



**HAL**  
open science

# Sur les valeurs propres de l'opérateur de Dirac des variétés 3-sasakiennes

Andrei Moroianu

► **To cite this version:**

Andrei Moroianu. Sur les valeurs propres de l'opérateur de Dirac des variétés 3-sasakiennes. Stud. Cerc. Mat., 1996, 48, pp.85-88. hal-00126053

**HAL Id: hal-00126053**

**<https://hal.science/hal-00126053v1>**

Submitted on 23 Jan 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur les valeurs propres de l'opérateur de Dirac d'une variété spinorielle simplement connexe admettant une 3-structure de Sasaki

Andrei Moroianu

Soit  $M^n$  une variété spinorielle simplement connexe admettant une 3-structure de Sasaki ( $n = 4k - 1$ ). Soit  $\Sigma M$  le fibré des spineurs sur  $M$  et  $D$  l'opérateur de Dirac sur  $\Sigma M$ . Alors (cf. [Ka]),  $M$  est un espace d'Einstein avec la courbure scalaire  $S = n(n - 1)$  et on sait (cf. [Bä]) que  $M$  admet  $k + 1$  spineurs de Killing avec la constante  $-\frac{1}{2}$ , donc la première valeur propre de  $D$  est  $\frac{n}{2}$  avec la multiplicité  $k + 1$ . Le but de cet article est de trouver deux autres valeurs propres de  $D$  et de montrer des inégalités sur les multiplicités de ces valeurs propres. L'outil principal sera la construction du cône  $CM$  au-dessus de  $M$  et la correspondance entre les spineurs sur  $M$  et sur  $CM$ . Le cône sur  $M$  est défini par  $CM = M \times \mathbf{R}_+^*$  avec la métrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{CM} = r^2 \langle \cdot, \cdot \rangle_M + dr^2$ . Les champs de vecteurs sur  $M$  induisent des champs de vecteurs sur  $CM$  avec lesquels ils seront identifiés dans la suite.

*Théorème (Bä).* *Le fibré des spineurs au-dessus de  $CM$  est le pull-back de  $\Sigma M$  par la projection  $\pi : CM \rightarrow M$ . Tout spineur sur  $M$  induit un spineur sur  $CM$ ; les spineurs ainsi obtenus seront appelés projetables. Un spineur sur  $M$  est de Killing si et seulement si le spineur induit sur  $CM$  est parallèle. (cf. aussi [Mo]).*

Dans ce qui suit, on identifiera souvent un spineur sur  $M$  avec le spineur projetable induit sur  $CM$ .

La structure hyperkählérienne sur  $CM$  s'obtient de la manière suivante : tout champ de vecteurs de Killing  $X$  appartenant à la 3-structure de Sasaki sur  $M$  induit une structure presque complexe  $\Omega^X$  sur  $CM$  par

$$\begin{aligned}\Omega^X(X) &= \partial r, & \Omega^X(\partial r) &= -X, \\ \Omega^X(Y) &= \nabla_Y X, & \text{pour } Y \perp X \text{ et } \partial r.\end{aligned}$$

On notera par  $\eta^X$  la transformation de  $\Sigma M$  donnée par  $\eta^X = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} e_i \cdot \nabla_{e_i} X$ , où  $(e_i)$  est une base orthonormée arbitraire de  $X^\perp$ .

Pour  $X$  comme ci-dessus,  $\Omega^X$  agit sur l'espace des spineurs parallèles sur  $CM$  avec les valeurs propres distinctes  $\lambda_j = i(2k - 4j)$ ,  $j \in \{0, \dots, k\}$ . Soit  $\tilde{\psi}_j^X$  un spineur propre parallèle propre pour la valeur propre  $\lambda_j$  de  $\Omega^X$ , et  $\psi_j^X$  le spineur de Killing sur  $M$  correspondant (tout spineur parallèle sur  $CM$  est projetable).

On voit facilement que si  $\tilde{\psi}$  est projetable sur  $\psi$  alors  $Y \cdot \partial r \cdot \tilde{\psi}$  est projetable sur  $Y \cdot \psi$  pour tout vecteur  $Y$  sur  $M$  (cf. [Mo]), donc

$$\Omega^X \cdot \tilde{\psi}_j^X = \lambda_j \tilde{\psi}_j^X \iff \eta^X \cdot \psi_j^X + X \cdot \psi_j^X = \lambda_j \psi_j^X. \quad (1)$$

On en déduit une relation fondamentale :

$$\begin{aligned}
D(X \cdot \psi_j^X) &= \sum_{l=1}^{n-1} e_l \cdot \nabla_{e_l}(X \cdot \psi_j^X) + X \cdot \nabla_X(X \cdot \psi_j^X) \\
&= 2\eta^X \cdot \psi_j^X - \frac{n-1}{2}X \cdot \psi_j^X + \frac{1}{2}X \cdot \psi_j^X \\
&= \left(-1 - \frac{n}{2}\right)X \cdot \psi_j^X + 2\lambda_j X \cdot \psi_j^X.
\end{aligned}$$

Ceci montre que le spineur  $X \cdot \psi_j^X - 2\lambda_j \psi_j^X / (n+1)$  est un spineur propre pour  $D$  avec la valeur propre  $-1 - \frac{n}{2}$ . La relation (1) montre alors que  $(n-1)X \cdot \psi - 2\eta^X \cdot \psi$  est spineur propre de  $D$  avec la valeur propre  $-1 - \frac{n}{2}$  pour tout spineur de Killing  $\psi$ . Notons  $\tau^s = X_s - \frac{2}{n+1}\Omega^s = \frac{n-1}{n+1}X_s - \frac{2}{n+1}\eta^s$ .

*Théorème A.* La multiplicité de la valeur propre  $-1 - \frac{n}{2}$  est au moins égale à  $3(k-1)$ .

*Preuve.* On fixe une base orthonormée  $(X_1, X_2, X_3)$  de vecteurs de Killing définissant la 3-structure de Sasaki sur  $M$  et pour chaque  $s \in \{1, 2, 3\}$  et  $j \in \{0, \dots, k\}$ ,  $\psi_j^s$  un spineur propre de  $\Omega^{X_s}$  avec la valeur propre  $\lambda_j$ . Il suffit de montrer que les spineurs  $\phi_j^s = \tau^s \cdot \psi_j^s$  sont linéairement indépendants pour  $s \in \{1, 2, 3\}$  et  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ .

Soient donc  $a_j, b_j, c_j, j \in \{1, \dots, k-1\}$  tels que

$$\sum a_j \phi_j^1 + \sum b_j \phi_j^2 + \sum c_j \phi_j^3 = 0. \quad (2)$$

Notons  $\psi^1 = \sum a_j \psi_j^1$ ,  $\psi^2 = \sum b_j \psi_j^2$ ,  $\psi^3 = \sum c_j \psi_j^3$ . Si, d'une part, on multiplie (2) avec  $\frac{1}{2}X_s$ , et d'autre part, on dérive la même égalité dans la direction de  $X_s$ , et on somme les deux résultats obtenus pour chaque  $s$ , on obtient le système

$$\begin{aligned}
(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) \cdot (X_2 \cdot \psi^2 + X_3 \cdot \psi^3) &= 0 \\
(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) \cdot (X_1 \cdot \psi^1 + X_3 \cdot \psi^3) &= 0 \\
(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) \cdot (X_1 \cdot \psi^1 + X_2 \cdot \psi^2) &= 0
\end{aligned}$$

Un calcul algébrique simple montre que pour tout  $s \in \{1, 2, 3\}$ , le noyau  $K$  de la multiplication par  $(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3)$  ne contient pas les spineurs non-nuls qui se trouvent dans l'espace vectoriel  $V^s$  engendré par  $\psi_j^s, j \in \{1, \dots, k-1\}$ . Mais le système ci-dessus montre que  $\psi^1, \psi^2, \psi^3$  appartiennent respectivement à  $V^1, V^2, V^3$  et à  $K$ , par conséquent ils sont nuls. Ceci montre que les coefficients  $a_j, b_j, c_j$  sont nuls, ce qui achève la démonstration du théorème.

Q.E.D.

On passe maintenant à la recherche d'une autre valeur propre de  $D$ . Soit  $\psi \in V$  un spineur de Killing sur  $M$ . Soit  $\{e_1, \dots, e_{n-3}\}$  un repère local orthonormé

de l'espace supplémentaire de l'espace engendré par les trois vecteurs de Killing  $X_1, X_2, X_3$  dans  $TM$ . On a

$$\begin{aligned}
D(X_1 \cdot X_2 \cdot \psi) &= \sum e_i \cdot \nabla_{e_i} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi + \sum e_i \cdot X_1 \cdot \nabla_{e_i} X_2 \cdot \psi + \\
&+ \sum e_i \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot \nabla_{e_i} \psi + X_1 \cdot X_1 \cdot X_3 \cdot \psi - \\
&- \frac{1}{2} X_1 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_1 \cdot \psi - X_2 \cdot X_3 \cdot X_2 \cdot \psi - \\
&- \frac{1}{2} X_2 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_2 \cdot \psi + X_3 \cdot X_2 \cdot X_2 \cdot \psi - \\
&- X_3 \cdot X_1 \cdot X_1 \cdot \psi - \frac{1}{2} X_3 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot \psi \\
&= \sum X_2 \cdot e_i \cdot \nabla_{e_i} X_1 \cdot \psi - \sum X_1 \cdot e_i \cdot \nabla_{e_i} X_2 \cdot \psi + \\
&+ \frac{n-3}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - X_3 \cdot \psi - \frac{1}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - \\
&- X_3 \cdot \psi - \frac{1}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - X_3 \cdot \psi + \\
&+ X_3 \cdot \psi + \frac{1}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi \\
&= X_2 \cdot (2\eta^1 \cdot \psi + 2X_2 \cdot X_3 \cdot \psi) - \\
&- X_1 \cdot (2\eta^2 \cdot \psi - 2X_1 \cdot X_3 \cdot \psi) + \\
&+ \frac{n-4}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - 2X_3 \cdot \psi \\
&= 2X_2 \cdot \eta^1 \cdot \psi - 2X_1 \cdot \eta^2 \cdot \psi + \frac{n-4}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - 6X_3 \cdot \psi \\
&= 2X_2 \cdot (\Omega^1 - X_1) \cdot \psi - 2X_1 \cdot (\Omega^2 - X_2) \cdot \psi + \\
&+ \frac{n-4}{2} X_1 \cdot X_2 \cdot \psi - 6X_3 \cdot \psi \\
&= (2 + \frac{n}{2}) X_1 \cdot X_2 \cdot \psi + 2\tau^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - 2\tau^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 6\tau^3 \cdot \psi + \\
&+ \frac{4}{n+1} (\Omega^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - \Omega^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 3\Omega^3 \psi)
\end{aligned}$$

Ceci montre que le spineur  $\psi^{1,2}$  donné par

$$\begin{aligned}
\psi^{1,2} &= X_1 \cdot X_2 \cdot \psi + \frac{1}{n+3} (2\tau^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - 2\tau^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 6\tau^3 \cdot \psi) + \\
&+ \frac{2}{n+1} (\Omega^2 \cdot \Omega^1 \cdot \psi - \Omega^1 \cdot \Omega^2 \cdot \psi - 3\Omega^3 \psi), \tag{3}
\end{aligned}$$

est un spineur propre pour  $D$  avec la valeur propre  $2 + \frac{n}{2}$  pour tout spineur de Killing  $\psi$  sur  $M$ .

*Théorème B.* La multiplicité de la valeur propre  $2 + \frac{n}{2}$  est au moins égale à  $(k-1)$ .

*Preuve.* Il suffit de montrer que pour  $t \in \{1, 2, 3\}$  fixé, l'application linéaire de  $V^t$  dans l'espace propre de  $D$  pour la valeur propre  $2 + \frac{n}{2}$ , donnée par  $\psi \mapsto \psi^{1,2}$ , est injective.

Soit  $\psi \in V^t$  tel que  $\psi^{1,2} = 0$ . Si, pour  $s \in \{1, 2, 3\}$ , on dérive (3) dans la direction de  $X_s$ , on multiplie la même relation par  $\frac{1}{2}X_s$  et on additionne les résultats, on obtient le système

$$\frac{n-3}{2} \cdot (X_1 \cdot X_3 - X_2) \cdot \psi + (X_3 + X_1 \cdot X_2) \cdot \Omega^1 \cdot \psi = 0$$

$$\frac{n-3}{2} \cdot (X_1 - X_3 \cdot X_2) \cdot \psi + (X_3 + X_1 \cdot X_2) \cdot \Omega^2 \cdot \psi = 0$$

$$(X_1 + X_2 \cdot X_3) \cdot \Omega^1 \cdot \psi + (X_2 + X_3 \cdot X_1) \cdot \Omega^2 \cdot \psi = 0$$

Si on somme la première equation multipliée par  $-X_2$ , la deuxième multipliée par  $-X_1$ , et la troisième equation, on obtient

$$(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) \cdot \psi = 0,$$

donc  $\psi \in V^t \cap \ker(1 - X_1 \cdot X_2 \cdot X_3) = \{0\}$ , ce qui achève la démonstration du théorème.

Q.E.D.

*Remarques.* 1. On a utilisé sans démonstration quelques résultats algébriques sur les spineurs, qui s'obtiennent sans difficulté suivant, par exemple, l'approche de Kirchberg donnée dans ([Ki]).

2. L'inégalité du théorème B est susceptible d'être améliorée ; en plus par la même méthode on obtient des spineurs propres de  $D$  pour la valeur propre  $-3 - \frac{n}{2}$ , sans pouvoir montrer qu'ils sont non-nuls.

## Références

- [Bä] C. BÄR, *Real Killing spinors and holonomy*, Commun. Math. Phys. **154** (1993), 509-521.
- [Ka] T. KASHIWADA, *A note on a Riemannian space with Sasakian 3-structure*, Nat. Sci. Repts. Ochanomizu Univ. **22** (1971), 1-2.
- [Ki] K.-D. KIRCHBERG, *An estimation for the first eigenvalue of the Dirac operator on closed Kähler manifolds of positive scalar curvature*, Ann. Global Anal. Geom. **3** (1986), 291-325.
- [Mo] A. MOROIANU, *La première valeur propre de l'opérateur de Dirac sur les variétés kählériennes compactes*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.**319**, Série I (1994), 1057-1062.

---

*Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, URA 169 du CNRS  
91128 Palaiseau, France*