



Le complexe motivique de De Rham

Florence Lecomte, Nathalie Wach

► To cite this version:

Florence Lecomte, Nathalie Wach. Le complexe motivique de De Rham. *Manuscripta mathematica*, 2009, 129 (1), pp.75-90. <hal-00124451>

HAL Id: hal-00124451

<https://hal.science/hal-00124451v1>

Submitted on 16 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

LE COMPLEXE MOTIVIQUE DE DE RHAM

Florence LECOMTE et Nathalie WACH

Strasbourg

ABSTRACT. Sur un corps de caractéristique 0, nous construisons un complexe motivique de De Rham qui permet de généraliser la cohomologie de De Rham d'une variété lisse à tout motif au sens de Voevodsky.

Introduction

Sur un corps de caractéristique 0, nous disposons grâce aux travaux de Voevodsky de la catégorie triangulée tensorielle $\mathbf{DM}^-(k)$ des complexes motiviques et de sa sous-catégorie pleine $\mathbf{DM}_{\text{gm}}(k)$ des motifs géométriques. La catégorie $\mathbf{DM}_{\text{gm}}(k)$ est engendrée comme catégorie triangulée par les motifs des schémas projectifs lisses. Utilisant cette description, Annette Huber [H00] a défini un foncteur de $\mathbf{DM}_{\text{gm}}(k)$ vers la catégorie des réalisations mixtes qu'elle a construite dans [H95].

Dans ce travail, nous proposons une définition de la réalisation de De Rham d'un complexe motivique \mathbf{M} de $\mathbf{DM}^-(k)$ qui étend la composante de De Rham des réalisations de A.Huber. Plus précisément, nous construisons un complexe motivique Ω^\bullet , ind-objet de la catégorie $\mathbf{DM}^-(k)$, appelé complexe motivique de De Rham et qui, par troncature par tout entier n , permet d'obtenir une suite d'objets $\tau_{\leq n} \Omega^\bullet$ de $\mathbf{DM}^-(k)$. On définit alors la réalisation de De Rham d'un objet \mathbf{M} de $\mathbf{DM}^-(k)$ par sa p -ième composante, en posant,

$$H_{DR}^p(\mathbf{M}) = \varinjlim_n \text{Hom}_{\mathbf{DM}^-(k)}(\mathbf{M}, \tau_{\leq n} \Omega^\bullet[p]),$$

pour tout entier p . Le complexe Ω^\bullet est défini par

$$\begin{aligned} \Omega^p(X) &= 0 && \text{si } p \leq 0, \\ &= \Gamma(X, \mathcal{O}_X) && \text{si } p = 0, \\ &= \Gamma(X, \Omega_X^p) && \text{si } p \geq 1, \end{aligned}$$

pour X schéma lisse sur k et Ω_X^p le faisceau des p -formes différentielles sur X . Il représente la cohomologie de De Rham dans le sens que pour X schéma lisse sur k de dimension $\leq n$, on a

$$\mathbf{H}_{DR}^p(X) = \text{Hom}_{\mathbf{DM}^-, \text{eff}(k)}(\mathbf{M}(X), \tau_{\leq n} \Omega^\bullet[p]),$$

où $\mathbf{M}(X)$ est le motif associé à X .

Les complexes motiviques sont construits à partir des faisceaux de Nisnevich avec transferts; la difficulté essentielle de ce travail consiste à munir de transferts les préfaisceaux $X \mapsto \Omega_X^p(X)$ des p -formes différentielles des schémas lisses sur k .

THEOREME

Soient X et Y deux schémas lisses de type fini sur k et soit W une correspondance finie au sens de Voevodsky [V00] de X vers Y . Alors, pour $p \geq 1$, il existe un morphisme

$$\Omega_Y^p(Y) \longrightarrow \Omega_X^p(X)$$

compatible aux compositions des correspondances.

La démonstration repose principalement sur les travaux de Suslin et Voevodsky [SV96]. Mais contrairement à (*loc. cit.*) les faisceaux Ω^p considérés ici ne vérifient pas de descente galoisienne. C'est pourquoi nous avons recours aux travaux de C. Knighten sur les différentielles de Zariski [K73].

Cet article constitue une première étape dans notre travail de généralisation des réalisations des motifs géométriques aux complexes motiviques [LW].

1 Un complexe de faisceaux de Nisnevich

Pour chaque entier $p \geq 1$, on considère le préfaisceau sur la catégorie des schémas lisses sur k défini par

$$\begin{aligned} \Omega^p : \quad \text{Sm}(k) &\longrightarrow \mathcal{A}b \\ X &\longmapsto \Omega_X^p(X) \quad . \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.1 Ω^p est un faisceau pour la topologie de Nisnevich, pour tout $p \geq 1$.

DEMONSTRATION : Ω^1 est un faisceau pour la topologie étale sur $\text{Sm}(k)$. En effet, pour tout schéma X lisse sur k , Ω_X^1 est un faisceau pour la topologie de Zariski sur X et il suffit de vérifier (cf [Mi] p50, prop 1.5) que pour tout morphisme étale $X = \text{Spec } A \rightarrow Y = \text{Spec } B$ entre des schémas affines sur k , la suite

$$\Omega_Y^1(Y) \longrightarrow \Omega_X^1(X) \rightrightarrows \Omega_{X \times_Y X}^1(X \times_Y X)$$

est exacte.

Les anneaux A et B sont lisses sur k , A est étale sur B , donc $\Omega_{B/k}^1$ est libre sur B et $\Omega_{A \otimes_B A/k}^1 = (A \otimes_B A) \otimes_B \Omega_{B/k}^1$ est libre sur $A \otimes_B A$. L'exactitude de la suite s'en déduit directement.

La topologie de Nisnevich étant moins fine que la topologie étale, Ω^1 est un faisceau pour la topologie de Nisnevich sur $\text{Sm}(k)$.

De même, Ω^p est un faisceau pour la topologie étale, par application directe du théorème de changement de base pour les algèbres extérieures (cf [Ma], Appendice C) . On obtient donc un faisceau pour la topologie de Nisnevich. \diamond

COROLLAIRE 1.2 Le complexe $\Omega^0 \rightarrow \Omega^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^p \rightarrow \dots$ est un complexe de faisceaux pour la topologie de Nisnevich.

2 Un théorème de descente

Il s'agit à présent de munir les faisceaux Ω^p de transferts. D'après un résultat de Suslin et Voevodsky ([SV96]), tout faisceau vérifiant la propriété de descente galoisienne peut être muni de transferts, via la trace. Or les faisceaux Ω^p ne vérifient pas cette propriété, même si l'on se ramène à une base lisse, comme le montre l'exemple ci-dessous (remarque 2.2) transmis par L. Illusie.

Il est néanmoins possible d'adapter la démonstration de [SV96] en généralisant un théorème de Knighten ([K73]) sur le bidual de Ω_X^p en tant que \mathcal{O}_X -module, considéré ici comme un faisceau pour la topologie de Zariski sur X .

Nous nous plaçons dans la situation où X est un schéma irréductible et lisse sur k , W la normalisée de X dans une extension galoisienne modérément ramifiée du corps des fonctions $K(X)$ de X , de groupe de Galois G et commençons par construire une application $\Omega_W^p(W) \rightarrow \Omega_X^p(X)$, qui coïncide avec la trace lorsque W est lisse.

THEOREME 2.1

Soit X est un schéma irréductible et normal sur k et supposons que W soit la normalisée de X dans une extension galoisienne modérément ramifiée du corps des fonctions $K(X)$ de X , de groupe de Galois G . Notons $(\Omega_X^p)^{**}$ (respectivement $(\Omega_W^p)^{**}$) le bidual de Ω_X^p (respectivement Ω_W^p) en tant que \mathcal{O}_X -module (respectivement \mathcal{O}_W -module); alors il existe une application naturelle

$$(\Omega_X^p)^{**}(X) \rightarrow (\Omega_W^p)^{**}(W),$$

qui induit un isomorphisme $(\Omega_X^p)^{**}(X) \simeq (\Omega_W^p)^{**}(W)^G$.

REMARQUES 2.2 :

i) C. Knighten ([K73]) en a publié une démonstration détaillée pour Ω^1 dans le cas où k est algébriquement clos et propose également des contre-exemples dans des cas de ramification sauvage.

ii) Lorsque X est lisse sur k , Ω_X^p est un faisceau localement libre sur X et l'application naturelle $\Omega_X^p \rightarrow (\Omega_X^p)^{**}$ est un isomorphisme pour tout entier $p \geq 1$; on peut alors définir l'application suivante, que l'on note $\alpha_{W/X}$:

$$\Omega_W^p(W) \rightarrow (\Omega_W^p)^{**}(W) \xrightarrow{\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g^*} ((\Omega_W^p)^{**}(W))^G \xrightarrow{\sim} (\Omega_X^p)^{**}(X) \xleftarrow{\sim} \Omega_X^p(X) \quad .$$

iii) Exemple : posons $A = k[u, v]$ et $B = A[x, y]/(x^3 - uv^2, y^3 - u^2v, x^2 - yv, y^2 - xu, xy - uv)$; alors B est un anneau libre sur A , l'extension des corps de fractions est une extension galoisienne de degré 3, de groupe de Galois $G = \mu_3$ lorsque k contient les racines troisièmes de l'unité. On peut montrer qu'il existe un élément

primitif (plus précisément $B = A[G](1 + x + y)$), mais $(\Omega_{B/A}^1)^G \neq \{0\}$: en effet la forme $x dy$ est invariante par G .

DEMONSTRATION : La démonstration est calquée sur celle de C. Knighten ([K73]).

a) Construction de l'application $(\Omega_X^p)^{**}(X) \rightarrow (\Omega_W^p)^{**}(W)$

Pour \mathcal{M} et \mathcal{N} deux faisceaux de \mathcal{O}_X -modules, notons :

- $\mathcal{H}om_X(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ le faisceau $U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U)$,
- $\mathcal{A}lt_X^p(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \text{Alt}_{\mathcal{O}_U}^p(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U)$, des formes p -différentielles alternées de \mathcal{M} dans \mathcal{N} ,
- $\mathcal{D}_k(\mathcal{O}_U, \mathcal{M})$ le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto D_k(\mathcal{O}_X(U), \mathcal{M}|_U)$, des k -dérivations de \mathcal{O}_X dans \mathcal{M} .

Le lemme suivant n'est qu'une réécriture des propriétés universelles des formes différentielles de Kähler (cf [K73], lemme 2, p 67) et des algèbres extérieures.

LEMME 2.3

- i) $(\Omega_X^1)^* = \mathcal{H}om_X(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X) = \mathcal{D}_k(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$
- ii) $(\Omega_X^p)^* = \mathcal{H}om_X(\Omega_X^p, \mathcal{O}_X) = \mathcal{A}lt_X^p(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$.

Puisque sur un schéma normal les faisceaux duaux sont sans torsion, on peut en donner une description explicite des éléments. Pour tout ouvert U de X , on a

$$(\Omega_X^1)^*(U) = \{D \in D_k(K(X), K(X)) \text{ tel que } \forall x \in U, D(\mathcal{O}_x) \subset \mathcal{O}_x\}$$

et similairement

$$(\Omega_X^p)^*(U) = \{D \in \text{Alt}_k^p(\Omega_{K(X)/k}^1, K(X)) \text{ tel que } \forall x \in U, D((\Omega_{X,x}^1)^p) \subset \mathcal{O}_x\}.$$

Puisque $(\Omega_X^p)^{**}(U)$ est sans torsion, l'application naturelle $(\Omega_X^p)^{**}(U) \rightarrow \Omega_{K(X)/k}^p$ est injective et la description précédente permet de reconnaître les éléments de $\Omega_{K(X)/k}^p$ provenant de $(\Omega_X^p)^{**}(U)$. Nous pouvons écrire la propriété caractéristique des éléments du bidual

$$(P_1(U)) \quad (\Omega_X^1)^{**}(U) = \{\omega \in \Omega_{K(X)/k}^1 \text{ tel que } \forall x \in U, \forall D \in D_k(\mathcal{O}_x, \mathcal{O}_x), D(\omega) \in \mathcal{O}_x\}$$

et similairement

$$(P_p(U)) \quad (\Omega_X^p)^{**}(U) = \{\omega \in \Omega_{K(X)/k}^p \text{ tel que } \forall x \in U, \forall D \in \text{Alt}_k^p(\Omega_{X,x}^1, \mathcal{O}_x), D(\omega) \in \mathcal{O}_x\}.$$

C'est la propriété P_1 qui définit les différentielles de Zariski dans [K73].

Comme l'application $f : W \rightarrow X$ est dominante, elle induit une extension de corps $K(X) \rightarrow K(W)$. Pour construire l'application $(\Omega_X^p)^{**}(X) \rightarrow (\Omega_W^p)^{**}(W)$, il suffit de s'assurer que, pour $p \geq 1$, si $\omega \in \Omega_{K(X)/k}^p$ vérifie la propriété $P_p(U)$ pour un certain ouvert U de X , son image ω' par l'application canonique $\Omega_{K(X)/k}^p \rightarrow \Omega_{K(W)/k}^p$ vérifie la propriété $P_p(f^{-1}(U))$ sur W .

On utilise le fait que le bidual $(\Omega_X^p)^{**}$ (respectivement $(\Omega_W^p)^{**}$) est un faisceau de modules réflexifs pour la topologie de Zariski sur X (respectivement sur W), c'est-à-dire, pour U ouvert de X , on a

$$(\Omega_X^p)^{**}(U) = \bigcap_{\mathcal{P} \in U, \dim \mathcal{P}=1} (\Omega_X^p)_{\mathcal{P}}^{**}$$

et de même pour les ouverts de W . Il suffit alors de montrer la propriété en des points de codimension 1 et, comme X et W sont normaux, les anneaux locaux des points de codimension 1 sont des anneaux de valuation discrète. On se ainsi ramène localement à $X = \text{Spec } A$ et $W = \text{Spec } B$ où A et B sont des anneaux de valuation discrète (cf [K73]). \diamond

b) L'isomorphisme $(\Omega_X^p)^{**}(X) \simeq (\Omega_W^p)^{**}(W)^G$

A nouveau, la démonstration repose sur le fait que $(\Omega_X^p)^{**}$ et $(\Omega_W^p)^{**}$ sont des faisceaux de modules réflexifs et il suffit de montrer l'isomorphisme lorsque $X = \text{Spec } A$ et $W = \text{Spec } B$ où A et B sont des anneaux de valuation discrète. Dans cette situation $\Omega_{A/k}^p$ (resp $\Omega_{B/k}^p$) est un A -module libre de type fini (resp un B -module libre) et s'identifie à son bidual. \diamond

3 Transferts

Si X_1 et X_2 sont des schémas lisses sur k et $Z \subset X_1 \times_k X_2$ un sous-schéma fini sur X_1 et surjectif sur une composante irréductible de X_1 , il s'agit de construire, pour tout $p \geq 1$, une application $T_Z : \Omega_{X_2}^p(X_2) \rightarrow \Omega_{X_1}^p(X_1)$. L'application $Z \hookrightarrow X_1 \times_k X_2 \rightarrow X_2$ composée de l'injection et de la projection sur X_2 définit une flèche $\Omega_{X_2}^p(X_2) \rightarrow \Omega_Z^p(Z)$. Il suffit de construire une application $T_{Z/X_1} : \Omega_Z^p(Z) \rightarrow \Omega_{X_1}^p(X_1)$ pour tout morphisme $Z \rightarrow X_1$ fini et surjectif sur une composante irréductible de X_1 et de vérifier la compatibilité de ces applications avec la composition des correspondances.

La suite de cette partie consiste à vérifier que la démonstration de [SV96] s'adapte dans notre situation.

3.1 Construction de $T_{Z/X}$

Pour X lisse et irréductible sur k , $Z \rightarrow X$ irréductible, fini et surjectif sur X , on note W la normalisée de X dans une extension galoisienne de $K(X)$ contenant le corps des fonctions $K(Z)$ de Z . Alors $\text{Hom}_X(W, Z) \neq \emptyset$ et on pose (cf [SV96])

$$T_{Z/X} = \alpha_{W/X} \circ \left(\sum_{q \in \text{Hom}_X(W, Z)} q^* \right) ,$$

où $\alpha_{W/X} : \Omega_W^p(W) \rightarrow \Omega_X^p(X)$ est l'application définie ci-dessus (REMARQUE 2.2.).

LEMME 3.1.1 L'application $T_{Z/X}$ ne dépend pas du schéma normal W choisi.

DEMONSTRATION : considérons W_1 et W_2 deux schémas normaux sur X tels que les extensions $K(W_i)$ soient galoisiennes sur $K(X)$, $K(Z) \subset K(W_i)$ pour $i = 1, 2$ et tels qu'il existe une application $f : W_1 \rightarrow W_2$ finie et surjective. Il s'agit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & \Omega_{W_1}^p(W_1) & & \\ & \nearrow \sum_{q \in \text{Hom}_X(W_1, Z)} q^* & & \searrow \alpha_{W_1/X} & \\ & \Omega_Z^p(Z) & (1) & & \Omega_X^p(X) \\ & \nwarrow \sum_{q \in \text{Hom}_{X_1}(W_2, Z)} q^* & & \nearrow \alpha_{W_2/X} & \\ & & \Omega_{W_2}^p(W_2) & & \end{array}$$

(1) $f^* : \Omega_Z^p(Z) \rightarrow \Omega_{W_2}^p(W_2)$

(1) comme Z est irréductible et $W_i \rightarrow X$ est un recouvrement pseudo-galoisien (au sens de [SV96]) tel que $\text{Hom}_X(W_i, Z) \neq \emptyset$, l'application naturelle

$$\text{Hom}_X(W_i, Z) \rightarrow \text{Hom}_{K(X)}(K(Z), K(W_i))$$

est bijective et le cardinal de $\text{Hom}_X(W_i, Z)$ est égal au degré séparable de l'extension $[K(Z) : K(X)]$ ([SV96], lemme 5.7), d'où le fait que l'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_X(W_2, Z) & \longrightarrow & \text{Hom}_X(W_1, Z) \\ q & \longmapsto & q \circ f \end{array}$$

est une bijection et le triangle (1) commutatif.

(2) Puisque $f : W_1 \rightarrow W_2$ est un morphisme dominant entre schémas normaux, l'application

$$f^* : (\Omega_{W_2}^p)^{**}(W_2) \rightarrow (\Omega_{W_1}^p)^{**}(W_1)$$

existe par le théorème 2.1. On note G_1 (respectivement G_2) le groupe de Galois de $K(W_1)$ sur $K(X)$ (respectivement de $K(W_2)$ sur $K(X)$). On est dans la situation où $K(W_2) \subset K(W_1)$; le groupe G_2 est alors

un quotient de G_1 et l'extension $K(W_1)/K(W_2)$ est galoisienne de groupe de Galois $H = \{h \in G_1 \text{ tel que } h(x) = x \text{ pour } x \in K(W_2)\}$. La fonctorialité s'exprime par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
& (\Omega_X^p)^{**}(X) \simeq \Omega_X^p(X) & & & \\
& \swarrow \sim & & \searrow \sim & \\
((\Omega_{W_1}^p)^{**}(W_1))^{G_1} & & & & ((\Omega_{W_2}^p)^{**}(W_2))^{G_2} \\
\uparrow \frac{1}{\#G_1} \sum_{g \in G_1} g^* & & \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H} h^* & & \uparrow \frac{1}{\#G_2} \sum_{g \in G_2} g^* \\
(\Omega_{W_1}^p)^{**}(W_1) & \xrightarrow{\quad f^* \quad} & (\Omega_{W_2}^p)^{**}(W_2) & \xrightarrow{\sim} & ((\Omega_{W_1}^p)^{**}(W_1))^H \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
\Omega_{W_1}^p(W_1) & \xleftarrow{\quad f^* \quad} & \Omega_{W_2}^p(W_2) & &
\end{array}$$

◇

REMARQUE : ce dernier lemme est valable aussi sur un corps de caractéristique $p > 0$, auquel cas, on suppose simplement que l'extension $K(W)/K(X)$ est normale de degré non divisible par p et on modifie l'expression de $T_{Z/X}$ par (cf [SV96])

$$T_{Z/X} = [K(W) : K(X)]_{\text{insép}} \sum_{q \in \text{Hom}_X(W, Z)} q^* \quad .$$

3.2 Extension à Z non irréductible

Soit Z un sous-schéma de $X_1 \times_k X_2$ fini et surjectif sur X_1 et notons Z_i pour $1 \leq i \leq d$, les composantes irréductibles de Z de multiplicités n_i . Le cycle associé à Z est alors $[Z] = \sum_{1 \leq i \leq d} n_i [Z_i]$ et on étend la définition précédente par linéarité :

$$T_{[Z]} = \sum_{1 \leq i \leq d} n_i T_{Z_i} : \Omega_{X_2}^p(X_2) \longrightarrow \oplus_{1 \leq i \leq d} \Omega_{Z_i}^p(Z_i) \xrightarrow{\sum_{1 \leq i \leq d} n_i T_{Z_i/X_1}} \Omega_{X_1}^p(X_1).$$

4 Composition des correspondances

Il reste à vérifier que le faisceau Ω^p , muni des transferts construits ci-dessus est un faisceau sur la catégorie $\text{Smcor}(k)$.

Soient X_1, X_2 et X_3 des schémas lisses et irréductibles sur k , $Z \subset X_1 \times X_2$ un sous-schéma irréductible, fini et surjectif sur X_1 et $Z' \subset X_2 \times X_3$ un sous-schéma irréductible, fini et surjectif sur X_2 . Par composition, on peut définir une application $T_{Z'} \circ T_Z : \Omega_{X_1}^p(X_1) \rightarrow \Omega_{X_3}^p(X_3)$.

D'autre part, si $p_{13} : X_1 \times X_2 \times X_3 \rightarrow X_1 \times X_3$ est la projection, on note $p_{13*}([Z \times_{X_2} Z']) = [Z'] \circ [Z]$ (composition des cycles au sens de [V00]) et le morphisme $p_{13*}(Z \times_{X_2} Z') \rightarrow X_1$ est fini et surjectif. Ceci permet de définir l'application

$$T_{[Z'] \circ [Z]} : \Omega_{X_1}^p(X_1) \rightarrow \Omega_{X_3}^p(X_3) \quad .$$

PROPOSITION 4

Sous les notations précédentes, $T_{Z'} \circ T_Z = T_{[Z'] \circ [Z]}$.

La suite de ce chapitre est consacrée à la démonstration de cette proposition.

4.1 Image directe

Soit X un schéma lisse et irréductible sur k , Z' irréductible et $Z \xrightarrow{p} Z' \rightarrow X$ des morphismes finis et surjectifs. Notons Z_i les composantes irréductibles de Z , n_i leurs multiplicités et $d_i = [K(Z_i) : K(Z')]$.

LEMME 4.1.1 *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{1 \leq i \leq d} \Omega_{Z_i}^p(Z_i) & \xrightarrow{\sum_{1 \leq i \leq d} n_i T_{Z_i/X}} & \Omega_X^p(X) \\ & \nwarrow p^* \quad \nearrow T_{p_*([Z])} & \\ & \Omega_{Z'}^p(Z') & \end{array}$$

avec $p_*([Z]) = \sum_{1 \leq i \leq d} d_i n_i [p(Z_i)] = \sum_{1 \leq i \leq d} d_i n_i [Z']$.

DEMONSTRATION : On introduit une normalisation W de X dans une extension galoisienne de $K(X)$ contenant à la fois $K(Z')$ et tous les $K(Z_i)$ et l'on se ramène à montrer que le triangle suivant, où $n = \sum_{1 \leq i \leq d} n_i d_i$,

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{1 \leq i \leq d} \Omega_{Z_i}^p(Z_i) & \xrightarrow{\sum_{q_i \in \text{Hom}_X(W, Z_i)} n_i q_i^*} & \Omega_W^p(W) \\ & \nwarrow p^* \quad \nearrow n \sum_{q' \in \text{Hom}_X(W, Z')} q'^* & \\ & \Omega_{Z'}^p(Z') & \end{array}$$

est commutatif.

Or, puisque W est normal et $W \rightarrow X$ est pseudo-galoisien, il en est de même de $W \rightarrow Z'$ et $\text{Hom}_{Z'}(W, Z_i) = \text{Hom}_{K(Z')}(K(Z_i), K(W))$ est de cardinal d_i ([SV96], *lemmes 5.3 et 5.7*). Tout $q' \in \text{Hom}_X(W, Z')$ fixé induit une application $\text{Hom}_{Z'}(W, Z_i) \rightarrow \text{Hom}_X(W, Z_i)$ injective et la composée

$$\Omega_{Z'}^p(Z') \xrightarrow{p_i^*} \Omega_{Z_i}^p(Z_i) \xrightarrow{\sum_{q_i \in \text{Hom}_X(W, Z_i)} q_i^*} \Omega_W^p(W)$$

est l'application $d_i q'^*$, d'où le résultat. \diamond

CONSEQUENCE : le lemme s'applique dans la situation suivante. Pour X_1, X_2 et X_3 des schémas lisses et irréductibles sur k , $Z \subset X_1 \times X_2$ un sous-schéma irréductible, fini et surjectif sur X_1 et $Z' \subset X_2 \times X_3$ un sous-schéma irréductible, fini et surjectif sur X_2 , notons Z_i , pour $1 \leq i \leq d$, les composantes irréductibles de $Z \times_{X_2} Z'$ de multiplicités n_i et de même Z'_j , pour $1 \leq j \leq f$, les composantes irréductibles de $p_{13}(Z \times_{X_2} Z')$ de multiplicités n'_j . On a alors $[Z \times_{X_2} Z'] = \sum_{1 \leq i \leq d} n_i [Z_i]$,

$$p_{13*}([Z \times_{X_2} Z']) = \sum_{1 \leq i \leq d} n_i p_{13*}[Z_i] = \sum_{1 \leq j \leq f} n'_j [Z'_j]$$

et la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{1 \leq i \leq d} \Omega_{Z_i}^p(Z_i) & \xrightarrow{\sum_{1 \leq i \leq d} n_i T_{Z_i/X_1}} & \Omega_{X_1}^p(X_1) \\ & \nwarrow p_{13}^* \quad \nearrow \sum_{1 \leq j \leq f} n'_j T_{Z'_j/X_1} & \\ & \oplus_{1 \leq j \leq f} \Omega_{Z'_j}^p(Z'_j) & \end{array}$$

4.2 Composition

PROPOSITION 4.2.1 *Introduisons W' (resp W) une normalisation de X_2 (resp de X_1) dans une extension galoisienne de $K(X_2)$ (resp de $K(X_1)$) contenant $K(Z')$ (resp $K(Z)$ et $K(Z_i)$ pour tout i , $1 \leq i \leq d$), de groupe de Galois $G' = \text{Gal}(K(W')/K(X_2))$ (resp $G = \text{Gal}(K(W)/K(X_1))$). Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc}
& & \oplus_{1 \leq i \leq d} \Omega_{Z_i}^p(Z_i) & & \\
& \nearrow p_{23}^* & & \searrow \sum_{q_i \in \text{Hom}_{X_1}(W, Z_i)} n_i q_i^* & \\
\Omega_{Z'}^p(Z') & & & & \Omega_W^p(W) \\
& \searrow \sum_{q \in \text{Hom}_{X_2}(W', Z')} q^* & & \nearrow \sum_{q \in \text{Hom}_{X_1}(W, Z)} q^* & \\
& \Omega_{W'}^p(W') \xrightarrow{\alpha} (\Omega_{W'}^p)^{**}(W')^{\frac{1}{|G'|}} \xrightarrow{\sum_{g \in G'} g^*} (\Omega_{W'}^p)^{**}(W')^{G'} \xrightarrow{\sim} \Omega_{X_2}^p(X_2) \xrightarrow{p_2^*} \Omega_Z^p(Z) & & &
\end{array}$$

DEMONSTRATION : la démonstration suit pas-à-pas celle de [SV96]; il s'agit juste de vérifier qu'elle reste valable malgré le passage par le bidual.

Choisissons W'_0 une composante irréductible de $W' \times_{X_2} Z$ et prenons W la normalisation de W'_0 dans une extension galoisienne de $K(X_1)$ contenant $K(W'_0)$ et $K(Z_i)$ pour $1 \leq i \leq d$. Nous sommes dans la situation suivante, où les flèches verticales sont finies et surjectives sur une composante irréductible du but.

$$\begin{array}{ccccc}
& W & & & \\
& \downarrow s & & \nearrow \pi' & \\
q_i \swarrow & W'_0 & \xrightarrow{\quad} & W' \times_{X_2} Z & \xrightarrow{\quad} & W' \\
& \downarrow r'_i & & \downarrow r' & & \downarrow q' \\
& Z_i & \xrightarrow{\quad} & Z' \times_{X_2} Z & \xrightarrow{p_{23}} & Z' \\
& & & \downarrow p_{12} & & \downarrow p'_1 \\
& & & Z & \xrightarrow{\pi} & X_2 \\
& & & \downarrow p_1 & & \\
& & & X_1 & &
\end{array}$$

De plus,

- les flèches $\pi' : W'_0 \rightarrow W'$ et $p' = p'_1 \circ q' : W' \rightarrow X_2$ ne dépendent pas du choix de $q' \in \text{Hom}_{X_2}(W', Z')$;
- pour chaque $q' \in \text{Hom}_{X_2}(W', Z')$, il existe $r' : W' \times_{X_2} Z \rightarrow Z' \times_{X_2} Z$ unique par propriété universelle du produit fibré;
- comme W'_0 est irréductible, pour chaque r' , il existe i , $1 \leq i \leq d$ unique tel que $r'(W'_0) = Z_i = r'_i(W)$ et r'_i est fini et surjectif.

LEMME 4.2.2 Pour $a \in \Omega_{Z'}^p(Z')$,

$$\sum_{q \in \text{Hom}_{X_1}(W, Z)} q^* \circ p_2^* \circ T_{Z'/X_2}(a) = \frac{1}{[K(W'_0) : K(Z)]} \sum_{s \in \text{Hom}_{X_1}(W, W'_0)} s^* \circ \pi'^* \circ p'^* \circ T_{Z'/X_2}(a).$$

DEMONSTRATION :

$$\sum_{q \in \text{Hom}_{X_1}(W, Z)} q^* \circ p_2^* \circ T_{Z'/X_2}(a) = \sum_{q \in \text{Hom}_{X_1}(W, Z)} s^* \circ \pi'^* \circ p'^* \circ T_{Z'/X_2}(a).$$

Par le lemme 5.9 de [SV96], on sait que W'_0/Z est pseudo-galoisien de groupe

$$G' = \text{Hom}_{K(Z)}(K(W'_0), K(W'_0)) = \text{Hom}_{K(Z)}(K(W'_0), K(W)) \quad ;$$

de plus, comme W est normal

$$\mathrm{Hom}_{X_1}(W, Z) = \mathrm{Hom}_{K(X_1)}(K(Z), K(W))$$

et

$$\mathrm{Hom}_{X_1}(W, W'_0) = \mathrm{Hom}_{K(X_1)}(K(W'_0), K(W)).$$

L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{K(X_1)}(K(W'_0), K(W)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{K(X_1)}(K(Z), K(W)) \\ s & \longmapsto & q = s|_{K(Z)} \end{array}$$

est surjective et ses fibres sont de cardinal $[K(W'_0) : K(Z)]$. En effet, s et s' ont même image si et seulement s'il existe $t \in \mathrm{Hom}_{K(Z)}(K(W'_0), K(W'_0))$ tel que $s' = s \circ t$ et $\mathrm{Hom}_{K(Z)}(K(W'_0), K(W'_0))$ est de cardinal $[K(W'_0) : K(Z)]$.

On en déduit le lemme. \diamond

LEMME 4.2.3

$$p'^* \circ T_{Z'/X_2}(a) = \sum_{q' \in \mathrm{Hom}_{X_2}(W', Z')} q'^*(a) \quad .$$

DEMONSTRATION : Rappelons que $p'^* \circ T_{Z'/X_2}(a) = p' * \circ (\frac{1}{\#G'} \sum_{g \in G'} g^*) \circ \alpha \circ \sum_{q \in \mathrm{Hom}_{X_2}(W', Z')} q^*$. Par fonctorialité $g^* \circ \alpha = \alpha \circ g^*$ pour $g \in G' = \mathrm{Hom}_{X_2}(W', W')$; d'autre part, le noyau de α est $(\Omega_{W'}^p)_{\mathrm{tors}}$ et, comme X_2 est lisse, $\Omega_{X_2}^p$ n'a pas de torsion, on en déduit que la composée

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{W'}^p(W') & \xrightarrow{\alpha} & (\Omega_{W'}^p)^{**}(W') \xrightarrow{\frac{1}{\#G'} \sum_{g \in G'} g^*} ((\Omega_{W'}^p)^{**}(W'))^{G'} \\ & & \downarrow \sim \\ & & \Omega_{X_2}^p(X_2) \end{array}$$

p'^* (arrow from $\Omega_{W'}^p(W')$ to $\Omega_{X_2}^p(X_2)$)

induit l'identité sur $\Omega_{X_2}^p(X_2)$, d'où le résultat. \diamond

On obtient alors

$$\sum_{q \in \mathrm{Hom}_{X_1}(W, Z)} q^* \circ p_2^* \circ T_{Z'/X_2}(a) = \frac{1}{[K(W'_0) : K(Z)]} \sum_{\substack{s \in \mathrm{Hom}_{X_1}(W, W'_0) \\ q' \in \mathrm{Hom}_{X_2}(W', Z')}} s^* \circ \pi'^* \circ q'^*(a).$$

La fin du calcul repose sur le résultat suivant :

LEMME 4.2.4 Pour i , $1 \leq i \leq d$, notons a_i le pull-back de a dans $\Omega_{Z_i}^p(Z_i)$, de telle sorte que $\pi'^* \circ q'^*(a) = \sum_{1 \leq i \leq d} r_i'^*(a_i)$. Alors

$$\sum_{\substack{s \in \mathrm{Hom}_{X_1}(W, W'_0) \\ q' \in \mathrm{Hom}_{X_2}(W', Z')}} s^* \circ \pi'^* \circ q'^*(a) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq d \\ r_i' \in \mathrm{Hom}_Z(W'_0, Z_i) \\ q_i \in \mathrm{Hom}_{X_1}(W, Z_i)}} n_i [K(W'_0) : K(Z_i)] q_i^*(a_i).$$

DEMONSTRATION :

Dans notre situation, les résultats de [SV96] (5) s'appliquent, d'où

- i) $n_i = \{q' \in \mathrm{Hom}_{X_2}(W', Z') \text{ tel que } q' \mapsto r_i'\}$,
- ii) $[K(Z') : K(X_2)] = \sum_{1 \leq i \leq d} n_i [K(Z_i) : K(Z)]$ et
- iii) $\mathrm{Hom}_Z(W'_0, Z_i) = \mathrm{Hom}_Z(W, Z_i)$.

On peut transformer l'expression

$$\sum_{\substack{s \in \mathrm{Hom}_{X_1}(W, W'_0) \\ q' \in \mathrm{Hom}_{X_2}(W', Z')}} s^* \circ \pi'^* \circ q'^*(a) = \sum_{s \in \mathrm{Hom}_{X_1}(W, W'_0)} \sum_{\substack{1 \leq i \leq d \\ r_i' \in \mathrm{Hom}_Z(W'_0, Z_i)}} n_i s^* \circ r_i'^*(a_i).$$

Chaque $r'_i \in \text{Hom}_Z(W'_0, Z_i)$ définit un plongement $r'_i : K(Z_i) \hookrightarrow K(W'_0)$ et une application

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{K(X_1)}(K(W'_0), K(W)) & \longrightarrow & \text{Hom}_{K(X_1)}(K(Z_i), K(W)) \\ s & \longmapsto & s|_{K(Z_i)} = s \circ r'_i = q_i \end{array},$$

dont les fibres sont de cardinal $[K(W'_0) : K(Z_i)]$, d'où le lemme. \diamond

Pour achever la démonstration de la proposition et conclure, il suffit de remarquer que $[K(Z_i) : K(Z)]$ et $\text{Hom}_Z(W, Z_i)$ ont même cardinal.

CONSEQUENCES : *i)* La construction des transferts ci-dessus commute avec la différentielle et on obtient un complexe de faisceaux de Nisnevich avec transferts, objet de $D(\text{Shv}_{\text{Nis}}(\text{Smcor}(k)))$, noté Ω^\bullet et appelé *complexe motivique de De Rham*.

ii) De plus pour tout n entier, considérons

$$\tau_{\leq n} \Omega^\bullet : \Omega^1 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^{n-1} \rightarrow \text{Ker } d,$$

le complexe tronqué. C'est un complexe borné supérieurement de faisceaux de Nisnevich avec transferts, dont la cohomologie est invariante par homotopie, ce qui en fait un objet de $\mathbf{DM}^{-, \text{eff}}(k)$.

5 Réalisation de De Rham

DEFINITION 5.1 La *réalisation de De Rham* d'un motif effectif \mathbf{M} objet de $\mathbf{DM}^{-, \text{eff}}(k)$ est le k -espace vectoriel gradué dont le terme de degré q est

$$\mathbf{H}_{DR}^q(\mathbf{M}) = \varinjlim_n \text{Hom}_{\mathbf{DM}^{-, \text{eff}}(k)}(\mathbf{M}, \tau_{\leq n} \Omega^\bullet[q]).$$

REMARQUES 5.2 :

- i)* Le foncteur H_{DR}^\bullet ainsi construit, limite inductive filtrante de foncteurs Hom , est un foncteur homologique.
- ii)* Si \mathbf{M} est le motif $\mathbf{M}(X)$ d'un schéma X lisse sur k , de dimension inférieure ou égale à n , alors

$$\mathbf{H}_{DR}^q(\mathbf{M}(X)) = \text{Hom}_{\mathbf{DM}^{-, \text{eff}}(k)}(\mathbf{M}(X), \tau_{\leq n} \Omega^\bullet[q])$$

et

$$\text{Hom}_{\mathbf{DM}^{-, \text{eff}}(k)}(\mathbf{M}(X), \tau_{\leq n} \Omega^\bullet[q]) = \mathbf{H}_{\text{Nis}}^q(X, \tau_{\leq n} \Omega^\bullet) = \mathbf{H}_{\text{Zar}}^q(X, \Omega^\bullet) = \mathbf{H}_{DR}^q(X)$$

(cf [V00], propositions 3.1.9 et 3.1.12) et l'on voit ainsi que $\mathbf{H}_{DR}^q(\mathbf{M}(X))$ est le q -ième groupe de cohomologie de De Rham de X .

PROPOSITION 5.2 *a)* La réalisation de De Rham du motif de Tate est $H_{DR}^0(\mathbf{Z}(1)) = k$ et $H_{DR}^p(\mathbf{Z}(1)) = 0$ pour $p \neq 0$.

b) La réalisation de De Rham induit un foncteur de la catégorie $\mathbf{DM}^-(k)$ dans la catégorie des k -espaces vectoriels gradués.

DEMONSTRATION

a) Cela découle directement du triangle distingué $(\mathbf{Z}(1))[2] \rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{P}^1) \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}(1)[1]$.

b) Par le théorème de simplification de Voevodsky ("cancellation theorem" cf [MVW]16.25), on a des isomorphismes $\text{Hom}_{\mathbf{DM}^{-, \text{eff}}(k)}(\mathbf{M}(p), (\tau_{\leq n} \Omega^\bullet[q]) \otimes \mathbf{Z}(p)) = \text{Hom}_{\mathbf{DM}^{-, \text{eff}}(k)}(\mathbf{M}, \tau_{\leq n} \Omega^\bullet[q])$ pour un objet M de $\mathbf{DM}^{-, \text{eff}}(k)$ et tout entier $p \geq 1$, ce qui permet d'étendre le foncteur aux complexes motiviques non effectifs en posant

$$\mathbf{H}_{DR}^q(\mathbf{M}) = \varinjlim_n \text{Hom}_{\mathbf{DM}^{-, \text{eff}}(k)}(\mathbf{M}(p), \tau_{\leq n} \Omega^\bullet[q] \otimes \mathbf{Z}(p)),$$

pour p assez grand. \diamond

PROPOSITION 5.3 *La réalisation de De Rham présentée ici coïncide avec celle définie par A. Huber sur la catégorie des motifs géométriques.*

DEMONSTRATION : c'est une conséquence de la proposition 2.1.2 de [H00] et du fait que, pour un schéma projectif lisse, la réalisation de De Rham du motif associé coïncide avec la composante de De Rham du foncteur de [H00]. \diamond

Bibliographie

- [H00] Huber, Annette. — Realization of Voevodsky's motives, *Journal of Algebraic Geometry*, **9**, (2000), no 4, 755–799.
- [H95] Huber, Annette. — Mixed motives and their realization in derived categories, *Lecture Notes in Mathematics*, **1604**, Springer-Verlag, Berlin, (1995).
- [K73] Knighten, Carol M. — Differentials on quotients of algebraic varieties, *Transactions of the American Mathematical Society*, **177**, (1973), 65–89.
- [LW] Lecomte, Florence - Wach, Nathalie. — Réalisations des complexes motiviques de Voevodsky, *en préparation*.
- [Ma] Matsumura, Hideyuki. — Commutative ring theory, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, **8**, Cambridge University Press, Cambridge, (1989).
- [Mi] Milne, James S.. — Étale cohomology, *Princeton Mathematical Series*, **33**, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1980).
- [MVW] Mazza, Carlo - Voevodsky, Vladimir - Weibel, Charles. — Lecture notes on motivic cohomology, *Clay Mathematics Monographs*, **2**, American Mathematical Society, Providence, RI, (2006).
- [N89] Nisnevich, Ye. A.. — The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K -theory, **in** Algebraic K -theory : connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987), *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, **279**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1989), 241–342.
- [SV96] Suslin, Andrei - Voevodsky, Vladimir. — Singular homology of abstract algebraic varieties, *Inventiones Mathematicae*, **123**, (1996), no 1, 61–94.
- [V00] Voevodsky, Vladimir. — Triangulated categories of motives over a field, **in** Cycles, transfers, and motivic homology theories, *Ann. of Math. Stud.*, **143**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (2000), 188–238.