair que les actions de f en les espaces tangents en ces deux points sont définies par des racines n-ième de l'unité opposées. Donc l'action de $\mathrm{Aut}_G(\Sigma)/G$ sur l'espace de la déformation équivariante universelle de Σ est $\tau_1 \mapsto \epsilon\tau_1$, $\tau_2 \mapsto \epsilon^{-1}\tau_2$, $\tau_\alpha \mapsto \tau_\alpha$ $(\alpha \geq 3)$ D'où vient le fait qu'en ce point $\overline{M}_g(n)$ a une singularité $A_{n-1} \times$(variété lisse de codim 2).

□

Le calcul explicite du groupe $\mathrm{Aut}_G(\Sigma)$, généralisant le calcul de la proposition 8.11, est possible avec un niveau général, et sous une condition de généricité de C. La condition requise est celle qui pour $f \in \mathrm{Aut}_G(\Sigma)$ assure que l'automorphisme induit h de la courbe C, pointée par les points de branchement, est égal à l'identité. De manière générale, après avoir fait le choix d'une orientation du graphe Γ, on a le résultat:

Proposition 8.12. *Soit* $\mathrm{Aut}_{G,\pi}(\Sigma) = \{f \in \mathrm{Aut}_G(\Sigma),\ \pi f = \pi\}$. *On a une suite exacte:*

$$1 \longrightarrow \mathrm{Aut}_{G,\pi}(\Sigma) \xrightarrow{j} \prod_v G \xrightarrow{\partial} \prod_e G/(\bigcap_{\omega \mapsto e} G_\omega) \tag{8.21}$$

où $\partial((\sigma_v)_v) = (\sigma_{e(1)}^{-1}\sigma_{e(0)})_e$, *et* $e(0)$, $e(1)$ *étant respectivement l'origine et l'extrémité de* e.

Preuve: Définissons l'application j. Par hypothèse l'automorphisme h de C induit par un élément $f \in \mathrm{Aut}_{G,\pi}(\Sigma)$ est supposé être l'identité. Dès lors pour tout sommet v de Γ la courbe $\Sigma_v = \pi^{-1}(C_v)$ est fixée par f, ce qui entraîne que l'automorphisme défini par la restriction de f à cette courbe coïncide avec la restriction d'un élément $\sigma_v \in G$. En effet, quitte à modifier f par un élément de G, on peut supposer que f fixe une composante irréductible Δ_v de Σ_v. Sur cette composante f est alors donné par un élément de G, en fait du centre du stabilisateur de cette composante, donc est égal à cet élément partout. On définit alors l'injection j par la collection $j(f) = (\sigma_v)_v$.

La condition de cohérence qu'on doit exiger d'une collection (σ_v) pour qu'elle définisse un automorphisme de Σ par recollement des σ_v, est que pour tout point double Q de C, donc toute arête e de Γ, et si a et b sont les extrémités de e, alors $\sigma_a(P) = \sigma_b(P)$ pour tout point double $P \in \Sigma$ d'image Q. Cette condition qui équivaut à ce que $\sigma_b^{-1}\sigma_a$ fixe tout point double au dessus de Q, assure que les automorphismes σ_v des Σ_v se recollent en un G-automorphisme de Σ. Cette condition s'exprime bien par $\partial((\sigma_v)) = 1$.

□

9. Revêtements cycliques.

Le champ des revêtements cycliques admet une description particulière.[21]. Si la base est $\mathbb{P}^1$ on donnera une description très concrète du sous-champ ouvert classifiant les revêtements non dégénérés, comme champ quotient, généralisant le résultat de Arsie-Vistoli [4]. La construction est parallèle à celle de Jarvis [43], [44], qui traite des courbes à spin.

[21] Il est instructif de comparer ce champ avec le champ des courbes à spin étudié en détail par Jarvis [43], [44].

9.1. Revêtements cycliques versus racines d'un faisceau inversible

9.1.1 Racines et quasi-racines d'un faisceau inversible

On fixe un entier $r \geq 2$. Le concept de racine r-ième se définit en deux temps [43], [44]:

Définition 9.1. *Soit D une courbe préstable. Une quasi-racine r-ième d'un faisceau inversible κ sur D est la donnée d'un couple $(\mathcal{L}, \Phi)$, où $\mathcal{L}$ est un faisceau sans torsion de rang un, et Φ un morphisme*

$$\Phi : \mathcal{L}^{\otimes r} \longrightarrow \kappa \tag{9.1}$$

On demande que Φ soit un isomorphisme en tout point où $\mathcal{L}$ est libre.
Une quasi-racine est une racine r-ième si on a en plus on a:
i) En un point singulier de $\mathcal{L}$, i.e. un point en lequel $\mathcal{L}$ n'est pas libre, le conoyau de Φ est de rang $r-1$.
ii) $r\deg \mathcal{L} = \deg \kappa \quad (\deg \mathcal{L} = \chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{O}_C))$.

Dans le contexte des revêtements cycliques on est amené à considérer les racines d'ordre r d'un faisceau inversible $\mathcal{O}_D(-\sum_i m_i Q_i)$. Dans ce cas les conditions ci-dessus étant imposées, en particulier la condition iii)

$$\deg(\mathcal{L}) = 2g - 2 - \sum_i m_i \tag{9.2}$$

Jarvis [43], [44] a montré que le champ classifiant les données $(D, \mathcal{L}, \{Q_i\})$, où $\mathcal{L}$ est une racine r-ième comme cela vient d'être défini, est un champ de Deligne-Mumford séparé et lisse au dessus de Spec $\mathbb{Z}[\frac{1}{r}]$. Un tel résultat exige qu'une définition convenable des familles de racines r-ième de faisceaux inversibles soit proposée. Cette définition comme on va le voir est en fait très naturelle dans le cadre des champs de Hurwitz. Elle utilise au préalable la description par Faltings (§7.3.3, voir [31], [44]) de la déformation verselle des modules sans torsion sur l'anneau local d'un point double.

Comme il est expliqué dans [44], la donnée seule d'une racine r-ième de $\omega_D(-\sum_{i=1}^n b_i Q_i)$, c'est à dire la version relative de la définition 9.1, définit certes un champ algébrique, mais qui sauf si r est premier n'est pas lisse. Pour contourner ce défaut on doit lorsque la courbe stable D est singulière rendre plus précise la structure de *Spin* en fixant la structure locale du faisceau $\mathcal{L}$ au voisinage d'un point double P. Soit S la base, et $s \in S$ l'image de P. Posons $R = \hat{\mathcal{O}}_{S,s}$, et soit $x, y : xy = \pi \in \mathcal{M}_R$ un système de coordonnées en P. On exige de manière précise que la structure locale de $\mathcal{L}$, c'est à dire après passage à l'anneau local complété (ou un voisinage étale), soit de la forme[22] (voir § 7.3.3 pour les notations)

$$\hat{\mathcal{L}}_Q \cong E(\tau^a, \tau^b), \quad a + b = r, \quad \pi = \tau^r \quad (\tau \in \mathcal{M}_R) \tag{9.3}$$

9.1.2. Description des revêtements cycliques

[22] Ce sont les pure n roots de [44] Definition 5.1.3. Cette restriction est nécessaire pour que le foncteur des déformations infinitésimales du triplet $(D, \mathcal{L}, \Phi)$ soit formellement lisse (loc.cit. Proposition 5.4.4). Cette condition est clarifiée dans [3].

Fixons une donnée de ramification $R = \sum_{i=1}^{s} b_i[H_i, \chi_i]$ (Définition 2.1) relative au groupe $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et soit $b = \sum_i b_i$. Si on fixe un générateur σ de G, on sait que cela équivaut à spécifier l'ordre e_i de H_i, ainsi que les entiers k_i, $1 \leq k_i < e_i$ (l'holonomie locale) définissant les classes $[H_i, \chi_i]$ par $\chi_i(\sigma_n^{n/e_i}) = \zeta_n^{k_i n/e_i}$. Fixons une racine primitive n-ième de l'unité.

Soit un G-revêtement $\pi : C \longrightarrow D \cong C/G$, C et D étant lisses. Il n'y a pas lieu de préciser pour le moment si les points de branchement sont piqués ou marqués. Un tel revêtement, à groupe de Galois cyclique, est totalement déterminé par la $(\mathcal{O}_D, G)$ algèbre cohérente (§ 7.3.3)

$$\pi_\star(\mathcal{O}_C) = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_j \tag{9.4}$$

où la décomposition du membre de droite est la décomposition facteurs isotypiques. On notera $\mathcal{L}_j$ le sous-faisceau propre de l'opérateur σ de valeur propre ζ_n^j. Dans la suite , on posera $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}$. La multiplication dans $\pi_\star(\mathcal{O}_C)$ induit des morphismes $\mathcal{L}_j \otimes \mathcal{L}_k \longrightarrow \mathcal{L}_{j+k}$, les indices étant pris modulo n. Il en résulte en particulier pour tout j, et $d' \mid d$ des morphismes

$$\Phi_j : \mathcal{L}^{\otimes j} \to \mathcal{L}_j, \quad \Phi_{d',d} : \mathcal{L}_{d'}^{\otimes d/d'} \to \mathcal{L}_d \tag{9.5}$$

Ces morphismes décrivent la structure d'algèbre sur $\pi_\star(\mathcal{O}_C)$. Le morphisme $\Phi = \Phi_n : \mathcal{L}^n \to \mathcal{O}_D$ permet d'identifier la donnée de ramification du revêtement $\pi : C \to D$. Limitons nous pour débuter au cas lisse. Soit D une courbe lisse définie sur k; rappelons en premier la description classique des revêtements cycliques de base D, en termes du triplet $(D, \mathcal{L}, \oplus)$:

Proposition 9.2. *Si au point $Q_i \in D$ l'indice de ramification est e_i, l'action de σ^{n/e_i} au dessus de Q_i (l'holonomie locale) est décrite par k_i, $1 \leq k_i < e_i$, où ν_i est tel que $1 \leq \nu_i < e_i$, $\nu_i k_i \equiv 1\ (e_i)$ et $m_i = \frac{n}{e_i}$, alors $\mathrm{Div}(\Phi) = B$, soit $\Phi(\mathcal{L}^n) = \mathcal{O}_D\left(-\sum_{i=1}^{b} m_i\, \nu_i\, Q_i\right)$. Il y a un unique isomorphisme d'algèbre qui est l'identité sur $\mathcal{L}$:*

$$\pi_*(\mathcal{O}_C) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes i}\left(\left[\frac{iB}{n}\right]\right) \tag{9.6}$$

Preuve: Le premier point est classique (voir par exemple [56]). Rappelons briévement les arguments. Soient Q un point de branchement, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_Q$ l'anneau local de D en Q, v la valuation associée. Soit $\overline{\mathcal{O}} = \bigcap_{P \to Q} \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}$ dans le corps des fonctions de C. Soit la décomposition en sous-espaces propres $\mathcal{O} = \oplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}\xi_i$; posons $\xi := \xi_1$. Notons que $\xi^i = h_i \xi_i$ avec $h_i \in \mathcal{O}$. Soit par ailleurs $\xi_i^n = f_i \in \mathcal{O}$. Du fait de la normalité de $\overline{\mathcal{O}}$, il est clair que $v(f_i) < n$. Posons $v(f_1) = d = \frac{n}{e}\nu$, où $e = \mathrm{pgcd}\,(n, d)$, $1 \leq \nu < e$. Notons que $d > 0$ car Q est un point de branchement. Si $\pi \in \mathcal{O}$ est une uniformisante, et si P est un point de C au-dessus de Q, l'égalité $e v_P(\xi) = \nu v_P(\pi)$ dit que $e/v_P(\pi)$. Comme $\tau^{n/e}$ est une unité de $\mathcal{O}$, où $\tau = \frac{\xi^e}{\pi^\nu}$, on voit que le nombre des points de C au-dessus de Q est au moins $\frac{n}{e}$. Il en découle que ce nombre est $\frac{n}{e}$, et que l'indice de ramification est e. On a par ailleurs

$\xi^{in} = {h_i}^n {\xi_i}^n$ donc $nv(h_i) + v(\xi_i^n) = nd$, et comme $v(\xi_i^n) < n$, on en tire $v(h_i) = [\frac{id}{n}]$ et $v(\xi_i^n) = n\langle\frac{id}{n}\rangle$. Il en résulte la description:

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{L}^{\otimes i}(\sum_{j=1}^{b} [\frac{i\nu_j}{e_j}]\, Q_j) \ \xrightarrow{\sim}\ \mathcal{L}^{\otimes i}([\frac{iB}{n}]) \tag{9.7}$$

De manière plus précise il y a un unique isomorphisme qui est l'identité sur $\mathcal{L}^i$.

On peut conclure que le revêtement $\pi : C \to D$ est de fait totalement déterminé par le couple $(\mathcal{L}, \Phi)$. Notons d'abord que le terme de droite dans (9.7) est une $\mathcal{O}_D$-algèbre, la multiplication étant donnée par les applications naturelles

$$\mathcal{L}^i[\frac{iB}{n}] \otimes \mathcal{L}^j[\frac{jB}{n}] \longrightarrow \mathcal{L}^{i+j}[\frac{(i+j)B}{n}] \tag{9.8}$$

l'indice $i + j$ étant pris modulo n. Il est clair que l'unique isomorphisme qui est l'identité sur $\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^i$ est un isomorphisme d'algèbre.

□

La description (9.2) d'un revêtement cyclique entre courbes lisses s'étend facilement à une famille de courbes lisses. Il suffit de donner un sens au terme de droite dans (9.6). Supposons que dans la donnée de ramification les valeurs distinctes prises par les $n_i = \frac{n}{e_i}\nu_i$ sont $p_1 < \ldots < p_s$. Il est préférable pour la suite de mettre le diviseur B sous la forme $B = \sum_{i=1}^{s} p_i B_i$, les B_i étant maintenant disjoints deux à deux. Posons $\deg(B_i) = k_i$ qui représente le nombre d'occurence de l'holonomie p_i, de sorte que $\sum_i k_i p_i = \sum_j n_j = nm$, l'entier m étant défini par cette équation.

La base S du revêtement est maintenant arbitraire. Pour tout $1 < p = \frac{n}{e}\nu,\ 1 \leq \nu < e$, $\operatorname{pgcd}(e, \nu) = 1$, soit $\Delta_p \subset C$ le sous-schéma des points de C d'holonomie p. On sait (section 4) que si $p = p_i$, Δ_p est un diviseur de Cartier relatif étale de degré $k_i \frac{n}{e_i}$ sur S. Si $p = p_i$, on notera $\Delta_p = \Delta_i$. Le groupe quotient de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par le sous-groupe d'ordre e_i, agit librement sur Δ_i. Le quotient $B_i \subset D$ de Δ_i est donc un diviseur de cartier relatif étale de degré k_i sur S. On a alors:

Proposition 9.3. *Soit $\pi : C \to D$ un revêtement cyclique entre courbes lisses de base S. Avec les notations précédentes, en particulier $\mathcal{L} := \mathcal{L}_1$, on a $B = \sum_{i=1}^{s} p_i B_i$, et:*
1) Il y a un unique isomorphisme $\mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{\otimes i}\left[\frac{iB}{n}\right]$ qui est l'identité sur $\mathcal{L}^{\otimes i}$. Mieux il y a un isomorphisme unique de l'algèbre "cyclique" $E = \pi_*(\mathcal{O}_C)$ sur

$$\bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes i}\left[\frac{iB}{n}\right] \tag{9.9}$$

2) le champ de Hurwitz $\mathcal{H}_{g,n,\xi}$ dont les objets sont les revêtements cycliques de degré n, de base une courbe lisse de genre g, et de donnée de ramification ξ est isomorphe au champ dont les objets sont les triplets $(D, \mathcal{L}, \Phi)$, où D est lisse de genre g, et $(\mathcal{L}, \Phi)$ est une racine d'ordre n de $\mathcal{O}_D(-B)$, le diviseur $B = \sum_{j=1}^{s} p_j B_j$ étant comme prescrit par la donnée ξ.

Preuve: Du fait que $B = \sum_{j=1}^{s} p_j B_j$, avec B_j étale de degré k_j sur la base S, on peut poser

$$\left[\frac{iB}{n}\right] = \sum_j [\frac{ip_j B_j}{n}] \tag{9.10}$$

L'assertion 1) ainsi que la première partie de 2) se vérifient par un argument local analoque à celui utilisé dans la preuve 9.2 (voir note de bas de page). On peut d'une autre manière tout déduire de la Proposition 9.2. En effet si la base S est intègre, l'égalité de diviseurs de Cartier relatifs $\mathrm{Div}\,(\Phi_i) = \left[\frac{iB}{n}\right]$ découle du fait qu'il y a égalité sur toute fibre géométrique. Comme toutes ces constructions sont compatibles aux changements de base, le cas général se déduit de ce cas particulier par changement de base à partir de la déformation universelle d'une quelconque fibre. Noter que l'isomorphisme invoqué est unique. Pour finir la preuve de 1), notons que le terme de gauche dans (9.10) possède une structure naturelle de $\mathcal{O}_D$-algèbre, l'identification est alors claire.

Pour 2) on observera d'abord que la catégorie formée des triplets $(D, \mathcal{L}, \Phi)$ est fibrée en groupoïdes, et en fait est un champ. L'assertion se résume donc à vérifier que le foncteur indiqué est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme [51]. Comme monomorphisme signifie que pour deux revétements $\pi : C \to D$ et $\pi' : C' \to D'$ de base S, le morphisme

$$\mathrm{Hom}\,(\pi, \pi') \to \mathrm{Hom}\,((D, \mathcal{L}, \Phi), (D', \mathcal{L}', \Phi'))$$

est bijectif, il est clair que cela découle de 2). Pour vérifier que ce foncteur est un épimorphisme, il suffit de noter que si on part d'un objet $(D/S, \mathcal{L}, \Phi)$ comme il est indiqué, alors $\mathcal{A} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes i}\left[\frac{iB}{n}\right]$ a une structure naturelle de O_D-algèbre, il suffit alors de poser $C = \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{A})$.

□

9.2. Revêtements cycliques stables

9.2.1 Revêtements cycliques stables et quasi-racines d'un faisceau inversible

Si $\pi : C \to D$ est un revêtement stable défini sur k, avec D singulière, on peut former de nouveau la décomposition

$$\pi_\star(\mathcal{O}_C) = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_j \tag{9.11}$$

Le $\mathcal{O}_D$ module $\pi_\star(\mathcal{O}_C)$ n'est plus en général localement libre de rang n, mais seulement sans torsion de rang n. Rappelons dans le contexte des revêtements cycliques la description précise des singularités des $\mathcal{L}_j$ (§ 7.3.3). Considérons $P \in C$ un point double de stabilisateur d'ordre $e|n$, et soit Q le point double image dans D. Si σ est un générateur fixé de G, on notera $\tau = \sigma^{\frac{n}{e}}$ le générateur distingué du stabilisateur $H = G_P$. La description locale au point Q de la décomposition 9.11 est comme suit (§7.3.3).

Choisissons des "coordonnées locales" x, y le long des branches telles que

$$\tau(x) = \zeta_e^k x\,,\ \tau(y) = \zeta_e^{e-k} y \tag{9.12}$$

conditions exprimant la stabilité de l'action. Notons par un tilde la normalisation $k[[x]] \times k[[y]]$ de $\hat{\mathcal{O}}_Q$. Si un caractère de H est identifié à sa valeur sur le générateur τ, rappelons la décomposition (7.26):

Lemme 9.4. *La décomposition en H-sous faisceaux propres de $\hat{\mathcal{O}}_P$ est:*

$$\hat{\mathcal{O}}_P \;=\; \hat{\mathcal{O}}_Q \bigoplus \left(\bigoplus_{\alpha=1}^{e-1} \widetilde{\hat{\mathcal{O}}_Q}(x^\alpha, y^{e-\alpha}) \right) \tag{9.13}$$

□

En application des résultats généraux de la section 7.3, on peut décrire le lieu singulier des faisceaux $\mathcal{L}_j$ (voir en particulier le corollaire 7.9)[23]:

Proposition 9.5. *Le faisceau $\mathcal{L}_j$ est localement libre en un point double $Q \in D$ si et seulement si e étant l'ordre du sous-groupe d'isotropie en un point P au dessus de Q, $j \equiv 0 \pmod{e}$.*

Posons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$, et analysons maintenant les morphismes (9.5) induits par la multiplication, et plus particulièrement les morphismes $\Phi_j : \mathcal{L}^{\otimes j} \longrightarrow \mathcal{L}_j \;\; (1 \leq j \leq n)$.

Proposition 9.6. *Si $Q \in D$ est du type NS ($e > 1$), il y a deux cas:*
i) Le point Q est une singularité de $\mathcal{L}_j$, alors la dimension de la fibre en Q du conoyau de Φ_j est $j-1$, et l'idéal de $\mathcal{O}_Q$ image de $(\Phi_j)_Q$ est non principal.
ii) Dans le cas contraire, si $e|j$, la dimension du conoyau de Φ_j en Q est encore $j-1$, mais l'image de Φ_j est alors un idéal principal, i.e. libre de rang un.
Si $j = n$, le morphisme $\Phi : \mathcal{L}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{O}_D(-B)$ induit par la multiplication fait de $\mathcal{L}$ une racine n-ième de $\mathcal{O}_D(-B)$.

Preuve: Cela résulte d'un calcul élémentaire (voir la section 7.3.2). Traitons le premier cas, donc $e \mid j$. Il résulte de la proposition 9.5 , et avec des notations évidentes, qu'on peut prendre la "résolvante" $X_j = \sum_{i=1}^{n/e} \zeta_e^{-ij} \sigma^{ij}(x^{j\nu}, y^{e-j\nu})$ comme générateur local du $\widetilde{\hat{\mathcal{O}}_Q}$ module principal $(\hat{\mathcal{L}}_j)_Q$. Le même résultat vaut pour $j = 1$. On voit alors immédiatement que l'image par Φ_j de $X_1^{\otimes j}$ est

$$(\Phi_j)_Q \; (X_1^{\otimes j}) \;=\; (u^{[\frac{j\nu}{e}]} \;,\; v^{j-1-[\frac{j\nu}{e}]}) X_j$$

Du fait que la fibre en Q de $\mathcal{L}^{\otimes j}$ modulo le sous-module de torsion n'est pas libre, car le point est NS, les deux membres de l'égalité (9.14) sont sans torsion de rang un, non libres, d'où le conoyau de Φ_j en Q s'identifie à

$$\frac{k[[u]] \times k[[v]]}{(u^{[\frac{j\nu}{e}]}, v^{j-1-[\frac{j\nu}{e}]})}$$

la dimension de ce conoyau est donc $j-1$. Pour la derniére assertion, la seule chose à vérifier est l'égalité $n \deg(\mathcal{L}) = -\deg(B)$. Comme cette égalité est invariante par déformation, de même la formation de $\mathcal{L}$, il suffit de la vérifier dans le cas lisse, ce qui est clair.

□

Il est naturel de demander si le morphisme Φ provient par ρ_* d'un morphisme analogue $\tilde{\Phi}$: $\mathcal{O}_{\tilde{D}}(n) \to \mathcal{O}_{\tilde{D}}$ (voir Proposition 7.12 et la construction qui précède). La réponse est donnée essentiellement par ([44], Proposition 3.1.5).

[23] Noter que $\mathcal{L}_j$ et $\mathcal{L}_k$ ont même lieu singulier ssi $(j, n) = (k, n)$.

Proposition 9.7. *Sous les conditions précédentes il existe un unique morphisme*

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{O}_{\tilde{D}}(n) \to \mathcal{O}_{\tilde{D}}(-B) \tag{9.15}$$

tel que $\rho_*(\tilde{\Phi}) = \Phi$.

Preuve: Soit U l'ouvert image réciproque du complémentaire du lieu singulier de $\mathcal{L}$. Le morphisme ρ est un isomorphisme sur U. Comme U est schématiquement dense, le morphisme $\tilde{\Phi}$ s'il existe est unique. Il suffit donc de le construire au-dessus d'un voisinage d'un point singulier Q, appelé D pour simplifier. De la description de $\tilde{D}$ comme sous-schéma de $\mathbb{P}^1 \times D$ donnépar les équations

$$\xi y - qv = \xi p - xv = 0$$

on note que $\tilde{D} = U_1 \cap U_2$, avec $U_1 = \mathrm{Spec}\,(\hat{\mathcal{O}}_Q[s]/(sy - q, sp - x))$, $U_2 = \mathrm{Spec}\,(\hat{\mathcal{O}}_Q[t]/(y - qt, p - xt))$. Le cocycle qui définit $\mathcal{O}_{\tilde{D}}(n)$ est $s_{1,2} = t^n \in \Gamma(U_1 \cap U_2, \mathcal{O}_{\tilde{D}})$. Il suffit donc de trouver des fonctions régulières ϕ_i sur $U_i\,(i = 1, 2)$ avec $\phi_1 = t^n \phi_2$. Mais on a $p = \pi^\nu, q = \pi^{e-\nu}$. Si $a = m\nu, b = m(e - \nu)$, alors $p^b = q^a$. Il suffit de prendre $\phi_1 = y^b$ et $\phi_2 = x^a$. La vérification est immédiate.

□

Avec les notations précédentes, à un point de type NS, on attache une paire d'entiers (non ordonnés) *le symbole* (a, b) :

$$a = m\nu,\ b = n - m\nu,\ m = \frac{n}{e}, \quad a + b = n \tag{9.16}$$

On a $1 \leq \nu < e$, et $\mathrm{pgcd}\,(\nu, e) = 1$. En particulier $\mathrm{pgcd}\,(a, n) = m$. Le symbole décrit l'action du stabilisateur d'un point $P \in C$ au dessus de Q, sur les branches en P. Notons que l'image de Φ en Q est l'idéal (non principal) $(u^a, v^b)\widehat{\mathcal{O}_Q}$ de colongeur $n - 1$.

Soit maintenant un object $\pi : C \to D = C/G$ du champ de Hurwitz $\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi}$, au dessus du schéma de base S. Dans la notation du champ on omet le genre g (fixé) de C, ainsi que la donnée de ramification ξ. Notons q et p les morphismes structuraux des S-schémas C et D. Soit de nouveau la décomposition en facteurs isotypiques:

$$\pi_\star(\mathcal{O}_C) = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_j \tag{9.17}$$

les faisceaux $\mathcal{L}_j$ étant des faisceaux sans torsion de rang un (relatifs) sur S, i.e. plats sur S et les fibres au-dessus d'un point géométrique étant sans torsion de rang un. La structure locale de $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$ peut être précisée de la manière suivante:

Proposition 9.8. *Soit $Q \in D_s$ un point de la fibre au dessus du point géométrique $s \in S$. On suppose que Q est un point singulier de $\mathcal{L}$, de symbole (a, b); alors $\hat{\mathcal{L}}_Q$ est un module sans torsion de rang un au dessus de $\hat{\mathcal{O}}_s$ de type $E(\tau^a, \tau^b)$.*

Preuve: Il suffit d'appliquer la Proposition 7.11.

□

On prouve que le champ des revêtements cycliques de degré n et de donnée de ramification fixée ξ (noté $\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi}$), est isomorphe au champ dont les objets sont les courbes stables marquées (ou piquées)[24] $(D, B = \sum_{j=1}^{s} p_j B_j)$ équipées d'une racine n-ième $\mathcal{L}$ du faisceau $\mathcal{O}_D(-B)$, $p_i = m_i \nu_i$.

[24] la courbe D est marquée par le diviseur $B = B_1 + \ldots + B_s$, le diviseur relatif B_i étant étale de degré k_i sur la base S, et les B_i étant disjoints deux à deux. Rappelons que B_i est le lieu des points de branchement d'holonomie fixée p_i.

Théorème 9.9. *Le foncteur* $(\pi : C \to D) \mapsto (D, \mathcal{L}, \Phi)$ *établit un isomorphisme de* $\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi}$ *sur le champ dont les objets sont les triplets* $(D, \mathcal{L}, \Phi)$*, où* D *est une courbe stable marquée par* $B = \sum_{i=1}^{s} B_i$ *(voir note 28), et* $(\mathcal{L}, \Phi)$ *est une racine, dans le sens (9.1)n d'ordre* n *de* $\mathcal{O}_D(-\sum_{i=1}^{s} p_i B_i)$*.*

Preuve: Le fait que la catégorie fibrée en groupoïdes d'objets les triplets $(D, \mathcal{L}, \Phi)$ soit un champ algébrique séparé et lisse est une conséquence directe des résultats de Jarvis ([44], Theorem 5.3.1). Essentiel est le résultat qui décrit la déformation universelle d'une racine d'ordre n (loc.cit, et [43] Theorem 2.3.2). Ce résultat dit que si $(D, \mathcal{L}, \Phi)$ est une courbe stable marquée par le diviseur $B_1 + \ldots + B_s$, munie d'une racine d'ordre n de $\mathcal{O}(-B)$, $(B = \sum_i p_i B_i)$, la base de la déformation universelle est une algèbre de séries formelles $k[[\tau_1, \ldots, \tau_b, t_{b+1}, \ldots, t_{3g-3+b}]]$, et le morphisme qui a une déformation de ce triplet associe la déformation correspondante de la courbe marquée D, s'identifie à

$$\psi : \operatorname{Spec} k[[\tau_1, \ldots, \tau_b, \tau_{b+1}, \ldots, \tau_{3g-3+b}]] \longrightarrow \operatorname{Spec} k[[t_1, \ldots, t_b, \ldots, t_{3g-3+b}]] \tag{9.18}$$

où $\psi^*(t_j) = \tau_j^{e_i}$ si $j \leq b$, et $\psi^*(t_j) = \tau_j$ si $b < j \leq 3g - 3 + b$. Si Q est un point singulier de $\mathcal{L}$ de signature (a, b), $a + b = n$, on pose $e = \frac{n}{\operatorname{pgcd}(a,b)}$. On notera que ce résultat dit que si le triplet $(D, \mathcal{L}, \Phi)$ de base $\operatorname{Spec} k$ dérive du revêtement $\pi : C \to D$, alors π et $(D, \mathcal{L}, \Phi)$ ont "même" théorie des déformations (comparer avec le Théorème 5.5). Cela signifie que si $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la déformation universelle du revêtement $\pi : C \to D$, alors le triplet image $(\mathcal{D}, \mathcal{L}, \Phi)$ est la déformation universelle de $(D, \mathcal{L}, \Phi)$. Ceci étant, armé de cet argument, la preuve est analogue à celle de la proposition 9.4 (3).

Montrons que le foncteur est un monomorphisme. Cela revient d'abord à prouver que si un S-automorphisme f de C induit l'identité sur $(D, \mathcal{L}, \Phi)$, alors $f = 1$. Comme le groupe $\operatorname{Aut}(C/S)$ est fini non ramifié, il suffit de le voir sur les fibres, donc si $S = \operatorname{Spec} k$. Il est clair que f est l'identité en dehors des points doubles de C, donc $f = 1$. On suppose maintenant avoir deux objets $\pi : C \to D$ et $\pi : C' \to D$ avec une même image $(D, \mathcal{L}, \Phi)$, on prouve que les deux revêtements sont isomorphes. Du fait de l'unicité de l'isomorphisme, le problème est local sur S, on peut donc supposer que tout est défini au-dessus de la base de la déformation universelle, commune aux trois objets, disons de la fibre $(D_s, \mathcal{L}_s, \Phi_s)$. Cela permet de supposer que S est lisse (connexe), et que les fibres génériques des courbes en jeu sont lisses.

Soit le S-schéma $\nu : \operatorname{Isom}(\pi, \pi') \longrightarrow S$ formé des isomorphismes induisant l'identité sur $(D, \mathcal{L}, \Phi)$. On sait que ν est fini non ramifié sur S. On sait par ailleurs que ν est un monomorphisme dominant, c'est donc un isomorphisme.

Reste à voir que localement sur S tout triplet $(D, \mathcal{L}, \Phi)$ de base S provient d'un revêtement. Il suffit de relever un triplet défini sur la base $S = \operatorname{Spec}\ k$, ceci du fait que l'identification des foncteurs de déformations permet alors de relever localement une famille arbitraire. Dans le cas ponctuel, on déforme le triplet $(D, \mathcal{L}, \Phi)$ à une base $\operatorname{Spec} R$, où R est un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k, de fibre générique D_K lisse. Quitte à épaissir R, on peut supposer que la fibre générique du triplet provient du revêtement $C_K \to D_K$. Le modèle stable de ce revêtement (§ 5.3) répond à la question.

□

9.2.3. Composantes irréductibles du bord

La description des composantes irréductibles du bord de $\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi}$ découle directement des résultats de la section 7.2. On doit considérer une base qui correspond soit à un segment, soit une boucle.

Le segment: Il s'agit de décrire les diviseurs du champ $\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi}$ déterminés par les graphes modulaires de Hurwitz Γ qui recouvrent le segment. Décrire un revêtement stable $C \to \Sigma$ de groupe $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de base $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, courbe avec deux composantes lisses de genres respectifs $1 \leq g_1 \leq g_2$, $g_1 + g_2 = g$, un seul point double, et de donnée de ramification ξ, est équivalent à la donnée d'une racine n-ième du faisceau $\mathcal{O}_\Sigma(-B)$, B étant le diviseur de branchement. Il s'avère cependant beaucoup plus commode dans les descriptions qui suivent de conserver le point de vue des revêtements. Dans la suite la base sera notée indifféremment D ou Σ. Le diviseur de branchement sera noté de la manière suivante $B = \sum_{\alpha=1}^{b} m_\alpha \nu_\alpha Q_\alpha$, avec $m_\alpha = \frac{n}{e_\alpha}$, $1 \leq \nu_\alpha < e_\alpha$ et $\operatorname{pgcd}(e_\alpha, \nu_\alpha) = 1$. On notera que $\sum_{\alpha=1}^{b} m_\alpha \nu_\alpha \equiv 0 \pmod{n}$.

Le revêtement $C \to \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ comme spécifié ci-dessus impose à C a avoir la topologie suivante (comparer avec la discussion générale de la section 7.4):

$$C = \mathbf{Ind}_{G_1}^{G}\, C_1 \ \vee\ \mathbf{Ind}_{G_2}^{G}\, C_2 \tag{9.19}$$

pour deux courbes lisses C_1 et C_2 induisant des revêtements $C_1 \to \Sigma_1$ et $C_2 \to \Sigma_2$ de groupes respectifs G_1 et G_2, sous-groupes de G. Le stabilisateur d'un point double P (on suppose que $P \in C_1 \cap C_2$) de C étant $H \subset G_1 \cap G_2$. Soit $n_i = \#G_i$ $(i = 1, 2)$, $e = \#H$. Donc $e \mid n_1, n_2$, et du fait de la connexité de C, ppcm $(n_1, n_2) = n$. Il est aisé de voir que si le diviseur de branchement $B_i^\star$ de $C_i \to \Sigma_i$ est écrit sous la forme

$$B_i^\star = \sum_{\alpha=1}^{b_i} m_\alpha^i \nu_\alpha^i Q_\alpha^i \ + \ \frac{n_i}{e}\nu^i Q^i \ = \ B_i + \frac{n_i}{e}\nu^i Q^i \ \ (i = 1, 2) \tag{9.20}$$

avec $m_\alpha^i = \frac{n_i}{e_\alpha^i}$, les $Q_\alpha^i(\text{resp.}Q^i)$ $(i = 1, 2)$ étant les points qui après identification donnent le point double $Q_\alpha(\text{resp.}Q)$. Le diviseur de branchement du revêtement $\pi : C \to \Sigma$ est alors

$$B = \frac{n}{n_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{b_1} m_\alpha^1 \nu_\alpha^1 Q_\alpha^1\right) + \frac{n}{n_2}\left(\sum_{\alpha=1}^{b_2} m_\alpha^2 \nu_\alpha^2 Q_\alpha^2\right) \ = \ \frac{n}{n_1}B_1 + \frac{n}{n_2}B_2 \tag{9.21}$$

Notons comme conséquence de (7.20) les congruences $\sum_{\alpha=1}^{b_i} m_\alpha^i \nu_\alpha^i \ + \ \frac{n_i}{e}\nu^i \ \equiv \ 0 \mod n_i$ $(i = 1, 2)$ qui si B_i est connu, déterminent de manière unique e et les ν^i. Par exemple $\frac{n_i}{e}\nu^i$ est le reste modulo n_i de $\sum_{\alpha=1}^{b_i} m_\alpha^i \nu_\alpha^i$; notons que $\nu^1 + \nu^2 = e$. En d'autres termes la signature du point double Q, obtenu par identification de Q^1 et Q^2 est donnée par (9.15)

$$a = \frac{n}{e}\nu^1, b = \frac{ne}{\nu^2} \tag{9.22}$$

On a $a + b = n$ et $\frac{n}{e} = \operatorname{pgcd}(a, b)$. La partition notée dans la suite π, du diviseur de branchement (de manière équivalente de la donnée de ramification) en

$$(\pi)\ \ B = \frac{n}{n_1}B_1 + \frac{n}{n_2}B_2 \tag{9.23}$$

détermine tous les autres paramètres i.e. $m^1\nu^1 = \frac{n_1}{e^1}\nu^1$ et $m^2\nu^2 = \frac{n_2}{e^2}\nu^2$, restes respectifs modulo n_i de $\sum_{\alpha=1}^{b_i} m_\alpha^i \nu_\alpha^i$ $(i = 1, 2)$. Rappelons que dans l'écriture précédente, $1 \leq \nu^i < e^i$ et $(\nu^i, e^i) = 1$. La congruence initiale

$$\deg(B) \;=\; \frac{n}{n_1}\left(\sum_{\alpha=1}^{b_1} m_\alpha^1 \nu_\alpha^1\right) \;+\; \frac{n}{n_2}\left(\sum_{\alpha=1}^{b_2} m_\alpha^2 \nu_\alpha^2\right) \;\equiv\; 0 \qquad (\mathrm{mod}\ n) \tag{9.24}$$

entraîne immédiatement $e^1 = e^2$. Notons par ailleurs que la stabilité impose $2g_i - 2 + b_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$. La signature (a, b) du point double est en fait déterminée par les seuls supports de la partition π (9.23), i.e. la partition des points de branchements $[1, b] = I_1 \coprod I_2$. Nous noterons dans la suite $\delta_{g_1,g_2,\pi}$ ou δ_{g_1,g_2,B_1,B_2} la composante irréductible du bord correspondante à ces choix. Son image dans $\overline{\mathcal{M}}_{g',b}$ est la composante δ_{g_1,g_2,I_1,I_2}. Noter que $\delta_{g_1,g_2,B_1,B_2} = \delta_{g_2,g_1,B_2,B_1}$.

La boucle: $(g' \geq 1)$ On suppose que la base du revêtement est maintenant une courbe irréductible Σ de genre géométrique $g' - 1$, avec un unique point double Q. Notons $\tilde{\Sigma}$ la normalisation de Σ et soient Q^1, Q^2, les deux points de $\tilde{\Sigma}$ pré-images de Q. On sait (§7, 7.13) que pour l'espace total C du revêtement, il y a deux possibilités:

i) La courbe C est irréductible, disons avec $d = \frac{n}{e}$ points doubles. Alors la normalisation $\tilde{C}$ est irréductible, et le revêtement cyclique $\tilde{C} \to \tilde{\Sigma}$ est ramifié avec $b + 2$ points de branchement, ceux provenant des points de branchement de $C \to \Sigma$ et Q_1, Q_2. Le diviseur de branchement est donné par

$$\tilde{B} = B + m_1\nu_1 Q^1 + m_2\nu_2 Q^2 \tag{9.25}$$

B étant le diviseur de branchement de $\Sigma \to C$. Notons que $m_1\nu_1 + m_2\nu_2 = n$, en fait $\frac{n}{e} = m_1 = m_2$ et $a = m_1\nu_1, b = m_2\nu_2$ est la signature du point double Q. Nous noterons $\delta_{0,a,b}$, la composante décrite de cette manière.

ii) La courbe C est réductible. Alors il y a dans C une seule G-orbite de composantes irréductibles, fixons C_0 l'une d'entre elles. Il y a aussi une seule orbite de points doubles, soit $P \in C_0$ l'un de ces points. Notons G_0 le stabilisateur de C_0 et H celui de P, d'ordres respectifs $n_0 < n$ et e, et $e|n_0$. Soit $g_0 \in G \setminus G_0$ un élément tel que $P \in C_0 \cap g_0(C_0)$. On sait que $G_0 \cup g_0$ engendre G du fait de la connexité de C (§7.2), et que par ailleurs $H \subset G_0 \cap g_0 G_0 g_0^{-1} = G_0$ puisque le groupe est abélien. Notons que l'élément g_0 est déterminé modulo G_0, et au changement $g_0 \mapsto g_0^{-1}$ près. La courbe C est alors obtenue par identification des couples de points $(gP, gg_0^{-1}P) \in Ind_{G_0}^G\ (C_0)$. Le diviseur de branchement de $C_0 \to \Sigma_0$ est visiblement de la forme

$$B_0 + \frac{n_0}{e}\nu^1 Q_1 + \frac{n_0}{e}\nu^2 Q_2, \qquad \nu^1 + \nu^2 = e \tag{9.26}$$

avec nécessairement la factorisation de B désignée (de nouveau) π:

$$(\pi):\ B = \frac{n}{n_0} B_0 \tag{9.27}$$

La signature du point double Q est $a = \frac{n}{n_0}a_0,\ b = \frac{n}{n_0}b_0$, avec $a_0 = \frac{n_0}{e}\nu^1\ ,\ b_0 = \frac{n_0}{e}\nu^2$. Noter que ce choix n'est soumis à aucune contrainte, i.e. $e|n_0$ étant fixé, on choisit $\nu_1 < e$, premier à e, alors ν_2 s'en déduit du fait de l'égalité (9.26). En sens inverse, on a $e = \frac{n_0}{\mathrm{pgcd}\,(n_0, a_0)}$.

La notation retenue pour cette composante irréductible est $\delta_{0,\pi,a,b}$. Le cas i) correspond à $n_0 = n$. La notation regroupe donc les deux cas.

□

9.3. Revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1$

Lorsque la base est $\mathbb{P}^1$ on identifie le champ (ouvert) de Hurwitz à un champ quotient (comparer avec [4] qui se limite aux revêtements uniformes).

9.3.1. Quelques calculs de torseurs

Il est connu que la classification des objets au dessus de la catégorie des k-schémas (k corps, ou anneau de base), étale-localement (ou fpqc) d'une "marque" donnée (terminologie de Demazure-Gabriel [21]), est équivalente à la donnée du champ classifiant $\mathbf{B}G$, avec pour groupe structural G, le groupe des automorphismes de l'objet marque. Une définition plus précise est comme suit. Soit $\mathcal{M}$ un champ (algébrique) au dessus de k. Soit X un k-schéma, et soit un objet $P \in \mathcal{M}(X)$, l'objet "marque". Disons que $Q \in \mathcal{M}(U)$ est de marque P, s'il y a un morphisme $\alpha : U \to X$, un recouvrement (étale) $U' \to U$, tels que $Q \times_U U' \cong P \times_X U'$, donc si $\mathrm{Isom}(Q, P \times_X U)(U') \neq \emptyset$.

On définit un champ $\mathcal{M}(P)$, le champ des objets de marque P, dont la catégorie des objets au-dessus de U sont les couples $(Q, \alpha : U \to X)$, avec la propriété de dessus, traduisant le fait que Q est de marque P, les morphismes étant les morphismes évidents. Ce champ n'est qu'une présentation différente du champ classifiant $\mathbf{B}(G/X)$, si $G = \mathrm{Aut}(P)$ est le groupe algébrique des automorphismes de P ([51], 2.4.2).

Proposition 9.10. *Sous les hypothèses qui précèdent, on a un isomorphisme de champs $\mathcal{M}(P) \xrightarrow{\sim} \mathbf{B}(G/X)$, $G = \mathrm{Aut}_k(P)$ étant le X-groupe algébrique des automorphismes de P. En particulier, si G est lisse de type fini, le champ $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ est algébrique.*

Preuve: Rappelons brièvement la définition de l'isomorphisme [21]. Si $(Q, \alpha) \in (\mathcal{P})$ est un objet de marque P au-dessus de S, il est clair que le S-schéma $\mathrm{Isom}_S(P \times S, Q \times_X S)$ est de manière naturelle un G fibré principal de base S, définissant le foncteur 9.33. En sens inverse si $E \to S$ est un $\mathrm{Aut}_X(P) \times_X S$ torseur, le produit contracté

$$E \times^{\mathrm{Aut}(P) \times_X S} (P \times_X S)$$

fournit un objet de marque P de base S. Ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre. D'une autre manière le champ $\mathcal{M}(P)$ est visiblement une gerbe sur X, qui est neutre car P en est une section sur X. Le résultat découle alors de ([51], Lemme (3.31))

□

Par exemple on peut prendre la marque k^n, avec $\mathcal{M}$ le champ des faisceaux localement libres de rang n sur les k-schémas ([51], Théorème 4.6.2.1). Alors le principe qui vient d'être rappelé dit que ce champ est isomorphe à $\mathbf{B}\mathrm{GL}(n)$. Plus significatif pour la suite est le cas du groupe projectif linéaire $\mathrm{PGL}(n) = \mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^n$. Le champ classifiant $\mathbf{B}\mathrm{PGL}(n)$ est isomorphe au champ dont les objets sont les fibrations en P^n au dessus d'un k-schéma. Le cas utile pour la suite est un mélange de ces exemples. Fixons un faisceau localement libre V de rang $r \geq 1$ sur P^1, donc en vertu d'un théorème de Grothendieck de la forme $V = \mathcal{O}(n_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(n_r)$, avec $n_1 \leq \ldots \leq n_r$. Soit la catégorie fibrée en groupoïdes $\mathcal{P}$, dont les objets au-dessus de S les couples $(D \to S, E)$, avec $D \to S$ une fibration en $\mathbb{P}^1$, et E un fibré vectoriel sur D de type V le long des fibres, c'est à dire, localement sur S, de la forme $\oplus_{i=1}^r \mathcal{L}_i$, où $\mathcal{L}_i$ est inversible de degré relatif n_i . Noter que cela a un sens car, localement pour la topologie étale, $D = \mathbb{P}^1_S$. L'identification des objets est un exercice aisé:

Lemme 9.11. *La catégorie fibrée en groupoïdes $\mathcal{P}$ est un champ algébrique. La marque des objets de $\mathcal{P}$ est $(\mathbb{P}^1, V)$.*
Le groupe des automorphismes G du modèle, est le groupe qui linéarise universellement le fibré V. Ce groupe s'insère donc dans une suite exacte

$$1 \to H = \mathrm{Aut}\,(V) \to G \to \mathrm{PGL}\,(1) \to 1 \tag{9.28}$$

Preuve: Le premier point se résume essentiellement à montrer que si (D, E) et (D', E') sont deux objets de $\mathcal{P}$ au-dessus du schéma S, alors le faisceau sur S_{et}

$$(T \to S) \mapsto \mathrm{Isom}_T\,((D_T, E_T), (D'_T, E'_T))$$

est représentable par un S-schéma de type fini. On peut procéder en deux étapes. Soit d'abord le foncteur $\mathrm{Isom}_S(D, D')$ qui est représenté un torseur $\mathcal{I}$ sous le groupe $\mathrm{PGL}\,(1)$. Si $\Phi : D \times_S \mathcal{I} \xrightarrow{\sim} D' \times_S \mathcal{I}$ est l'isomorphisme universel, on est ramené visiblement à prouver que le foncteur défini sur la catégorie des $\mathcal{I}$-schémas $(U \to \mathcal{I}) \mapsto \mathrm{Isom}_U(E_U, \Phi^*(E')_U)$ est représentable, en fait par un $\mathcal{I}$ schéma affine sur $\mathcal{I}$. C'est un fait connu. Identifions maintenant la marque des objets de $\mathcal{P}$. Il est clair que toute fibration en $\mathbb{P}^1$ de base S est localement (pour la topologie étale) de la forme $\mathbb{P}^1_S$. Supposons donc $D = \mathbb{P}^1_S$. Ceci étant, le module localement libre E étant de type V, quitte à localiser si nécessaire, on peut le supposer de la forme $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_S}(n_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_S}(n_r) = p^*(V)$, où $p : \mathbb{P}^1_S \to \mathbb{P}^1_k$ est le morphisme de changement de base. Ce qui montre que la marque est bien $(\mathbb{P}^1, V)$. Pour décrire le groupe des automorphismes de l'objet marque, rappelons que si un groupe algébrique G agit sur une variété X, l'action étant $\mu : G \times X \to X$, une G-linéarisation d'un faisceau cohérent F, est un isomorphisme $\Phi : p_2^*(F) \xrightarrow{\sim} \mu^*(F)$ vérifiant une relation de cocycle bien connue (par exemple [57], voir aussi § 6.1). En général un faisceau F localement libre de rang n sur X n'est pas G-linéarisable, cependant il le devient si le groupe G est agrandi convenablement. De manière précise, l'argument rappelé en début de preuve montre qu'il existe un groupe algébrique $\tilde{G}$, et un morphisme de groupes $\tilde{G} \to G$, tel que les G-linéarisations de F correspondent de manière bijective aux sections de $\tilde{G} \to G$. En fait on applique la construction du début au couple de faisceaux $(\mu^*(F), p_2^*(F))$, μ et p_2 étant respectivement l'action et la projection $G \times X \to X$, de sorte que

$$\tilde{G} = \mathrm{Isom}\,(p_2^*(F), \mu^*(F))$$

D'une manière simplifiée, les points de $\tilde{G}$ sont les couples (g, ϕ), avec $g \in G$, et $\phi : F \xrightarrow{\sim} g^*(F)$. La loi de composition étant

$$(g, \phi)(h, \psi) = (gh, h^*(\phi)\psi) \tag{9.29}$$

Si on a pour tout $g \in G$, $g^*(F) \cong F$, alors ce groupe s'insère dans une extension $1 \to \mathrm{Aut}\,(F) \to \tilde{G} \to G \to 1$. Appliqué à la situation présente, cela donne la seconde partie du lemme.

□

Noter que l'extension (9.28) n'est en général pas scindée du fait que $\mathcal{O}(n)$ est $\mathrm{PGL}\,(1)$-linéarisable si et seulement si n est pair; il n'est que $\mathrm{GL}\,(2)$-linéarisable. Soit $\alpha_g : \mathcal{O}(1) \xrightarrow{\sim} g^*(\mathcal{O}(1))$ la linéarisation

tautologique de $\mathcal{O}(1)$ qui induit une linéarisation de V, $\oplus_{i=1}^r \alpha_g^{\otimes n_i} : V \xrightarrow{\sim} g^*(V) \quad (g \in \mathrm{GL}(2))$. Noter que $\lambda 1_2$ agit diagonalement sur V par la matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda^{n_1}, \ldots, \lambda^{n_r})$ On notera cependant que la linéarisation tautologique de V sous $\mathrm{GL}(2)$ se descend dans tous les cas en une linéarisation sous $\mathrm{GL}(2)/\mu_d$, si d est le pgcd des n_i. Le groupe H est aisé à décrire. Supposons la partition (n_i) de $r = \sum_{i=1}^r n_i$, prenant p valeurs distinctes $k_1 < \ldots < k_p$, k_i apparaissant α_i fois. Alors V a une filtration canonique

$$0 \neq F^p \subset \ldots \subset F^1 = E, \quad F^j/F^{j+1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_S}(k_j)^{\oplus(\alpha_j)} \tag{9.30}$$

En fait si $V = \oplus_{j=1}^p \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_j)^{\oplus(\alpha_j)}$, on a $F_j = \oplus_{m=j}^p \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k_m)^{\oplus(\alpha_m)}$. En particulier un automorphisme de E respecte filtration $F_.$. Il est alors immédiat que $H = \mathrm{Aut}(E)$ est le produit semi-direct

$$H = U \rtimes \prod_{j=1}^p \mathrm{GL}(\alpha_i)$$

d'un groupe unipotent U par un produit de groupes linéaires. Dans certains cas, G est en fait un produit semi-direct. Supposons $\alpha_1 = \ldots \alpha_p = 1$. Soit une relation de Bezout $1 = \sum_j m_j \frac{k_j}{d}$. Considérons le caractère de H donné par $\chi : H \to \prod_{j=1}^p \mathrm{GL}(\alpha_i) \xrightarrow{\psi} G_m$ avec $\psi((g_j)) = \prod_j \det(g_j)^{m_j}$, et soit K le noyau de χ. On a la remarque évidente:

Lemme 9.12. *Sous les conditions indiquées, le groupe H est le produit semi-direct $H = K \rtimes \mathrm{GL}(2)/\mu_d$. Si de plus d est pair, la suite (9.28) est scindée.*

Preuve: Notons $\alpha : \mathrm{GL}(2) \to G$ la section induite par la linéarisation canonique. Alors les éléments de K qui sont aussi dans l'image de α, sont les $\mathrm{diag}(\lambda^{n_1}, \ldots, \lambda^{n_r})$, avec $\lambda^{\sum m_i n_i} = \lambda^d = 1$. Cette intersection est donc réduite à l'identité. Le reste est clair. Pour le point deux, notons que si les n_i sont tous pairs, alors on obtient une section de $G \to \mathrm{PGL}(1)$ par factorisation de $g \in \mathrm{GL}(2) \mapsto \oplus_i \alpha_g^{\otimes n_i} \det(g)^{-n_i/2}$.

□

9.3.2. Interlude: Géométrie du discriminant des formes binaires

L'espace affine des formes binaires admet une stratification naturelle, dont la géométrie est intimement liée à celle des schémas de Hurwitz classifiant les revêtements cycliques de $\mathbb{P}^1$. Soit N un entier fixé dans toute cette section, et soit $\mu = n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_r$ une partition (fixée) de poids N. Une forme binaire (non nulle)

$$a_0 X^N + a_1 X^{N-1} Y + \ldots + a_N Y^N \tag{9.31}$$

est représentée par le point $(a_0, \cdots, a_N) \in \mathbb{A}_*^{N+1}$. On notera $X_\mu = X_{(n_1,\ldots,n_r)}$ la sous variété (localement fermée) de l'espace affine $\mathbb{A}^{N+1}$ des formes binaires de degré N, formée de celles qui sont le produit de r facteurs linéaires non proportionnels, de multiplicités respectives $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_r$. On parlera de μ comme du type combinatoire de la forme binaire. Il est facile de décrire X_μ comme un cône au dessus d'un produit d'espaces projectifs. On écrira préférablement la partition μ sous la forme duale $\mu = m_1^{k_1} \ldots m_s^{k_s}$, signifiant que la fonction $i \to n_i$ prend les valeurs distinctes $m_1 < \ldots < m_s$

respectivement $k_1, \ldots, k_s$ fois. Une forme binaire de type μ peut alors être écrite sous la forme plus rigide $F = \prod_{i=1}^{s} f_i^{m_i}$, $(f_i, f_j) = 1$ si $i \neq j$, $\deg(f_i) = k_i$, f_i étant sans facteur multiple. La décomposition est génériquement bien définie à l'action du groupe diagonalisable près

$$T_\mu = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s), \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_i} = 1\} \tag{9.32}$$

Pour décrire avec plus de précision la stratification de $\mathbb{A}_*^{N+1}$, de strates les sous-schémas X_μ , rappelons (voir par exemple [47]) quelques propriétés du morphisme de Viète. Soit $Z_N = (\mathbb{A}_*^2)^N$ la variété des $2N$-uples

$$(u_1, v_1, \ldots, u_N, v_N), \quad (u_i, v_i) \neq (0, 0),\ 1 \leq i \leq N \tag{9.33}$$

Il y a sur Z_N une action évidente d'une part du groupe G_m^N, et d'autre part du groupe symétrique S_N. Il en résulte une action du produit semi-direct $G_m^N \rtimes S_N$ sur $(\mathbb{A}_*^2)^N$, telle que $Z_N/G_m^N \rtimes S_N = (\mathbb{P}^1)^N/S_N = \mathbb{P}^N$. Soit le sous-groupe $T_N = \{(t_1, \ldots, t_N) \in G_m^N / \prod_i t_i = 1\}$. Les choses s'expriment mieux en termes de cônes au dessus d'une variété. Rappelons que si X est une variété normale, et si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible ample sur X, alors l'algèbre

$$R = \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes d}) \tag{9.34}$$

est de type fini, et normale. La variété affine $\mathrm{Spec}\,(R)$ est le cône de base X défini par $\mathcal{L}$. Si X est lisse, le sommet est le seul point singulier, point singulier conique, et il est immédiat que le fibré vectoriel $V(\mathcal{L}) \to X$, induit une résolution de la singularité conique, via le morphisme naturel $V(\mathcal{L}) \to \mathrm{Spec}\,(R)$. Le diviseur exceptionnel est la section nulle de la fibration, et son complémentaire est isomorphe au cône épointé $\mathrm{Spec}\,(R) - 0$. Notons par ailleurs que $\mathrm{Spec}\,(R) - 0/G_m = X$, et $\mathrm{Pic}\,(\mathrm{Spec}\, R - 0) = \mathrm{Pic}\,(X)/[\mathcal{L}]$. Ainsi la variété notée $\mathbb{A}_*^{N+1}$ des formes binaires de degré N peut être identifiée avec le cône épointé de base $\mathbb{P}^N$, relatif à $\mathcal{O}(1)$. Rappelons que le morphisme de Viete (relations coefficients-racines) $v : Z_N = (\mathbb{A}_*^2)^N \to \mathbb{A}_*^{N+1}$ est défini comme suit:

$$(u_1, v_1, \ldots, u_N, v_N) \mapsto \prod_{i=1}^{N} (u_i X - v_i Y) = a_0 X^N + \ldots + a_N Y^N \tag{9.35}$$

Ce morphisme permet de justifier l'identification classique suivante:

Lemme 9.13. *Le quotient $X_N = Z_N/T_N$ est le cône épointé de base $(\mathbb{P}^1)^N$ défini par le faisceau inversible $\mathcal{O}(1, \ldots, 1)$, de plus $Z_N/T_N \rtimes S_N = \mathbb{A}_*^{N+1}$.*

□ Pour décrire X_μ on forme d'abord le plongement "diagonal" de $(\mathbb{A}_*^2)^r$ dans $(\mathbb{A}_*^2)^N$ i.e.

$$(u_1, v_1, \ldots, u_r, v_r) \mapsto (\overbrace{u_1, v_1, \ldots, u_1, v_1}, u_2, v_2, \ldots, \overbrace{u_r, v_r, \ldots, u_r, v_r}) \tag{9.36}$$

le premier couple répété n_1 fois, etc. On note que l'image de (9.36) est la sous variété des points fixes de $S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_r}$. Le sous groupe de $T_N \rtimes S_N$ qui agit sur cette image, est le normalisateur de $S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_r}$, donc est le groupe $T_\mu \rtimes Norm_{S_N}(S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_r})$, avec T_μ donné par

$$T_\mu = T_N^{S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_r}} = \{(t_1, \ldots t_1, t_2, \ldots, \ldots, t_r)\},\ t_1^{n_1} \ldots t_r^{n_r} = 1 \tag{9.37}$$

Noter que cette action est libre génériquement, mais pas libre partout. On a utilisé en passant le lemme évident suivant:

Lemme 9.14. *Soit un produit semi direct $G = H \rtimes K$, et soit $\Delta \subset K$ un sous-groupe de K. Le normalisateur de Δ dans G est $H^{\Delta} \rtimes N_K(\Delta)$.*

$\square$

Le groupe diagonalisable T_μ n'est connexe que si $d = \mathrm{pgcd}(n_1, \ldots, n_r) = 1$, sinon $T_\mu/T_\mu^\circ = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Noter qu'à cela correspond une action libre du groupe diagonalisable $T_\mu \cong \ker(G_m^r \to G_m)$, $(t_1, \ldots, t_r) \mapsto t_1^{n_1} \ldots t_r^{n_r}$ sur $(\mathbb{A}_*^2)^r$ qui s'exprime par

$$(t_1, \ldots, t_r).(u_1, v_1, \ldots, u_r, v_r) = (t_1u_1, t_1v_1, \ldots, t_ru_r, t_rv_r)$$

et qui rend le plongement (9.36) équivariant. Il en découle une action résiduelle du normalisateur $N_\mu := Norm_{S_N}(S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_r})$ sur $Z_\mu = (\mathbb{A}_*^2)^r)/T_\mu$. Rappelons que les valeurs distinctes prises par les n_i sont $m_i = n_{k_1+\ldots+k_i}$, $m_1 < \ldots < m_s$. On trouve pour le normalisateur N_μ le wreath product $N_\mu = (S_{m_1} \wr S_{k_1}) \times \ldots \times (S_{m_s} \wr S_{k_s})$. En résumé on a le fait connu suivant:

Proposition 9.15. *1) Le quotient $Z_\mu = (\mathbb{A}_*^2)^r)/T_\mu$ s'identifie au cône épointé au dessus de $(\mathbb{P}^1)^r$ relatif à $\mathcal{L} = \mathcal{O}(n_1, \ldots, n_r)$.*
2) Le quotient $C_\mu = Z_\mu/N_\mu$ s'identifie au cône épointé au dessus de $\mathbb{P}^{k_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{k_s}$ défini par le faisceau inversible $\mathcal{O}(m_1, \ldots, m_s)$. Le morphisme $C_\mu \to \mathbb{A}_*^{N+1}$ est fini birationnel sur son image, il définit la normalisation de la strate fermée $\overline{X_\mu}$.
3) La variété X_μ est isomorphe au complémentaire dans $C_\mu = Z_\mu/N_\mu$ de l'hypersurface $\Delta(f_1 \ldots . f_s) = 0$ ($\Delta(-)$ étant le discriminant usuel)

Preuve: Pour 1), on note que les fonctions invariantes sous T_μ sont les fonctions polynomiales $f(u_1, v_1, \ldots, u_r, v_r)$ telles que pour $t \in T_\mu$:

$$f(t_1u_1, t_1v_1, \ldots, t_ru_r, t_rv_r) = f(u_1, v_1, \ldots, u_r, v_r)$$

si f est multihomogène de multidegré $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, le poids de f est $t \mapsto t_1^{\alpha_1} \ldots t_r^{\alpha_r}$, donc on doit avoir $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = e(n_1, \ldots, n_r)$ pour un $e \geq 1$. L'assertion 1) en découle. D'une autre manière, on peut noter que la projectivisation du plongement (9.36), est le plongement polydiagonal $(\mathbb{P}^1)^r \mapsto (\mathbb{P}^1)^N$ et que la restriction de $\mathcal{O}(1, \ldots, 1)$ est $\mathcal{O}(n_1, \ldots, n_r)$. L'assertion découle alors du lemme 3.
Pour 2), on note que l'action du groupe fini N_μ, se réduit à l'action de $S_{k_1} \times \ldots \times S_{k_s}$, ce qui conduit au fait que les points de Z_μ/N_μ ont pour coordonnées (multihomogènes), les coefficients des produits partiels

$$f_1(X, Y) = \prod_1^{k_1}(u_iX - v_iY) = a_0^1X^{k_1} + \ldots a_{k_1}^1Y^{k_1} \ , \ldots \tag{9.38}$$

On peut identifier un point de ce quotient à un s-uple de formes $[f_1, \ldots, f_s]$, de degrés respectifs $k_1, \ldots, k_s$. L'identification étant

$$[f_1, \ldots, f_s] = [g_1, \ldots, g_s] \Longleftrightarrow g_i = \lambda_i f_i \ \ (\lambda_i \in k^*), \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{m_i} = 1 \tag{9.39}$$

Comme dans la description précédente, on retrouve bien la description des points du cône de base $\mathbb{P}^{k_1}\times\ldots\times\mathbb{P}^{k_s}$ relatif au faisceau $\mathcal{O}(m_1,\ldots,m_s)$. D'une autre manière le quotient Z_μ/N_μ est isomorphe à $\mathbb{A}_*^{k_1+1}\times\ldots\times\mathbb{A}_*^{k_s+1}/T'$, le tore T' étant le noyau de $G_m^s\to G_m,\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_s)\mapsto\prod_{i=1}^s\lambda_i^{m_i}$; l'identification s'obtient en effectuant le quotient partiel de Z_μ par le sous tore de T_μ donné par les équations $\prod_{i=1}^{k_1}t_i=1,\ldots,\prod_{i=1}^{k_s}t_i=1$. Le morphisme $Z_\mu/N_\mu\to\mathbb{A}_*^{N+1}$ n'étant autre que $(f_1,\ldots,f_s)\mapsto f_1^{m_1}\ldots f_s^{m_s}$. Tout est plus clair sur le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Z_\mu=(\mathbb{A}_*^2)^r/T_\mu \arrow[r] \arrow[d] & Z_\mu/N_\mu \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathbb{A}_*^{N+1} \arrow[d] \\
(\mathbb{P}^1)^r \arrow[r] & \mathbb{P}^{k_1}\times\ldots\mathbb{P}^{k_s} \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{P}^N
\end{tikzcd}$$

Les flèches Φ,ϕ sont celles explicitées lors de la preuve, c'est à dire

$$\phi(D_1,\ldots,D_s)=\sum_{i=1}^s m_iD_i,\ \ \Phi([f_1,\ldots,f_s])=[f_1^{m_1}\ldots f_s^{m_s}] \tag{9.40}$$

□

Remarque 9.2 Les relations d'incidence entre les strates $X_\mu\subset\mathbb{A}_*^{N+1}$ se décrivent facilement au moyen d'un ordre entre partitions de poids donné N [47]: $\eta=(\eta_1\le\ldots\le\eta_l)\le\mu=(n_1\le\ldots\le n_r)\iff\eta_j=\sum_{i\in I_j}n_i$, les I_j formant une partition de $[1,r]$. L'adhérence de la strate X_μ est $\overline{X_\mu}=\bigcup_{\eta\le\mu}X_\eta$. Le morphisme $C_\mu=Z_\mu/N_\mu\to\mathbb{A}_*^{N=1}$ a pour image $\overline{X_\mu}$, est la désingularisation de $\overline{X_\mu}$. Après projectivisation, ce morphisme se réduit à $\mathbb{P}^{k_1}\times\ldots\times\mathbb{P}^{k_s}\longrightarrow\mathbb{P}^N$ qui est le composé d'un plongement de Veronese, suivi d'une projection linéaire; ce morphisme est la normalisation de son image.

Exemple 9.3 Le cas $\mu=(1,\ldots,1,2)$, soit $k_1=N-2,k_2=1,m_1=1,m_2=2$, correspond a l'hypersurface discriminant (privée de l'origine), qui a pour normalisation le cône épointé de base $\mathbb{P}^{N-2}\times\mathbb{P}^1$, relativement à $\mathcal{O}(1,2)$. Le morphisme de normalisation est $[f_1,f_2]\mapsto F=f_1f_2^2$. Si f_1 a un facteur linéaire multiple, on peut l'échanger avec f_2, ce qui montre que ce morphisme n'est pas bijectif sur l'image. Regardons comme exemple le cas des formes quartiques (9.31) ($N=4$). Le discriminant Δ caractérise les formes avec un facteur linéaire double, donc $\mu=(1,1,2)$. Pour $\mu=(1,3)$, $\overline{X}_{1,3}$ est le cône épointé au dessus de $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ défini par $\mathcal{L}=\mathcal{O}(1,3)$. La théorie classique donne des équations pour $\overline{X}_{1,3}$: $P(F)=Q(F)=0$, si on note P et Q les covariants

$$P=\frac{1}{6}(a_2^2-3a_1a_3+12a_0a_4),\ \ Q=a_0a_2a_4-\frac{3}{8}a_0a_3^2-\frac{3}{8}a_1^2a_4+18a_1a_2a_3-\frac{1}{36}a_2^3$$

Dans le cas $\mu=(2,2)$, donc $m_1=2,\ s=1,\ k_1=2$, $X_{2,2}$ représente les formes quartiques carré d'une forme quadratique; dans ce cas aussi on obtient des équations en écrivant que la forme hessienne $H(F)$ est proportionnelle à F. Enfin si $\mu=(4)$ qui est le cas des formes avec un seul facteur linéaire, les équations de X_4 qui est la strate fermée, se résument comme on le voit facilement à $H(F)=0$.

9.3.3. Le champ des revêtements cycliques de la droite projective

On fixe la ramification d'un revêtement cyclique de degré n (§ 9.1) sous la forme d'une suite de diviseurs de n, $1 < e_i | n$ $(1 \leq i \leq r)$, et pour tout i, un entier $1 \leq \eta_i < e_i$, tel que $\mathrm{pgcd}(e_i, \eta_i) = 1$; on posera $n_i = \frac{n}{e_i}\eta_i$. On supposera que $n_1 \leq \ldots \leq n_r$, définissant ainsi une partition μ de poids $N = nm = \sum_i n_i$.

Soit $\pi : C \to D$ un revêtement cyclique à ramification fixée de type μ, de base S, les fibres géométriques de $D \to S$ étant isomorphes à $\mathbb{P}^1$. On sait (Proposition 9.4) que le revêtement $\pi : C \to D$ peut être reconstruit en partant de la base D, équipée de la structure additionnelle $(\mathcal{L}, \Phi)$. Il sera préférable dans la suite de noter la partition μ comme une suite strictement croissante avec répétitions, donc de considérer les entiers m_j $(1 \leq j \leq s)$ (distincts) définis par la partition $n_1 \leq \ldots \leq n_r$ comme cela a été fait dans la section 9. Cela permet d'écrire le diviseur B tel que $\mathrm{Div}(\Phi) = B$ sous la forme $B = \sum_{i=1}^{s} m_i B_i$, les diviseurs B_i étant maintenant disjoints deux à deux. Posons $\deg(B_i) = k_i$, de sorte que $\sum_i k_i m_i = \sum_j n_j = nm$, l'entier m étant défini par cette équation.

Revenons à la variété lisse X_μ partie ouverte du cône Z_μ/N_μ. Le groupe $\mathrm{GL}(2)$ agit de manière naturelle sur l'espace vectoriel des formes binaires de degré donné, i.e. $g.F(X,Y) = F(g^{-1}X, g^{-1}Y)$, mais cette action ne se descend pas en général en une action de $\mathrm{PGL}(1)$. L'entier m étant comme introduit au dessus, on notera cependant qu'il y a une action du groupe $\mathrm{GL}(2)/\mu_m$ sur le cône épointé Z_μ/N_μ, de manière explicite

$$g[f_1, \ldots, f_s] = [g.f_1, \ldots, g.f_s] \tag{9.41}$$

Cette définition est cohérente du fait que $\sum_{i=1}^{s} k_i m_i = nm$. De manière équivalente, le faisceau $\mathcal{O}(m_1, \ldots, m_s)$ sur $\mathbb{P}^{k_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{k_s}$ est canoniquement $\mathrm{GL}(2)/\mu_m$-linéarisé. La description qu'on a en vue du champ $\mathcal{H}_{n,\mu}$ des revêtements cycliques de degré n de $\mathbb{P}^1$, à ramification de type μ, et qui dans le cas des courbes généralise [4], est:

Théorème 9.16. *Les points de branchement étant marqués (non indexés), on a:*

$$\mathcal{H}_{n,\mu} = [X_\mu/(\mathrm{GL}(2)/\mu_m)] \tag{9.42}$$

Si les points de branchement sont piqués (ordonnés) on a, pour une action de G_m qui sera précisée dans la preuve, et Y_μ étant le complémentaire dans $Z_\mu$de la grosse diagonale $\mathcal{H}_{n,\mu} = [Y_\mu/G_m]$.

Preuve: On commence par définir un morphisme $\mathcal{H}_{n,\mu} \to [X_\mu/(\mathrm{GL}(2)/\mu_m)]$, qui après vérification, sera un isomorphisme. Soit un revêtement $p : C \to D$, de base S. La courbe $q : D \to S$ est un fibré en coniques, et le sous-faisceau propre $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(D)$, de $\pi_*(\mathcal{O}_C)$, relatif à valeur propre ζ_n, est de degré $-m$ le long des fibres. Par ailleurs la multiplication définit un morphisme injectif $\Phi : \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{O}_D$, le diviseur B de Φ ayant par définition un type combinatoire fixé le long des fibres. Ce qu'on traduit par

$$B = \mathrm{Div}(\Phi) = \sum_{1<e|n,\ 1\leq\eta<e} \frac{n}{e}\eta B_{e,\eta} \tag{9.43}$$

On récupère d'une part un torseur $P = \mathrm{Isom}((\mathbb{P}^1_S, V_S), (D \to S, L))$ sous $G = \mathrm{GL}(2)/\mu_m$, avec $V = \mathcal{O}(-m)$. Du fait de la forme du diviseur de la section Φ, cette section définit d'autre part un morphisme $P \to X_\mu \subset \mathbb{A}^N$, qui est par construction clairement G-équivariant. Cette construction

donne donc un foncteur $\mathcal{H}_{n,\mu} \to [X_\mu/G]$ Pour prouver que c'est un isomorphisme, il suffit de voir que c'est simultanément un monomorphisme et un épimorphisme [51]. Il est possible en fait d'exhiber un foncteur quasi-inverse, comme la preuve de dessous le suggère. Pour tout schéma S, on doit s'assurer que la restriction de ce foncteur à la catégorie des sections au-dessus de S est pleinement fidèle. Cela se ramène à voir que tout S-isomorphisme de revêtements $f : C \xrightarrow{\sim} C'$ correspond de manière bijective à un isomorphisme des objets images par le foncteur considéré. Notons $h : D \xrightarrow{\sim} D'$ le S-isomorphisme entre les courbes quotients. Il définit d'une part un isomorphisme entre les G-torseurs associés $P \xrightarrow{\sim} P'$, et un isomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-équivariant

$$\psi : \mathcal{E} = \oplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} h^*(\mathcal{E}' = \oplus_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}'_i) \tag{9.44}$$

Notons $\psi_i : \mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} h^*(\mathcal{L}'_i)$ sa restriction à $\mathcal{L}_i$. Rappelons la relation $\Phi'.\psi_1^{\otimes n} = \Phi$; il s'agit donc de voir que l'isomorphisme initial f peut être reconstitué demanière unique en partant de la donnée (h, ψ_1). C'est exactement le contenu de la Proposition 9.4.

Dans le cas des points de branchement ordonnés la donnée qui se substitue à $(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-m))$ est $(\mathbb{P}^1, (Q_1, \ldots, Q_b), \mathcal{O}(-m))$, le groupe G est donc $G = G_m = \mathrm{Aut}(\mathcal{O}(-m))$. Il est évident que cela revient dans la preuve précédente à remplacer X_μ par Y_μ, dont les points correspondent à la donnée de b points distints $Q_1, \ldots, Q_b$ de $\mathbb{P}^1$, et d'une forme binaire f de diviseur des zéros $\mathrm{Div}(f) = \sum_j n_j Q_j$. L'action de G_m dérive de "l'action" $\lambda[(u_1, v_1), \ldots, (u_b, v_b)] = [\lambda^{1/m}(u_1, v_1), \ldots, \lambda^{1/m}(u_b, v_b)]$. Le reste est clair.

□

Exemple 9.4 Si $n = 3$ (voir [4]), revêtements galoisiens triples de la droite projective, le diviseur B est de la forme $B = B_1 + 2B_2$, avec B_1 et B_2 disjoints et sans multiplicités; on a entre les degrés respectifs la relation $k_1 + 2k_2 = 3m$. On a en fonction de la prescription générale: $\mathrm{Div}(\Phi_2) = \left[\frac{2B}{3}\right] = 2B_1 + B_2$. On voit que X_μ est dans ce cas un ouvert du cône de base $\mathbb{P}^{k_1} \times \mathbb{P}^{k_2}$ défini par $\mathcal{O}(1, 2)$. Dans [4] Arsie et Vistoli ont traité le cas générique $\mu = (1^N)$; les revêtements correspondants sont appelés par eux uniformes. Dans cette situation, on a $s = 1$, et $X_{(1^N)}$ est simplement le cône des formes de degré N sans racine multiple.

10. Groupe de Picard et classes tautologiques.

La position du champ de Hurwitz comme établissant une correspondance entre champs de courbes marquées (ou piquées)

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,r} \xleftarrow{\iota} \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \xrightarrow{\delta} \overline{\mathcal{M}}_{g',b} \tag{10.1}$$

suggère l'existence sur ce champ de fibrés tautologiques liés à la spécificité des revêtements galoisiens.

On notera pour tout groupe fini G, $(-,-)_{|G}$ le produit scalaire de deux caractères de G, et $R(G)$ l'anneau des représentations (ou des caractères) de G. Si $v \in \hat{G}$, on notera V_v l'espace vectoriel qui supporte la représentation de caractère (irréductible) v. Pour tout réel x, on posera $\langle x \rangle = x - [x]$.

10.1. Fibré de Hodge

10.1.1. G-fibrés vectoriels sur le champ de Hurwitz

Soit le morphisme canonique (représentable) oubli de l'action de G $\imath : \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$ où comme précedemment, r désigne le nombre de points de ramification, et b le nombre de points de branchement. Si $\pi : C \to D$ est un revêtement on supposera la base piquée par b-points contenant les points de branchement. La courbe C est marquée par les préimages des points de branchement. Le marquage de ces points par paquets se déduisant de la numérotation des points de branchement. Rappelons qu'un faisceau sur $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ est l'assignation pour tout revêtement $q : C \xrightarrow{\pi} D \xrightarrow{p} S$ d'un faisceau cohérent $E(\pi)$ sur la base S, de manière compatible avec les morphismes. Soit la remarque:

Lemme 10.1. *Soit F un faisceau cohérent (resp. un fibré vectoriel) sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$. Le faisceau $\imath^*(F)$ sur $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ est un G-faisceau cohérent (resp. un G-fibré vectoriel), relativement à l'action triviale de G. Dans le second cas il se décompose en la somme directe de ses composants isotypiques*

$$\imath^*(F) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} F_\chi \otimes V_\chi \tag{10.2}$$

les F_χ étant des faisceaux localement libres sur $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, et la somme directe étant indexée par les représentations irréductibles de G.

Preuve: Si F est un faisceau sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$, donc défini par une collection de faisceaux cohérents $F(q) = F(C \xrightarrow{q} S)$, on a pour tout morphisme de $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$, i.e. un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & C' \arrow[d, "q'"] \\ S \arrow[r, "h"] & S' \end{tikzcd}$$

un isomorphisme $\phi_{f,h} : F(q) \xrightarrow{\sim} h^*(F(q'))$, les $\phi_{f,h}$ étant assujettis à satisfaire à une relation de cocycle $\phi_{f'f,h'h} = h^*(\phi_{f',h'}).\phi_{f,h}$. Si maintenant $q : C \to S$ provient d'un G-revêtement $\pi : C \to D$, alors tout élément $g \in G$ définit un automorphisme de $C \to S$ dans $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$, mais pas dans le champ de Hurwitz, sauf si g est dans le centre. Il en résulte un isomorphisme $\phi(g) : F(q) \xrightarrow{\sim} F(q)$ qui du fait de la relation de cocycle représente une G-linéarisation sur le faisceau image réciproque $\imath^*(F)$ défini par $\imath^*(F)(\pi) = F(q)$. Si F est de plus localement libre, il se décompose en facteurs isotypiques

$$F(q) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} F_\chi(q) \otimes V_\chi \tag{10.3}$$

avec $F_\chi(q) = \mathcal{H}om_G(\mathcal{O}_\mathcal{S} \otimes \mathcal{V}_\chi, \mathcal{F})$. Comme les morphismes de $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ sont G-équivariants, il en découle une action de G sur $\imath^*(F)$, en d'autres termes les facteurs $F_\chi(q)$ définissent un fibré vectoriel sur le

champ de Hurwitz. De la sorte la décomposition qui précède induit donc la décomposition en sous-faisceaux propres (10.1).

□

Un G-fibré vectoriel sur le champ de Hurwitz aura pour sens un fibré donné par une décomposition (10.2). Un G-morphisme entre deux G-fibrés vectoriels est un morphisme qui commute aux actions respectives de G. Soient F et H deux G-fibrés vectoriels sur le champ de Hurwitz. Nous dirons qu'ils sont disjoints si une même représentation irréductible V_χ n'apparaît pas simultanément dans F et dans H. Notons le fait évident suivant:

Lemme 10.2. *Supposons avoir une suite exacte* $0 \to E \to F \to H \to 0$, *les faisceaux étant des* G*-fibrés vectoriels, et les morphismes des* G*-morphismes. Si* E *et* H *sont disjoints, alors* $F = E \oplus H$.

Preuve: L'hypothèse signifie que pour une représentation irréductible V_χ donnée, on a soit $E_\chi = F_\chi$, soit $H_\chi = F_\chi$. Le résultat en découle.

□

10.1.2. Décomposition du fibré de Hodge

Rappelons [40] que le fibré de Hodge $\mathbb{E}_{g',b}$ (resp.$\mathbb{E}_{g,r}$) sur $\overline{\mathcal{M}}_{g',b}$ (resp. $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$) est le faisceau dont les sections sur l'objet $p : D \to S$ (resp. $q : C \to S$), courbe stable marquée de genre g' (resp. g), est le faisceau localement libre de rang g' (resp. g) sur S

$$\mathbb{E}(p) = p_*(\omega^1_{D/S}) \tag{10.4}$$

Notons que par dualité de Serre ce faisceau est dual de $\mathrm{R}^1 q_*(\mathcal{O}_D)$, et que le morphisme trace permet une identification $R^1 q_*(\omega_{D/S}) = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$. La classe de Hodge $\lambda \in \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{g',b})$ est par définition $\lambda = \det(\mathbb{E}) = c_1(\mathbb{E})$; on définit plus généralement $\lambda_i = c_i(\mathbb{E})$. Pour éviter toute confusion, on notera dans la suite $\mathbb{E}_{bs}$ (resp. λ_{bs}) le fibré vivant sur la base.

Soit un revêtement galoisien stable de groupe G, $\pi : C \to D$ de base S, $p : D \to S$ et $q : C \to S$ les morphismes structuraux. Sous ces conditions les faisceaux $q_*\omega_{C/S}$ et $\mathrm{R}^1 q_*(\mathcal{O}_C)$ sont des G-faisceaux pour l'action triviale de G, localement libres, et en dualit. Le faisceau localement libre de rang $g = g_C$ (genre de C) $q_*\omega_{C/S}$ définit un G-faisceau sur le champ $\overline{\mathcal{H}}^{\xi}_{g,n}$ que nous noterons dans la suite $\mathbb{E}_{tot}$. Ce fibré vectoriel est exactement l'image réciproque du fibré de Hodge sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$, comme explicité en (10.1.1). Le fibré de Hodge sur $\overline{\mathcal{M}}_{g',b}$ étant noté $\mathbb{E}_{bs}$, on veut comparer $\mathbb{E}_{tot}$ et $\delta^*(\mathbb{E}_{bs})$. Soit décomposition en facteurs isotypiques (10.1):

$$\mathbb{E}_{tot} \;=\; \bigoplus_{v \in \hat{G}} \mathbb{E}_v \otimes V_v \tag{10.5}$$

La fibre de cette décomposition en $C \to D$ est simplement la décomposition en facteurs irréductibles de $H^0(C, \omega_C)$. La formule de Chevalley-Weil (§ 3.2) permet de préciser le rang de chaque facteur, la donnée de ramification $\xi = \sum_{i=1}^{b} [H_i, \chi_i]$ étant fixée.

Proposition 10.3. *Soit la décomposition du fibré de Hodge $\mathbb{E}_{tot}$ en facteurs isotypiques $\mathbb{E}_{tot} = \bigoplus_{v\in\hat{G}} \mathbb{E}_v \otimes V_v$. On a en particulier $\mathbb{E}_1 = \delta^*(\mathbb{E}_{bs})$. Le rang de $\mathbb{E}_v$ est donné si $v \neq 1$ par la formule de Chevalley-Weil*

$$rg(\mathbb{E}_v) \ = dim\ (v) \left(g' - 1 + \sum_i (1 - \frac{1}{e_i}) \right) \ - \ \sum_i \sum_{l=1}^{e_i-1} (\frac{e_i - l}{e_i})(v^\vee, \chi_i^{l-1})_{|H_i} \tag{10.6}$$

Si G est cyclique[25] *d'ordre n, (10.6) se spécialise en ($0 \leq \langle - \rangle < 1$ désignant la partie fractionnaire):*

$$rg(\mathbb{E}_v) \ = \ g' - 1 + \sum_{i=1}^{b} \langle \frac{-v\nu_i}{e_i} \rangle \tag{10.7}$$

Preuve: Il suffit de se placer sur $S = \operatorname{Spec} k$. Si $\pi : C \to \Sigma$ est un revêtement du type indiqué défini sur k ($|G| \neq 0 \in k$), il suffit, pour avoir l'expression (10.6), d'expliciter pour tout v le rang du facteur isotypique $H^0(C, \mathcal{O}_C)_v$; de manière équivalente, trouver la trace de Lefschetz (voir §3.2)

$$L_G(\Omega_C) = [H^0(C, \Omega_C)] \ - \ [H^1(C, \Omega_C)] \in R(G)$$

Si $\pi_*(\Omega_C) = \bigoplus_{v\in\hat{G}} E_v \otimes V_v$, cette dernière s'exprime par $L_G(\Omega_C) \ = \ \sum_v \ \chi(E_v)[V_v] \in R(G)$. Cette expression montre qu'il suffit de trouver le degré de E_v et d'appliquer alors le théorème de Riemann-Roch (voir § 3.2). Le degré s'obtient facilement au moyen de la suite exacte

$$0 \to \pi^*(E_v) \to \Omega_C \otimes V_v^\vee \to \mathcal{Q}_v \to 0$$

$\mathcal{Q}_v$ étant concentré sur les orbites de points de ramification, plus précisément $\mathcal{Q}_v = \bigoplus_i \mathbf{Ind}_{H_i}^G \ ((\mathcal{Q}_v)_{P_i})$ où P_i est un quelconque point d'une l'orbite de type $[H_i, \chi_i]$. De cette observation on tire facilement (voir § 3.2 pour un calcul analogue)

$$\deg\ (E_v) \ = \ \frac{dim\ (v)\ (2g_C - 2)}{\#G} \ - \ \sum_{i=1}^{b} \sum_{l=1}^{e_i-1} \frac{e_i - l}{e_i}\ (v^\vee\ ,\ \chi_i^{l-1})_{|H_i}$$

La formule de Riemann-Hurwitz donne $\frac{2g-2}{\#G} = 2g' - 2 + \sum_{i=1}^{b}(1 - \frac{1}{e_i})$, d'où par substitution dans la formule de Riemann-Roch

$$\chi(E_v) = \dim\ (v) \left(g' - 1 + \sum_i (1 - \frac{1}{e_i}) \right) \ - \ \sum_i \sum_{l=1}^{e_i-1} (\frac{e_i - l}{e_i})(v^\vee, \chi_i^{l-1})_{|H_i}$$

Si maintenant G est cyclique d'ordre n engendré par σ, alors pour tout entier $0 \leq v < n$, v désignant la représentation de caractère $\chi_v(\sigma) = \zeta_n^v$, on a $({\chi_v}^\vee, \chi_i^{l-1})_{|H_i} = 0$ sauf si $l - 1$ est le reste modulo e_i de $-v\nu_i$. D'où le résultat. Pour confirmer la validité de l'expression (10.7), vérifions que

[25] Par exemple si $v = n-1$, on trouve pour le rang de la composante correspondante du fibré de Hodge $g'-1+\sum_{i=1}^{b} \frac{\nu_i}{e_i} = g' - 1 + \frac{\sum_i m_i \nu_i}{n}$.

$\sum_v \dim(v) rg(\mathbb{E}_v) = g_C = g$. La somme sur les caractères irréductibles de la partie qui suit le signe moins, donne

$$\sum_{i,l} \frac{e_i - l}{e_i} (\sum_v (\dim v) v^\vee, \chi_i^{l-1})_{H_i} = \sum_{i,l} (\chi_{\mathbb{C}[G]}, \chi_i^{l-1})_{H_i} = \sum_{i,l} (\frac{e_i - l}{e_i}) \frac{\#G}{e_i} = \#G \sum_i \frac{e_i(e_i - 1)}{2}$$

La première somme se simplifie du fait de $\sum_v \dim(v)^2 = \#G$; les choses étant mises ensemble, la formule suit.

□

Exemple 10.1 Soit le cas $n = 3$, i.e les revêtements triples galoisiens de genre g de $\mathbb{P}^1$. Dans ce cas une donnée de ramification équivaut à une partition des points de branchement $[1, g+2] = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2$, avec $|\Lambda_1| \equiv |\Lambda_2| \pmod 3$ (voir § 2.3). Le fibré de Hodge est une somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{E}_1 \oplus \mathbb{E}_2$ où

$$rg(\mathbb{E}_1) = \frac{|\Lambda_1| + 2|\Lambda_2|}{3} - 1, \;\; rg(\mathbb{E}_2) = \frac{2|\Lambda_1| + |\Lambda_2|}{3} - 1 \tag{10.8}$$

◊

Il y a une construction duale. Soit un revêtement galoisien stable $\pi : C \to D$ de groupe G. Le faisceau $\pi_*(\mathcal{O}_C)$ est un $(\mathcal{O}_D, G)$ module sans torsion de rang $\#G$, de formation compatible à tout changement de base. Il se décompose en facteurs isotypiques (section 4)

$$\pi_*(\mathcal{O}_C) \;=\; \bigoplus_{v \in \hat{G}} \mathcal{L}_v \otimes V_v \tag{10.9}$$

Il est immédiat que $\mathcal{L}_1 = \pi_*(\mathcal{O}_C)^G = \mathcal{O}_D$, et que le rang de $\mathcal{L}_v$ est égal à $\dim(v)$.

Proposition 10.4. *On a $p_*(\mathcal{O}_\mathcal{C}) = \mathcal{O}_S$, et si $v \neq 1$, on a $p_*(\mathcal{L}_v) = 0$ et*

$$\mathbb{E}_{v^\vee} \;\cong \mathrm{R}^1 p_* \, (\mathcal{L}_v)^\vee \tag{10.10}$$

Preuve: Tout est clair, sauf peut-être le dernier point. Notons que par dualité de Grothendieck-Serre on a un isomorphisme canonique $q_*(\omega_{C/S}) \;\cong\; \mathrm{R}^1 q_*(\mathcal{O}_C)^\vee$ qui est de manière évidente un G-isomorphisme. Par ailleurs

$$\mathrm{R}^1 q_*(\mathcal{O}_C) = \mathrm{R}^1 p_* \pi_*(\mathcal{O}_C) = \bigoplus_{v \in \hat{G}} \mathrm{R}^1 p_*(\mathcal{L}_v \otimes V_v) = \bigoplus_{v \in \hat{G}} \mathrm{R}^1 p_*(\mathcal{L}_v) \otimes V_v$$

Par identification des facteurs isotypiques, on obtient le résultat.

□

On peut moduler cette construction en se reportant à la section 6.4.2, en particulier en considérant le carré 2-cartésien

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{C}}_{g',b} & \xrightarrow{\pi} & \overline{\mathcal{M}}_{g',b} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\pi} & \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \end{array} \tag{10.11}$$

Une section de base S du champ $\overline{\mathcal{C}}$ est un revêtement $\pi : C \to D$ de base S, équipé d'une section $Q : S \to D$ additionnelle. On définit un module sans torsion $\mathbb{L}_v$ ($v \in \hat{G}$) sur $\overline{\mathcal{C}}$, de rang $\deg(v)$, par la prescription

$$\mathbb{L}_v(\pi) = Q^*(\mathcal{L}_v) \tag{10.12}$$

Invoquant le morphisme $\psi : \overline{\mathcal{C}}_{g,r} \to \overline{\mathcal{C}} = \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{g',b}} \overline{\mathcal{C}}_{g',b}$ (proposition 6.14), on voit que $\psi_*(\mathcal{O}_{\overline{\mathcal{C}}_{g,r}}) = \bigoplus_{v \in \mathrm{Irrep}\,(G)} \mathbb{L}_v \otimes V_v$. Avec cette définition il est que $\mathbb{E}^\vee{}_{v^\vee} = \mathrm{R}^1\pi_*(\mathbb{L}_v) = -\pi_!(\mathbb{L}_v)$. Sous les hypothèses de la proposition 10.1 nous poserons pour tout $v \in \hat{G}$

$$\lambda_v \;=\; \det(\mathbb{E}_v) \in Pic(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}) \tag{10.13}$$

On notera par la même lettre la première classe de Chern de $\mathbb{E}_v$. Avec ces notations on a $\lambda_1 = \delta^*(\lambda_{bs})$, et $\lambda = \lambda_{tot} = \bigotimes_{v \in \hat{G}} \lambda_v^{\otimes \deg(v)}$.

La dualité de Serre-Grothendieck donne une autre construction des $\mathbb{E}_v$. Soit un revêtement galoisien stable $\pi : C \to D$ de groupe G. Le faisceau $\pi_*(\mathcal{O}_C)$ est un $(\mathcal{O}_D, G)$ module sans torsion de rang $\#G$, de formation compatible à tout changement de base. Il se décompose en facteurs isotypiques (§ 4) $\pi_*(\mathcal{O}_C) \;=\; \bigoplus_{v \in \hat{G}} \mathcal{L}_v \otimes V_v$. Il est immédiat que $\mathcal{L}_1 = \pi_*(\mathcal{O}_C)^G = \mathcal{O}_\Sigma$, et que le rang de $\mathcal{L}_v$ est égal à $\dim(v)$.

Proposition 10.5. *On a $p_*(\mathcal{O}_\mathcal{C}) = \mathcal{O}_S$, et si $v \neq 1$, on a $p_*(\mathcal{L}_v) = 0$ et*

$$\mathbb{E}_{v^\vee} \;\cong \mathrm{R}^1 p_* \left(\mathcal{L}_v\right)^\vee \tag{10.14}$$

Preuve: Tout est clair, sauf peut-être le dernier point. Notons que par dualité de Grothendieck-Serre on a un isomorphisme canonique $q_*(\omega_{C/S}) \;\cong\; \mathrm{R}^1 q_*(\mathcal{O}_C)^\vee$ qui est un G-isomorphisme. Par ailleurs

$$\mathrm{R}^1 q_*(\mathcal{O}_C) = \mathrm{R}^1 p_* \pi_*(\mathcal{O}_C) = \bigoplus_{v \in \hat{G}} \mathrm{R}^1 p_*(\mathcal{L}_v \otimes V_v) = \bigoplus_{v \in \hat{G}} \mathrm{R}^1 p_*(\mathcal{L}_v) \otimes V_v$$

Par identification des facteurs isotypiques, on obtient le résultat.

□

Rappelons que classiquement on définit un faisceau inversible noté $\mathcal{L}_i \in \mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ par

$$\mathcal{L}_i(q : D \to S) = \sigma_i^*(\omega_{D/S}) \tag{10.15}$$

en notant σ_i la i-ème section. Pour éviter toute confusion avec les faisceaux introduits ci-dessus, on notera par la même lettre ψ_i le faisceau inversible $\mathcal{L}_i$ et sa première classe de Chern $c_1(\mathcal{L}_i)$. La même lettre désignera aussi pour simplifier à la fois $\psi_i \in \mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{M}}_{g',b})$, ainsi que son image réciproque dans $\mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi})$. La structure du groupe $\mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ (resp. $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{M}_{g,n})$) est connue [40], [53]. Si $g \neq 1, 2$, ces groupes sont libres de rang fini[26]. Soit le morphisme de groupes

$$\delta^* : \mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}) \longrightarrow \mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{M}}_{g',b}) \tag{10.16}$$

[26] Si $g \geq 3$, les faisceaux inversibles λ, et ψ_i $(1 \leq i \leq n)$ forment une base de $\mathrm{Pic}\,(\mathcal{M}_{g,n})$; si on ajoute à ces faisceaux inversibles ceux associés aux composantes du bord (les δ), on obtient une base de $\mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, loc.cit. Le groupe $\mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{M}}_{0,n})$ est libre de rang $2^{n-1} - \binom{n}{2} - 1$ (Keel, voir [53])

Si le groupe de droite est libre (de rang fini), par exemple si $g' = 0$, il n'est pas difficile de montrer que ce morphisme est injectif (voir par exemple [43]). Naturellement le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi})$ est discret que dans des cas exceptionnels, essentiellement $g' = 0$ et G abélien. Si $g' = 0$ et G abélien, un fait général qui s'applique aux champs de Deligne-Mumford donne $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathrm{Pic}(\overline{H}_{g,G,\xi}) \otimes \mathbb{Q}$, alors $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{0,b}) \otimes \mathbb{Q}$. Le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi})$ ne diffère de $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{0,b})$ que par la torsion, qui est non triviale en général. Ils ont un même rang $2^{b-1} - \binom{b}{2} - 1$ [53].

10.2. Les fibrés en droites $\psi_{i,\chi}$ et $\mu_{i,v}$

Examinons les fibrés tautologiques qui dérivent des fibres au-dessus de $Q_1, \ldots, Q_b$, les points marqués de la base, et portant l'information sur la ramification. Rappelons que les points de branchement sont inclus dans les Q_i. Notons $\sigma_i : S \to D$ le morphisme définissant Q_i. Il est clair que le $(\mathcal{O}_S, G)$-faisceau $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(Q_i)}$ est localement libre de rang $|G|$. On a en tenant compte de (10.9) la décomposition $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(Q_i)} \cong \bigoplus_{v \in \widehat{G}} \sigma_i^*(\mathcal{L}_v) \otimes V_v$. On pose

$$\mathcal{L}_{i,v}(\pi) = \sigma_i^*(\mathcal{L}_v) \tag{10.17}$$

Cette construction définit un fibré vectoriel $\mathcal{L}_{i,v}$ sur $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ de rang $\deg(\chi)$. Si Q_i est un point de branchement d'holonomie $[H_i, \chi_i]$, il est possible de dévisser les fibrés $\mathcal{L}_{i,v}$ en une somme directe de sous-fibrés portant une certaine part de l'information sur la ramification. Fixons un représentant (H_i, χ_i) de l'holonomie en le point de branchement d'indice i. Soit alors le diviseur de Cartier relatif Δ_i, fini et étale sur S, lieu des points de la fibre $\pi^{-1}(Q_i)$ exactement d'holonomie (H_i, χ_i). Alors $\Delta_i \to S$ est un torseur de groupe $C_G(H_i)/H_i$ (voir 3.1.2), le diviseur $\pi^{-1}(Q_i)$ ayant pour expression

$$\pi^{-1}(Q_i) = e_i \left(\mathbf{Ind}_{C_G(H_i)}^G \Delta_i \right) \quad (e_i = |H_i|)$$

En particulier $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(Q_i)} = \mathbf{Ind}_{C_G(H_i)}^G (\mathcal{O}_{e_i \Delta_i})$. On est ainsi ramené à préciser la structure de $(\mathcal{O}_S, G)$-module de $\mathbf{Ind}_{C_G(H_i)}^G (\mathcal{O}_{e_i \Delta_i})$, c'est à dire la structure du $(\mathcal{O}_S, C_G(H_i))$-module $\mathcal{O}_{e_i \Delta_i}$. Pour $0 \leq k < e_i$ soit la suite exacte de $(\mathcal{O}_S, C_G(H_i))$-modules

$$0 \to \mathcal{O}_{\Delta_i}(-k\Delta_i) \to \mathcal{O}_{(k+1)\Delta_i} \to \mathcal{O}_{k\Delta_i} \to 0 \tag{10.18}$$

Soit χ un caractère irréductible de $C_G(H_i)$ avec $\rho_\chi : C_G(H_i) \to \mathrm{GL}(W_\chi)$ la représentation associée. Du fait que H_i est dans le centre de $C_G(H_i)$, si $h \in H_i$, la restriction de $\rho_\chi(h)$ à H_i est une homothétie $\rho_\chi(h) = \chi_i^j(h)$, pour un certain $j \in [0, e_i - 1[$. Nous parlerons de χ_i^j comme du poids de la restriction de χ à H_i. Le groupe H_i agit sur le faisceau conormal $\mathcal{O}_{\Delta_i}(-\Delta_i)$ au moyen du caractère χ_i, il est alors immédiat de déduire de la suite exacte (10.18), que les deux faisceaux localement libres $\mathcal{O}_{\Delta_i}(-k\Delta_i)$ et $\mathcal{O}_{k\Delta_i}$ sont "disjoints", et donc vus comme $(\mathcal{O}_S, C_G(H_i))$-modules on a $\mathcal{O}_{(k+1)\Delta_i} \cong \mathcal{O}_{\Delta_i}(-k\Delta_i) \oplus \mathcal{O}_{k\Delta_i}$.

L'action de H_i sur $\mathcal{O}_{\Delta_i}(-k\Delta_i)$ est donnée par la caractère χ_i^k, il en résulte que toute fibre de $\mathcal{O}_{\Delta_i}(-k\Delta_i)$ s'identifie à la représentation $\mathbf{Ind}_{H_i}^{C_G(H_i)}(\chi_i^k)$, il s'ensuit la décomposition

$$\mathcal{O}_{\Delta_i}(-k\Delta_i) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{C_G(H_i)}, \chi_{|H_i} = {\chi_i}^k} E_{i,\chi} \otimes W_\chi \tag{10.19}$$

la somme portant sur les caractères irréductibles de $C_G(H_i)$ de restriction χ_i^k à H_i. On en déduit aisément, en mettant bout à bout les décompositions (10.18), la décomposition

$$\mathcal{O}_{k\Delta_i} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{C_G(H_i)}} E_{i,\chi} \otimes W_\chi \tag{10.20}$$

où la somme directe porte sur les caractères irréductibles de $C_G(H_i)$ dont la restriction à H_i est le caractère ${\chi_i}^\alpha$, avec $0 \leq \alpha \leq k-1$. Finalement on a la décomposition

$$\mathcal{O}_{e_i\Delta_i} = \bigoplus_{k=0}^{e_i-1} \mathcal{O}_{\Delta_i}(-k\Delta_i) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{C_G(H_i)}} E_{i,\chi} \otimes W_\chi \tag{10.21}$$

Cette construction définit pour tout $\chi \in (\widehat{C_G(H_i)})$ un fibré $E_{i,\chi}$ de rang $\deg(\chi)$. Explicitons les relations qui relient les fibrés $\mathcal{L}_{i,v}$ et les $E_{j,\chi}$.

Proposition 10.6. *Avec les notations précédentes, $E_{i,\chi}$ est un fibré vectoriel de rang* $\deg(\chi)$ $(\chi \in (\widehat{C_G(H_i)}))$. *Le fibré vectoriel $\mathcal{L}_{i,v}$ est de rang* $\deg v$, *il se décompose en*

$$\mathcal{L}_{i,v} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{C_G(H_i)}} E_{i,\chi}^{n_{v,\chi}} \quad \text{où} \quad n_{v,\chi} = (\chi, v|_{C_G(H_i)}) \tag{10.22}$$

Preuve: Dans l'anneau des représentations de G soit la décomposition en facteurs irréductibles

$$\mathbf{Ind}_{C_G(H_i)}^G(W_\chi) = \bigoplus_{v \in \hat{G}} V_v^{n_{v,\chi}}$$

avec $n_{v,\chi} = \langle \mathbf{Ind}_{C_G(H_i)}^G(W_\chi), V_v \rangle_{|G} = \langle W_\chi, V_{v|C_G(H_i)} \rangle_{|C_G(H_i)}$. Par insertion de cette relation dans (10.21), et induction, on obtient en regroupant les termes exactement (10.22). $\square$

Les déterminants respectifs $\det(\mathcal{L}_{i,v})$ et $\det(E_{i,\chi})$ seront notés $\mu_{i,v}$ et $\psi_{i,\chi}$, ceci pour $v \in \hat{G}$, $\chi \in \widehat{C_G(H_i)}$.

Dans la suite, on notera par la même lettre un faisceau inversible, et sa première classe de Chern, par exemple $\mu_{i,v}$ et $\psi_{i,\chi}$. On remarquera que les fibrés vectoriels donnés par la décomposition $\mathcal{O}_{\Delta_i}(-\Delta_i) = \bigoplus_{\chi \in \widehat{C_G(H_i)}, \chi_{|H_i} = \chi_i} E_{i,\chi} \otimes W_\chi$ se substituent aux images réciproques des $\mathcal{L}_P \in \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{g,r})$, qui ne sont pas définis car les points de ramification ne sont pas numérotés. Cependant la relation

$$\bigoplus_{P \in \Delta_i} \mathcal{L}_P = \bigoplus_{\chi \in \widehat{C_G(H_i)}, \chi_{|H_i} = \chi_i} E_{i,\chi} \otimes W_\chi$$

a un sens. Lorsque G est cyclique (§ 10.4), tout devient plus simple.

10.3. Relations de Riemann-Hurwitz d'ordre supérieur

10.3.1. Calculs dans l'anneau de Chow

Fixons quelques conventions. Si $\mathcal{M}$ est un champ de Deligne-Mumford de dimension pure $n = \dim \mathcal{M}$, on notera $A^\bullet(\mathcal{M})$ l'anneau de Chow de $\mathcal{M}$ à coefficients rationnels. On retient les notations de Mumford [58], voir aussi Vistoli [68], en particulier l'identification $A^k(\mathcal{M}) = A_{n-k}(\mathcal{M})$ (loc. cit. § 3). Si Z est un sous-champ fermé intègre de $\mathcal{M}$ de dimension k, on notera $[Z] \in A_k(\mathcal{M})$ le cycle correspondant, et $[Z]_Q$ la classe fondamentale de Z. Si $e(Z)$ est l'ordre du groupe des automorphismes d'un point générique de Z, alors [58], $[Z]_Q = e(Z)^{-1}[Z]$. L'identité de $A^\bullet(\mathcal{M})$ est donc $[\mathcal{M}]_Q$. Si M est un espace des modules grossiers le morphisme $\mathcal{M} \to M$ induit un isomorphisme $A^\bullet(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^\bullet(\mathcal{M})$ [68]. Dans la suite $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

Soit la courbe universelle $q : \overline{\mathcal{C}}_{g,n} = \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$; le morphisme q est le morphisme noté usuellement π_{n+1}, oubli du $n+1$-ième point. Posons $K = c_1(\omega_q)$ et soit D_i (ou $D_{i,n+1}$) l'image de la section universelle d'indice i, $(1 \leq i \leq n)$. Il est commode d'utiliser, outre les classes kappa de Mumford-Morita-Miller [58], les classes kappa de Mumford (Arbarello-Cornalba [4]) $\tilde{\kappa}_l = q_\star(K^{l+1}) \in A^l(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, resp. $\kappa_l = q_\star(c_1(\omega_q(\sum D_i))^{l+1})$. Elles sont reliées par [4]

$$\kappa_a = \tilde{\kappa}_a + \sum_{i=1}^{n} \psi_i^a \tag{10.23}$$

Les classes κ_l satisfont relativement au morphisme $\pi_n : \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n-1}$, à la relation simple

$$\kappa_l = \pi_n^*(\kappa_l) + \psi_n^l \tag{10.24}$$

Rappelons que $D_{i,n+1}$ est le diviseur dont les points sont obtenus en collant une "bulle" au point d'indice i. Les classes ψ_i satisfont relativement à π_{n+1} à la relation importante (Lemme de comparaison)

$$\psi_i = \pi_{n+1}^*(\psi_i) + D_{i,n+1}\,(1 \leq i \leq n) \tag{10.25}$$

Soit le champ $\mathcal{H}_{g,G,\xi}$ source du revêtement universel $q : \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi} \to \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, et $\omega = \omega_q$. On définit des classes κ_l (resp.$\tilde{\kappa}_l$) $\in A^l(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}) \otimes \mathbb{Q}$. Pour les distinguer des précédentes, on notera κ'_l (resp. $\tilde{\kappa}'_l$) $\in A^l(\overline{\mathcal{M}}_{g',b}) \otimes \mathbb{Q}$ celles de même nom qui vivent sur la base, c'est à dire dans $A^l(\overline{\mathcal{M}}_{g',b})$. Du fait du carré cartésien (6.24), on voit que les classes κ_l et $\tilde{\kappa}_l$ proviennent des classes de même nom de $\overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$. Le morphisme $\imath : \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,(r)}$ étant une immersion locale régulière (prop. 6.14) on notera que le morphisme de Gysin $\imath^!$ est défini au niveau des cycles. Au niveau de la première classe de Chern, et pour prendre en compte les éléments de torsion du groupe de Picard, il est utile d'utiliser le formalisme du produit d'intersection de Deligne (voir [9], Jarvis [43], § 3).

Rappelons que cette construction associe à toute courbe prestable $q : C \to S$, et deux faisceaux inversibles $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ sur C, un faisceau inversible $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle \in \mathrm{Pic}\,(S)$ par

$$\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle = \det Rq_*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}) \otimes (\det Rq_*\mathcal{L})^{-1} \otimes (\det Rq_*\mathcal{M})^{-1} \otimes \det Rq_*\mathcal{O}_C) \tag{10.26}$$

Le déterminant de la cohomologie $\det Rq_*(-)$ se réduit dans (10.27) à $\det R^0q_*(-) \otimes (\det R^1q_*(-))^{-1}$. On montre que l'opération $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$ est bilinéaire (bimultiplicative) symétrique, et fonctorielle relativement aux isomorphismes ([9],[18]). Si $\omega = \omega_{C/S}$ est le faisceau dualisant relatif, l'identité suivante (en notation additive) est satisfaite (Théorème de Deligne-Riemann-Roch ([18], [43]):

$$2 \det Rq_*\mathcal{L} = \langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \rangle - \langle \mathcal{L}, \omega \rangle + 2 \det Rq_*\omega \tag{10.27}$$

Si D est un diviseur de Cartier relatif, et $\mathcal{M} = \mathcal{O}_C(D)$, il découle immédiatement de la définition jointe à la suite exacte $O \to \mathcal{O}(-D) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_D \to 0$ la relation [9]

$$\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle = \det_{\mathcal{O}_S}(q_*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D)) \otimes (\det_{\mathcal{O}_S} q_*(\mathcal{O}_D))^{-1} \tag{10.28}$$

Dans ce contexte la classe $\kappa = \kappa_1$ est représentée par le faisceau inversible défini par le produit d'intersection $\kappa_1 = \langle \omega, \omega \rangle$. D'abord une remarque prélimiminaire.

Lemme 10.7. *Soit $q : C \xrightarrow{\pi} D \xrightarrow{p} S$ un revêtement entre S-courbes lisses, de degré n. Pour tout faisceau inversible $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{D})$, on*

$$\langle \pi^*(\mathcal{L}), \pi^*(\mathcal{L}) \rangle = n \langle \mathcal{L}, \mathcal{L} \rangle \tag{10.29}$$

Preuve: Du fait que π est fini, on a $Rq_*(-) = Rp_*\pi_*(-)$, et donc pour tout faisceau inversible $\mathcal{M}$ sur D, $Rq_*(\pi^*(\mathcal{M}) = Rp_*(\mathcal{M} \otimes \pi_*(\mathcal{O}_C))$. L'hypothèse dit que $E = \pi_*(\mathcal{O}_S)$ est localement libre de rang n. Le probème se réduit à vérifier qu'il y a pour tout fibré vectoriel E de rang n, et tous faisceaux inversibles $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ sur D, un isomorphisme canonique (unique)

$$n\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle = \det Rp_*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} \otimes E) - \det Rp_*(\mathcal{L} \otimes E) - \det Rp_*(\mathcal{M} \otimes E) + \det Rp_*(E)$$

En suivant les arguments de ([19], § 9.5), on peut se ramener étale-localement au cas où E admet une filtration par des sous-fibrés, à quotients successifs de rang un. Supposons que E admette une filtration $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n = E$, E_j étant localement libre de rang j, et $\mathcal{L}_j = E_j/E_{j-1}$ localement libre de rang un. On obtient, la notation étant additive

$$\begin{aligned}\langle \pi^*(\mathcal{L}), \pi^*(\mathcal{M}) \rangle = &\sum_j \det Rp_*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}_j) - \sum_j \det Rp_*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_j) \\ &- \sum_j \det Rp_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}_j) + \sum_j \det Rp_*(\mathcal{L}_j)\end{aligned}$$

ce qui tenant compte du fait que les $\mathcal{L}_j$ sont de rang un, peut s'écrire $\sum_j \langle \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_j, \mathcal{M} \rangle - \sum_j \langle \mathcal{M}, \mathcal{L}_j \rangle$. La conclusion découle dans ce cas de la bilinéarité du produit d'intersection.

□

10.3.2. Relations de Riemann-Hurwitz d'ordre supérieur

Soit de nouveau la G-courbe universelle $\pi : \overline{\mathcal{C}}_{g,G} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$ définie dans la section 6.4.2. Elle s'insère dans un carré 2-commutatif

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{C}}_{g',b} \arrow[r, "p"] & \overline{\mathcal{M}}_{g',b} \\ \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi} \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "q"] & \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \arrow[u, "\delta"'] \end{tikzcd} \tag{10.30}$$

Notons $\omega = \omega_{\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}/\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}} \in \mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi})$ le faisceau inversible dualisant relatif du morphisme q. Ce faisceau est visible sur un atlas. Soit $\pi_U : C_U \to D_U$ un G-revêtement de base U définissant un atlas de $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$. Alors le revêtement obtenu par changement de base $p_2 : \tilde{C}_U = C_U \times_U C_U \to C_U$, muni de la section diagonale (il n'est pas nécessaire de stabiliser) fait de C_U un atlas de $\mathcal{C}_{g,G,\xi}$. L'incarnation de ω sur l'atlas $C_U \to \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}$ est $\omega_{C_U/U}$. En notant ω' le faisceau $\omega_{\overline{\mathcal{C}}_{g',b}/\overline{\mathcal{M}}_{g',b}}$, on a $\Delta^*(\omega')(C_U) = \pi_U^*(\omega_{D_U/U})$.

Pour tout indice i avec $1 \leq i \leq b$, soit R_i la partie du diviseur de ramification au dessus de la section Q_i. Pour définir R_i, il suffit de le réaliser au niveau de l'atlas $C_U \to \mathcal{C}_{g,G,\xi}$. Soit le revêtement $p_2 : \tilde{C}_U \to C_U$. Le diviseur relatif $\tilde{R}_i = \mathbf{Ind}_{H_i}^G \Delta_i \subset \tilde{C}_U$ est alors bien défini. Rappelons que ce diviseur est étale de degré $[G : H_i]$ sur C_U. Alors $R_i = \Delta^*(\tilde{R}_i)$, et $\tilde{R}_i = R_i \times_u C_U$. On peut donc considérer R_i comme un diviseur de $\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}$, étale de degré $[G : H_i]$ sur $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$. Le diviseur de ramification est alors

$$R = \sum_i (e_i - 1) R_i \subset \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi} \tag{10.31}$$

Notons $B_i \subset \overline{\mathcal{M}}_{g',b}$ le diviseur image de la section Q_i. La formule de ramification transcrite au niveau des champs a pour forme:

Proposition 10.8. *i) Pour tout $1 \leq i \leq b$, on a l'égalité de diviseurs de Cartier $\Delta^*(B_i) = e_i R_i$.*
ii) Dans le groupe de Picard de $\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}$ on a la relation (formule de ramification)

$$\omega = \Delta^*(\omega') \otimes \left(\otimes_{i=1}^b \mathcal{O}(R_i)^{\otimes e_i - 1}\right) \tag{10.32}$$

Preuve: Pour le premier point, notons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{C}}_{g,G} \arrow[r, "\Delta"] & \overline{\mathcal{M}}_{g',b} \\ C_U \arrow[u] \arrow[r, "\pi_U"] & D_U \arrow[u] \end{tikzcd}$$

dans lequel les flêches verticales sont représentées respectivement par $p_2 : \tilde{C}_U \to C_U$ et $D_U \times_U D_U \to D_U$ muni de la section diagonale. Pour identifier $\delta^*(B_i)$, il suffit d'examiner l'image réciproque dans C_U, qui est $\pi_U^*(B_i) = e_i R_i$.
ii) Le faisceau $\Delta^*(\omega')$ a pour description relativement à l'atlas C_U l'image réciproque $\pi_U^*(\omega_{D_U/U})$. De la sorte la relation (10.32) n'est que la simple traduction de la formule de ramification appliquée à $\pi : C_U \to D_U$, jointe à la description du diviseur de ramification (voir remarque 4.1, et § 6.4.2).

□

Soit $\tau_i : R_i \hookrightarrow \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}$ l'inclusion. On peut énoncer le résultat principal de cette section, un analogue supérieur de la formule de Riemann-Hurwitz, relation qui exhibe une propriété remarquable des classes kappa[27]:

[27] Le résultat est énoncé pour les revêtements galoisiens, mais il est facile de valider la preuve dans le cas non galoisien.

Théorème 10.9. *Dans $A^l(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi})$ on a pour tout $l \geq 0$ (on rappelle que les coefficients sont rationnels) la relation de Riemann-Hurwitz:*

$$\tilde{\kappa}_l = |G|\delta^*(\tilde{\kappa}'_l) + \sum_i (-1)^{l+1}(1-e_i^{l+1})\tau_{i*}(c_1(N_{R_i})^l) \tag{10.33}$$

d'une autre manière $\kappa_l = |G|\delta^*(\kappa'_l)$.

Preuve: De la relation de Riemann-Hurwitz (10.32), on tire en prenant la première classe de Chern des deux membres

$$K = \Delta^*(K') + \sum_i (e_i - 1)c_1(\mathcal{O}(R_i))$$

En particulier en élevant à la puissance $l+1$ des deux membres de cette égalité, et tenant compte aussi du fait que R_i et R_j sont "disjoints" si $i \neq j$

$$K^{l+1} = \Delta^*({K'}^{l+1}) + \sum_i \sum_{j=1}^{l+1} \binom{l+1}{j} (e_i - 1)^j \Delta^*({K'}^{l+1-j}) c_1(\mathcal{O}(R_i))^j$$

D'une autre manière, en insérant l'égalité $\Delta(K')^{l+1-j} = (K - \sum_i (e_i - 1)c_1(\mathcal{O}(R_i)))^{l+1-j}$ si $1 \leq j \leq l+1$ on obtient

$$\Delta^*({K'}^{l+1-j})c_1(\mathcal{O}(R_i))^j \;=\; \sum_{k=0}^{l+1-j} \binom{l+1-j}{k} (1-e_i)^k K^{l+1-j-k} c_1(\mathcal{O}(R_i))^{k+j}$$

On a $K^{l+1-j-k}c_1(\mathcal{O}(R_i))^{k+j} = \tau_{i*}(c_1(\omega_{\pi|R_i})^{l+1-j-k}c_1(\mathcal{O}_{R_i}(R_i))^{k+j-1}$, ce qui compte tenu du fait que $\omega_{\pi|R_i} \cong \mathcal{O}_{R_i}(R_i)$ donne finalement

$$\Delta^*({K'}^{l+1-j})c_1(\mathcal{O}(R_i))^j \;=\; \sum_{k=0}^{l+1-j} \binom{l+1-j}{k} (1-e_i)^k (-1)^{l+1-j-k} \tau_{i*} c_1(\mathcal{O}_{R_i}(R_i))^l$$

Le coefficient devant $\tau_{i*}\, c_1(\mathcal{O}_{R_i}(R_i))^l$ qui en résulte est

$$(-1)^{l+1-j} \sum_{k=0}^{l+1-j} \binom{l+1-j}{k} (e_i - 1)^k = (-1)^{l+1-j} e_i^{l+1-j}$$

En reportant cela dans l'expression 10.26, on obtient que le coefficient devant l'expression $\tau_! \, c_1(\mathcal{O}_{R_i}(R_i))^l$ est

$$\sum_{j=1}^{l+1} \binom{l+1}{j} (e_i - 1)^j (-e_i)^{l+1-j} = (-1)^{l+1} - (-e_i)^{l+1}$$

Appliquons π_* aux deux membres, on voit alors qu'il suffit alors de prouver que $\pi_*(\Delta^*({K'}^{l+1})) = |G|\delta^*(\tilde{\kappa}_l)$. Soit le morphisme fini $\psi : \overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi} \to \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{g',b}} \overline{\mathcal{C}}_{g',b}$. Si p_1, p_2 sont les projections du produit cartésien sur les deux facteurs, on note que

$$\pi_* \psi^* p_2^*({K'}^{l+1}) = p_{1*}\psi_*\psi^* {p_2}^*({K'}^{l+1})$$

Mais par la formule de projection, jointe au fait que ψ est fini de degré $|G|$, on a $\psi_*\psi^*(-) = |G|(-)$ (voir [58] Prop 3.8). Par ailleurs, du fait de la platitude des morphismes, on a la propriété de changement de base ([66], Lemma 3.9)

$$p_{1*}p_2^*(K'^{l+1}) = \delta^*(\tilde{\kappa}'_l)$$

la relation (10.33) en découle. On passe facilement de cette relation à la forme compacte qui relie les classes κ. Notons d'abord que par définition

$$\kappa_l = \tilde{\kappa}_l + \sum_i (q_{|R_i})_* \left(c_1(N^\vee_{|R_i})^l \right)$$

Comme $q^*(N^\vee_{B_i}) = (N^\vee_{R_i})^{e_i}$, on a

$$e_i^l (q_{|R_i})_* \left(N^\vee_{|R_i})^l \right) = q_{|R_i})_* \left(N^\vee_{|B_i})^l \right) = m_i \psi^l \ (m_i = \frac{|G|}{e_i})$$

d'où finalement $\quad \kappa_l = |G|\delta^*(\tilde{\kappa}'_l) + \sum_i e_i^{l+1} \frac{m_i}{e_i^l} \delta^*(\psi_i)^l = |G|\, \delta^*(\kappa'_l)$.

□

Si $l = 0$, la relation se réduit à la formule de Riemann-Hurwitz usuelle $2g - 2 = |G|(2g' - 2) + \sum_i (1 - \frac{1}{e_i})$, on encore $2g-2+r = |G|(2g'-2+b)$. En effet on sait que $\tilde{\kappa}_0 = (2g-2)[\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}]$, $\tilde{\kappa}'_0 = [\overline{\mathcal{M}}_{g',b}]$ et comme $R_i \to \overline{\mathcal{M}}_{g',b}$ est un torseur sous G/H_i, la somme se réduit à $\sum_i (e_i - 1)\frac{|G|}{e_i}[\overline{\mathcal{M}}_{g',b}]$.

Remarque 10.2 Si $l = 1$, on peut donner une preuve différente de (10.34) exploitant l'égalité $\tilde{\kappa}_1 = \langle \omega, \omega \rangle$, avec la bimutiplicativité du produit d'intersection de Deligne. On évalue $\langle \omega, \omega \rangle$ de deux manières. La première est simplement la formule de Mumford pour la courbe $C_U \to U$, et la seconde revient à substituer à ω le second membre de la relation de Riemann-Hurwitz (10.32). On se limite au cas G cyclique, le cas d'un groupe G arbitraire pouvant se traiter de manière analogue, avec quelques modifications. Un problème vient cependant du fait qu'on ne peut appliquer directement le lemme 10.7 à $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi})$ du fait de la non platitude de Δ, i.e de $\pi_*(\mathcal{O}_C)$ si C est singulière. Pour valider le lemme, il faut définir le produit d'intersection $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$ si $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{M}$ dégénère en un faisceau sans torsion de rang un sur la S-courbe C.

Grâce à la proposition 7.12, si $\mathcal{L}$ est sans torsion de rang un, on sait qu'il y a une désingularisation $\rho : \tilde{C} \to C$ de $\mathcal{L}$ avec un faisceau inversible canonique $\mathcal{O}(1)$ tel que $\mathcal{L} = \rho_*(\mathcal{O}(1))$. On a $R\rho_*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{L}$ (Proposition 7.12). Si $\tilde{q} = q\rho : \tilde{C} \to S$ est le morphisme composé, on note que $Rq_*(\mathcal{L}) = R\tilde{q}_*(\mathcal{O}(1))$ est un complexe parfait, de sorte que $\det(Rq_*(\mathcal{O}(1))$ a un sens, ce qui permet de définir $\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle$ comme étant

$$\langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle = \langle \mathcal{O}(1), \rho^*(\mathcal{M}) \rangle \tag{10.34}$$

Avec ces conventions, si $\mathcal{P} \in \mathrm{Pic}(\mathcal{C})$, pour calculer le produit d'intersection $\langle \mathcal{L} \otimes \mathcal{P}, \mathcal{M} \rangle$, il suffit de noter que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{P} = \rho_*(\mathcal{O}(1) \otimes \rho^*(\mathcal{P})$. Dès lors la relation d'additivité $\langle \mathcal{L} \otimes \mathcal{P}, \mathcal{M} \rangle = \langle \mathcal{L}, \mathcal{M} \rangle + \langle \mathcal{P}, \mathcal{M} \rangle$ est clairement vérifiée. De cette remarque découle la validité du lemme 10.7 pour un revêtement stable, non nécessairement lisse. Si G est cyclique d'ordre n on peut alors justifier comme précédemment la relation

$$\langle \omega', \omega' \rangle = \det Rq_*(\omega'^2 \otimes \mathcal{L}_j) - 2 \det Rq_*(\omega' \otimes \mathcal{L}_j) + \det Rq_*(\mathcal{L}_j) \tag{10.35}$$

10.4. Revêtements cycliques

10.4.1. Relations entre les ψ et les μ

Dans le cas d'un groupe de Galois cyclique les choses se simplifient de manière notable. Soit $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, la classe de 1 correspondant à l'automorphisme σ, on a donc $\widehat{G} = G$. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ soit χ_j le caractère tel que $\chi_j(\sigma) = \zeta_n^j$. L'holonomie en un point de branchement Q_i est définie par l'entier k_i, $1 \leq k_i < e_i$, $\operatorname{pgcd}(k_i, e_i) = 1$; soit $1 \leq \nu_i < e_i$ tel que $k_i\nu_i \equiv 1 \pmod{e_i}$.

Rappelons que $\mu_{i,\alpha} = \psi_{i,\alpha}$ (proposition 10.6). Les faisceaux inversibles $\psi_{i,\alpha}$ sont reliés par des relations simples:

Proposition 10.10. *Soit $\alpha = le_i + k < n$, avec $0 \leq k < e_i$. Alors*

$$\psi_{i,\alpha} = \psi_{i,k} \otimes \psi_{i,e_i}^{\otimes l}, \qquad \psi_{i,e_i}^{\otimes m_i} = 0 \quad (\psi_0 = 0) \quad \text{ et } \psi_{i,\alpha} = \psi_{i,1}^{\alpha}\psi_i^{-[\frac{\alpha\nu_i}{e_i}]} \tag{10.36}$$

Le morphisme $ev_i^* : \operatorname{Pic}(\mathbf{B}(C_G(H_i)/H_i)) \to \operatorname{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi})$ est injectif.

Preuve: Le morphisme $\pi : \Delta_i \to S$ est un G/H_i-torseur, il en découle immédiatement que si $\alpha = le_i$, $\psi_{i,\alpha} = \psi_{i,e_i}^{\otimes l}$, et $\psi_{i,e_i}^{\otimes m_i} = 0$. En considérant la décomposition du faisceau $\pi_*(\mathcal{O}_{\Delta_i}(-k\Delta_i))$ (voir 10.19), on voit facilement que les facteurs, indexés par les $j \equiv kk_i \pmod{e_i}$, sont $\psi_{j+le_i} = \psi_{i,j} \otimes \psi_{i,e_i}^{\otimes l}$. On peut justifier ces relations d'une autre manière, en observant qu'au voisinage de la section Q_i on a $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}^{\otimes j}[\frac{j\nu_i}{e_i}Q_i]$. On en tire immédiatement par image réciproque et pour tout indice α la relation $\psi_{i,\alpha} = \psi_{i,1}^{\alpha}\psi_i^{-[\frac{\alpha\nu_i}{e_i}]}$.
Prouvons le dernière point. Rappelons que ev_i est l'évaluation (6.26). On se limite à $g' = 0$, qui est le seul cas considéré dans la suite. Il suffit de prouver que ψ_{i,e_i} est d'ordre m_i. On est ramené à exhiber un revêtement $\pi : C \to D$ entre courbes lisses, de base Spec $k(\Delta)$, où Δ une courbe projective lisse, tel que le revêtement galoisien étale $\Delta_i \to \operatorname{Spec}\Delta$ soit connexe, avec la ramification indiquée. Choisissons la courbe Δ de genre h tel que $2h \geq b$. Comme les e_i sont premiers à la caractéristique p si $p > 0$, cela ne pose pas de problème si Δ est générique. On prouve l'assertion pour l'indice $i = 1$. On peut certainement trouver $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_b \in \operatorname{Pic}(\Delta)$ d'ordres respectifs $e_1, \ldots, e_b$, et tels que la somme $\sum_{i=1}^b \mathbb{Z}\mathcal{L}_i$ soit directe. Du fait que $g' = 0$, $\operatorname{ppcm}(e_1, \ldots, e_b) = n$.

Soit un diviseur D_i tel que $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}(D_i)$. Il y a une fonction rationnelle $\phi_i \in k(\Delta)^*$ telle que $e_iD_i = \operatorname{Div}(\phi_i)$. Si $D = \sum_{i=1}^b \nu_iD_i$, on a $nD = \operatorname{Div}(\prod_{i=1}^b \phi_i^{m_i\nu_i})$, et la classe de D, c'est à dire $\otimes_i\mathcal{L}_i^{\nu_i}$, est d'ordre n. On observe aussi que la fonction rationnelle $\psi = \prod_{i=2}^b \phi_i^{m_i\nu_i}$ est d'ordre m_1 dans $k(\Delta^*)/k(\Delta^*)^{m_1}$. En effet si pour un diviseur strict d de m_1, on a $\psi^{\frac{m_1}{d}} = \gamma^{m_1}$, alors on peut supposer que $\psi = \gamma^d$. Dès lors $\prod_{i=1}^b \phi_i^{m_i\nu_i}$ serait une puissance d-ième avec d/m, ce qui à exclure car D est d'ordre n. Considérons alors le corps de fonctions d'une variable $E = k(\Delta)(t, \xi)$ où

$$\xi^n = (t - \phi_1)^{m_1\nu_1} \prod_{i=2}^b (t - \phi_1 + \phi_i)^{m_i\nu_i}$$

On va voir qu'il est de degré n sur $k(\Delta)(t)$, et qu'il y a une seule place $\wp$ au-dessus de $t = \phi_1$, d'indice de ramification $e = e_1$ et de degré résiduel m_1. Soit $v_\wp$ la valuation normalisée en $\wp$. On a $nv_\wp(\xi) = m_1\nu_1 e$ donc e est un multiple de e_1. Il suffit pour conclure de voir que le degré résiduel est au moins égal à m_1. Comme $(\xi^{e_1}/(t-\phi_1)^{\nu_1})^{m_1} = \prod_{i=2}^b (t-\phi_1+\phi_i)^{m_i\nu_i}$, dans le corps résiduel $k(\wp)$ la classe de $u = \xi^{e_1}/(t-\phi_1)^{\nu_1}$ vérifie $\overline{u}^{m_1} = \prod_{i=2}^b \phi_i^{m_i\nu_i} = \psi$. Il en découle que son degré est $\geq m_1$, donc égal à m_1. Le résultat en découle.

□

Dans la suite, le groupe étant toujours cyclique, on posera $\mu_i = \psi_{i,1}$, qui est le faisceau tel que $\mu_i(\pi) = \sigma_i^*(\mathcal{L})$. On remarque que $p_*(\mathcal{L}) = 0$, plus généralement $p_*(\mathcal{L}_j) = 0$ si $1 \leq j < n$, de sorte que $p_!(\mathcal{L}_j) = -[\mathrm{R}^1 p_*(\mathcal{L}_j)]$. Les classes μ_i, ψ_i et $\psi_{i,j}$ sont reliées par des relations universelles simples:

Proposition 10.11. *i) On a dans* $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi})$ *les relations*

$$\psi_{i,j} = j\mu_i - [\frac{j\nu_i}{e_i}]\psi_i, \;\; n\mu_i \;=\; m_i\nu_i\psi_i, \;\; n\mu_{i,k_i} = m_i\psi_i, \;\text{ et }\; m_i\psi_{i,e_i} = 0 \tag{10.37}$$

Preuve: Notons Q_i l'image de la section σ_i, de sorte que le faisceau conormal à Q_i est $\mathcal{O}_{Q_i}(-Q_i) \cong \Omega^1_{D/S} \otimes \mathcal{O}_{Q_i}$. Comme pour $i \neq j$, les sections σ_i et σ_j sont disjointes, il vient

$$\sigma_i^*\left(\mathcal{O}(-Q_j)\right) = \begin{cases} \psi_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{10.38}$$

Du fait que $\mathcal{L}$ est une racine n-ième de $\mathcal{O}_D(-\sum_{j=1}^b m_j\nu_j Q_j)$ (Définition 9.1), il vient par image réciproque, le groupe de Picard étant noté additivement $n\sigma_i^*(\mathcal{L}) \cong m_i\nu_i\psi_i$. En utilisant (9.8), on obtient immédiatement la relation $\sigma_i^*(\mathcal{L}_j) = j\sigma_i^*(\mathcal{L}) - [\frac{j\nu_i}{e_i}]\psi_i$, c'est à dire $\psi_{i,j} = j\mu_i - [\frac{j\nu_i}{e_i}]\psi_i$ comme indiqué. On a alors $\nu_i\mu_{i,k_i} = \nu_i k_i - \nu_i[\frac{k_i\nu_i}{e_i}]\psi_i = \mu_i$. En multipliant les deux membres par m_i, la relation $n\mu_{i,k_i} = m_i\psi_i$ suit. La dernière relation découle de la proposition 10.10.

□

Le théorème de Deligne-Riemann-Roch permet de mettre en évidence des relations simples dans $\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_{g,G,\xi})$ entre les classes λ_j $(1 \leq j \leq n-1)$ et les classes $\psi_{i,\alpha}$, et finalement les classes λ_i et ψ_j seules. Le raisonnement s'inspire de ([43], Theorem 3.3.4). Un raffinement tenant compte du bord sera explicité dans la section suivante. Notons que pour $1 \leq j \leq n-1$ (§ 10.1.2) $\lambda_{n-j} = \det(\mathbb{E}_{n-j}) = (\det R^1 p_*(\mathcal{L}_j)^{-1} = \det Rp_*(\mathcal{L}_j)$. Le théorème de Deligne-Riemann-Roch permet d'évaluer le dernier terme.

Proposition 10.12. *Pour tout* $1 \leq j \leq n-1$, *on a dans* $\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_{g,G,\xi})$ *les relations:*

$$2n\lambda_{n-j} - 2n\lambda' = -\sum_{\alpha=1}^b jn\langle\frac{jm_\alpha\nu_\alpha}{n}\rangle\mu_\alpha + \sum_{\alpha=1}^b n\langle\frac{jm_\alpha\nu_\alpha}{n}\rangle\left(1 + [\frac{jm_\alpha\nu_\alpha}{n}]\right)\psi_\alpha \tag{10.39}$$

Preuve: Partons de l'identité valable pour tout j, $\mathcal{L}_j = \mathcal{L}^{\otimes j}[\frac{jB}{n}]$. Supposons d'abord $j = n$, donc $\mathcal{L}^{\otimes n}[B] = \mathcal{O}$. En utilisant la notation additive, on a

$$0 = \langle n\mathcal{L} + \mathcal{O}(B), \omega'\rangle = n\langle\mathcal{L}, \omega'\rangle + \sum_{\alpha=1}^b m_\alpha\nu_\alpha\langle Q_\alpha, \omega'\rangle = n\langle\mathcal{L}, \omega'\rangle + \sum_\alpha m_\alpha\nu_\alpha\psi_\alpha$$

De la même manière on obtient immédiatement

$$0 = \langle n\mathcal{L} + B, \mathcal{L}\rangle = n\langle \mathcal{L}, \mathcal{L}\rangle + n\rangle \mathcal{O}(B), \mathcal{L}\rangle = n\langle \mathcal{L}, \mathcal{L}\rangle + \sum_\alpha m_\alpha \nu_\alpha \mu_\alpha$$

Le théorème de Deligne-Riemann-Roch donne par ailleurs

$$2n\lambda_{n-j} = 2n \det Rp_*(\mathcal{L}_j) = n\langle \mathcal{L}_j, \mathcal{L}_j\rangle - n\langle \mathcal{L}_j, \omega'\rangle + 2n\lambda'$$

ce qui par substitution de $\mathcal{L}_j = j\mathcal{L} + [\frac{jB}{n}]$ conduit à

$$2n\lambda_{n-j} - 2n\lambda' = n\{j^2\langle \mathcal{L}, \mathcal{L}\rangle + 2j\langle \mathcal{L}, [\frac{jB}{n}]\rangle + \langle [\frac{jB}{n}], [\frac{jB}{n}]\rangle\} - nj\langle \mathcal{L}, \omega'\rangle - n^2\langle [\frac{jB}{n}], \omega'\rangle$$

donc en tenant compte des expressions du début $2n\lambda_{n-j} - 2n\lambda' =$

$$-j^2 \sum_\alpha m_\alpha \nu_\alpha \mu_\alpha + 2jn \sum_\alpha [\frac{jm_\alpha \nu_\alpha}{n}]\mu_\alpha + \left(-n \sum_\alpha [\frac{jm_\alpha \nu_\alpha}{n}]^2 + j \sum_\alpha m_\alpha \nu_\alpha - \sum_\alpha n[\frac{jm_\alpha \nu_\alpha}{n}]\right) \psi_\alpha$$

soit finalement, $\langle - \rangle$ désignant la partie fractionnaire, cette somme se réduit à

$$2n\lambda_{n-j} - 2n\lambda' = -\sum_{\alpha=1}^{b} jn\langle \frac{jm_\alpha \nu_\alpha}{n}\rangle \mu_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{b} n\langle \frac{jm_\alpha \nu_\alpha}{n}\rangle \left(1 + [\frac{jm_\alpha \nu_\alpha}{n}]\right) \psi_\alpha$$

qui est l'égalité annoncée.

□

On peut retrouver la relation de Riemann-Hurwitz à l'ordre $l = 1$ (comparer avec le théorème 10.9)

Proposition 10.13. *Dans* $\mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi})$ *on a la relation* $\kappa_1 = n\kappa_1'$.

Preuve: Partons de la relation de Riemann-Hurwitz $\omega = \Delta^*(\omega') \otimes \mathcal{O}(\mathcal{R})$ (10.32). On a en utilisant la notation additive

$$\tilde{\kappa}_1 = \langle \omega, \omega\rangle = \langle \Delta^*(\omega'), \Delta^*(\omega')\rangle + 2\langle \Delta^*(\omega'), \mathcal{O}(R)\rangle + \langle \mathcal{O}(R), \mathcal{O}(R)\rangle$$

puis en tenant compte de la remarque qui précède, et du fait que R_i et R_j sont disjoints si $i \neq j$

$$\tilde{\kappa}_1 = n\delta^*\langle \omega', \omega'\rangle + 2\sum_j \langle\, \delta^*(\omega'), \mathcal{O}(R_j)\rangle - \sum_j (e_j - 1)^2 \langle \mathcal{O}(-R_j), \mathcal{O}(R_j\rangle$$

Un déterminant étant pris sur $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, on a par définition et utilisation des relations de la section 10.2, $\langle \delta^*(\omega'), \mathcal{O}(R_j)\rangle = \det\left(\mathcal{O}_{R_j} \otimes \omega'\right) - \det \mathcal{O}_{R_j} = \sum_j m_j \psi_j$. Pour l'autre terme on a $\langle \mathcal{O}(-R_j), \mathcal{O}(R_j\rangle = \det\left(\mathcal{O}_{R_j}(-R_j)\right) - \det \mathcal{O}_{R_j} = \sum_{l=0}^{m_j-1} \psi_{j,k_j+le_j} - \det \mathcal{O}_{R_j}$. Du fait de la proposition 10.10, cette dernière expression se réduit à

$$= m_j \psi_{j,k_j} + \frac{m_j(m_j-1)}{2}\psi_{j,e_j} - \det \mathcal{O}_{R_j} = m_j \psi_{j,k_j}$$

En sommant sur j on obtient $\kappa_1 = \langle\omega,\omega\rangle + \sum_j m_j\psi_{j,k_j} =$

$$2\sum_j (e_j-1)m_j\psi_j - \sum_j (e_j-1)^2 m_j\psi_{j,k_j} + \sum_j m_j\psi_{j,k_j}$$

et en insérant la relation $m_j\psi_j = n\psi_{j,k_j}$, on obtient finalement $\kappa_1 = n\delta^*\langle\omega',\omega'\rangle + n\sum_j \psi_j = n\delta^*(\kappa_1')$

□

10.4.2. Faisceaux inversibles associés aux composantes du bord

Fixons les notations en ce qui concerne le bord de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ [40]. Si $0 \leq i \leq [g/2]$ et $A \subset [1,n]$, on note $\Delta_{i,A}$ la composante irréductible de $\partial\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ correspondante à un segment, l'un des sommets étant pondéré par i, et marqué par les indices appartenant à A. L'autre sommet est donc pondéré par $g-i$, et marqué par le complémentaire B de A. Si $i = \frac{g}{2}$, alors $\Delta_{\frac{g}{2},A} = \Delta_{\frac{g}{2},B}$, et si $i = 0$, la stabilité impose $|A| \geq 2$. La composante associée à la boucle est notée Δ_0. Ces composantes sont des diviseurs de Cartier, du fait de la lissité de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Elles définissent des faisceaux inversibles qui seront seront notés $\mathcal{O}(\Delta i, A)$, ou simplement par la même lettre. Pour éviter toute confusion, si Δ est un diviseur de Cartier effectif dans l'un des champs considérés, on notera $[\Delta] \in A^1$ le cycle (ou classe) associé.

Rappelons que le bord $\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} - \mathcal{H}_{g,G,\xi}$ admet une stratification (§7.2) compatible avec le morphisme $\delta : \overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi} \to \overline{\mathcal{M}}_{g',b}$. Les strates qui ne sont pas en général les composantes irréductibles, sont indexées par les graphes modulaires de Hurwitz de type (g,n) à une seule orbite d'arêtes (§7.2).

A un tel graphe Γ est associé un diviseur de Cartier Δ_Γ contenu dans le bord du champ de Hurwitz, et comme le champ de Hurwitz est lisse, un faisceau inversible $\mathcal{O}(\Delta_\Gamma)$. Si G est cyclique, ce qui simplifie la combinatoire du bord, on va mettre en évidence quelques relations universelles simples, analogues à celles observées par Jarvis pour les courbes à spin, qui relient les faisceaux inversibles $\mathcal{O}(\Delta)$ (les notations sont celles de la section 9.2.3). L'argument général s'applique à un groupe de Galois arbitraire, mais avec des notations plus compliquées. Pour un groupe cyclique rappelons que les graphes de Hurwitz sont indexés par des partitions π du diviseur de branchement, et qu'une telle partition induit une partition (A,B) de l'ensemble des points de branchement. Si $n = p$ est premier, il y a une unique partition π subordonnée à (A,B). La notation retenue pour le diviseur correspondant est Δ_π et $\mathcal{O}(\Delta_\pi)$ désigne le faisceau inversible associé. On note aussi e_π l'indice d'inertie d'un point double d'une courbe générique dans Δ_π, et on pose $m_\pi = \frac{|G|}{e_\pi}$. Dans la proposition suivante le groupe de Galois est arbitraire.

Proposition 10.14. *Dans le groupe* $\mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi})$ *on a les relations où le produit tensoriel porte sur les partitions subordonnées à* (A,B)

$$\begin{cases} i)\ \ \delta^*(\mathcal{O}(\Delta_{i,A,B})) = \bigotimes_\pi \mathcal{O}(\Delta_\pi)^{\otimes e_\pi} \\ ii)\ \ \delta^*(\mathcal{O}(\Delta_0)) = \bigotimes_\pi \mathcal{O}(\Delta_{0,a,b,\pi})^{\otimes e_\pi} \end{cases} \tag{10.40}$$

Preuve: Soit un point $\pi : C \to D$ (générique) dans une composante où la base D est supposée avoir un seul point double, dans le cas i) deux composantes irréductibles, une seule dans le cas ii). La déformation équivariante universelle de C a pour base une algèbre de séries formelles

$\mathrm{Spec}\,(k[[\tau_1,\ldots,\tau_N]])$, où $N=3g-3+b$, et $\tau=\tau_1$ représente le paramètre de l'orbite des points doubles (Théorème 5.5). Soit la base $\mathrm{Spec}\,(k[[t_1,\ldots,t_N]])$ de la déformation universelle de (D,Q), $t=t_1$ étant le paramètre de Q, avec les relations $t=\tau^e,\ t_j=\tau_j \quad \text{si} \quad j\geq 2$. Du fait que les équations locales des diviseurs irréductibles mentionnés dans i) sont dans ces coordonnées locales, respectivement $t=0$ et $\tau=0$, la relation en découle. La preuve de ii) est analogue.

□

On peut aussi étudier la situation du bord de $\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi}$ relativement à l'immersion locale non ramifiée $\imath:\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi}\to\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$. Rappelons que seules les orbites de points de ramification sont indexées, et non les points eux-mêmes.

Proposition 10.15. *Soit Δ le diviseur du bord de $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$. On a $\imath^*(\Delta)=\sum_\pi m_\pi\Delta_\pi$.*

Preuve: Soit $\pi:C\to D$ un revêtement correspondant à un point général de δ_π, donc le graphe modulaire de D est un segment, ou une boucle. Il y a donc dans C une unique orbite de points doubles, de cardinal $m=m_\pi$. Dans la déformation universelle non équivariante de C, soient $t_1,\cdots,t_m\in R$ les paramètres de déformation de ces points. Si t_i est le paramètre de P_i, on sait que le stabilisateur H de P_1 laisse invariant t_1, et qu'on a $t_i=g^*(t_1)$ si $g(P_1)=P_i$. L'équation de Δ dans la carte Spec R est $t_1\cdots t_m=0$. Mais la carte locale correspondante de $C\to D$ dans $\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi})$ est Spec R_G, où $R_G=R/J$, J étant l'idéal engendré par les $g(a)-a),\quad a\in R, g\in G$. De la sorte l'équation locale de $\imath^*(\Delta)$ en $C\to D$ est $\prod_{i=1}^m t_i=u^m\epsilon$ où u est l'image de t_1, et ϵ est inversible. Comme $u=0$ est l'équation locale au point considéré du diviseur δ_π, la conclusion suit.

□

Faber et Pandharipande [30] ont fait observer que l'utilisation du théorème de Riemann-Roch par Mumford [58], marche dans un cadre plus général, en particulier s'applique au revêtement universel $\pi:\mathcal{C}=\overline{\mathcal{C}}_{g,G,\xi}\to\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}=\mathcal{H}$.

Rappelons la formulation de ([30], §1.1). Les notations sont celles de loc.cit, en particulier les B_k sont les nombres de Bernoulli. Le résultat qui donne le caractère de Chern de E s'énonce dans le présent contexte:

$$\mathrm{ch}(E)=g+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B_{2l}}{(2l)!}\left(\tilde\kappa_{2l-1}+\frac{1}{2}\imath_*\sum_{i=0}^{2l-2}(-1)^i\psi^i\overline{\psi}^{2l-2-i}\right)\in A^*(\mathcal{H}) \tag{10.41}$$

En particulier si $l=1$ on obtient la relation importante (voir 10.4.2), dans laquelle $\delta=j_*([\mathcal{S}]_Q)$ est la classe fondamentale du bord $\tilde\kappa_1+\delta=12\lambda$.

On peut aussi obtenir ces relations par transfert, simplement en appliquant $\imath^*$ à la relation correspondante dans le champ $\overline{\mathcal{M}}_{g,r}$. Soit le diviseur $\delta=\sum_\pi m_\pi\Delta_\pi\subset\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi}$, alors de la proposition 10.15 vient

Proposition 10.16. *On a dans* $\mathrm{Pic}\,(\overline{\mathcal{H}}_{g,G,\xi})$ *la relation de Mumford*

$$\tilde\kappa_1=\langle\omega,\omega\rangle-\delta \tag{10.42}$$

□

Supposant G cyclique (§ 9). On peut en suivant le raisonnement de ([43], Theorem 4.3.8) mettre en évidence une collection de relations naturelles qui relient les classes tautologiques avec certaines des

composantes du bord, donc qui vivent dans $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi})$. Ces relations traduisent l'anomalie (localisée sur le bord du champ de Hurwitz) qui mesure sur un revêtement $\pi : C \to D$ de base S, la non trivialité de $\Theta = \mathcal{L}^{\otimes n}(B)$.

Reprenons la construction de la section §7.3.3. Elle produit une courbe préstable $r : \tilde{D} \to S$ et une factorisation par $\rho : \tilde{D} \to D$. Le morphisme ρ est une contraction au sens de Knudsen, il remplace tout point singulier de $\mathcal{L}$ par une courbe exceptionnelle $E = \mathbb{P}^1$. Soit $\mathcal{O}_{\tilde{D}}(1)$ le faisceau inversible tautologique sur $\tilde{D}$; rappelons que $\rho_*(\mathcal{O}_{\tilde{D}}(1)) = \mathcal{L}$.

On notera B l'image inverse $\rho^*(B)$; noter que ce diviseur est disjoint du lieu exceptionnel, la notation est donc sans conséquence. Formons le faisceau inversible sur S

$$\langle \mathcal{O}_{\tilde{D}}(1), \mathcal{O}_{\tilde{D}}(-n-B) \rangle \tag{10.43}$$

Il est clair que cette construction étant compatible aux changements de bases, fournit un faisceau inversible sur $\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi}$. Si C est lisse il est trivial, dès lors ce faisceau inversible doit s'exprimer comme combinaison linéaire des classes des composantes irréductibles du bord. Le résultat est qui complètement analogue à ([48], Proposition 4.3.8) reste valide en fait avec des modifications évidentes pour $\mathcal{L}_j$ si j, $(1 \leq j < n)$ est premier à n. Posons $\Xi = \mathcal{O}_{\tilde{D}}(-n-B)$. On a le résultat important (comparer avec Jarvis [43]:

Proposition 10.17. *On a*

$$\Xi = \mathcal{O}\left(\sum_{\pi = NS} \frac{ab}{m} \, \Delta_\pi \right) \quad \text{et} \quad \langle \Xi, \tilde{\omega} \rangle = 0 \tag{10.44}$$

Preuve: Noter que le terme de gauche ne fait intervenir que les composantes NS du bord. La preuve reprend exactement les calculs de loc.cit, il n'y a pas lieu de les répéter. La seconde relation découle du fait que $\tilde{\omega} = \rho^*(\omega)$, donc $\tilde{\omega}$ est trivial sur chaque diviseur exceptionnel.

□

En évaluant d'une autre manière le produit d'intersection $\langle \mathcal{O}_{\tilde{D}}(1), \Xi \rangle$ on obtient des relations importantes entre les faisceaux inversibles tautologiques introduits précédemment. Dans le cas du champ des courbes hyperelliptiques de genre g ces relations se réduisent essentiellement comme on va le voir à la relation de Cornalba-Harris ([40], § 6).

Théorème 10.18. *On a dans* $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,n,\xi})$, *si* $1 \leq j < n$, $(j,n) = 1$, *la relation*

$$\sum_{\pi = NS} \frac{a(j)b(j)}{m} \, \mathcal{O}(\Delta_\pi) = \tag{10.45}$$

$$2n(\lambda' - \lambda_{n-j}) - \sum_{\alpha=1}^{b} jn \langle \frac{jm_\alpha \nu_\alpha}{n} \rangle \mu_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{b} n \langle \frac{jm_\alpha \nu_\alpha}{n} \rangle \left(1 + [\frac{jm_\alpha \nu_\alpha}{n}] \right) \psi_\alpha$$

Preuve: Il suffit de prouver le résultat pour $j = 1$; le cas j premier à n s'en déduit par des modifications évidentes. Evaluons d'abord le produit d'intersection (10.43). On a

$$\langle \mathcal{O}_{\tilde{D}}(1), \mathcal{O}_{\tilde{D}}(-n-B) \rangle\rangle = -n \langle \mathcal{O}_{\tilde{D}}(1), \mathcal{O}_{\tilde{D}}(1) \rangle - \langle \mathcal{O}_{\tilde{D}}(1), \mathcal{O}_{\tilde{D}}(B) \rangle = -n \langle \mathcal{O}_{\tilde{D}}(1), \mathcal{O}_{\tilde{D}}(1) \rangle - \sum_\alpha m_\alpha \nu_\alpha \psi_\alpha$$

Par le théorème de Deligne-Riemann-Roch $\quad n\langle \mathcal{O}_{\tilde{D}}(1), \mathcal{O}_{\tilde{D}}(1)\rangle =$

$$2n \det Rr_*(\mathcal{L}) + \langle \mathcal{O}_{\tilde{D}}(n+B), \tilde{\omega}\rangle - \langle \mathcal{O}_{\tilde{D}}(B), \tilde{\omega}\rangle - 2n \det Rr_*\tilde{\omega}$$

Comme $\langle \mathcal{O}_{\tilde{D}}(n+B), \tilde{\omega}\rangle = \mathcal{O}$ on obtient $\langle \mathcal{O}_{\tilde{D}}(B), \tilde{\omega}\rangle = \sum_\alpha m_\alpha \nu_\alpha \psi_\alpha$, et finalement

$$\det Rr_*(\tilde{\omega}) = \det Rp_*(\omega) = \lambda'$$

□

Tenant compte de la relation $n\mu_i = m_i\nu_i\psi_i$, et après multiplication par n, on récupère bien par restriction à $\mathcal{H}_{g,n,\xi}$ les relations (10.38). Soit toujours $n = p$ premier, et de plus $g' = 0$ (revêtements de $\mathbb{P}^1$). Par sommation des relations (10.45), on peut exprimer λ comme combinaison linéaire des classes ψ_α et δ_π. La relation obtenue étend la relation de Cornalba-Harris [40] qui correspond à $p = 2$.

Corollaire 10.19. *On a dans* $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_{g,p})$ *la relation*

$$p^2\left(\frac{p^2-1}{6}\right)\sum_{\pi=NS}\delta_\pi = -2p^2\lambda + p\left(\frac{p^2-1}{6}\right)\sum_\alpha \psi_\alpha \tag{10.46}$$

Preuve: On effectue la somme sur j des relations (10.45), et on multiplie par p les deux membres. On a $\lambda' = 0$, de sorte que la somme des termes de gauche dans (10.45) se réduit à évaluer la somme $\sum_{j=1}^{p-1} a(j)b(j)$. Rappelons que $a(j) = p\langle \frac{ja}{p}\rangle$, et $b(j) = p - a(j)$. La somme est visiblement

$$p(\sum_{r=1}^{p-1} r - \sum_{r=1}^{p-1} r^2) = \frac{p(p^2-1)}{6}$$

Pour le terme de droite, notons que $\psi_\alpha = \nu_\alpha\mu_\alpha$. Donc après multiplication par p, la somme des termes de droite se ramène facilement à

$$\sum_\alpha \psi_\alpha\left(\sum_j p^2\langle\frac{j\nu_\alpha}{p}\rangle - (p\langle\frac{j\nu_\alpha}{p}\rangle)^2\right) = \frac{p(p^2-1)}{6}\sum_\alpha\psi_\alpha$$

□

Les relations (10.45) et (10.46) deviennent particulièrement simples dans le cas hyperelliptique. Soit $\overline{\mathcal{H}}_g$ le champ des courbes hyperelliptiques de genre $g \geq 1$, les points de Weierstrass étant numérotés de 1 à $2g+2$. La position remarquable de $\overline{\mathcal{H}}_g$ est résumée par diagramme

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,2g+2} \xleftarrow{\imath} \overline{\mathcal{H}}_g \xrightarrow{\delta} \overline{\mathcal{M}}_{0,2g+2} \tag{10.47}$$

Un principe général valable pour un champ de Hurwitz avec $g' = 0$, est que les relations de Riemann-Hurwitz supérieures jointes aux relations (10.45) et (10.46), ramènent en principe un calcul dans le champ $\overline{\mathcal{H}}_g$ à un calcul dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,2g+2}$.

Illustrons ce principe en montrant comment retrouver la relation de Cornalba-Harris ([40], § 6) qui exprime dans le lieu hyperelliptique la classe λ comme combinaison linéaire des composantes du bord. Cette relation dérive naturellement de la relation (10.46) avec $p = 2$.

Proposition 10.20. *Dans le groupe* $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_g)$ *on a la relation (en notation additive)*

$$8(2g+1)\lambda = 4\sum_{\pi=R}\alpha(g+1-\alpha){\Delta_\pi}^R \,+\, 8\sum_{\pi=NS}\beta(g-\beta)\;\Delta_\pi^{NS} \tag{10.48}$$

Preuve: Pour $p=2$ (10.46) devient $2\sum_{\pi=NS}\Delta_\pi = -8\lambda + \sum_{\alpha=1}^{2g+2}\psi_\alpha$. En multipliant les deux membres par 2g+1, on peut invoquer la relation connue entre les classes ψ et les composantes du bord dans $\overline{M}_{0,n}$

$$2(n-1)\sum_{\alpha=1}^{n}\psi_\alpha = \sum_{(I,J),|I|=j} j(n-j)[{\Delta'}_{I,J}] \tag{10.49}$$

Dans cette relation, les partitions sont ordonnées. On ramène cette relation dans $\mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_g)$ par δ^*, en tenant compte de la proposition (10.14), qui dit que $\delta^*(\Delta'_\pi) = \Delta_\pi$ dans le cas R, et $2\Delta_\pi$ dans le cas NS. Cela conduit après arrangement à

$$8(2g+1)\lambda = 4\sum_{\pi=R}\alpha(g+1-\alpha){\Delta_\pi}^R \,+\, 2\sum_{\pi=NS}2\left[(2\beta+1)(2g+1-2\beta)-(2g+1)\right]\;\Delta_\pi^{NS}$$

expression qui après simplification du coefficient entre crochets est exactement le résultat annoncé.

□

Soit $\overline{H}_g$ le lieu des courbes hyperelliptiques, i.e le champ quotient $[\overline{\mathcal{H}}_g/S_{2g+2}]$, avec le morphisme d'oubli de l'involution $\imath : \overline{H}_g \to \overline{\mathcal{M}}_g$. Noter que $\imath$ est seulement un plongement au-dessus de H_g, et aux points génériques des composantes du bord. La relation (10.48) poussée dans $A^1(\overline{H}_g)$ est exactement la relation de Cornalba-Harris ([40] , §6).

Proposition 10.21. *Dans* $A^1(\overline{H}_g)$*, on a la relation*

$$(4g+2)\lambda = \frac{g}{2}[\Delta_1^R]_Q + \sum_{\alpha=2}^{[\frac{g+1}{2}]}\alpha(g+1-\alpha)[\Delta_\alpha^R]_Q + 2\sum_{\beta=1}^{[\frac{g}{2}]}\beta(g-\beta)[\Delta_\beta^{NS}]_Q \tag{10.50}$$

Preuve: Soit $\imath : \overline{\mathcal{H}}_g \to \overline{H}_g$ le morphisme quotient par S_{2g+2}. Noter que le fibré de Hodge sur $\overline{\mathcal{H}}_g$ est l'image réciproque du fibré de même nom sur $\overline{H}_g$. Prenons la première classe de Chern des deux membres de la relation (10.47), on obtient

$$\begin{aligned}8(2g+1)\lambda &= 4\sum_{\pi=R}\alpha(g+1-\alpha)[\Delta_\pi]^R{}_Q \,+\, 8\sum_{\pi=NS}\beta(g-\beta)\;[\Delta_\pi]^{NS}{}_Q\\ &= 4\sum_{\pi=R}\frac{\alpha(g+1-\alpha)}{2}[\Delta_\pi]^R \,+\, 8\sum_{\pi=NS}\frac{\beta(g-\beta)}{4}[\Delta_\pi]^{NS}\end{aligned}$$

Car dans le cas R, le groupe des automorphismes d'un point général d'une composante est d'ordre deux, par contre il est d'ordre quatre dans le cas NS. Si π (partition non ordonnée) est subordonnée à la partition (I,J) de $[1,2g+2]$, posons $j=|I|\le|J|$, $j=2\alpha$ dans le cas pair, et $j=2\beta+1$ si impair, il vient par application de $\imath^*$,

$$(2g+2)!\,(16g+8)\lambda = 4\sum_{\pi=R}\frac{\alpha(g+1-\alpha)}{2}\binom{2g+2}{j}i_*[\Delta_\pi]^R \,+\, 8\sum_{\pi=NS}\frac{\beta(g-\beta)}{4}\binom{2g+2}{j}i_*[\Delta_\pi]^{NS}$$

Il est clair que le degré de Δ_π^R (resp. Δ_π^{NS}) sur son image Δ_j^R (resp. Δ_j^{NS}) est $j!(2g+2-j)!$ sauf si $j=2$, car dans ce cas une courbe hyperelliptique $C \in \Delta_\pi^R$ a une composante rationnelle, munie d'une involution. Les deux points fixes de l'involution sont les points marqués. Les points d'intersection P', P'' avec l'autre composante, de genre $g-1$ sont échangés par l'involution. Il y a une seconde involution qui a pour point fixe P', P'' et qui commute avec la première. Donc l'échange des deux points marqués P', P'' conduit à une courbe isomorphe. Il vient finalement en rappelant que le cas R correspond à j pair

$$(2g+2)!\,(16g+8)\lambda = 4\sum_{\pi=R}\frac{\alpha(g+1-\alpha)}{2}\binom{2g+2}{j}i_*[\Delta_\pi]^R \;+\; 8\sum_{\pi=NS}\frac{\beta(g-\beta)}{4}\binom{2g+2}{j}i_*[\Delta_\pi]^{NS}$$

Il est clair que le degré de Δ_π^R (resp. Δ_π^{NS}) sur son image Δ_j^R (resp. Δ_j^{NS}) est $j!(2g+2-j)!$ sauf si $j=2$, car dans ce cas une courbe hyperelliptique $C \in \Delta_\pi^R$ a une composante rationnelle, munie d'une involution. Les deux points fixes de l'involution sont les points marqués. Les points d'intersection P', P'' avec l'autre composante, de genre $g-1$ sont échangés par l'involution. Il y a une seconde involution qui a pour point fixe P', P'' et qui commute avec la première. Donc l'échange des deux points marqués P', P'' conduit à une courbe isomorphe. Il vient finalement

$$\begin{aligned}&(2g+2)!\,(16g+8)\lambda = \\ &\quad 4g\frac{(2g+2)!}{4}[\Delta_1^R] + 4\sum_{\alpha=2}^{[\frac{g+1}{2}]}\frac{\alpha(g+1-\alpha)}{2}(2g+2)![\Delta_\alpha^R] + 8\sum_{\beta=1}^{[\frac{g}{2}]}\frac{\beta(g-\beta)}{4}(2g+2)![\Delta_\beta^{NS}]\end{aligned}$$

En revenant aux classes fondamentales des composantes

$$= 4g\frac{(2g+2)!}{2}[\Delta_1{}^R{}_Q] + 4\sum_{\alpha=2}^{[\frac{g+1}{2}]}\alpha(g+1-\alpha)(2g+2)![\Delta_\alpha^R]_Q + 8\sum_{\beta=1}^{[\frac{g}{2}]}\beta(g-\beta)(2g+2)![\Delta_\beta^{NS}]_Q$$

et finalement en simplifiant par $8(2g+2)!$, on obtient la relation de Cornalba -Harris

$$(8g+4)\lambda = g[\Delta_1^R]_Q + \sum_{\alpha=2}^{[\frac{g+1}{2}]}2\alpha(g+1-\alpha)[\Delta_\alpha^R]_Q + 4\sum_{\beta=1}^{[\frac{g}{2}]}\beta(g-\beta)[\Delta_\beta^{NS}]_Q$$

□

10.4.3. Intégrales de Hodge - Hurwitz

On se limite en premier au champ des courbes hyperelliptiques. Une autre illustration du principe de correspondance utilisé ci-dessus revient à observer que des calculs d'intersection avec le lieu hyperelliptique $\overline{H}_g \subset \overline{\mathcal{M}}_g$ une fois transportés sur le champ hyperelliptique se ramènent à des calculs dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,2g+2}$. Cela montre que l'objet naturel pour les calculs est $\overline{\mathcal{H}}_g$ plutôt que $\overline{H}_g$. La méthode utilisée est une amplification du calcul de Faber-Pandharipande ([30]). Elle conduit simplement à l'évaluation d'intégrales

$$\int_{\overline{\mathcal{H}^1}_g}\kappa_1\mu_1^{2g-2} = \frac{(2g-1)^2}{2^{2g}(2g+1)!} \quad \text{et} \quad \int_{\overline{\mathcal{H}^1}_g}\mu_1^{2g-1} = \frac{1}{2^{2g}(2g+1)!} \tag{10.51}$$

en notant $\overline{\mathcal{H}_g^1}$ le champ des courbes hyperelliptiques avec un point de Weierstrass marqué. Rappelons que le faisceau inversible $\mu_i \in \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{H}}_g)$ (sa classe de Chern) est l'image réciproque du faisceau $\mathcal{L}_i \in \mathrm{Pic}(\overline{\mathcal{M}}_{g,2g+2})$ (§ 10.2). On conserve la notation μ_i pour éviter toute confusion avec les ψ_i qui proviennent du bas. A.J. Bene a obtenu des résultats analogues, mais par une approche combinatoire basée sur cellulation de $\overline{\mathcal{H}}_g$ au moyen des graphes épais, et le schéma d'intégration de Penner [10]. A la différence de notre méthode, il travaille avec les classes combinatoires W_a de Witten, et étudie l'intersection de ces classes avec le lieu hyperelliptique.

Rappelons que dans le champ $\overline{\mathcal{H}}_g$ les points de Weierstrass sont marqués de 1 à $2g+2$. Il est commode de noter $\overline{\mathcal{H}^1}_g$ le champ dont les objets sont les courbes hyperelliptiques stables marquées par un seul point de Weierstrass. Plus généralement on peut considérer la champ $\overline{\mathcal{H}}_g^j$ formé des courbes hyperelliptique stables avec $j\,(1 \leq j \leq 2g+2)$ points de Weierstrass marqués. Il est aisé de justifier son existence en adaptant les arguments de la section 6.2. Noter que si $j \leq 2g$ il est possible que sur une courbe hyperelliptique stable appartenant à $\overline{\mathcal{H}}_g^j$ deux points de Weierstrass libres s'effondrent. Par oubli du marquage par le point d'indice j on obtient un morphisme $\pi_j : \overline{\mathcal{H}}_g^j \to \overline{\mathcal{H}}_g^{j-1}$ de degré $2g+3-j$. On notera aussi $\overline{H}_g \subset \overline{\mathcal{M}}_g$ l'image stable non marquée de $\overline{\mathcal{H}}_g$, i.e le lieu hyperelliptique. On a donc la factorisation de $\imath : \overline{\mathcal{H}}_g \to \overline{\mathcal{M}}_g$, oubli du marquage par les points de Weirstrass, en

$$\overline{\mathcal{H}}_g \xrightarrow{\pi} \overline{\mathcal{H}^1}_g \to \overline{H}_g \subset \overline{\mathcal{M}}_g$$

Le morphisme π est l'oubli du marquage par les points de numéros $2g+2, \cdots, 2$ dans l'ordre indiqué, c'est à dire la composition $\pi_2 \cdots \pi_{2g+2}$, son degré est $(2g+1)!$. Pour ramener par le principe de correspondance le calcul à un calcul dans $A^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{0,2g+2})$, on note que

$$\int_{\overline{\mathcal{H}^1}_g} \xi = \frac{1}{(2g+1)!} \int_{\overline{\mathcal{H}}_g} \pi^*(\xi) \tag{10.52}$$

Il faut expliciter l'image réciproque par π des classes μ_1 et κ_a. Par utilisation itérée de la relation générale $\pi_{n+1}^*(\psi_1) = \psi_1 - [D_{1,n+1}]$ (10.25), on trouve que, avec nos notations

$$\pi_j^*(\mu_1) = \mu_1 - [D_{1,j}] \cap [\overline{\mathcal{H}^j}_g]$$

(l'indice j signifie que j points de Weierstrass sont marqués). Comme $D_{1,j}$ est le lieu des courbes obtenues en collant une "bulle" ($\cong \mathbb{P}^1$) contenant les points de Weierstrass de numéros 1 et j à une courbe de genre g marquée par $j-1$ points, l'intersection avec le lieu hyperelliptique est vide. On obtient donc que $\pi^*(\mu_1) = \mu_1$, ce qui nous autorise à noter cette classe μ_1 sans précision supplémentaire. Le même argument montre que pour la classe κ_a on a

$$\pi^*(\kappa_a) = \kappa_a - \sum_{\alpha=2}^{2g+2} \mu_\alpha^a \tag{10.53}$$

Traitons en premier la seconde intégrale, qui est immédiate. Elle se ramène au calcul de $\int_{\overline{\mathcal{H}}_g} \mu_1^{2g-1}$. Vu que $2\mu_1 = \delta^*(\psi_1)$, elle s'obtient immédiatement partant du résultat connu

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \psi_1^{\alpha_1} \cdots \psi_n^{\alpha_n} = \frac{(n-3)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \quad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = n-3) \tag{10.54}$$

on trouve en tenant compte du fait que le degré de δ est $\frac{1}{2}$

$$\int_{\overline{\mathcal{H}^1}_g} \mu_1^{2g-1} = \frac{1}{2^{2g}} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,2g+2}} \psi_1^{2g-1} = \frac{1}{2^{2g}(2g+1)!}$$

Pour la première intégrale, on montre qu'on a plus généralement:

Théorème 10.22. *Avec les notations précédentes, si $0 \leq a \leq 2g-1$, on a*

$$\int_{\overline{\mathcal{H}^1}_g} \kappa_a \mu_1^{2g-1-a} = \frac{1}{2^{2g-1-a}(2g+1)!}\left(\binom{2g}{a+1} - \frac{2g+1}{2^{a+1}}\binom{2g-1}{a}\right) \tag{10.55}$$

Preuve: En utilisant la relation (10.52) on voit que l'intégrale (10.55) se ramène à une intégrale sur le champ $\overline{\mathcal{H}}_g$ classifiant les courbes hyperelliptiques avec points de Weierstrass marqués

$$(2g+1)!\int_{\overline{\mathcal{H}^1}_g} \kappa_a \mu_1^{2g-1-a} = \int_{\overline{\mathcal{H}}_g} (\kappa_a - \sum_2^{2g+2} \mu_\alpha^a)\mu_1^{2g-1-a} = \int_{\overline{\mathcal{H}}_g} \kappa_a \mu_1^{2g-1-a} - \sum_2^{2g+2} \int_{\overline{\mathcal{H}}_g} \mu_\alpha^a \mu_1^{2g-1-a}$$

En tenant compte de la relation de Riemann-Hurwitz à l'ordre a, qui dans le cas hyperelliptique s'écrit sous la forme simple $\kappa_l = 2\delta^*(\kappa'_l)$, et de la formule de projection, on a

$$\int_{\overline{\mathcal{H}}_g} \kappa_a {\mu_1}^{2g-1-a} = \frac{1}{2^{2g-2-a}} \int_{\overline{\mathcal{H}}_g} \delta^*(\kappa'_a {\psi_1}^{2g-1-a}) = \frac{1}{2^{2g-2-a}} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,2g+2}} \kappa'_a {\psi_1}^{2g-1-a} \delta_*[1]$$

Mais $\delta_*[1] = \delta_*([\overline{\mathcal{H}}]_Q) = \frac{1}{2}\delta_*([\overline{\mathcal{H}}_g]) = \frac{1}{2}[\overline{M}_{0,2g+2}]$, de sorte que l'intégrale se réduit à

$$\frac{1}{2^{2g-1-a}} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,2g+2}} \kappa'_a {\psi_1}^{2g-1-a}$$

De la même manière on obtient

$$\int_{\overline{\mathcal{H}}_g} \mu_\alpha^a \mu_1^{2g-1-a} = \frac{1}{2^{2g-1}} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,2g+2}} \psi_\alpha^a {\psi_1}^{2g-1-a} = \frac{1}{2^{2g}}\binom{2g-1}{a}$$

Pour conclure, notons le résultat élémentaire suivant, conséquence facile de l'équation des cordes:

Lemme 10.23. *Soit pour $4 \leq a+3 \leq n$, $\tau_{a,n} = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \kappa_a \psi_1^{n-3-a}$. On a $\tau_{a,n} = \binom{n-2}{a+1}$.*

Preuve: On procède par récurrence. Soit le morphisme $\pi_{n+1} : \overline{M}_{0,n+1} \to \overline{M}_{0,n}$ oubli du point x_{n+1}. On a $\pi_{n+1}^*(\kappa_a) = \kappa_a - \psi_{n+1}^a$, donc

$$\pi_{n+1}^*(\kappa_a)\psi_1^{n-a-2} = \kappa_a \psi_1^{n-a-2} - \psi_1^{n-a-2}\psi_{n+1}^a$$

En intégrant, et par la formule de projection, on obtient

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} \pi_{n+1}^*(\kappa_a)\psi_1^{n-a-2} = \tau_{a,n+1} - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n+1}} \psi_1^{n-a-2}\psi_{n+1}^a = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \kappa_a \pi_{n+1,*}(\psi_1^{n-a-2})$$

Mais par utilisation de l'équation des cordes [4]

$$\pi_{n*}(\psi_1^{a_1}\cdots\psi_{n-1}^{a_{n-1}}) = \sum_{j,a_j>0} \psi_1^{a_1}\cdots\psi_j^{a_j-1}\cdots\psi_{n-1}^{a_{n-1}} \tag{10.56}$$

on a en particulier $\pi_{n+1,*}(\psi_1^{n-a-2}) = \psi_1^{n-a-3}$, d'où finalement la relation pour $a+3 \leq n$, $\tau_{a,n+1} = \tau_{a,n} + \binom{n-2}{a}$, donc finalement $\tau_{a,n} = \binom{n-3}{a} + \binom{n-4}{a} + + \cdots + \binom{a}{a} = \binom{n-2}{a+1}$.

□

Pour conclure la preuve de (10.55), les résultats qui précèdent donnent après division par le facteur $(2g+1)!$

$$\int_{\overline{\mathcal{H}^1}_g} \kappa_a \mu_1^{2g-1-a} = \frac{1}{(2g+1)!}\left(\frac{1}{2^{2g-1-a}}\binom{2g}{a+1} - \frac{2g+1}{2^{2g}}\binom{2g-1}{a}\right)$$

qui est exactement l'expression (10.55).

□

Ce calcul pour $a=0$, a pour conséquence (Faber-Pandharipande [30], prop 4) la relation

$$1+\sum_{g\geq 0} t^{2g}\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,1}}\left(\sum_{i=1}^{g}(-1)^{i+1}(2^{g+1-i}-1)\psi_1^{g-i}\lambda_{i-1}\right)\psi_1^{2g-1} = \frac{\sin(t/2)}{t/2} \tag{10.57}$$

Pour $a=1$, A.J. Benne [10] obtient de manière analogue, via la relation de Mumford qui décrit la classe fondamentale $[\mathcal{H}_g]$, une relation (plus compliquée) reliant certaines intégrales de Hodge

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,1}}\left(\sum_{i=1}^{g}(-1)^{i+1}(2^{g+1-i}-1)\psi_1^{g-i}\lambda_{i-1}\right)\kappa_1\psi_1^{2g-2} = \frac{14g^2-11g+3}{3.2^{2g}(2g+1)!} \tag{10.58}$$

On peut s'interroger sur la validité d'une relation analogue pour $a\geq 2$. Si $a=2g-1$, un calcul similaire donne l'intégrale de κ_{2g-1} évaluée sur le lieu hyperelliptique $\overline{H}_g$, on trouve

$$\int_{\overline{H}_g}\kappa_{2g-1} = \frac{1}{(2g+2)!} - \frac{1}{2^{2g}(2g+1)!} \tag{10.59}$$

Si $a=2$, c'est le calcul de Mumford $\int_{\overline{M}_2}\kappa_3 = \frac{1}{1152}$.

Soit maintenant $\overline{\mathcal{H}}_{g,p,\xi}$ le champ des revêtements de degré p, et de genre g, de $\mathbb{P}^1$. On suppose que la donnée de ramification, versus le diviseur de branchement, est $B=\sum_{i=1}^{b}\nu_i Q_i$ $(1\leq \nu_i < p)$. On a donc $b=\frac{2g-2+2p}{p-1}$. On va observer que la relation (10.46) permet d'évaluer, au prix de relations compliqées, certaines intégrales de Hodge sur $\overline{\mathcal{H}}_{g,p,\xi}$, celles contenant λ. Le résultat sera en général sensible au choix de la composante $\overline{\mathcal{H}}_{g,p,\xi}$, c'est à dire de ξ, à la différence du calcul par Bryan-Graber-Pandharipande[28] de $\int_{\overline{\mathcal{H}}_{g,3,\xi}}\lambda_{g-1}$ le (cas $p=3$). Posons

$$B_{g,\xi} = \int_{\overline{\mathcal{H}}_{g,p,\xi}}\lambda^{b-3}$$

Le cas $p=2$ (hyperelliptique) est un calcul de Faber. Pour initialiser cette suite, il faut calculer $B_{g,\xi}$ lorsque $b=3$, c'est à dire $g=\frac{p-1}{2}$. Dans ce cas le champ est ponctuel. Soit $e=|\mathrm{Aut}\,(C_{a,b,c}\to\mathbb{P}^1)|$, où $C_{a,b,c}$ est la courbe $y^p=x^a(1-x)^b$, avec $1\leq a,b,c<p$, $a+b+c\equiv 0 \pmod p$, et $C_{a,b,c}\to\mathbb{P}^1$, le revêtement $(x,y)\mapsto x$. On trouve immédiatement

$$e=\begin{cases} p & \text{si } a,b,c \text{ distincts} \\ 2p & \text{si deux entre les trois sont égaux} \\ 18 & \text{si } a=b=c,\ p=3 \end{cases} \tag{10.60}$$

On a a $[\overline{\mathcal{H}}_{g,p,\xi}]_Q = \frac{1}{e}[\overline{\mathcal{H}}_{g,p,\xi}]$, et $B_{g,\xi}=\frac{1}{e}$. La relation (10.46) jointe à (10.49) montre que qu'il faut au pralable évaluer les intégrales du bord $\int_{\Delta_\pi}\lambda^{b-4}$. Il y a deux cas à considérer, selon que l'unique

[28] The orbifold quantum cohomology of $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_3$ and Hurwitz-Hodge integrals arXiv:math.AG/0510335.

orbite de point double est du type R, ou NS. Le premier cas correspond à une partition π de B en $B = B_1 + B_2$, $B_i = \sum_{i\in I_i} \nu_i Q_i$, et $\sum_{i\in I_i} \equiv 0 \pmod p$. Avec des notations évidentes, on a $g = g_1 + g_2 + p - 1$, et la proposition 7.13 dit que la composante Δ_π est image du morphisme $\imath = \xi_\Gamma$, décrit par le diagramme

$$\overline{\mathcal{H}}_{g_1,p} \times \overline{\mathcal{H}}_{g_2,p} \leftarrow \overline{\mathcal{C}}_{g_1,p} \times \overline{\mathcal{C}}_{g_2,p} \xrightarrow{\imath} \overline{\mathcal{H}}_{g,p} \tag{10.61}$$

dans lequel $\overline{\mathcal{C}}_{g_1,p} \to \overline{\mathcal{H}}_{g_1,p}$ désigne le revêtement universel (§ 6.4.2). Le morphisme $\imath$ identifie deux par deux les points des orbites des points sélectionnés à isotropie triviale. Dans le cas NS, on a $g = g_1+g_2+1$, et (10.60) se réduit à

$$\overline{\mathcal{H}}_{g_1,p} \times \overline{\mathcal{H}}_{g_2,p} \xrightarrow{\imath} \overline{\mathcal{H}}_{g,p} \tag{10.62}$$

Si $\pi : B = B_1 + B_2$ est une partition de type NS, donc $\sum_{j\in I_1} \nu_j \equiv \eta \pmod p$, on notera ξ_1 la donnée de Hurwitz définie par $B_1 + \eta P_1$, et ξ_2 celle définie par $B_2 + (p-\eta)P_2$ (voir § 7.4).

Lemme 10.24. *On a* $\int_{\Delta_\pi} \lambda^{b-4} = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi \text{ est } R \\ \binom{b-4}{b_1-2} B_{g_1,\xi_1} B_{g_2,\xi_2} & \text{si } \pi \text{ est } NS \end{cases}.$

Preuve: Dans le cas NS, c'est immédiat du fait que $\imath$ étant le "clutching" morphisme, on sait [48], qu'avec des notation évidentes

$$\imath^*(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2$$

donc en notant que le b de $\overline{\mathcal{H}}_{g_i,p}$ est $b_i + 1$

$$\int_{\Delta_\pi} \imath^*(\lambda^{b-4}) = \int_{\Delta_\pi} (\lambda_1 + \lambda_2)^{b-4} = \binom{b-4}{b_1-2} \int_{\overline{\mathcal{H}}_{g_1,p}\times\overline{\mathcal{H}}_{g_2,p}} \lambda_1^{b_1-2}\lambda_2^{b_2-2} = \binom{b-4}{b_1-2} B_{g_1,\xi_1} B_{g_2,\xi_2}$$

Dans le cas R le morphisme $\imath : \overline{\mathcal{C}}_{g_1,p} \times \overline{\mathcal{C}}_{g_2,p} \to \overline{\mathcal{H}}_{g,p}$ identifie les paires de points $(\sigma^j(x_1), \sigma^j(x_2))$ si x_1 (resp. x_2) est la section de $p_1 : \overline{\mathcal{C}}_{g_1,p} \to \overline{\mathcal{H}}_{g_1,p}$ (resp. $p_2 : \overline{\mathcal{C}}_{g_2,p} \to \overline{\mathcal{H}}_{g_2,p}$). Dans ce cas le fibré vectoriel $\imath^*(\mathbb{E})$ est décrit par une extension

$$0 \to p_1^*(\mathbb{E}_1) \bigoplus p_2^*(\mathbb{E}_2) \to \imath^*(\mathbb{E}) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{O}^{p-1} \to 0 \tag{10.63}$$

l'application res étant induite par le résidu. En effet, soit un revêtement $\pi : C \to D$ au-dessus de k dans l'image de $\imath$, avec $C = C_1 \cup C_2$, et une orbite de p points doubles, l'orbite du point $x = \imath(x_1, x_2)$. Dans la décomposition en sous-espaces propres (proposition 10.3), $\mathrm{H}^0(C, \omega_C) = \bigoplus_{j=1}^{p-1} \mathrm{H}^0(C, \omega_C)^j$, il est immédiat de voir qu'on a

$$\dim \mathrm{H}^0(C, \omega_C)^j = \dim \mathrm{H}^0(C_1, \omega_{C_1})^j + \dim \mathrm{H}^0(C_2, \omega_{C_2})^j + 1$$

D'autre part le résidu en x donne pour tout $1 \le j \le p-1$ une application $\mathrm{res}_x : \mathrm{H}^0(C, \omega_C)^j \to k$, qui conduit à la suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^0(C_1, \omega_{C_1})^j \oplus \mathrm{H}^0(C_2, \omega_{C_2})^j \to \mathrm{H}^0(C, \omega_C)^j \xrightarrow{\mathrm{res}_x} k \to 0 \tag{10.64}$$

la suite exacte (10.62) en découle. On a donc

$$\int_{\overline{\mathcal{C}}_{g_1,p}\times\overline{\mathcal{C}}_{g_2,p}} \imath^*(\lambda^{b-4}) = \int_{\overline{\mathcal{C}}_{g_1,p}\times\overline{\mathcal{C}}_{g_2,p}} (\lambda_1 + \lambda_2)^{b-4} = \binom{b-4}{b_1-2} \int_{\overline{\mathcal{C}}_{g_1,p}\times\overline{\mathcal{C}}_{g_2,p}} \lambda_1^{b_1-2}\lambda_2^{b_2-2}$$

Mais dans cette configuration les classes λ_i sur $\overline{\mathcal{C}}_{g_i,p}$ sont les images inverses des classes de même nom de $\overline{\mathcal{H}}_{g_i,p}$, donc pour une raison de dimension, l'intégrale est nulle.

□

On peut ainsi négliger les composantes de type R. Les relations (10.46) et (10.49) en tenant compte du lemme 10.24, conduisent facilement à la relation de récursion

$$\frac{24(b-1)}{p^2-1}B_{g,\xi} = \sum_{\pi=(I_1,I_2)} (b_1b_2 - 2(b-1))\binom{b-4}{b_1-2}B_{g_1,\xi_1}B_{g_2,\xi_2} \tag{10.65}$$

somme portant sur les partitions de type NS.

RÉFERENCES

[1] D. Abramovich, A. Vistoli, *Complete moduli for families over semistable curves,* [arXiv: math.AG/9811059]

[2] D. Abramovich, A. Corti, A. Vistoli, *Twisted bundles and Admissible covers,* Commun. Algebra **31**, No.8 (2003) 3547–3618

[3] D. Abramovich, T. Jarvis, *Moduli of twisted spin curves,* Proc. AMS **131**, No.3 (2003) 685–699

[4] A. Arsie, A.Vistoli, *Stacks of cyclic covers of projective spaces,* [arXiv: math.AG/0301008]

[5] M. Asada, M Matsumoto, T. Oda, *Local monodromy on the fundamental groups of algebraic curves along a denerate stable curve*, J. Pure and Applied Algebra, **103** (1995) 235–283

[6] H. Bass, *Covering theory for graphs of groups*, J. Pure and Applied Algebra, **89** (1993) 3–47

[7] A. Beauville, *Prym varieties and the Schottky problem*, Invent.Math. (1977) 149–196

[8] S. Beckmann, *Ramified primes in the field of moduli of branched coverings of curves*, J. of Algebra **125** (1989) 236–255

[9] A.A. Beilinson, Y.I. Manin, *The Mumford Form and the Polyakov Measure in String theory,* Commun. Math. Phys. **107** (1986) 359–376

[10] A.J. Bene, *Combinatorial classes, Hyperelliptic loci, and Hodge integrals,* [arXiv math.GT/0610603]

[11] J. Bertin, *Compactification des schémas de Hurwitz,* C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I **322** No.11 (1996) 1063–1066

[12] J. Bertin, A. Mézard, *Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques,* Invent. Math. **141** (2000) 195–238

[13] M. Boggi, M. Pikaart, *Galois covers of moduli of curves,* Comp. Math. **120**, No.2 (2000) 171–191

[14] J.L. Brylinski, *Propriétés de ramification à l'infini du groupe de Teichmüller,* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **12** (1979) 295–333

[15] K. Combes, D. Harbater, *Hurwitz families and arithmetic Galois groups,* Duke Math. J. **52** (1985) 821–839

[16] P. Dèbes, *Arithmétique et espaces de modules de revêtements,* Number theory in progress. Proc. Int. Conf. in honor of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland, June 30-July 9 1997 (Györy, Kálmán, et al., eds.), de Gruyter (1999) 75–102

[17] A.J. De Jong, M. Pikaart, *Moduli of curves with non abelian level structures,* The moduli space of curves (R. Dijkgraaf, C. Faber, and G. Van der Geer eds.), Prog. in Math. **129** Birkhäuser (1995) 483–510

[18] P. Deligne, *Le déterminant de la cohomologie,* Contemp. Math. **67** (1987) 93–178

[19] P. Deligne, *Le lemme de Gabber,* in Sem. sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell, Astérisque **127** (1985) 131–150

[20] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of a given genus,* Publ. Math. IHES. **36** (1969) 75–100

[21] M. Demazure, P.Gabriel, *Groupe Algébriques,* North-Holland (Amsterdam) (1970)

[22] S. Diaz, D. Edidin, *Towards the homology of Hurwitz spaces,* J. Diff. Geom. **43** (1996) 66–97

[23] R. Dijkgraaf, *Mirror symmetry and elliptic curves,* The Moduli space of Curves (R.Dijkgraaf, C.Faber, and G.van der Geer, eds.), Prog. in Math. **129** Birkhäuser (1995) 149–163

[24] C.J. Earle, *On the moduli of closed Riemann surfaces with symmetries,* Math. Studies **66** (1971) 119–130

[25] A. Edmonds, *Surface symmetry,* Mich. Math. J. **29** (1982) 171–183

[26] T. Ekedahl, *Boundary behaviour of Hurwitz schemes,* The Moduli space of Curves (R. Dijkgraaf, C. Faber, and G. van der Geer, eds.), Prog. in Math. **129** Birkhäuser (1995) 173-198

[27] T. Ekedahl, S. Lando, M. Shapiro, A. Vainshtein, *Hurwitz numbers and intersections on moduli spaces of curves,* Invent. Math. **146**, No.2 (2001) 297–327

[28] G. Ellingsrud, K. Lonsted, *An equivariant Lefschetz formula for finite reductive groups,* Math. Ann. **251** (1980) 253–261

[29] M. Emsalem, *Familles de revêtements de la droite projective,* Bull. Soc. Math. Fr. **123** (1995) 47–85

[30] C. Faber, R. Pandharipande, *Hodge integrals and Gromov-Witten theory* Invent. Math. **139** (2000) 109–129

[31] G. Faltings, *Moduli stacks for bundles on semistable curves,* Math. Ann. **304** (1996) 489–515

[32] M. Fried, *Fields of definition of function fields and Hurwitz families, groups as Galois groups,* Comm. in Alg., **5** (1977) 17–81

[33] M. Fried, *Introduction to modular towers,* Comtemp. Math **186** (1995) 111–171

[34] M. Fried, H. Völklein, *The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces,* Math. Annn. **290** (1991) 771–800

[35] W. Fulton, *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves,* Ann. of Math. **90** (1969) 542–575

[36] B. van Geemen, F. Oort, *A compactification of a fine moduli space of curves,* Moduli of Abelian varieties, Proc. Conf. Texel Island, Netherlands, April 1999 (C. Faber, G. van der Geer, F. Oort, eds.), Prog. in Math. **195** Birkhäuser (2001)

[37] D. Gieseker, *Lectures on Moduli of curves,* Tata Institute lectures notes 1982

[38] T. Graber, R. Vakil, *Hodge integrals and Hurwitz numbers via virtual localization,* Compos. Math. **135**, No.1 2003 25–36

[39] A. Grothendieck, et al. *revêtements étales et groupe fondamental,* SGA1, Lectures Notes in Math. **224** (1971)

[40] J. Harris, I. Morrison, *Moduli of Curves,* Graduate Texts in Math. **187** Springer (1998)

[41] J. Harris, T. Graber, J. Starr, *A note on Hurwitz schemes of covers of a positive genus curve,* [arXiv:math.AG/0205056]

[42] J. Harris, D. Mumford, *On the Kodaira dimension of the moduli space of curves,* Invent.Math., **67** (1982) 23–86

[43] T. J. Jarvis, *Geometry of the moduli of higher spin curves,* Int. J. Math. **11** No.5 (2000) 637–663

[44] T. J. Jarvis, *Torsion-free sheaves and moduli of generalized spin curves,* Comp. Math. **110** (1998) 291–333

[45] T. J. Jarvis, T. Kimura, *Orbifold quantum cohomology of the classifying space of a finite group,* Orbifolds in mathematics and physics. Proc. Conf. on mathematical aspects of orbifold string theory, Madison, WI, USA, May 4-8, 2001. (A. Adem et al. eds.), Contemp. Math. **310** (2002) 123–134

[46] T. J. Jarvis, R. Kaufmann, T. Kimura, *Pointed admissible G-covers and G-equivariant cohomological field theories,* [arXiv:math.AG/0302316]

[47] G. Katz, *How tangents solve algebraic equations, or a remarkable geometry of discriminant varieties,* [arXiv:math.AG/021128]

[48] F. F. Knudsen, *The projectivity of the moduli space of stable curves (II),* Math. Scand. **52** (1983) 161–189

[49] M. Kontsevich, *Enumeration of rational curves via torus actions,* The Moduli space of Curves (R. Dijkgraaf, C. Faber, and G. van der Geer, eds), Prog. in Math. **129** Birkhäuser (1995) 335–368

[50] S. K. Lando, *Ramified coverings of the two-dimensional sphere and intersection theory in spaces of meromorphic functions on algebraic curves,* Russ. Math. Surv. **57** No.3 (2002) 463–533

[51] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs Algébriques Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete,* 3. Folge. **39** Springer-Verlag (2000)

[52] E. Looijenga, *Smooth Deligne-Mumford compactifications by means of Prym level structures* J. Alg. Geom., **3**, No.2 (1994) 283–293

[53] Y. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces,* l Colloquium Publications AMS (1999)

[54] L. Moret-Bailly, *Construction de revêtements de courbes pointées,* J. Alg. **240**, No.2 (2001) 505–534

[55] S. Mochizuki, *The geometry of the compactification of the Hurwitz scheme,* Publ. RIMS. Kyoto.Univ. **31**, No.3 (1995) 355–441

[56] I. Morisson, H. Pinkham, *Galois Weirstraß points and Hurwitz characters,* Ann. of Math. **124** (1986) 591–625

[57] D. Mumford, *Geometric invariant theory, second ed. Springer-Verlag* (1981)

[58] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves, Arithmetic and geometry, Pap. dedic. I. R. Shafarevich,* Vol. II, Prog. Math. **36** Birkaüser (1983) 271–328

[59] A. Okounkov, R. Pandharipande, *Gromov-Witten theory, Hurwitz numbers, and matrix models I,* [arXiv:math.AG/0101147]

[60] M. Raynaud, *p-groupes et réduction semi-stables des courbes,* The Grothendieck Festschrift, Vol III, Prog. Math. **88** Birkhäuser (1990) 179–197

[61] M. Romagny, *Group actions on stacks and applications* Prépublication Max Planck Institut für Mathematik No.118, Bonn (2003)

[62] M. Romagny, *The stack of Potts curves and its fibre at a prime of wild ramification,* J. Alg. **274**, No.2 (2004) 772–803

[63] M. Saïdi, *Revêtements modérés et groupe fondamental de graphe de groupes,* Comp. Math. **107**, No.3 (1997) 319–338

[64] J.-P. Serre, *Représentations linéaires des groupes finis,* 5ème éd. Hermann, Paris (1988)

[65] J. -P. Serre, *Topics in Galois theory,* Research Notes in Math. **1** Bartlett and Jones (1992)

[66] A. Vistoli, *Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces,* Inventiones math. **97** (1989) 613–670

[67] B. Wajnryb, *Orbits of Hurwitz action for coverings of a sphere with two special fibers,* Indag. Math., New Ser. **7**, No.4 (1996) 549–558

[68] S. Wewers, *Deformation of tame admissible covers of curves,* Aspects of Galois theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **256** Cambridge Univ. Press (1999)

[69] S. Wewers, *Construction of Hurwitz spaces,* Thesis, Preprint No. 21 of the IEM, Essen (1998)