HAL open science

Superrigidité géométrique et applications harmoniques

Pierre Pansu

To cite this version:

Pierre Pansu. Superrigidité géométrique et applications harmoniques. Laurent Bessières, Anne Parreau, Bertrand Rémy. Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités, Société Mathématique de France, pp.375-422, 2009, Séminaires et Congrès. hal-00121975v2

HAL Id: hal-00121975

https://hal.science/hal-00121975v2

Submitted on 5 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

hal-00121975, version 2 - 5 Jan 2007

Superrigidité géométrique et applications harmoniques

Pierre Pansu[1,2*]

5 janvier 2007

1 Introduction

1.1 De quoi s'agit-il ?

Le terme *superrigidité*, inauguré par G.D. Mostow lorsqu'il a lu la contribution de G.A. Margulis au congrès de Vancouver, [Ma2], désigne un phénomène mis en évidence par ce dernier en 1974 : les représentations linéaires de dimension finie non unitaires des réseaux de certains groupes de Lie proviennent, par restriction, du groupe ambiant. La situation modèle est celle du réseau $Sl(n, \mathbf{Z})$ du groupe de Lie $Sl(n, \mathbf{R})$.

Par *superrigidité géométrique*, on entend un ensemble de techniques permettant d'étendre les résultats de Margulis à des classes plus larges de groupes discrets, et éventuellement de passer des représentations linéaires de dimension finie à des actions sur des espaces plus généraux.

1.2 Le théorème de superrigidité de Margulis (1974)

Théorème 1 (Margulis, [Ma2]). *Soient G, H des groupes algébriques semi-simples sur des corps locaux, sans facteurs compacts. On suppose que G a un rang réel ≥ 2. Soit Γ un réseau irréductible de G.*

Tout homomorphisme $\Gamma \to H$ dont l'image est non bornée et Zariski dense s'étend en un homomorphisme $G \to H$.

*[1] Univ Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Orsay, F-91405 ;
[2] CNRS, Orsay, F-91405.

Nous ne définirons pas tous les termes, renvoyant à la littérature classique, [Bo1], [Ma3]. La géométrie commence lorsqu'on voit les groupes algébriques G et H comme groupes d'isométries d'espaces métriques. Depuis E. Cartan [Ca], on sait qu'il existe un dictionnaire entre les groupes de Lie semi-simples sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et les *espaces symétriques* sans facteurs euclidiens. Une variété riemannienne est symétrique si pour chaque point x, la symétrie géodésique, qui renverse toutes les géodésiques passant par x, est une isométrie. Ce dictionnaire a été étendu par F. Bruhat et J. Tits [BT] au cas des corps locaux non archimédiens. La classe des espaces symétriques est remplacée par celle des *immeubles euclidiens*. Ce dictionnaire permet de reformuler le résultat de Margulis.

Théorème 2 *Soient X, Y des espaces symétriques ou des immeubles de dimension finie, sans facteurs compacts. On suppose que X est de rang ≥ 2. Soit Γ un groupe discret irréductible d'isométries de X tel que $Vol(\Gamma \setminus X) < +\infty$.*

Toute action isométrique réductive de Γ sur Y laisse stable ou bien un point, ou bien un sous-ensemble convexe de Y qui est pluriisométrique à un produit de facteurs irréductibles de X, et sur lequel l'action se prolonge en une action isométrique d'un quotient de $Isom(X)$.

Certains termes sont plus aisés à définir dans ce langage. Lorsque X s'écrit non trivialement comme un produit riemannien, un groupe d'isométries de X est dit *irréductible* s'il ne contient aucun sous-groupe de type fini qui préserve la décomposition en produit. Toujours lorsque X s'écrit non trivialement comme un produit riemannien, on peut modifier la métrique en multipliant celle de chaque facteur par une constante différente. On obtient ainsi les espaces *pluriisométriques* à X. Le *rang* de X est la dimension maximale d'un espace euclidien qu'on peut plonger isométriquement dans X. Une action est *réductive* (M. Gromov dit *stable*, N. Monod dit *non évanescente*), si pour tous les éléments g d'un système générateur fini, la fonction déplacement $y \mapsto d(y, gy)$ sur Y tend vers l'infini lorsque $d(y, y_0)$ tend vers l'infini.

La restriction sur le rang a pu être partiellement levée.

Théorème 3 (Corlette [Co], Gromov-Schoen [GS]). *Les résultats précédents s'étendent au cas où X est un espace hyperbolique quaternionien de dimension > 4 ou le plan hyperbolique des octonions.*

Remarque 1 *En revanche, ils ne s'étendent pas aux autres espaces symétriques de rang un (les espaces hyperboliques réels* $\mathbf{R}H^n$ *et complexes* $\mathbf{C}H^n$*) ni aux immeubles de rang un.*

C'est particulièrement frappant pour le plan hyperbolique réel et les immeubles de rang un, qui possèdent des réseaux qui sont des groupes libres. Il existe en toutes dimensions des variétés hyperboliques réelles qui possèdent une involution isométrique dont le lieu des points fixes, une hypersurface totalement géodésique, sépare la variété en deux, [Mi]. Les réseaux de $SO(n,1)$ correspondants admettent une décomposition non triviale en produit amalgamé $\Gamma = A *_C B$. Le centralisateur de $C \subset SO(n,1) \subset SO(n+1,1)$ contient un $SO(2)$ qui ne centralise pas A ni B. Pour $t \in SO(2)$ assez petit, l'homomorphisme $\rho_t : \Gamma \to SO(n+1,1)$ qui est l'identité sur A et la conjugaison par t sur B est Zariski dense, mais ne correspond à aucun homomorphisme $SO(n,1) \to SO(n+1,1)$.

1.3 Arithméticité

Margulis a montré qu'on pouvait déduire d'un théorème de rigidité le fait que les réseaux sont arithmétiques, [Ma1].

Théorème 4 *Les réseaux irréductibles des groupes de Lie semi-simples* G *autres que* $PO(n,1) = Isom(\mathbf{R}H^n)$ *et* $PU(n,1) = Isom(\mathbf{C}H^n)$ *sont* arithmétiques*, i.e. obtenus (au relèvement à un produit* $G \times L$ *où* L *est compact et à commensurabilité près) comme le groupe des matrices entières dans une représentation linéaire de* G *définie sur* $\mathbf{Q}$*.*

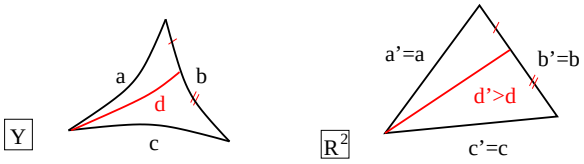
Comme les groupes algébriques sur $\mathbf{Q}$ ont été classifiés (J. Tits, [Ti1]), on aboutit à une classification des réseaux à commensurabilité près. C'est sans doute la conséquence la plus frappante du théorème de superrigidité.

A nouveau, le théorème 4 ne s'étend pas aux groupes de rang 1 restants. Les mêmes variétés hyperboliques à symétrie évoquées au paragraphe 1.2 servent à faire des réseaux non arithmétiques en toutes dimensions, [GP] : M. Gromov et I. Piatetski-Shapiro choisissent soigneusement deux telles variétés, telles que les hypersurfaces séparantes soient isométriques, et recollent les moitiés respectives. Des réseaux non arithmétiques dans $SU(2,1)$ et $SU(3,1)$ ont ete construits par G.D. Mostow, [Mos].

1.4 Espaces $CAT(0)$

Dès 1925, E. Cartan a observé que les espaces symétriques de type non compact satisfont des inégalités métriques là où l'espace euclidien satisfait des identités. Il s'en est servi pour montrer que tout groupe compact d'isométries possède un point fixe, et par conséquent, que les sous-groupes compacts maximaux du groupe des isométries sont deux à deux conjugués.

Définition 2 *Soit Y un espace métrique géodésique. Etant donné un triangle de côtés a, b et c dans Y, on construit le triangle de même côtés $a' = a$, $b' = b$ et $c' = c$ dans le plan euclidien. A un point u du côté b correspond un point u' qui divise le côté b' dans les mêmes proportions. On note d (resp. d') la distance de u (resp. u') au sommet opposé. On dit que Y est $CAT(0)$ si pour tout triangle, $d' \geq d$.*



L'observation de Cartan entraîne que les espaces symétriques de type non compact sont $CAT(0)$. De même, les arbres, les immeubles euclidiens sont géodésiques et $CAT(0)$, voir [BH].

Pour une variété riemannienne, être $CAT(0)$ est équivalent à être simplement connexe et à courbure sectionnelle négative ou nulle. Un produit d'espaces $CAT(0)$ est $CAT(0)$.

1.5 Généralisation

On peut baptiser superrigidité géométrique le programme suivant.

Question. Soit X un espace métrique. Trouver des conditions sur X pour que pour tout groupe discret Γ d'isométries de X, de covolume fini, toute action isométrique de Γ sur un espace $CAT(0)$ géodésique et complet Y ou bien possède un point fixe, ou bien laisse stable un sous-ensemble convexe de Y pluriisométrique à X.

Exemple 3 *Un théorème classique de V. Schroeder, [Sch], faisant suite à [GW], [LY], affirme que les groupes abéliens libres possèdent cette propriété de superrigidité géométrique, au moins pour les actions sur les variétés riemanniennes.*

Exemple 4 *Un résultat de N. Monod, [Mon], étendu par T. Gelander, A. Karlsson et G.A. Margulis, [GKM], prouve la superrigidité, sous une hypothèse de non évanescence, pour les réseaux uniformes irréductibles des produits de groupes localement compacts.*

Voici le type d'applications envisagées.

- Expliquer en quoi les réseaux de $PU(n,1)$ ne sont pas superrigides.
- Etudier les représentations de dimension infinie des réseaux.
- Etudier les actions sur des variétés compactes, au moyen de l'action induite sur un espace auxiliaire, comme l'espace des métriques riemanniennes mesurables sur la variété.
- Prouver que certains groupes ne sont pas *linéaires*, i.e. isomorphes à des groupes de matrices.

Pour ces applications, on renvoie au survol [P1], bien qu'il date un peu, et au texte de J. Maubon dans ce volume. Pour compléter ces survols, voir les trois références récentes [Kl], [Mon], [GKM].

Dans ces notes, on s'intéresse spécialement à la dernière, plus récente.

1.6 Groupes de type de représentation fini

Il existe des groupes de présentation finie qui ne possèdent aucune représentation linéaire de dimension finie non triviale (par exemple, les groupes infinis simples, mais il y en a d'autres, voir [Bas]). A mi-chemin entre ce phénomène et la non-linéarité (absence de représentations linéaire de dimension finie fidèles), Hyman Bass a introduit la notion suivante.

Définition 5 (H. Bass, [Bas]). *On dit qu'un groupe* Γ *a un* type de représentation fini *si toute représentation linéaire de dimension finie de* Γ *a une image finie, i.e. factorise par un quotient fini de* Γ.

Le but de ces notes est d'expliquer comment une méthode, celle des applications harmoniques, inaugurée par J. Eells et J. Simons en 1964, mise en oeuvre dans le contexte de la superrigidité par Y.T. Siu en 1980, peut permettre de prouver qu'un groupe est de type de représentation fini.

Je suis reconnaissant à M. Gromov, F. Haglund, M. Pichot et L. Silberman pour l'aide qu'ils m'ont apportée lors de la rédaction de ce texte. Celui-ci doit aussi beaucoup aux commentaires du referee.

2 Superrigidité et finitude des représentations

Voyons comment déduire la finitude des représentations d'une forme de superrigidité. Il s'agit d'un argument classique, dont on trouve les éléments dans [Ti2], [Bas], [Ma1].

Définition 6 *On dit qu'un groupe Γ possède la propriété FSI si toute action isométrique de Γ sur un espace symétrique sans facteur compact ou un immeuble euclidien associé à $Sl(n)$ sur un corps local non archimédien possède un point fixe.*

Noter que l'espace euclidien est symétrique.

Proposition 7 *Soit Γ un groupe de type fini. Si Γ possède la propriété FSI, alors Γ est de type de représentation fini.*

La preuve de la proposition 7 occupe le reste de cette section. Voici un schéma de la preuve.

Soit Γ un groupe qui possède la propriété FSI. Etant donnée une représentation linéaire indécomposable de dimension finie, i.e. un homomorphisme $h : \Gamma \to Gl(n, \mathbf{C})$, on montre successivement que

- h est localement rigide, i.e. un homomorphisme $h' : \Gamma \to Gl(n, \mathbf{C})$ suffisamment voisin de h est conjugué à h ;
- à conjugaison près, h est à valeurs dans $Gl(n, \bar{\mathbf{Q}})$;
- après extension des scalaires et restriction à un sous-groupe d'indice fini de Γ, on obtient un homomorphisme $\tilde{h}$ à valeurs dans $Gl(nd, \mathbf{Z})$;
- $\tilde{h}$ est à valeurs dans un sous-groupe compact de $Gl(nd, \mathbf{C})$.

Il en résulte que $h(\Gamma)$ est fini.

2.1 Cohomologie

Lemme 8 *Soit ρ une représentation unitaire d'un groupe Γ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\rho$. Il y a une bijection entre l'ensemble des actions isométriques affines de Γ sur $\mathcal{H}_\rho$ (à conjugaison près par une translation), de partie linéaire ρ, et l'espace de cohomologie $H^1(\Gamma, \rho)$. La classe associée à une action s'annule si et seulement si l'action possède un point fixe.*

Preuve. On suppose donnée une action isométrique affine de Γ sur $\mathcal{H}_\rho$, de partie linéaire ρ. Etant donné un point $v_0 \in \mathcal{H}_\rho$, on pose, pour $g \in \Gamma$, $\eta_0(g) = gv_0 - v_0$. Alors η_0 est un 1-cocycle sur Γ à valeurs dans $\mathcal{H}_\rho$. Sa

classe de cohomologie ne dépend pas du choix de v_0. En fait, chaque cocycle η_1 cohomologue à η_0 correspond à un autre choix v_1 du point base. Par conséquent, si l'action possède un point fixe, η est cohomologue à zéro et réciproquement.

Si une seconde action $(g, v) \mapsto g \cdot v$ donne le même cocycle, alors $gv_0 - v_0 = \eta(g) = g \cdot v_0 - v_0$, donc $gv_0 = g \cdot v_0$, et les deux actions, qui ont même partie linéaire, coïncident.

Inversement, soit η un 1-cocycle sur Γ à valeurs dans le Γ-module $\mathcal{H}_\rho$. On construit une action (à gauche) isométrique affine de Γ sur $\mathcal{H}_\rho$ en posant, pour $v \in \mathcal{H}_\rho$ et $g \in \Gamma$,

$$gv = \rho(g)(v) + \eta(g)$$

Le cocycle η_0 qui lui est associé, lorsqu'on choisit comme point base $v_0 = 0$, est η, par construction. ■

On conclut que, pour un groupe ayant la propriété FSI, $H^1(\Gamma, \rho) = 0$ pour toute représentation unitaire ρ de dimension finie.

Lorsque ρ est la représentation triviale, on trouve que $H^1(\Gamma, \mathbf{C}) = 0$. En particulier, tout homomorphisme de Γ dans $\mathbf{C}$ est trivial. Aussi, l'abélianisé $\Gamma^{ab} = [\Gamma, \Gamma]$ est fini.

2.2 Caractères

Si Γ est un groupe de type fini ayant la propriété FSI, alors tout homomorphisme $h : \Gamma \to Gl(1, \mathbf{C})$ est d'image finie. En effet, un tel homomorphisme factorise par l'abélianisé Γ^{ab}. On conclut que pour tout homomorphisme $h : \Gamma \to Gl(n, \mathbf{C})$, il existe un sous-groupe Γ' d'indice fini dans Γ tel que $h(\Gamma') \subset Sl(n, \mathbf{C})$.

Dans la suite, on fera comme si $\Gamma' = \Gamma$.

2.3 Unitarisabilité

Soit $h : \Gamma \to Sl(n, \mathbf{C})$ un homomorphisme. On fait agir Γ via h sur l'espace symétrique $Sl(n, \mathbf{C})/SU(n)$. Par FSI, il existe un point fixe, c'est un sous-groupe compact conjugué de $SU(n)$ qui contient $h(\Gamma)$. Autrement dit, h est conjuguée à une représentation unitaire.

Le lemme 8 s'applique donc à toutes les représentations linéaires de dimension finie de Γ.

2.4 Rigidité locale

On s'intéresse à l'espace $Rep = Hom(\Gamma, Gl(n, \mathbf{C}))/Gl(n, \mathbf{C})$ des classes d'équivalence de représentations unitaires de Γ. Plus précisément, à sa structure locale au voisinage d'une représentation h. Notons $C(h)$ le centralisateur de $h(\Gamma)$ dans $Gl(n, \mathbf{C})$. Depuis A. Weil [W2], on sait construire dans un produit de copies de $Gl(n, \mathbf{C})$ une sous-variété analytique $C(h)$-invariante $PreRep$ dont l'espace tangent s'identifie à $H^1(\Gamma, \rho)$ où $\rho = Ad \circ h$, et une application $C(h)$-équivariante $\zeta : Prerep \to H^2(\Gamma, \rho)$ telles que Rep s'identifie au quotient par $C(h)$ du sous-ensemble analytique $C(h)$-invariant $\zeta^{-1}(0)$ de $PreRep$ (le couple $(Prerep, \zeta)$ s'appelle parfois modèle de Kuranishi, en référence à [Ku]). L'annulation de $H^1(\Gamma, \rho)$ entraîne donc que la classe d'équivalence de h est un point isolé de Rep.

Démontrons directement un cas particulier de ce théorème. L'argument contourne l'obstacle du passage au quotient, qui donne parfois des espaces non séparés.

Lemme 9 *Soit Γ un groupe de type fini. Soit H un groupe de Lie. Soit $h : \Gamma \to H$ un homomorphisme dont l'image a un centralisateur discret dans H. On suppose que $H^1(\Gamma, Ad \circ h) = 0$. Alors tout homomorphisme $h' : \Gamma \to H$ suffisamment proche de h est conjugué à h.*

Preuve. On considère $Hom(\Gamma, H)$ comme le sous-ensemble de H^Γ défini par l'équation $\Phi(f) = 1$ où $\Phi : H^\Gamma \to H^{\Gamma \times \Gamma}$, est définie comme suit. Etant donnée une fonction $f : \Gamma \to H$, $\Phi(f)$ est la fonction sur $\Gamma \times \Gamma$ définie par

$$\Phi(f)(g, g') = f(gg')^{-1} f(g) f(g').$$

En fait, par noethérianité, un nombre fini d'équations suffisent.

Ramenons tous les vecteurs tangents à H dans l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ par translation à gauche. Alors l'espace tangent en h à H^Γ s'identifie aux fonctions de Γ dans $\mathcal{H}$, i.e. aux 1-cochaînes sur Γ à valeurs dans $\mathcal{H}$, et l'espace tangent en 1 à $H^{\Gamma \times \Gamma}$ aux 2-cochaînes sur Γ à valeurs dans $\mathcal{H}$. La différentielle de Φ en h s'identifie (au signe près) au cobord relatif à la représentation $\rho = Ad \circ h$: si $\eta \in C^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho)$, $h\eta \in T_h H^\Gamma$ et

$$D_h \Phi(h\eta) = -d\eta \in C^2(\Gamma, \mathcal{H}_\rho).$$

L'action de H par conjugaison sur H^Γ définit une application $\Psi_h : H \to H^\Gamma$ comme suit. Etant donné $k \in H$, $\Psi_h(k)$ est la fonction sur Γ définie par

$$\Psi_h(k)(g) = Ad_k(h(g)) = k^{-1} h(g) k.$$

Comme h est un homomorphisme, $\Phi \circ \Psi_h \equiv 1$. Identifions $T_1 H = \mathcal{H}$ à l'espace des 0-cochaînes à valeurs dans $\mathcal{H}$. Alors la différentielle de Ψ_h en 1 s'identifie (au signe près) au cobord : si $v \in \mathcal{H}$, qu'on voit comme une 0-cochaîne c,

$$D_1 \Psi_h(v) = -dc \in C^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho).$$

On remarque que $\ker(d) = H^0(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) = \{v \in \mathcal{H} \,|\forall g,\ Ad_{h(g)}(v) = v\}$ est l'algèbre de Lie du centralisateur de $h(\Gamma)$ dans H. Par hypothèse, cette algèbre de Lie est nulle. On a supposé aussi que $H^1(\Gamma, \mathcal{H}_\rho) = 0$. Par conséquent, $D_1 \Psi_h$ est injective, et son image coïncide avec le noyau de $D_h \Phi$. Cette propriété est ouverte sur $Hom(\Gamma, H)$. Elle reste donc vraie pour h' proche de h. Autrement dit, Φ est de rang constant sur $\Phi^{-1}(1)$ au voisinage de h. Par conséquent, $\Phi^{-1}(1)$ est une variété au voisinage de h, dont la dimension est égale à celle de l'orbite $\Psi_h(H)$, qu'elle contient. On conclut que, dans un voisinage de h, $Hom(\Gamma, H)$ coïncide avec l'orbite de h.

Dans le paragraphe précédent, on a fait comme si H^Γ et $H^{\Gamma \times \Gamma}$ étaient des variétés de dimension finie. Voici pourquoi on peut le faire. Soit S un système générateur fini symétrique de Γ. Choisissons, pour chaque élément $g \in \Gamma$, un mot $w(g)$ dans l'alphabet S qui représente g. Toute fonction $f : S \to H$ (resp. $S \to \mathcal{H}$) se prolonge en une fonction $w(f) : \Gamma \to H$ (resp. $\Gamma \to \mathcal{H}$), définie par $w(f)(g) = f(w(g))$. Si h est un homomorphisme (resp. un 1-cocycle), il est uniquement déterminé par sa restriction à S : $h = w(h_{|S})$. De plus, comme $Hom(\Gamma, H)$ est un ensemble analytique, pour vérifier qu'une fonction f est un homomorphisme (resp. qu'une 1-cochaîne η est un cocycle), il suffit de vérifier l'équation $f(gg') = f(g)f(g')$ (resp. $\eta(gg') = Ad_{h(g')}(\eta(g)) + \eta(g')$) pour un sous-ensemble fini $R \subset \Gamma \times \Gamma$ de couples (g, g'). On peut donc remplacer $\Phi : H^\Gamma \to H^{\Gamma \times \Gamma}$ par $\Phi_{S,R} = \pi_R \circ \Phi \circ w : H^S \to H^R$. ■

2.5 Algébricité

Soit Γ un groupe de type fini possédant la propriété FSI. Soit h une représentation indécomposable de dimension finie de Γ. Par unitarisabilité, h est irréductible. Par le lemme de Schur, le centralisateur de $h(\Gamma)$ dans le groupe spécial linéaire est réduit aux racines n-èmes de l'unité. D'après le lemme 8, $H^1(\Gamma, Ad \circ h) = 0$. Par rigidité locale, il existe un voisinage V de h dans $Hom(\Gamma, Sl(n, \mathbf{C}))$ tel que toute représentation contenue dans V soit conjuguée à h. Comme $Hom(\Gamma, Sl(n, \mathbf{C}))$ est une sous-variété algébrique affine définie sur $\mathbf{Q}$ de $Gl(n, \mathbf{C})^S$, V contient un point défini sur $\bar{\mathbf{Q}}$. C'est un

homomorphisme conjugué de h dont l'image est contenue dans $Sl(n, \bar{\mathbf{Q}})$. On continue de le noter h.

2.6 Intégralité

Comme Γ est de type fini, $h(\Gamma)$ est contenu dans $Sl(n, F)$ où F est une extension de $\mathbf{Q}$ de degré fini d. Chaque élément de F agit par multiplication sur F, d'où un plongement $F \to End_{\mathbf{Q}}(F)$, qui induit un plongement $Sl(n, F) \to End_F(F^n) \to End_{End_{\mathbf{Q}}(F)}(F^n) \simeq End_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}^{nd})$, appelé *extension des scalaires*. On note $\tilde{h}$ sa composée avec h. L'image de $\tilde{h}$ est contenue dans $Sl(nd, \mathbf{Q})$.

Soit p un nombre premier. On fait agir Γ via $\tilde{h}$ sur l'immeuble de $Sl(nd, \mathbf{Q}_p)$. Par superrigidité, il existe un point fixe, donc $\tilde{h}(\Gamma)$ est contenu dans un groupe compact, commensurable à $Sl(nd, \mathbf{Z}_p)$. Autrement dit, il existe un sous-groupe $\Gamma_p \subset \Gamma$ d'indice fini tel que $\tilde{h}(\Gamma_p) \subset Sl(nd, \mathbf{Z}_p)$.

L'étape précédente, appliquée à tous les diviseurs premiers des dénominateurs des coefficients des matrices $\tilde{h}(s)$, $s \in S$, donne un sous-groupe $\Gamma' \subset \Gamma$ d'indice fini tel que $\tilde{h}(\Gamma') \subset Sl(nd, \mathbf{Z})$.

On fait agir Γ via $\tilde{h}$ sur l'espace symétrique $Sl(nd, \mathbf{C})/SU(nd)$. Par FSI, il existe un point fixe. Autrement dit, $\tilde{h}(\Gamma)$ est contenu dans un sous-groupe compact K, conjugué de $SU(nd)$.

On conclut que $\tilde{h}(\Gamma') \subset K \cap Sl(nd, \mathbf{Z})$ est discret et relativement compact donc fini. Il en résulte que $h(\Gamma)$ est fini. Le cas général se ramène immédiatement au cas indécomposable.

2.7 Groupes hyperboliques de type de représentation fini

La superrigidité peut permettre de montrer que certains groupes ont un type de représentation fini. L'exemple suivant est dû à M. Kapovich, voir l'appendice de [Kap]. Soit $\Gamma \subset G$ un réseau d'un des groupes de Lie simples de rang 1 qui sont superrigides, i.e. $G = Sp(n, 1)$, $n \geq 2$, ou F_4^{-20}. Comme Γ est hyperbolique au sens de Gromov, il admet des quotients infinis $\Gamma' = \Gamma/N$. Montrons que Γ' possède la propriété FSI. Toute action isométrique de Γ' sur un espace symétrique ou un immeuble de dimension finie Y induit une action de Γ. D'après le Théorème 3, si cette action n'a pas de point fixe, elle laisse stable un sous-ensemble convexe $C \subset Y$ isométrique à un espace symétrique

de rang un X, et l'action sur C se prolonge à un quotient de G. Comme G est simple, G agit librement sur C, ce qui contredit le fait que le sous-groupe N agit trivialement. On conclut que Γ' fixe un point dans Y. Cela prouve que Γ' a la propriété FSI, et donc un type de représentation fini.

En développant cet exemple, T. Kondo a montré que, dans l'espace des groupes marqués, il y a un G_δ-dense de groupes de type fini qui sont hyperboliques et ont un type de représentation fini, voir [Ko].

3 Applications harmoniques équivariantes

Soit Γ un groupe qui agit isométriquement sur des espaces X et Y. Un point fixe de l'action, c'est la même chose qu'une application constante et équivariante de X dans Y. On va donc chercher une application constante parmi les applications équivariantes f de X dans Y. Pour cela, on cherche à minimiser la "variation quadratique" de f, communément appelée *énergie*. Les applications qui minimisent l'énergie sont appelées *harmoniques*.

Cette stratégie remonte explicitement à J. Eells et J. Sampson en 1964. On peut même remonter plus loin. On a vu en 8 qu'une action isométrique affine de Γ sur un espace de Hilbert revient à se donner une représentation unitaire ρ ainsi qu'une classe de cohomologie dans le $H^1(\Gamma, \rho)$. Dans le cas où l'espace de Hilbert est de dimension 1 et la représentation triviale, une application équivariante, à une constante près, c'est la même chose qu'une 1-forme différentielle fermée représentant la classe de cohomologie. L'idée de minimiser la norme L^2 dans une classe de cohomologie est à la base de la théorie de Hodge, née dans les années 30. Ce point de vue est développé dans [P1].

3.1 Applications entre variétés

Soit Z une variété riemannienne compacte, X son revêtement universel, Y une variété riemannienne contractile, $f : X \to Y$ une application équivariante. Alors la différentielle df s'interprète comme une 1-forme différentielle sur Z à valeurs dans un fibré vectoriel E obtenu par passage au quotient du fibré induit f^*TY. La métrique et la connexion de Levi-Civita de Y induisent une métrique et une connexion métrique D sur le fibré E, et donc un opérateur d^D sur les formes différentielles à valeurs dans E. En ce sens, df est fermée,

$$d^D df = 0.$$

On définit l'*énergie* de f comme la moitié de la norme L^2 de df,

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_M |df|^2.$$

Les points critiques de l'énergie, appelés *applications harmoniques*, satisfont l'équation d'Euler-Lagrange

$$(d^D)^* df = 0,$$

où $(d^D)^*$ est l'adjoint du $d^D = D$ sur les 0-formes à valeurs dans E. On a $(d^D)^* = tr \circ D$. Remarquer que les applications totalement géodésiques $X \to Y$ sont caractérisées par $Ddf = 0$, et sont donc harmoniques. La superrigidité relativement à une classe de variétés riemanniennes se ramène donc

1. à un théorème d'existence d'applications harmoniques équivariantes,
2. et un théorème d'annulation qui garantit que

$$(d^D)^* df = 0 \Rightarrow Ddf = 0.$$

3.2 Résultats utilisant des applications harmoniques définies sur des variétés

Ce programme en deux temps a été inauguré par J. Eells et J. Sampson en 1964. Dans [ES], ils montrent l'existence d'applications harmoniques équivariantes dans le cas où Y est à courbure sectionnelle négative ou nulle et ou $\Gamma = \pi_1(Z)$ agit librement sur Y avec quotient compact. De plus, une version à valeurs vectorielles de la formule de Bochner donne

$$(d^D)^* df = 0 \Rightarrow Ddf = 0.$$

pourvu que la courbure de Ricci de Z soit positive ou nulle.

Cela entraîne la superrigidité (relativement à la classe des variétés riemanniennes à courbure sectionnelle négative ou nulle) des groupes abéliens de type fini.

En 1980, Y.T. Siu a utilisé une version vectorielle d'une formule spécifique aux variétés kählériennes, pour analyser les applications harmoniques définies sur des variétés kählériennes, sans hypothèse de signe de courbure, à valeurs

dans des variétés complexes. J. Sampson a observé qu'il n'était pas indispensable que l'espace d'arrivée soit complexe. A sa suite, K. Corlette a découvert en 1990 un analogue quaternion-kählérien de la formule de Siu-Sampson, et prouvé la superrigidité (relativement à la classe des variétés riemanniennes à opérateur de courbure négatif ou nul) des réseaux de $H^n_{\mathbf{H}}$ et $H^2_{\mathbf{O}}$.

En 1994, M. Gromov et R. Schoen ont pu appliquer la formule de Corlette aux applications harmoniques à valeurs dans un immeuble. Pour cela, ils démontrent un résultat de régularité très fort : hors d'un lieu singulier de codimension au moins 2, l'application factorise par un plongement isométrique d'un espace euclidien dans l'immeuble. Combiné avec celui de Corlette, ce résultat constitue le théorème 3.

En 1993, en englobant la formule de Corlette dans une famille de formules dues à Y. Matsushima, N. Mok, Y.T. Siu and S.K. Yeung ont prouvé la superrigidité des réseaux irréductibles uniformes de rang supérieur (relativement à la classe des variétés riemanniennes à courbure sectionnelle négative ou nulle).

Si l'existence d'applications harmoniques équivariantes d'une variété vers un espace CAT(0) général, sous diverses hypothèses de réductivité (ou stabilité ou non évanescence) est un problème résolu, voir [Jo], [KS], la difficulté de leur appliquer un théorème d'annulation limite actuellement l'extension de la méthode.

4 Applications harmoniques combinatoires

Ici, on décrit, en suivant M.T. Wang, [Wa1], [Wa2] et H. Izeki et S. Nayatani [IN], une version discrète, élémentaire, de la notion d'application harmonique. Dans le cas particulier des actions isométriques affines sur des espaces de Hilbert, cette version discrète a, elle aussi, un glorieux passé (H. Garland, 1972, dans un langage cohomologique).

4.1 Energie et applications harmoniques

Désormais, on suppose que l'espace X est le revêtement universel d'un complexe simplicial fini dont Γ est le groupe fondamental. On va définir une énergie pour les applications équivariantes de X

Définition 10 *Soit C un complexe simplicial. Un* poids *sur C est une fonction positive m sur les simplexes telle que, pour tout k-simplexe σ, $m(\sigma)$ est égale à la somme des poids des $k+1$-simplexes qui contiennent σ,*

$$m(\sigma) = \sum_{\sigma \subset \tau} m(\tau).$$

Exemple 11 *Si C est de dimension 2, on pose $m = 1$ sur les 2-simplexes, et on propage aux 1-simplexes puis aux 0-simplexes en respectant la propriété de poids, et on normalise par le poids total.*

Définition 12 *Soit (C, m) un complexe simplicial pondéré fini. On note C^0 l'ensemble de ses sommets, C^1 l'ensemble de ses arêtes. Soit Y un espace métrique. Sur l'espace des fonctions de C dans Y, on met la distance "produit pondéré"*

$$d(g, g') = (\sum_{c \in C^0} m(c) d(g(c), g'(c))^2)^{1/2}.$$

Définition 13 *Etant donnés un complexe simplicial pondéré fini (C, m) et une application $f : C^0 \to Y$ à valeurs dans un espace métrique, l'*énergie *de f est*

$$\begin{aligned} E(f) &= \sum_{e \in C^1} m(e) d(f(ori(e)), f(ext(e)))^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{c \in C^0} \sum_{c' \sim c} m(c, c') d(f(c), f(c'))^2, \end{aligned}$$

où $c \sim c'$ signifie que c et c' sont les extrémités d'une même arête.

Voici une version équivariante des définitions précédentes.

Définition 14 *Soit Z un complexe simplicial fini, de groupe fondamental Γ, soit X son revêtement universel. On se donne un poids m sur Z. Soit Y un espace métrique sur lequel Γ agit isométriquement. Sur l'espace des applications équivariantes $X \to Y$, on met la distance*

$$d(f, f') = (\sum_{z \in Z^0} m(z) d(f(c), f'(c))^2)^{1/2},$$

*où c est un sommet de X au-dessus de z. L'*énergie *de f est*

$$\begin{aligned} E(f) &= \sum_{e\in Z^1} m(e)d(f(ori(\tilde{e})), f(extr(\tilde{e}))^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{z\in Z^0}\sum_{z'\sim z} m(z,z')d(f(c), f(c'))^2, \end{aligned}$$

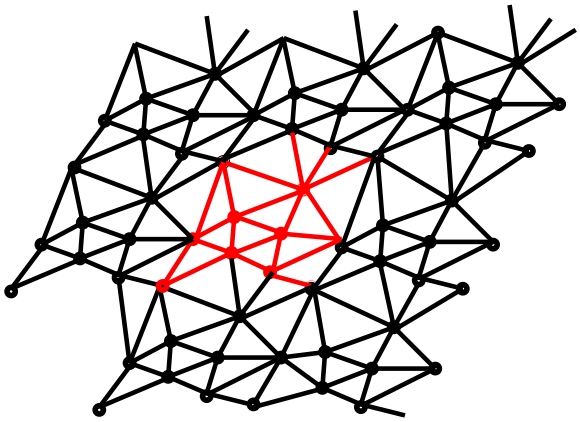
où $\tilde{e}$ (resp. (c,c')) est une arête de X au-dessus de l'arête e (resp. (z,z')) de Z.

Remarque 15 *Si Y est $CAT(0)$, l'espace $Y^{\Gamma\backslash X}$ des applications équivariantes $X \to Y$ est lui-même $CAT(0)$, et l'énergie est une fonction convexe sur $Y^{\Gamma\backslash X}$.*

En effet, $t \mapsto f_t$ est une géodésique parcourue à vitesse constante de $Y^{\Gamma\backslash X}$ si et seulement si pour tout $x \in X$, $t \mapsto f_t(x)$ est une géodésique parcourue à vitesse constante de Y. Comme le caractère CAT(0) de Y s'exprime par une inégalité entre carrés de distances, elle s'intègre en la propriété CAT(0) pour $Y^{\Gamma\backslash X}$. D'autre part, dans un espace $CAT(0)$, étant données deux géodésiques $t \mapsto s(t)$ et $t \mapsto s'(t)$ parcourues à vitesse constante, la fonction $(t,t') \mapsto d(s(t), s'(t'))$ est convexe sur $\mathbf{R}^2$.

Définition 16 *Une application équivariante $f : X \to Y$ est dite* harmonique *si elle minimise localement l'énergie E, i.e. si un petit déplacement équivariant de l'image d'une orbite de sommets ne diminue pas l'énergie.*

Autrement dit, on interprète X comme un arrangement périodique de ressorts, et f comme une déformation périodique des ressorts (voir figure). E représente l'énergie potentielle élastique par maille. Une application f est harmonique si elle représente une position d'équilibre.



4.2 Barycentre, lien et équation des applications harmoniques

Dans l'espace euclidien, le carré u de la distance à un point est une fonction uniformément strictement convexe : le long d'une géodésique $t \mapsto y(t)$ parcourue à vitesse 1, $u(y(t)) - t^2$ est convexe. Par comparaison, cette propriété s'étend aux espaces géodésiques $CAT(0)$. Elle se généralise aux combinaisons à coefficients positifs de carrés de distances à des points, ce qui permet de montrer que ces fonctions atteignent leur minimum.

Lemme 17 *Soit Y un espace métrique $CAT(0)$ complet, soit μ une mesure de probabilité sur Y. Posons, pour $y \in Y$, $u(y) = d(\mu, y)^2 = \int_Y d(z, y)^2 \, d\mu(z)$. Alors*

$$diam(\{u \leq \epsilon^2 + \inf u\}) \leq 2\epsilon.$$

Par conséquent, u atteint son minimum sur Y, en un unique point y_0, et on a, pour tout $y \in Y$,

$$u(y) \geq u(y_0) + d(y, y_0)^2.$$

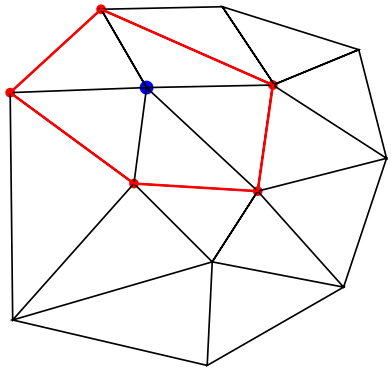
Preuve. Soit $t \mapsto s(t)$, $t \in [-L, L]$, un segment géodésique de vitesse 1, reliant deux points où $u \leq \epsilon^2 + \inf u$. La fonction $t \mapsto v(t) = u(t) - \inf u - t^2$ est convexe, donc $0 \leq v(0) \leq \frac{1}{2}(v(-L) + v(L)) \leq \epsilon^2 - L^2$, donc $L \leq \epsilon$. ■

Etant donné un complexe simplicial pondéré fini (C, m) et une application $g : C^0 \to Y$, on applique ce lemme à la mesure image par g de la mesure de probabilité m.

Définition 18 *Soit (C, m) un complexe simplicial pondéré fini, Y un espace métrique $CAT(0)$ complet, $g : C^0 \to Y$ une application. L'unique point de Y où la fonction $y \mapsto d(g, y)^2 = d(g_*(m/m(\emptyset)), y)$ atteint son minimum est appelé* barycentre *de g.*

Exemple 19 *Lorsque Y est un espace de Hilbert, le barycentre métrique coïncide avec le barycentre affine $bar(g) = \frac{1}{m(\emptyset)} \sum_c m(c)g(c)$.*

Etant donné un complexe simplicial pondéré (X, m), l'*étoile* d'un sommet x est la réunion des simplexes de X qui contiennent x, et le *lien* de x est la réunion des simplexes de l'étoile qui ne contiennent pas x.



Le lien de x hérite d'une pondération : si σ est un simplexe du lien, $x \cup \sigma$ est un simplexe de X, et on pose $m_{lien}(\sigma) = m(x \cup \sigma)$.

Proposition 20 *Soit (Z, m) un complexe simplicial pondéré fini de groupe fondamental Γ, soit X son revêtement universel. Soit Y un espace métrique $CAT(0)$. Une application équivariante $f : X \to Y$ est harmonique si et seulement si pour tout sommet $x \in X$, $f(x)$ coïncide avec le barycentre de la restriction de f au lien de x,*

$$f(x) = bar(f_{|lien(x)}).$$

Preuve. En effet, si on déplace de façon équivariante l'image de l'orbite d'un sommet x de X, de sorte que $f(x)$ est remplacé par $y \in Y$, l'énergie de f change de

$$\sum_{x' \in lien(x)} m(x, x')(d(f(x'), y)^2 - d(f(x'), f(x))^2).$$

Ce terme est positif ou nul pour tout y si et seulement si $f(x) = bar(f_{|lien(x)})$. ■

Exemple 21 *Lorsque $Y = \mathbf{R}$, on peut interpréter X comme un circuit électrique, une fonction f comme le potentiel électrique aux sommets du circuit, le nombre $m(x, x')$ comme la conductance de la branche reliant x à x', $m(x, x')(f(x') - f(x))$ comme le courant qui passe dans cette branche. La loi de Kirchhoff énonce alors que f est harmonique.*

4.3 Flot du gradient

D'après U. Mayer, [May], on peut définir le gradient d'une fonction convexe continue sur un espace $CAT(0)$ complet. Dans le cas de la fonction énergie

sur l'espace des applications équivariantes de X vers un espace $CAT(0)$ complet Y (elle est convexe, voir 15), il est naturel de noter Δf le gradient en f.

Définition 22 (H. Izeki et S. Nayatani, [IN]). *Soit $f : X \to Y$ une application équivariante. Pour $x \in X$, on note $-\Delta f(x) \in T_{f(x)}Y$ le barycentre de la fonction $f_x = \pi \circ f_{|lien(x)}$ définie sur le lien de x, à valeurs dans le cône tangent à Y en $f(x)$. On note $|-\Delta f(x)|$ la distance de $-\Delta f(x)$ au sommet du cône, et*

$$|-\Delta f|^2 = \sum_z m(z)|-\Delta f(x)|^2.$$

Remarquer que f est harmonique si et seulement si $|-\Delta f| = 0$.

U. Mayer a construit un flot de gradient pour toute fonction convexe continue sur un espace $CAT(0)$ complet. Cela s'applique à l'énergie sur l'espace des applications équivariantes. On dispose donc, pour toute application initiale f_0, d'une ligne de gradient $t \mapsto f_t$, solution en un sens faible de l'équation différentielle

$$\frac{df_t}{dt} = -grad_{f_t}E = 2(-\Delta f_t).$$

Alors

$$\frac{d}{dt}E(f_t) = -|grad_{f_t}E|^2 = -4|-\Delta f_t|^2.$$

Voici une autre conséquence de la convexité de l'énergie.

Lemme 23 *Soient f, $g : X \to Y$ des applications équivariantes. Alors*

$$E(f) - E(g) \leq |-\Delta f|d(f,g).$$

Preuve. Pour chaque $x \in X$, notons $t \mapsto g_t(x)$, $t \in [0,1]$, la géodésique de vitesse constante reliant $f(x)$ à $g(x)$. Alors $t \mapsto g_t$ est une géodésique parcourue à vitesse constante égale à $d(f,g)$ dans l'espace des applications équivariantes. La fonction $t \mapsto E(g_t)$ est convexe, et sa dérivée en $t = 0$ est comprise entre $-|-\Delta f(x)|d(f,g)$ et $|-\Delta f(x)|d(f,g)$, donc

$$E(g) = E(g_1) \geq E(f) - |-\Delta f(x)|d(f,g). \blacksquare$$

4.4 Ultralimites

On ne peut pas toujours prouver la convergence du flot de Mayer vers une application constante. Néanmoins, une sous-suite converge vers une application harmonique, éventuellement à valeurs dans un autre espace, obtenu comme limite faible de dilatés de Y. Cette observation est due initialement à N. Mok, dans le cas où Y est un espace de Hilbert, [Mok] (ce résultat a été retrouvé indépendamment par Y. Shalom, [Sh]).

Dans le cas où Y n'est pas linéaire, la notion pertinente est celle d'ultralimite, classique en théorie des modèles, et popularisée par M. Gromov dans [Gr1].

Soit Y_j une suite d'espaces métriques. On se donne une suite de points $y_j \in Y_j$ et un ultrafiltre non principal ω sur $\mathbf{N}$. On considère l'ensemble des suites $(x_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de points $x_j \in Y_j$ telles que la distance $d(x_j, y_j)$ reste bornée. On le munit de la semi-distance $d((x_j),(x'_j)) = \lim_\omega d(x_j, x'_j)$. On quotiente par la relation $(x_j) \sim (x'_j)$ si $d((x_j),(x'_j)) = 0$. L'espace métrique obtenu est noté $\lim_\omega(Y_j)$. C'est une *ultralimite* de la suite Y_j. Remarquer que lorsque les Y_j sont des espaces géodésiques $CAT(0)$ complets, toute ultralimite des Y_j est géodésique, $CAT(0)$ et complet, voir [Gr1].

Définition 24 *On appelle* cône asymptotique *de* (Y, d) *toute ultralimite d'une suite* $Y_j = (Y, d_j = r_j d, y_j)$ *d'espaces homothétiques de* Y*, avec* $r_j \to +\infty$ *ou* $y_j \to \infty$.

4.5 Existence d'applications harmoniques

Théorème 5 (Enoncé par M. Gromov, [Gr3] paragraphe 3.6, voir aussi H. Iseki, T. Kondo and S. Nayatani, [IKN]). *Soit* Z *un complexe simplicial fini de groupe fondamental* Γ*. Soit* X *son revêtement universel. Soit* Y *un espace métrique géodésique,* $CAT(0)$ *et complet. Soit* ρ *une action isométrique de* Γ *sur* Y*. Alors*

1. *ou bien* ρ *fixe un point ;*
2. *ou bien il existe une application harmonique* ρ*-equivariante* non constante *de* X *dans* Y *;*
3. *ou bien il existe un cône asymptotique* Y_ω *de* Y*, une action isométrique* ρ_ω *de* Γ *sur* Y_ω *et une application harmonique,* ρ_ω*-équivariante et* non constante *de* X *dans* Y_ω.

De plus, s'il existe une constante C telle que pour toute application équivariante f,

$$E(f) \leq C|-\Delta f|^2,$$

alors on est dans le premier cas, ρ fixe un point.

Preuve. Soit $f : X \to Y$ une application équivariante, soit f_t le flot de Mayer.

S'il existe une constante C telle que pour tout t assez grand,

$$E(f_t) \leq C|-\Delta f_t|^2,$$

on montre que f_t converge vers une application constante. D'abord,

$$\frac{d}{dt}E(f_t) \leq -4C^{-1}E(f_t),$$

donc l'énergie décroît exponentiellement.

Comme

$$|\frac{df_t}{dt}|^2 = -|grad_{f_t}E|^2 = -\frac{d}{dt}E(f_t),$$

l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} |\frac{df_t}{dt}|^2 E(f_t)^{-1/2}\, dt = 2E(f_0)^{1/2}$$

est finie, d'où

$$\int_0^{+\infty} |\frac{df_t}{dt}|\, dt \quad \leq \quad (\int_0^{+\infty} |\frac{df_t}{dt}|^2 E(f_t)^{-1/2}\, dt)^{1/2} (\int_0^{+\infty} E(f_t)^{1/2}\, dt)^{1/2} < \infty.$$

Autrement dit, la courbe $t \mapsto f_t$ est de longueur finie. On conclut que f_t converge vers une application constante, et ρ fixe un point.

Sinon, il existe une suite t_j tendant vers $+\infty$ telle que $\dfrac{|-\Delta f_{t_j}|^2}{E(f_{t_j})}$ tend vers 0. Choisissons un ultrafiltre non principal ω. Fixons une origine $o \in X$. Posons $y_j = f_{t_j}(o)$, $r_j = \dfrac{1}{\sqrt{E(f_{t_j})}}$, $Y_j = (Y, d_j = r_j d, y_j)$. Vue comme une application $X \to Y_j$, l'énergie de f_{t_j} vaut 1. Par conséquent, pour tous x,

$x' \in X$, $d_j(f_{t_j}(x), f_{t_j}(x'))$ est borné. La suite de points $f_{t_j}(x)$ représente donc un point, noté $f_\omega(x)$, de Y_ω. Si $\gamma \in \Gamma$, et si $w_\omega \in Y_\omega$ est représenté par une suite (w_j) située à distance bornée de y_j, alors

$$d_j(\gamma w_j, y_j) = d_j(w_j, f_{t_j}(\gamma^{-1}o)) \leq d_j(w_j, y_j) + d_j(f_{t_j}(o), f_{t_j}(\gamma^{-1}o))$$

est borné, donc les points γw_j représentent un point de Y_ω noté γw_ω. On définit ainsi l'action ρ_ω de Γ sur Y_ω, et l'application f_ω est ρ_ω-équivariante.

Montrons que f_ω minimise l'énergie. Soit $g_\omega : X \to Y_\omega$ une autre application ρ_ω-équivariante. Pour chaque $z \in Z$, choisissons un représentant $x \in X$ et représentons $g_\omega(x)$ par une suite $g_j(x)$ située à distance bornée de $f_{t_j}(x)$. Prolongeons chaque g_j en une application équivariante $X \to Y_j$. Les distances ℓ^2 $d_j(f_{t_j}, g_j)$ sont bornées. Le lemme 23 donne

$$E_j(f_{t_j}) - E_j(g_j) \leq |-\Delta_j f_{t_j}| d_j(f_{t_j}, g_j).$$

Or le changement de distance sur Y a pour effet que

$$|-\Delta_j f_{t_j}|^2 = \frac{|-\Delta f_{t_j}|^2}{E(f_{t_j})}$$

tend vers 0, donc $E_\omega(f_\omega) - E_\omega(g_\omega) = \lim E_j(f_{t_j}) - E_j(g_j) \leq 0$. Ceci prouve que f_ω est harmonique. Comme $E_\omega(f_\omega) = 1$, f_ω n'est pas constante.

Si les suites r_j et $y - j$ sont bornées, Y_ω est simplement homothétique de Y, et on a trouvé une application harmonique à valeurs dans Y. Sinon, r_j tend vers $+\infty$, et Y_ω est un cône asymptotique de Y. ■

5 Formule de Garland

Il s'agit d'un mécanisme qui force les applications harmoniques à être constantes. Combiné avec le théorème 5, il entraîne immédiatement la propriété de point fixe.

Un invariant va jouer un rôle clé dans cette formule, c'est le *bas du spectre* non linéaire introduit par M.T. Wang dans sa thèse.

5.1 Bas du spectre

Définition 25 *Soit (C, m) un complexe simplicial pondéré, Y un espace métrique $CAT(0)$, $g : C^0 \to Y$ une application non constante. Le* quotient

de Rayleigh *de g est*

$$RQ(g) = \frac{E(g)}{d(g, bar(g))^2}.$$

(La distance g à l'application constante $bar(g)$ est celle définie en 12).

Le bas du spectre *de (C, m) relativement à l'espace Y est la borne inférieure des quotients de Rayleigh des applications non constantes de C^0 dans Y,*

$$\lambda(C, m, Y) = \inf_{g:C^0 \to Y} RQ(g).$$

Exemple 26 *Lorsque $Y = \mathbf{R}$, le bas du spectre coïncide avec la plus petite valeur propre non nulle du laplacien discret*

$$g \mapsto \Delta g, \quad \text{où} \quad \Delta g(c) = \sum_{c' \sim c} m(c, c')(g(c) - g(c')).$$

On donnera en section 6 des exemples de bas de spectres de graphes.

Exemple 27 $\lambda(C, m, Y_1 \times Y_2) = \min\{\lambda(C, m, Y_1), \lambda(C, m, Y_2)\}$.

En effet, la distance sur le produit est la racine carrée de la somme des carrés des distances sur les facteurs. Une application $g : C^0 \to Y_1 \times Y_2$ s'écrit $g = (g_1, g_2)$, le barycentre $bar(g) = (bar(g_1), bar(g_2))$, $RQ(g) = RQ(g_1)$ (resp. $RQ(g_2)$) si g_2 (resp. g_1) est constante, et est un barycentre de $RQ(g_1)$ et de $RQ(g_2)$ sinon.

De même, si Y est un espace de Hilbert, alors pour tout complexe simplicial pondéré fini (C, m), $\lambda(C, m, Y) = \lambda(C, m, \mathbf{R})$.

Lemme 28 *Soient Y_j des espaces géodésiques $CAT(0)$ complets. Soit Y une ultralimite des Y_j. Alors Y est géodésique $CAT(0)$ complet, et pour tout graphe pondéré fini (C, m),*

$$\lambda(C, Y) \geq \limsup_{j \to \infty} \lambda(C, Y_j).$$

Preuve. Soit ω un ultrafiltre tel que $(Y, y) = \lim_\omega (Y_j, y_j)$. Etant donnée $g : C \to Y$, choisissons pour chacun des points $g(c) \in Y$ une suite qui le représente. On la note $(g_j(c))_{j \in \mathbf{N}}$. Alors $\lim_\omega E(g_j) = E(g)$. La suite $(bar(g_j))$

restant à distance bornée de l'image de g_j, elle représente un point $z \in Y$, et $\lim_\omega d(g_j, bar(g_j))^2 = d(g,z)^2 \geq d(g, bar(g))^2$, donc

$$\lim_\omega RQ(g_j) \leq RQ(g).$$

On conclut que

$$\limsup_{j\to\infty} \lambda(C, Y_j) \leq \lambda(C, Y). \blacksquare$$

5.2 Formule de Garland

Cette formule a été découverte initialement par H. Garland, [Ga] : en fait, il s'agit d'une famille de formules qui s'appliquent aux cocycles harmoniques des quotients compacts des immeubles euclidiens, dans tous les degrés. A. Borel [Bo2] a su généraliser la première d'entre elles à des complexes simpliciaux quelconques. A. Zuk [Z1] a été le premier à en tirer partie en dimension infinie. La version non linéaire, due à Wang ([Wa1] pour les variétés, [Wa2] en général), a été retrouvée par M. Gromov.

Théorème 6 *Soit Z un complexe simplicial fini de groupe fondamental Γ. Soit X son revêtement universel. Soit Y un espace métrique géodésique, $CAT(0)$ et complet. Soit $f : X \to Y$ une application équivariante. Pour $x \in X$, on note*

$$ED(f,x) = \frac{1}{2} d(f_{|lien(x)}, f(x))^2,$$

de sorte que

$$E(f) = \sum_{z\in Z} ED(f,x).$$

Alors, si f est harmonique,

$$E(f) = 2\sum_{z\in Z} RQ(f_{|lien(x)}) ED(f,x).$$

En particulier, si pour tout $z \in Z$ et tout $y \in Y$, $\lambda(lien(z), T_yY) > 1/2$, toute application harmonique équivariante $X \to Y$ est constante.

Preuve. On convient de poser $m(z,z') = 0$ si z et z' ne sont pas les extrémités d'une même arête. De même, $m(z,z',z'') = 0$ si z, z' et z'' ne sont pas les sommets d'une même face. On continue de noter (x',x'') (resp. (x,x',x'')) un relèvement quelconque à X d'une arête (z,z') (resp. d'une face (z,z',z'')). En utilisant la propriété de poids, il vient

$$\begin{aligned} E(f) &= \frac{1}{2}\sum_{z',z''} m(z',z'')|f(x')-f(x'')|^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{z,z',z''} m(z,z',z'')|f(x')-f(x'')|^2 \\ &= \sum_{z} E(f_{|lien(x)}). \end{aligned}$$

D'autre part, pour chaque $x \in X$,

$$\begin{aligned} E(f_{|lien(x)}) &= RQ(f_{|lien(x)})d(f_{|lien(x)}, bar(f_{|lien(x)}))^2 \\ &= RQ(f_{|lien(x)})d(f_{|lien(x)}, f(x))^2 \\ &= 2RQ(f_{|lien(x)})ED(f,x). \end{aligned}$$

Supposons que pour tout $z \in Z$ et tout $y \in Y$, $\lambda(lien(z), T_yY) \geq \lambda > 0$. Alors pour tout x, $RQ(f_{|lien(x)}) \geq \lambda$, donc

$$E(f) \geq 2\lambda \sum_{z} ED(f,x) = 2\lambda E(f).$$

Si $\lambda > 1/2$, cela entraîne que $E(f) = 0$, i.e. que f est constante. ■

Théorème 7 (H. Izeki et S. Nayatani, [IN]). *Soit Z un complexe simplicial fini de groupe fondamental Γ. Soit X son revêtement universel. Soit Y un espace métrique géodésique, $CAT(0)$ et complet. On suppose que pour tout $z \in Z$,*

$$\lambda(lien(z), Y) > \frac{1}{2}.$$

Alors toute action isométrique de Γ sur Y possède un point fixe.

Preuve. Par semi-continuïté du bas du spectre par ultralimite (Lemme 28), l'hypothèse sur les bas du spectre est aussi satisfaite par les cônes asymptotiques Y' de Y. La formule de Garland (Théorème 6) entraîne que les applications harmoniques équivariantes à valeurs dans Y ou l'un de ses cônes asymptotiques sont constantes. On est donc dans le premier cas du Théorème 5 : il existe un point fixe pour l'action de Γ sur Y. ■

5.3 Propriété (T) de Kazhdan

Définition 29 (D. Kazhdan, [Ka]). *Un groupe discret* Γ *possède la* propriété (T) *si, pour toute représentation unitaire* ρ *de* Γ *sans vecteurs invariants et tout système générateur fini* S *de* Γ*, il existe une constante* $\epsilon(S,\rho) > 0$ *telle que pour tout vecteur unitaire* $\xi \in \mathcal{H}_\rho$*,*

$$\max_{s\in S} |\rho(g)\xi - \xi| \geq \epsilon.$$

La propriété (T) est principalement un phénomène lié à la dimension infinie. On renvoie à [DV] pour une revue de la propriété (T), et notamment des exemples (non triviaux) suivants.

Exemple 30 *Les groupes libres, les groupes moyennables n'ont pas la propriété (T). Les réseaux irréductibles des groupes de Lie semi-simples autres que* $PO(n,1)$ *et* $PU(n,1)$ *ont la propriété (T). Les réseaux des groupes* $PO(n,1)$ *et* $PU(n,1)$ *ne l'ont pas.*

Proposition 31 *Un groupe discret* Γ *a la propriété (T) si et seulement si toute action isométrique affine de* Γ *sur un espace de Hilbert possède un point fixe.*

Preuve. Si Γ a un point fixe dans tout espace de Hilbert affine, alors, d'après le lemme 8, $H^1(\Gamma,\rho) = 0$, donc l'image du cobord $d : C^0(\Gamma,\rho) \to C^1(\Gamma,\rho)$ est l'espace des 1-cocycles $Z^1(\Gamma,\rho)$. Si $\mathcal{H}_\rho$ n'a pas de vecteurs invariants, d est injectif. Soit S un système générateur fini de Γ. On munit les espaces de cochaînes $C^k(\Gamma,\rho)$ d'une structure hilbertienne en posant

$$|\eta|^2 = \sum_{(s_0,\ldots,s_k)\in S^k} |\eta(s_0,\ldots,s_k)|^2.$$

Alors d est une bijection continue de $C^0(\Gamma,\rho)$ sur $Z^1(\Gamma,\rho)$. Son inverse est donc continue. On note N la norme de l'inverse. On voit un vecteur unitaire $\xi \in \mathcal{H}_\rho$ comme une 0-cochaîne et $g \mapsto \rho(g)\xi - \xi$ comme le 1-cocycle $d\xi$. Il vient

$$\max_{s\in S} |\rho(g)\xi - \xi| \geq \frac{1}{\sqrt{|S|}}|d\xi| \geq \frac{1}{N\sqrt{|S|}}|\xi| = \frac{1}{N\sqrt{|S|}}.$$

Par conséquent, Γ a la propriété (T).

Pour la réciproque, on renvoie à [DV]. ∎

Corollaire 32 (A. Zuk, [Z1]). *Soit Z un complexe simplicial fini de groupe fondamental Γ. Soit X son revêtement universel. On suppose que pour tout $z \in Z$, $\lambda(lien(z), \mathbf{R}) > 1/2$. Alors Γ possède la propriété (T).*

Preuve. On applique le Théorème 7 aux espaces de Hilbert. ■

Dans [BaS], W. Ballmann et J. Swiatkowski ont construit des exemples de polyèdres auxquels le corollaire 32 s'applique. On trouvera d'autres exemples dans [Bar] et [DJ].

5.4 Inégalité de Garland

On étend l'identité du théorème 6, valable seulement pour les applications harmoniques, en une inégalité valable pour toutes les applications équivariantes. Cela permet de prouver directement l'existence d'un point fixe, sans recours aux cônes tangents, et constitue une version quantitative de l'existence d'un point fixe.

On commence par le cas linéaire.

Exemple 33 Inégalité de Garland, cas linéaire. *On suppose que, pour tout point $z \in Z$, $\lambda(lien(z), \mathbf{R}) \geq \lambda$. Alors, pour tout application équivariante $f : X \to Y$ où Y est un espace de Hilbert, on a l'inégalité*

$$(2\lambda - 1)E(f) \leq \lambda \|\Delta f\|^2,$$

où $\|\Delta f\|^2 = \sum_z m(z)|\Delta f(x)|^2$ est la norme ℓ^2 de Δf.

En effet, on compare deux expressions de l'énergie,

$$E(f) = \sum_z E(f_{|lien(x)})$$

et

$$E(f) = \sum_z ED(f, x) = \sum_z \frac{1}{2} \|f_{|lien(x)} - f(x)\|^2.$$

L'hypothèse sur le bas du spectre des liens donne

$$\begin{aligned} E(f) &= \sum_z RQ(f_{|lien(x)}) \|f_{|lien(x)} - bar(f_{|lien(x)})\|^2 \\ &\geq \lambda \sum_z \|f_{|lien(x)} - bar(f_{|lien(x)})\|^2. \end{aligned}$$

Pour chaque x, la fonction $f_{|lien(x)} - bar(f_{|lien(x)})$ sur $lien(x)$ est orthogonale aux constantes, en particulier à $\Delta f(x) = f(x) - bar(f_{|lien(x)})$, donc, dans $\ell^2(lien(x), m)$,

$$\begin{aligned} \|f_{|lien(x)} - f(x)\|^2 &= \|f_{|lien(x)} - bar(f_{|lien(x)})\|^2 + \|f(x) - bar(f_{|lien(x)})\|^2 \\ &= \|f_{|lien(x)} - bar(f_{|lien(x)})\|^2 + m(x)|\Delta f(x)|^2. \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} E(f) &\geq \lambda \sum_z \|f_{|lien(x)} - f(x)\|^2 - \lambda \sum_z m(x)|\Delta f(x)|^2 \\ &= 2\lambda E(f) - \lambda \|\Delta f\|^2. \blacksquare \end{aligned}$$

Il s'agit de généraliser cette inégalité au cas non linéaire.

Proposition 34 *Soit Z un complexe simplicial fini de groupe fondamental Γ. Soit X son revêtement universel. Soit Y un espace métrique géodésique, $CAT(0)$ et complet. Soit $f : X \to Y$ une application équivariante. On suppose que, pour tout $z \in Z$ et tout $y \in Y$, $\lambda(lien(z), T_yY) \geq \lambda > 1/2$. Alors*

$$(2\lambda - 1)^2 E(f) \leq 8\lambda^2 | - \Delta f|^2.$$

Preuve. Reprenons la preuve de la formule de Garland. La première étape est valable pour toute application équivariante f,

$$E(f) = \sum_z E(f_{|lien(x)}).$$

Fixons $x \in X$. Comme la projection $\pi : Y \to T_{f(x)}Y$ diminue les distances et donc les énergies,

$$E(f_{|lien(x)}) \geq E(f_x).$$

Par définition du quotient de Rayleigh dans le cône tangent,

$$E(f_x) = RQ(f_x) d(f_x, bar(f_x))^2.$$

Avec l'hypothèse sur le bas du spectre, on a donc

$$E(f) \geq \lambda \sum_z d(f_x, bar(f_x))^2. \tag{1}$$

Or on se rappelle que

$$E(f) = \sum_z ED(f,x) = \sum_z \frac{1}{2} d(f_{|lien(x)}, f(x))^2.$$

Etant donné $x \in X$, on va donc comparer $d(f_x, bar(f_x))^2$ à $2ED(f,x)$. Notons b_x (resp. o_x) l'application constante qui envoie $lien(x)$ sur $bar(f_x)$ (resp. sur le sommet du cône $T_{f(x)}Y$). Par définition du laplacien, $d(b_x, o_x)^2 = \sum_{x' \in lien(x)} m(x,x')| - \Delta f(x)|^2 = m(x)| - \Delta f(x)|^2$. Comme π est radialement isométrique, $d(f_x, o_x)^2 = d(f_{|lien(x)}, f(x))^2 = 2ED(f,x)$. Alors

$$\begin{aligned}
|d(f_x, bar(f_x))^2 - 2ED(f,x)| &= |d(f_x, b_x)^2 - d(f_x, o_x)^2| \\
&= |d(f_x, b_x) + d(f_x, o_x)||d(f_x, b_x) - d(f_x, o_x)| \\
&\leq 2\, d(f_x, o_x) d(b_x, o_x) \\
&= 2\sqrt{2ED(f,x)}\sqrt{m(x)| - \Delta f(x)|},
\end{aligned}$$

par la propriété de minimum du barycentre et l'inégalité triangulaire. Il vient

$$\begin{aligned}
|\sum_z d(f_x, bar(f_x))^2 - 2E(f)| &\leq \sum_z |d(f_x, bar(f_x))^2 - 2ED(f,x)| \\
&\leq \sum_z 2\sqrt{2ED(f,x)}\sqrt{m(x)| - \Delta f(x)|} \\
&\leq 2(\sum_z 2ED(f,x))^{1/2}(\sum_z m(x)| - \Delta f(x)|^2)^{1/2} \\
&= 2\sqrt{2E(f)}| - \Delta f|,
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_z d(f_x, bar(f_x))^2 \geq 2E(f) - 2\sqrt{2E(f)}| - \Delta f|.$$

On revient à l'inégalité 1. Elle donne

$$E(f) \geq \lambda(2E(f) - 2\sqrt{2E(f)}| - \Delta f|),$$

d'où

$$(2\lambda - 1)E(f) - 2\lambda\sqrt{2E(f)}| - \Delta f| \leq 0,$$

soit, si $2\lambda - 1 \geq 0$,

$$(2\lambda - 1)^2 E(f) \leq 8\lambda^2| - \Delta f|^2. \blacksquare$$

Théorème 8 (H. Izeki et S. Nayatani, [IN]). *Soit Z un complexe simplicial fini de groupe fondamental Γ. Soit X son revêtement universel. Soit Y un espace métrique géodésique, $CAT(0)$ et complet. On suppose qu'il existe un $\lambda > \frac{1}{2}$ tel que pour tout $z \in Z$ et tout $y \in Y$,*

$$\lambda(lien(z), T_yY) \geq \lambda.$$

Alors toute action isométrique de Γ sur Y possède un point fixe.

Preuve. L'inégalité de Garland entraîne qu'on est dans le premier cas du théorème 5 : il existe un point fixe pour l'action de Γ sur Y. ■

Corollaire 35 (Compare M.T. Wang, [Wa1]). *Soit Z un complexe simplicial fini de groupe fondamental Γ. Soit X son revêtement universel. Soit Y une variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle négative ou nulle. On suppose que pour tout $z \in Z$, $\lambda(lien(z), \mathbf{R}) > 1/2$. Alors toute action isométrique de Γ sur Y possède un point fixe.*

6 Calculs de bas de spectre

Dans cette section, on donne des exemples de bas de spectre pour des graphes munis du poids naturel : toutes les arêtes ont un poids égal à 1, et les sommets un poids égal à leur valence. On commence par rappeler des résultats classiques sur les bas de spectres scalaires, puis on montre comment les cas des variétés lisses puis des arbres se ramènent au cas scalaire. Enfin, on indique deux tentatives infructueuses pour minorer des bas de spectres à valeurs dans des immeubles.

6.1 Bas du spectre scalaire des immeubles

Exemple 36 *Si C_k est un cycle de longueur k,*

$$\lambda(C_k, \mathbf{R}) = \frac{1}{2}|1 - e^{2i\pi/k}|^2.$$

En effet, on utilise la transformation de Fourier discrète pour diagonaliser la forme quadratique énergie. Les valeurs propres sont les $\frac{1}{2}|1-\zeta|^2$ où ζ parcourt les racines k-èmes de l'unité, et $\zeta = 1$ correspond aux fonctions constantes.

On ne trouve $\lambda(C_k, \mathbf{R}) > 1/2$ que si $k \leq 5$. Un complexe simplicial dont les liens sont des cycles de longueur ≤ 5 est une surface à courbure positive,

dont le groupe fondamental est fini. La propriété de point fixe pour tout espace $CAT(0)$ est immédiate, le théorème 7 n'apporte pas grand chose. On trouve que $\lambda(C_6, \mathbf{R}) = 1/2$, c'est le cas limite pour l'application du théorème 7. On essaiera d'en tirer parti au paragraphe 6.7.

Définition 37 *On appelle* triangle généralisé *un graphe ayant la propriété suivante : tout cycle est de longueur au moins 6, et deux arêtes quelconques sont contenues dans un cycle de longueur 6.*

Exemple 38 *Soit* $\mathbf{F}$ *un corps fini à* q *éléments. Considérons le graphe biparti dont l'ensemble des sommets est la réunion de l'ensemble des points et de l'ensemble des droites du plan projectif* $\mathbf{F}P^2$*. On met une arête entre un point* p *et une droite* d *si* $p \in d$*. Il s'agit d'un triangle généralisé de valence* $q+1$*.*

En effet, un cycle correspond à un polygone, qui a au moins 3 côtés, donc le cycle est de longueur au moins 6. Deux paires $(p \in d)$ et $(p' \in d')$ sont toujours contenues dans le triangle dont le troisième sommet est $p'' = d \cap d'$.

Proposition 39 (W. Feit, G. Higman [FH]). *Si* C *est un triangle généralisé de valence* q*, alors*

$$\lambda(C, \mathbf{R}) = 1 - \frac{\sqrt{q-2}}{q-1}.$$

Les *immeubles de type* $\tilde{A}_2$ sont les complexes simpliciaux dont les liens sont des triangles généralisés. Le théorème 7 et la propriété 31 entraînent que les groupes discrets cocompacts d'automorphismes des immeubles de type $\tilde{A}_2$ ont la propriété de point fixe sur les espaces de Hilbert, i.e. la propriété (T), [P1], [P2], [Z1]. C'était déjà connu par d'autres méthodes pour beaucoup d'entre eux, mais pas tous, voir [CMSZ].

6.2 Bas du spectre scalaire d'un graphe générique

"La plupart des graphes ont un bas du spectre proche de 1, lorsque le nombre de sommets est grand par rapport à la valence". Comment préciser cet énoncé ?

Tout graphe à n sommets de valence $2d$ peut-être obtenu de la façon suivante : étant donné un ensemble S à n éléments, on se donne d permutations $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ de S, on construit un graphe $\gamma(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ de valence $2d$ dont l'ensemble des sommets est S en reliant chaque sommet $s \in S$ aux

sommets $\sigma_1(s), \ldots, \sigma_d(s)$. Noter qu'on accepte les arêtes multiples (cas où $\sigma_i(s) = \sigma_j(s)$ ou $\sigma_j^{-1}(s)$) et les boucles reliant un sommet à lui-même (cas où $\sigma_i(s) = s$).

On utilise la mesure de probabilité unifome sur les d-uplets de permutations (le produit de d copies du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$), et la mesure image par l'application γ sur les graphes. On obtient ainsi une loi de probabilité sur l'ensemble $L(n,d)$ des graphes à n sommets de valence $2d$. On choisit le poids m uniforme qui vaut 1 sur chaque arête et donc $2d$ en chaque sommet.

Théorème 9 (A. Broder, E. Shamir, [BS]). *Lorsque n tend vers l'infini, la proportion de graphes dans $L(n,d)$ dont le bas du spectre est proche de 1 tend vers 1. Plus précisément* (J. Friedman, [Fr]), *il existe une constante c indépendante de k telle que la proportion de graphes C dans $L(n,d)$ dont le bas du spectre satisfait*

$$\lambda(C, \mathbf{R}) \geq 1 - (\frac{\sqrt{2d-1}}{d} + \frac{\log(2d)}{2d} + \frac{c}{d})$$

tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Preuve. On donne seulement les grandes lignes de la preuve du résultat de Broder et Shamir.

1. Concentration. La fonction $\lambda : (\mathcal{S}_n)^d \to \mathbf{R}$ qui à un d-uplet de permutations $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$, associe le bas du spectre du graphe $\gamma(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, est lipschitzienne au sens suivant. Si deux d-uplets σ et σ' ne diffèrent que par une des permutations, alors

$$|\lambda(\sigma) - \lambda(\sigma')| \leq \frac{4}{d}.$$

En effet, soit $g : S \to \mathbf{R}$ une fonction telle que $bar(g) = 0$. Le dénominateur $d(g, bar(g))^2 = 2d \sum_s |g(s) - bar(g)|^2$ du quotient de Rayleigh ne dépend pas des arêtes. Quant au numérateur, il vaut

$$\begin{aligned} E(g) &= \frac{1}{2} \sum_{s \in S} \sum_{i=1}^{d} (|g(s) - g(\sigma_i(s))|^2 + |g(s) - g(\sigma_i^{-1}(s))|^2) \\ &= \sum_{s \in S} \sum_{i=1}^{d} |g(s) - g(\sigma_i(s))|^2. \end{aligned}$$

Si deux d-uplets σ et σ' ne diffèrent que par la j-ème permutation, alors

$$\begin{aligned}
|E_\sigma(g) - E_{\sigma'}(g)| &\leq \frac{1}{2}\sum_{s\in S}(|g(s) - g(\sigma_j(s))|^2 - |g(s) - g({\sigma'}_j^{-1}(s))|^2) \\
&\leq \sum_{s\in S} 2(|g(s)|^2 + |g(\sigma_j(s))|^2 + |g(s)|^2 + |g(\sigma'_j(s))|^2) \\
&\leq 8\sum_{s\in S}|g(s)|^2 \\
&= \frac{4}{d}d(g, bar(g))^2.
\end{aligned}$$

En prenant la borne inférieure sur toutes les fonctions g de moyenne nulle, on obtient l'inégalité annoncée, laquelle énonce que la fonction λ est 1-lipschitzienne pour la distance sur $(\mathcal{S}_n)^d$ produit (au sens ℓ^1) de la distance sur $\mathcal{S}_n$ qui met deux permutations quelconques à distance $4/d$ l'une de l'autre.

D'un résultat de concentration (voir [Le], Corollary 1.17), il résulte que, hors d'un sous-ensemble de $(\mathcal{S}_n)^d$ de mesure exponentiellement petite, la fonction λ est très proche de son espérance. Précisément, pour tout $r > 0$,

$$P(\lambda < \mathbf{E}(\lambda) - r) < e^{-r^2/2D^2},$$

où D^2 est la somme des carrés des diamètres de chaque copie de $(\mathcal{S}_n)^d$, soit $d \times (4/d)^2 = 16/d$. En prenant r de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{d}}$, on voit qu'il suffit de minorer l'espérance de la variable λ.

2. Lien entre bas du spectre et probabilité de retour. On considère la marche aléatoire simple sur le graphe $\gamma(\sigma)$. La matrice P des probabilités de transition est $P(s, s') = \frac{1}{k}$ s'il existe i tel que $s' = \sigma_i(s)$ ou $s' = \sigma_i^{-1}(s)$, $P(s, s') = 0$ sinon. La probabilité qu'une marche aléatoire issue de s revienne en s au bout de $2k$ pas est le coefficient de matrice $P^{2k}(s, s)$. La probabilité qu'une marche aléatoire partie d'un point quelconque y revienne au bout de $2k$ pas est égale à la trace $tr(P^{2k})$. Notons $1 = \mu_1 \geq \cdots \geq \mu_n$ les valeurs propres de P. Alors le bas du spectre $\lambda = 1 - \mu_2$, d'où

$$tr(P^{2k}) = 1 + \mu_2^{2k} + \cdots + \mu_n^{2k} \geq 1 + \mu_2^{2k} = 1 + (1 - \lambda)^{2k}.$$

On voit λ comme une variable aléatoire sur $(\mathcal{S}_n)^d$. Il vient

$$1 - \mathbf{E}(\lambda) = \mathbf{E}(1 - \lambda) \leq \mathbf{E}((1 - \lambda)^{2k})^{1/2k} \leq (tr(P^{2k}) - 1)^{1/2k}.$$

3. Estimation de l'espérance de la probabilité de retour. Faire un pas au hasard à partir de s consiste à tirer au hasard l'un des points $\sigma_i^{\pm}(s)$. Marcher au hasard pendant le temps $2k$ à partir de s consiste à choisir indépendamment $2k$ indices dans $\{1,\ldots,d\}\times\pm 1$. Un tel choix peut-être vu comme une marche dans le monoïde libre $\mathcal{M}$ engendré par $2d$ symboles $\{\pi_1,\pi_1^{-1},\ldots,\pi_d,\pi_d^{-1}\}$. Marchons maintenant au hasard dans un graphe tiré au hasard. On intervertit les tirages aléatoires. On tire d'abord le mot π de longueur $2k$ dans $\mathcal{M}$, puis le d-uplet σ dans $(\mathcal{S}_n)^d$. Fixons un sommet s_0. Alors $\frac{1}{n}(n!)^d(2d)^{2k}\mathbf{E}(tr(P^{2k}))$ est égal au nombre de tirages π et σ donnant une marche qui part et se termine en s_0.

Si le mot π n'est pas réduit dans le groupe libre de générateurs $\{\pi_1,\ldots,\pi_d\}$, la marche fait des aller-retour sans intérêt. On majore aisément le nombre de mots non réduits. La contribution principale vient des mots triviaux dans le groupe libre. Leur probabilité est contrôlée par le bas du spectre d'un arbre régulier de valence $2d$, elle est inférieure à $(2/d)^k$.

Désormais, on suppose le mot π réduit. La contribution principale va venir des marches qui ne passent jamais deux fois par le même sommet jusqu'au temps $2k-1$. En effet, lorsque, à π fixé, on compte le nombre de d-uplets σ qui réalisent une trajectoire donnée, chaque sommet rencontré pour la première fois donne une seule contrainte sur une permutation σ_i, alors qu'un sommet déjà rencontré (auto-intersection) en impose deux. La probabilité qu'une marche se recoupe avant de revenir en s_0 est donc au moins n fois plus petite que la probabilité qu'une marche revienne en s_0 sans se recouper, laquelle est inférieure à $\frac{1}{n-k}$.

On obtient donc une majoration de la forme $\mathbf{E}(tr(P^{2k}))\leq n((\frac{2}{d})^k+\frac{1}{n-k}+reste)$. On choisit k de l'ordre de $\log_d(n)$ et on conclut que $\mathbf{E}(\lambda)$ se comporte asymptotiquement en d comme pour l'arbre régulier de valence $2d$, pour lequel $\lambda=1-\frac{2\sqrt{2d-1}}{2d}$. ■

Remarque 40 *Le modèle avec les permutations peut paraître artificiel. Il est simplement commode. Une modification légère permet d'étendre la conclusion du théorème 9 à la mesure uniforme sur l'ensemble $L(n,d)$. On peut même éliminer les graphes possédant des arêtes multiples ou des boucles, voir [BS].*

6.3 Cônes tangents

Dans l'espace euclidien, si $s(t) = y + tv$ et $s'(t) = y + tv'$ sont deux demi-droites issues de y, on a pour tout t l'identité

$$|v - v'| = \frac{d(s(t), s'(t))}{t}.$$

Dans un espace $CAT(0)$, étant données deux géodésiques s et s' d'origine y, parcourues à vitesse constante, la fonction $t \mapsto \frac{d(s(t),s'(t))}{t}$ est croissante. On peut donc poser

$$d(s, s') = \lim_{t \to 0} \frac{d(s(t), s'(t))}{t},$$

et identifier s et s' si $d(s, s') = 0$.

Définition 41 ([BH]). *On obtient un espace métrique appelé* cône tangent *de Y en y et noté T_yY.*

C'est à nouveau un espace $CAT(0)$, car c'est une limite d'espaces $CAT(0)$. Il vient avec une application $\pi : Y \to T_yY$ qui est isométrique le long de chaque géodésique issue de y, et diminue les distances en général. π envoie un point y' sur le segment géodésique de y à y' paramétré à vitesse constante sur $[0, 1]$.

Exemple 42 *Si Y est une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative ou nulle (par exemple, un espace symétrique de type non compact), ses cônes tangents sont des espaces euclidiens.*

Si Y est un arbre, ses cônes tangents sont des réunions de demi-droites attachées à leur extrémité.

Proposition 43 (Wang,[Wa2]). *Pour tout complexe simplicial pondéré fini (C, m) et tout espace $CAT(0)$ Y,*

$$\lambda(C, Y) = \inf_{y \in Y} \lambda(C, T_yY).$$

Preuve. Etant donnée $g : C \to Y$, on note $g' = \pi \circ g$ où π est la projection $Y \to T_{bar(g)}Y$. Alors $bar(g')$ est le sommet du cône. En effet, si $t \mapsto s(t)$ est une géodésique dans Y, issue de $bar(g)$ et parcourue à vitesse constante, et si $y \in Y$, alors la dérivée en $t = 0$ de la fonction $t \mapsto d(y, s(t))$ s'exprime en fonction des points $\pi(s(1))$ et $\pi(y)$ du cône tangent ([BH], corollaire II.3.6).

Comme le cône tangent au cône en son sommet est le cône lui-même, $\pi\circ\pi = \pi$, et les fonctions $t \mapsto d(y, s(t))$ et $t \mapsto d(\pi(y), \pi(s(t)))$ ont même dérivée en $t = 0$. En faisant la moyenne sur C, on trouve que les fonctions $t \mapsto d(g, s(t))^2$ et $t \mapsto d(\pi\circ g, \pi(s(t)))^2$ ont même dérivée en $t = 0$. Comme la première atteint un minimum en 0, il vient

$$\frac{d}{dt} d(\pi \circ g, \pi(s(t)))^2{}_{|t=0} \geq 0.$$

Comme cette fonction est convexe, elle atteint aussi un minimum en 0. Cela prouve que $y \mapsto d(g', \pi(y))^2$ atteint son minimum en $bar(g)$, donc $bar(g')$ est le sommet du cône.

Comme π diminue les distances, $E(g') \leq E(g)$. Comme π est isométrique le long des géodésiques issues de $bar(g)$, $d(g', \pi(bar(g)))^2 = d(g, bar(g))^2$. Par conséquent, $RQ(g') \leq RQ(g)$. Cela prouve que $\lambda(C, Y) \geq \inf_{y\in T} \lambda(C, T_y Y)$.

L'inégalité inverse résulte de fait que les cônes tangents sont des ultralimites particulières, et du Lemme 28. ■

Exemple 44 *Si Y est une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative ou nulle (e.g. un espace symétrique sans facteurs compacts), alors*

$$\lambda(C, m, Y) = \lambda(C, m, \mathbf{R}).$$

C'est en utilisant cette propriété du bas du spectre que M.T. Wang prouvait le Théorème 8 et le Corollaire 35 dans le cas des actions réductives.

6.4 Ultralimites

La semi-continuïté du bas du spectre par ultralimite (Lemme 28) permet d'obtenir quelques valeurs supplémentaires.

Corollaire 45 (Gromov, [Gr3]). *Soit M une variété riemannienne simplement connexe, à courbure sectionnelle négative ou nulle. Soit $cone_\omega(M)$ un cône asymptotique de M. Alors pour tout graphe pondéré fini (C, m),*

$$\lambda(C, cone_\omega(M)) = \lambda(C, \mathbf{R}).$$

Exemple 46 (B. Kleiner, B. Leeb, [KL]). *Les cônes asymptotiques des espaces symétriques sont des immeubles euclidiens. Pour de tels immeubles I, on a donc, pour tout graphe pondéré fini (C, m),*

$$\lambda(C, I) = \lambda(C, \mathbf{R}).$$

Remarque 47 *Cette égalité ne peut être vérifiée par tous les immeubles euclidiens.*

En effet, soit I un immeuble euclidien localement fini de dimension $d \geq 2$. Soit $C = lien(x)$ le lien d'un sommet, muni de la pondération naturelle, qui donne le poids 1 aux simplexes de dimension d. Il est fréquent que $\lambda(C, \mathbf{R}) > 1/2$ (c'est le cas pour les immeubles de type $\tilde{A}_2$, d'après la proposition 39 ; pour les autres immeubles, voir par exemple [Ga]). Il est aussi fréquent que I possède un groupe discret cocompact d'isométries. Si on avait $\lambda(C, I) \geq \lambda(C, \mathbf{R})$, on prouverait à l'aide du théorème 6 que toute application harmonique équivariante $I \to I$ est constante. Or l'identité $id : I \to I$ est harmonique non constante, contradiction.

6.5 Bas du spectre à valeurs dans un arbre

On rappelle que, d'après la proposition 43, pour minorer $\lambda(C, m, Y)$ pour un espace $CAT(0)$ Y, il suffit de traiter ses cônes tangents. Plus précisément, il suffit de minorer $RQ(g)$ lorsque $g : C \to Y$ a son barycentre au sommet du cône.

Proposition 48 (H. Izeki et S. Nayatani, [IN]). *Si Y est un arbre, alors pour tout graphe pondéré (C, m),*

$$\lambda(C, Y) = \lambda(C, \mathbf{R}).$$

Preuve. Comme on n'a affaire qu'à des ensembles finis de points de Y, on peut supposer que Y est un arbre fini.

Un cône tangent à un arbre fini est ou bien une droite (dans ce cas, il n'y a rien à prouver), ou bien une réunion de demi-droites $D_1, \ldots, D_n$ de même origine. Soit $g : C^0 \to \bigcup_i D_i$ une application dont le barycentre est au sommet. Notons a_i la somme pondérée des distances au sommet des points de $g(C^0)$ se trouvant dans la demi-droite D_i. Comme $bar(g)$ est au sommet, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$a_i \leq \sum_{j \neq i} a_j.$$

En effet, lorsqu'on avance dans la branche D_i, la dérivée de la fonction $d(g, \cdot)^2$ à l'origine est $-a_i + \sum_{j \neq i} a_j \geq 0$. Par conséquent, il existe un polygone dans le plan euclidien dont les longueurs des côtés sont les a_i. Autrement dit, il existe

des vecteurs unitaires $e_1, \ldots, e_n$ dans $\mathbf{R}^2$ tels que $\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0$. On définit une application $g' : C \to \mathbf{R}^2$ en posant $g'(c) = d(g(c), bar(g))e_i$ lorsque $g(c) \in D_i$. Alors $bar(g') = 0$, $E(g') \leq E(g)$ et $d(g', bar(g'))^2 = d(g, bar(g))^2$, donc $RQ(g') \leq RQ(g)$. On conclut que $\lambda(C, m, Y) \geq \lambda(C, m, \mathbf{R}^2) = \lambda(C, m, \mathbf{R})$, puis, comme Y contient des copies isométriques de $\mathbf{R}$, que $\lambda(C, m, Y) = \lambda(C, m, \mathbf{R})$. ■

6.6 L'invariant d'Izeki-Nayatani

Ce paragraphe développe l'idée illustrée dans le cas des arbres de remplacer une application à valeurs dans Y par une application à valeurs dans un espace euclidien.

Définition 49 (H. Izeki and S. Nayatani, [IN]). *Soit Y un espace géodésique $CAT(0)$ complet. Etant donné un sous-ensemble pondéré fini $Z \in Y$ (on suppose que la somme des poids vaut 1), soit $\phi : Z \to \mathcal{H}$ une application 1-Lipschitzienne à valeurs dans un espace de Hilbert telle que pour tout $z \in Z$, $|\phi(z)| = d(z, bar(Z))$. On définit*

$$\delta(Z) = \inf_{\phi} \frac{|bar(\phi)|^2}{\|\phi\|^2}.$$

*L'*invariant d'Izeki-Nayatani *de Y is $IN(Y) = \sup_{Z \subset Y} \delta(Z) \in [0, 1]$.*

Lemme 50 *Soit Y un espace géodésique $CAT(0)$ complet, soit C un graphe fini pondéré. Alors*

$$\lambda(C, Y) \geq (1 - IN(Y))\lambda(C, \mathbf{R}).$$

Preuve. Etant donnée une application $g : C^0 \to Y$, on pose $Z = g(C)$. On choisit une application optimale ϕ for Z. D'après Pythagore,

$$d(\phi, bar(\phi))^2 = \|\phi\|^2 - |bar(\phi)|^2 = (1 - \delta(Z))\|\phi\|^2 = (1 - \delta(Z))d(g, bar(g))^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} \lambda(C, \mathbf{R}) &\leq RQ(\phi \circ g) = \frac{E(\phi \circ g)}{d(\phi \circ g, bar(\phi \circ g))^2} \\ &\leq \frac{E(g)}{d(\phi, bar(\phi))^2} = \frac{1}{1 - \delta(Z)} RQ(g). \end{aligned}$$

Exemple 51 *1. Par définition, pour un espace de Hilbert, $IN = 0$.*

2. *Pour tout Y, $IN(Y) = \inf_{y \in Y} IN(T_y Y)$. Par conséquent, les variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbure sectionnelle négative ou nulle satisfont $IN = 0$.*
3. *La preuve de la Proposition 48 donne $IN = 0$ pour les arbres.*
4. *IN est continu pour les ultralimites. Par conséquent, les immeubles euclidiens qui apparaissent comme cônes asymptotiques d'espaces symétriques satisfont $IN = 0$.*
5. *Pour tout Y et tout espace probabilisé Ω, $IN(L^2(\Omega, Y)) \leq IN(Y)$.*
6. *$IN(Y_1 \times Y_2) \leq \max\{IN(Y_1), IN(Y_2)\}$. Par conséquent, $IN = 0$ pour tous les produits dont les facteurs appartiennent à l'une des familles 1 à 5.*
7. *L'immeuble de Bruhat-Tits I_p associé au groupe $Sl(3, \mathbf{Q}_p)$ satisfait*

$$IN(I_p) \geq \frac{(\sqrt{p} - 1)^2}{2(p - \sqrt{p} + 1)}.$$

On conjecture que l'égalité a lieu.

La minoration de IN pour les immeubles I_p résulte du Lemme 50, du Lemme 39, du théorème 7, et du fait qu'il existe une application harmonique non constante de I_p dans I_p, à savoir l'identité.

Théorème 10 (H. Izeki et S. Nayatani, [IN]). *Soit I_2 l'immeuble de Bruhat-Tits associé au groupe $Sl(3, \mathbf{Q}_2)$. Alors*

$$IN(I_2) \leq 0.4122.$$

Par conséquent, pour tout graphe pondéré fini C,

$$\lambda(C, I_2) \geq 0.5878\, \lambda(C, \mathbf{R}).$$

Preuve. Elle n'est pas simple (on renvoie à [IN]) et donne une majoration de $IN(I_p)$ qui est malheureusement $> 1/2$ pour $p \geq 3$. ■

Définition 52 (H. Izeki, T. Kondo et S. Nayatani, [IKN]). *Soit $\delta \in [0, 1]$. On dit qu'un groupe Γ a la* propriété *$F\mathcal{Y}_{\leq \delta}$ si toute action isométrique de Γ sur un espace géodésique $CAT(0)$ complet Y tel que $IN(Y) \leq \delta$ a un point fixe.*

Proposition 53 *Soit $\delta < \frac{1}{2}$. Soit Z un complexe simplicial fini de groupe fondamental Γ. On suppose que pour tout $z \in Z$, $\lambda(lien(z), \mathbf{R}) > \frac{1}{2(1-\delta)}$. Alors Γ a la propriété $F\mathcal{Y}_{\leq\delta}$.*

Les classes $F\mathcal{Y}_{\leq\delta}$ sont intéressantes. En effet, pour la topologie de l'espace des groupes marqués (voir [Ch]), ces classes sont ouvertes, [Ko].

Le minorant de $IN(I_p)$ donné en 51 tend vers 1/2 quand p tend vers l'infini. Par conséquent, chaque classe $\mathcal{Y}_{\leq\delta}$, $\delta < \frac{1}{2}$, ne contient qu'un nombre fini de ces immeubles. La Proposition 53 est donc loin de conduire à la propriété FSI. Néanmoins, pour tout $\delta < \frac{1}{2}$, la classe $F\mathcal{Y}_{\leq\delta} \cap FSI$ est dense dans l'espace des groupes marqués, voir [Ko].

6.7 Inégalités de Wirtinger

Ce paragraphe et les deux suivants proposent une autre approche, destinée donner un minorant uniforme du bas du spectre à valeurs dans un immeuble. Elle s'appuie sur un résultat de M. Gromov sur des inégalités satisfaites par tous les espaces géodésiques $CAT(0)$, qu'il a baptisées inégalités de Wirtinger.

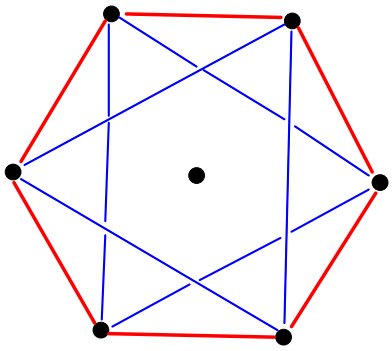
Définition 54 *Soit C un graphe fini non pondéré, soit Y un espace métrique, soit $g : C \to Y$. Pour $j = 1, 2, \ldots$, on note*

$$E_j(g) = \frac{1}{2} \sum_{c \in C} \sum_{d(c,c')=j} d(g(c), g(c'))^2.$$

Autrement dit, pour $j = 1$, E_1 est l'énergie relative à la pondération uniforme (chaque arête a un poids égal à 1).

Exemple 55 *Cas du k-cycle C_k.*

Soit C_k le graphe formé d'un unique cycle de k arêtes, avec la pondération uniforme. Soit $g : C_k^0 \to \mathbf{R}^2$ un plongement de C_k^0 comme un polygone régulier à k côtés dans le plan euclidien, inscrit dans un cercle de rayon 1. On note $W(k, 1) = E(g) = 4k \sin^2(\pi/k)$ son énergie. Alors $E_j(g) = W(k, j) := 4k \sin^2(\pi j/k)$.



En rouge, le graphe C_6. En bleu, les couples de points entrant dans la définition de E_2.

Définition 56 *Suivant Gromov [Gr2], on dit qu'un espace métrique Y satisfait à* l'inégalité de Wirtinger Wir_k *si, pour toute application $g : C_k \to Y$, et pour tout $j = 1, \ldots, k$,*

$$\frac{E(g)}{E_j(g)} \geq \frac{W(k,1)}{W(k,j)}.$$

Proposition 57 *Les espaces euclidiens satisfont à toutes les inégalités de Wirtinger Wir_k, $k \geq 4$.*

Preuve. Soit $g : C_k \to \mathbf{R}^n$. On identifie C_k à l'ensemble des racines k-èmes de l'unité dans $\mathbf{C}$, et on note $\zeta = e^{2i\pi/k}$. On décompose g en série de Fourier discrète $g = \sum_{\ell=1}^{k} g_\ell$, où $g_\ell(\zeta c) = \zeta^\ell g_\ell(c)$. D'après l'identité de Bessel-Parseval, cette décomposition est orthogonale pour la norme ℓ^2,

$$\sum_c |g(c)|^2 = \sum_\ell \sum_c |g_\ell(c)|^2.$$

Comme

$$\begin{aligned} E_j(g) &= \sum_c |g(\zeta^j c) - g(c)|^2 \\ &= \sum_c |\sum_\ell (g_\ell(\zeta^j c) - g_\ell(c))|^2 \\ &= \sum_c |\sum_\ell (\zeta^{j\ell} - 1) g_\ell(c)|^2 \\ &= \sum_\ell |\zeta^{j\ell} - 1|^2 \sum_c |g_\ell(c)|^2, \end{aligned}$$

la forme hermitienne E_j est diagonale. Par conséquent, la borne inférieure des nombres $E_1(g)/E_j(g)$ est égale au plus petit des quotients $\dfrac{|\zeta^\ell - 1|^2}{|\zeta^{j\ell} - 1|^2}$, $\ell = 0, \ldots, k-1$. On vérifie aisément que le quotient est minimum exactement lorsque $\ell = 1$ ou $\ell = k-1$. La fonction $g : C_k \to \mathbf{R}^2$ définie par $g(c) = (\Re e(c), \Im m(c))$ réalise ce minimum, donc celui-ci est égal à $\frac{W(k,1)}{W(k,j)}$.

Pour un usage ultérieur, remarquons que, pour une application $g : C_k \to \mathbf{R}^n$, $E_1(g)/E_j(G) = \frac{W(k,1)}{W(k,j)}$ si et seulement si il existe des vecteurs $u \in \mathbf{R}^n$ et $v \in \mathbf{C}^n$ tels que $g(c) = u + cv + \overline{cv}$, i.e. si g est la restriction aux racines de l'unité d'une application $\mathbf{R}$-affine de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{R}^n$. ■

Théorème 11 (M. Gromov, [Gr2] section 25). *Tout espace $CAT(0)$ satisfait aux inégalités de Wirtinger Wir_k pour tout $k \geq 4$.*

Preuve. Etant donnée $g : C_k \to Y$, on équipe chaque arête cc' de C_k de la métrique qui lui donne la longueur $d(g(c), g(c'))$, de sorte que C_k devient un cercle ∂D. On prolonge g en une application isométrique $f : \partial D \to Y$. Puis on prolonge f au disque D de sorte que la métrique induite sur D soit à courbure négative ou nulle. Dans le cas où Y est un polyèdre (le seul que nous traiterons ici), il suffit de prendre pour f une surface réglée, par exemple un cône sur $f_{|\partial D}$, la métrique induite est alors riemannienne plate avec un nombre fini de singularités côniques.

Suivant A. Weil [W1], on change la métrique induite ds^2 en une métrique riemannienne plate $ds_0^2 \leq ds^2$ qui coïncide avec ds^2 le long du bord. En effet, par représentation conforme, quitte à composer f avec un homéomorphisme quasiconforme du disque, $ds^2 = e^{-2\phi}(du^2 + dv^2)$. La courbure $K = e^{2\phi}\Delta\phi$ étant négative ou nulle, la fonction harmonique ϕ_0 qui vaut ϕ au bord satisfait $\phi \geq \phi_0$ à l'intérieur, et $ds_0^2 = e^{-2\phi_0}(du^2 + dv^2)$ est plate.

Suivant Yu. Reshetnyak, [R1], [R2], il existe un convexe $D' \subset \mathbf{R}^2$ et un homéomorphisme $(D, ds_0^2) \to D'$ qui augmente (au sens large) les distances, et préserve la longueur du bord.

La restriction de cet homéomorphisme à C_k est une application $g' : C_k \to \mathbf{R}^2$ telle que, pour toute arête cc' de C_k, $d(g'(c), g'(c')) = d(g(c), g(c'))$, et pour toute paire de sommets c, c', $d(g'(c), g'(c')) \geq d(g(c), g(c'))$. Par conséquent, $E_1(g') = E_1(g)$, et pour $j \geq 1$, $E_j(g') \geq E_j(g)$, donc

$$\frac{E_1(g)}{E_j(g)} \geq \frac{E_1(g')}{E_j(g')} \geq \frac{W(k,1)}{W(k,j)},$$

d'après la proposition 57. ■

6.8 Bas du spectre, version Gromov

Commençons par une variante de la définition 25. La terminologie est empruntée à [Pi].

Définition 58 *Soit (C, m) un graphe pondéré. Soit Y un espace métrique. Soit $g : C \to Y$. Le* quotient de Rayleigh, version Gromov *est $RQ^{Gro}(g) = E(g)/F(g)$, où*

$$F(g) = \frac{1}{2m(\emptyset)} \sum_{c,c'} m(c)m(c')d(g(c), g(c'))^2$$

et $m(\emptyset) = \sum_c m(c)$.

Le bas du spectre, version Gromov *$\lambda^{Gro}(C, m, Y)$ est la borne inférieure des $RQ^{Gro}(g)$, sur toutes les applications non constantes $g : C \to Y$.*

Lemme 59 *Soit Y un espace géodésique $CAT(0)$. Pour tout graphe pondéré (C, m),*

$$\lambda^{Gro}(C, Y) \leq \lambda(C, Y).$$

L'égalité a lieu quand Y est euclidien.

Preuve. Soit $c \in C^0$. Le lemme 17 appliqué à $y = g(c)$ donne

$$\sum_{c'} m(c')d(g(c), g(c'))^2 \geq \sum_{c'} m(c')d(g(c'), bar(g))^2 + m(\emptyset)d(g(c), bar(g))^2.$$

En sommant sur c, il vient

$$\begin{aligned} 2m(\emptyset)F(g) &\geq \sum_c m(c)d(g, bar(g))^2 + m(\emptyset) \sum_c m(c)d(g(c), bar(g))^2 \\ &= 2m(\emptyset)d(g, bar(g))^2, \end{aligned}$$

avec égalité quand Y est euclidien. On conclut que $\lambda^{Gro} \leq \lambda$, avec égalité quand Y est euclidien. ■

Remarque 60 *L'hypothèse $\lambda^{Gro}(liens, cones) > 1/2$ sous laquelle M. Gromov prouve le théorème 7 dans [Gr3] est donc un peu plus forte que celle de ce théorème. Au lieu d'utiliser le flot du gradient de l'énergie, M. Gromov en construit une approximation à temps discret, qui diminue strictement l'énergie. Pour des exposés de l'argument de [Gr3], voir [Pi] ou [NS].*

Remarque 61 *Avec les notations du paragraphe 6.7, lorsqu'on choisit la pondération uniforme, pour un graphe dont chaque sommet a une valence au plus égale à v, $F \leq \dfrac{v^2}{m(\emptyset)} \sum_{j \geq 1} E_j$, et $m(\emptyset)$ est égal à deux fois le nombre d'arêtes de C.*

Lemme 62 *Si Y satisfait à l'inégalité de Wirtinger Wir_k, alors le bas du spectre du cycle C_k à valeurs dans Y est au moins égal au bas du spectre à valeurs dans $\mathbf{R}$,*

$$\lambda^{Gro}(C_k, Y) \geq \lambda^{Gro}(C_k, \mathbf{R}) = \frac{1}{2}|1 - e^{2i\pi/k}|^2.$$

Preuve. Si $g : C_k \to Y$,

$$\begin{aligned} RQ^{Gro}(g)^{-1} &= \frac{F(g)}{E(g)} \\ &= \frac{1}{E(g)} \frac{1}{2k} \sum_{j \geq 1} E_j(g) \\ &\leq \frac{1}{E(g)} \frac{1}{2k} \sum_{j \geq 1} \frac{W(k,j)}{W(k,1)} E_1(g) \\ &= RG^{Gro}(g')^{-1}, \end{aligned}$$

où g' est un polygone régulier dans le plan euclidien. ■

6.9 *Integralgeometrie*

La formule de Garland, dans le cas des immeubles de type $\tilde{A}_2$, s'obtient en moyennant sur les appartements une formule naïve. Cette observation, développée dans [P2], suggère d'estimer le bas du spectre des liens de ces immeubles en moyennant sur leurs appartements, qui sont des cycles.

Proposition 63 *Soit C un graphe de diamètre $\lfloor k/2 \rfloor$, dont tous les sommets ont une valeence $\leq v$, muni de la pondération uniforme. Soit $\mathcal{C}$ une famille non vide de k-cycles plongés isométriquement dans C. On suppose que, étant donnés deux sommets c et c' de C le nombre $N_{\mathcal{C}}(c, c')$ de cycles de la famille $\mathcal{C}$ qui passent par c et c' ne dépend que de la distance $j = d(c, c')$, $N_{\mathcal{C}}(c, c') = N_{d(c,c')} = N_j$.*

Soit Y un espace métrique qui satisfait à l'inégalité de Wirtinger Wir_k. Alors le bas du spectre (au sens de Gromov) de C à valeurs dans Y est minoré par une constante

$$\lambda^{Gro}(C,Y) \geq \lambda(k,v,N_j),$$

optimale au sens suivant. Si C est régulier (tous les sommets ont la même valence) et admet un plongement ι dans un espace Y_0 tel que chaque cycle de $\mathcal{C}$ soit envoyé sur un polygone régulier contenu dans un plan euclidien plongé isométriquement dans Y_0, alors $\lambda(k)$ est égale au quotient de Rayleigh (selon Gromov) de ce plongement,

$$\lambda^{Gro}(C,Y) = RQ^{Gro}(\iota).$$

Preuve. Soit $\mathcal{PC}$ l'ensemble des paramétrisations de cycles de $\mathcal{C}$, i.e. des isométries $h : C_k \to C$ dont l'image appartient à $\mathcal{C}$. Si c et $c' \in C$ sont à distance $j \geq 1$, le nombre de triplets $(h,z,z') \in \mathcal{PC} \times C_k \times C_k$ tels que $h(z) = c$ et $h(z') = c'$ est égal à N_j si $j \neq k/2$, et à $2N(k/2)$ sinon. En effet, pour tout couple z et z' à distance $j < k/2$, et pour tout cycle de $\mathcal{C}$ passant par c et c', il existe une unique paramétrisation qui envoie z sur c et z' sur c', et il en existe deux si $d(z,z') = k/2$. On notera donc

$$\tilde{N}_j = \begin{cases} N_j \text{ si } j < k/2, \\ 2N(k/2) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit $g : C \to Y$ et $j \in \{1,\ldots,\lfloor k/2 \rfloor\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{h\in\mathcal{PC}} E_j(g\circ h) &= \frac{1}{2}\sum_{h\in\mathcal{PC}}\sum_{z\in C_k}\sum_{\{z'\in C_k \,|\, d(z,z')=j\}} d(g\circ h(z), g\circ h(z'))^2 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{c\in C}\sum_{\{c'\in C \,|\, d(c,c')=j\}}\sum_{\{(h,z,z') \,|\, h(z)=c,\, h(z')=c'\}} d(g(c),g(c'))^2 \\ &= \tilde{N}_j E_j(g). \end{aligned}$$

Comme Y satisfait Wir_k, pour tout h, $E_j(g\circ h) \leq \dfrac{W(k,j)}{W(k,1)} E_1(g\circ h)$, donc

$$E_j \leq \frac{W(k,j)}{\tilde{N}_j W(k,1)} E_1(g),$$

$$F(g) \leq \frac{v^2}{m(\emptyset)} \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} E_j(g) \leq E(g) \frac{v^2}{m(\emptyset)} \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{W(k,j)}{\tilde{N}_j W(k,1)},$$

soit $RQ^{Gro}(g) \geq \lambda$, où λ est l'inverse de $\frac{v^2}{m(\emptyset)} \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{W(k,j)}{\tilde{N}_j W(k,1)}$.

Supposons qu'il existe un espace $CAT(0)$ Y_0 et un point $y_0 \in Y_0$ tels que, pour chaque cycle κ de $\mathcal{C}$, $g_{|\kappa}$ factorise par le plongement de κ comme polygone régulier d'un plan euclidien, puis par un plongement isométrique de ce plan dans Y_0 qui envoie le centre du polygone sur y_0. Alors l'inégalité Wir_k est une égalité pour chaque k-cycle, donc $RQ^{Gro}(g) = \lambda(k)$. ■

Exemple 64 *Cas des immeubles euclidiens.*

Soit I un immeuble euclidien localement fini de dimension 2. Soit L le lien d'un sommet dans I. Alors L est un immeuble sphérique de rang 1. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de ses appartements. Chaque appartement est un k-cycle, avec $k = 4$, 6, 8 ou 12, il est plongé isométriquement. Le nombre d'appartements contenant deux points ne dépend que de leur distance. La proposition 63 s'applique, le cas d'égalité est réalisé par le plongement naturel du lien $\iota : L \subset I$.

Corollaire 65 *Soit I_p l'immeuble de Bruhat-Tits associé à $Sl(3, \mathbf{Q}_p)$, soit L le lien d'un sommet de I_p, muni de la pondération uniforme. Soit Y un espace métrique qui satisfait à l'inégalité Wir_6. Alors*

$$\lambda^{Gro}(L, Y) \geq \lambda^{Gro}(L, I_p) = RQ^{Gro}(\iota : L \to I) = \frac{2(p^2+p+1)}{7p^2+4p+1}.$$

Preuve. L est le graphe d'incidence du plan projectif sur le corps premier $\mathbb{F}_p$. Tous les sommets ont même degré $d = p+1$ (nombre de droites passant par un point donné, ou nombre de points sur une droite donnée), donc $m(c) = d$ pour tout $c \in L^0$. Notons n le nombre de sommets.

Pour le plongement $\iota : L \subset I$, deux sommets voisins dans L se trouvent à distance 1 dans I_p, donc $E(\iota) = \frac{1}{2}nd$. Le nombre de couples de voisins est nd.

Comme L n'a pas de cycles de longueur < 6, le nombre de couples de sommets à distance 2 dans L est égal au nombre de segments de longueur 2, soit $nd(d-1)$. Leur distance dans I_p vaut $\sqrt{3}$.

Comme le diamètre de L vaut 3, par deux points à distance 3 passent autant de chemins minimisants qu'un sommet possède de voisins, soit d. Le

nombre de segments de longueur 3 vaut $nd(d-1)^2$, donc le nombre de couples de points à distance 3 vaut $nd(d-1)^2/d = n(d-1)^2$. Leur distance dans I_p vaut 2.

Il vient

$$\begin{aligned} F(\iota) &= \frac{1}{2m(\emptyset)} \sum_{(c,c')} m(c)m(c')d(\iota(c),\iota(c'))^2 \\ &= \frac{1}{2nd} d^2(nd + 3nd(d-1) + 4n(d-1)^2) \\ &= \frac{d}{2}(1 + (d-1) + 3d(d-1) + 4(d-1)^2) \\ &= \frac{1+p}{2}(1 + 4p + 7p^2), \end{aligned}$$

d'où

$$RQ^{Gro}(\iota) = \frac{E(\iota)}{F(\iota)} = \frac{2(1+q+q^2)}{1+4p+7p^2}. \blacksquare$$

Malheureusement, $\lambda^{Gro}(L, I_p) < \frac{1}{2}$ pour tout $p \geq 2$, donc aucun théorème de point fixe n'en résulte. Noter que $RQ(\iota) = \frac{1}{2}$, et il est vraisemblable que $\lambda(L, Y) = \frac{1}{2}$ pour tout espace géodésique $CAT(0)$ Y.

6.10 Spéculation

Voici une version simplifiée de la Proposition 63.

Proposition 66 *Soit Y un espace géodésique $CAT(0)$. Soit C un graphe fini. Soit $\mathcal{L}$ une famille de lacets de longueur $\leq k$ (i.e. des applications du j-cycle, $j \leq k$, dans C). On note*

- *v la borne supérieure des valences des sommets de C.*
- *r la borne inférieure du nombre de lacets dans $\mathcal{L}$ qui contiennent une paire de sommets de C donnée.*
- *q la borne supérieure du nombre de lacets dans $\mathcal{L}$ qui contiennent une arête donnée.*
- *A le nombre d'arêtes de C.*

Alors

$$\lambda(C, Y) \geq \lambda^{Gro}(C, Y) \geq \frac{4Ar}{qkv^2} \frac{1}{2} |1 - e^{2i\pi/k}|^2.$$

En particulier, si $k = 6$ et $\frac{Ar}{qv^2} > \frac{3}{2}$, alors $\lambda^{Gro}(C, Y) > \frac{1}{2}$.

Preuve. On rappelle qu'on utilise la pondération uniforme, pour laquelle $m = 1$ pour les arêtes, et pour un sommet, $m(c)$ est la valence de c. Par exemple, $m(z) = 2$ pour tout sommet z du j-cycle C_j. Chaque élément de $\mathcal{L}$ a une longueur $j(\ell)$, i.e. est une application du $j(\ell)$-cycle $C_{j(\ell)}$ dans C^0. Par définition de r,

$$N(c, c') = \mathrm{card}(\{(\ell, z, z') \in \mathcal{L} \times C_{j(\ell)} \times C_{j(\ell)} \,|\, \ell(z) = c,\ \ell(z') = c'\}) \geq r.$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell \in \mathcal{L}} F(g \circ \ell) &= \sum_{\ell} \frac{1}{4j(\ell)} \sum_{z,\, z' \in C_{j(\ell)}} m(z)m(z')d(g \circ \ell(z), g \circ \ell(z'))^2 \\
&\geq \frac{1}{k} \sum_{\ell} \sum_{z,\, z' \in C_{j(\ell)}} d(g \circ \ell(z), g \circ \ell(z'))^2 \\
&\geq \frac{1}{kv^2} \sum_{c,\, c' \in C} v^2 N(c, c') d(g(c), g(c'))^2 \\
&\geq \frac{r}{kv^2} \sum_{c,\, c' \in C} m(c)m(c')d(g(c), g(c'))^2 = \frac{4Ar}{kv^2} F(g).
\end{aligned}$$

On applique le Lemme 62 à chaque lacet $\ell \in \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned}
E(g \circ \ell) &\geq \lambda^{Gro}(C_{j(\ell)}, Y) F(g \circ \ell) \\
&\geq \frac{1}{2} |1 - e^{2i\pi/k}|^2 F(g \circ \ell).
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} |1 - e^{2i\pi/k}|^2 \sum_{\ell \in \mathcal{L}} F(g \circ \ell) &\leq \sum_{\ell \in \mathcal{L}} E(g \circ \ell) \\
&= \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \sum_{e \text{ edge of } C_{j(\ell)}} d(g \circ \ell(ori(e)), g \circ \ell(extr(e)))^2 \\
&\leq q \sum_{e' \text{ edge of } C} d(g(orig(e')), g(extr(e'))^2 \\
&= q\, E(g),
\end{aligned}$$

et enfin

$$RQ(g) \geq RQ^{Gro}(g) \geq \frac{4Ar}{qkv^2} \frac{1}{2} |1 - e^{2i\pi/k}|^2. \blacksquare$$

Question. Un graphe aléatoire à n sommets, de degré $n^{1/3} < d < n^{1/2}$ admet-il une famille de lacets de longueur ≤ 6 qui satisfait $\frac{Ar}{qv^2} > \frac{3}{2}$?

7 Modèles de groupes aléatoires à densité

7.1 Les modèles

D'après Gromov [Gr1], un modèle de groupes aléatoires consiste à se donner une famille de lois de probabilité sur l'ensemble des présentations de groupes. Une présentation de groupe, c'est un ensemble de générateurs S et un ensemble de relateurs R, i.e. un sous-ensemble du groupe libre F_S. Dans ce texte, on va décrire des modèles portant sur des présentations finies. Pour simplifier, on se limite à des lois uniformes sur des ensembles finis. Il y a alors trois paramètres en jeu : le nombre m d'éléments de S, la longueur (ou bien longueur maximale) ℓ des éléments de R et le nombre N de relateurs. Un trop grand nombre de relateurs risque de rendre le groupe quotient $G = \langle S \mid R \rangle$ trivial. Gromov a découvert que même en prenant pour N une puissance du nombre de choix possibles, le groupe obtenu est souvent non trivial. Cela l'a conduit à choisir N de la forme

$$N = \frac{2m}{2m-1}(2m-1)^{d\ell},$$

où $0 < d < 1$. On parle alors de modèle *à densité* d.

Si on fixe m et on fait tendre ℓ vers l'infini, on obtient le modèle étudié par Gromov dans [Gr1]. Si on fixe $\ell = 3$ et on fait tendre m vers l'infini, on obtient un modèle étudié par A. Zuk dans [Z2]. On s'intéresse à des énoncés du type suivant. *On se place en densité d, i.e. on fixe $N \sim (2m-1)^{d\ell}$. La proportion des présentations possédant la propriété (P) tend vers 1 lorsque ℓ (resp. m) tend vers l'infini.* Lorsqu'une telle assertion est vraie, on dit que *la propriété (P) est génériquement vraie en densité d.*

Théorème 12 (Gromov, [Gr1], [O1]). *En densité $d > 1/2$, le groupe $G = \langle S \mid R \rangle$ est génériquement trivial. En densité $d < 1/2$, G est génériquement hyperbolique et infini.*

7.2 Généricité de la propriété (T)

A une présentation finie d'un groupe est associé un polyèdre fini $\mathcal{P}_{S,R}$, le *polyèdre de Cayley*, défini comme suit. On forme un bouquet de cercles,

un pour chaque générateur $s \in S$. Pour chaque relateur $r \in R$, on colle une 2-cellule sur le bouquet au moyen de l'application qui paramètre par le bord d'un disque le chemin décrit par le mot r. Par construction, le groupe fondamental du polyèdre de Cayley d'une présentation de G est G. Par conséquent, son revêtement universel comporte autant de sommets qu'il y a d'éléments de G. On peut construire directement le revêtement universel $\tilde{\mathcal{P}}_{S,R}$ comme suit. Il y a une arête numérotée s reliant deux éléments g et g' de G si $g' = gs$. Pour chaque relateur r et chaque élément $g \in G$, on colle une 2-cellule le long du chemin issu de g obtenu en suivant successivement les arêtes dont les numéros sont indiqués par le mot r.

Lorsque les relateurs sont de longueur 3, les 2-cellules sont des triangles. Toutefois, $\mathcal{P}_{S,R}$ n'est pas un complexe simplicial, puisqu'il n'a qu'un sommet. Son revêtement universel $\tilde{\mathcal{P}}_{S,R}$ non plus, car il arrive que deux arêtes aient les mêmes extrémités, ou que deux faces soient collées sur le même chemin. Néanmoins, on peut définir le lien d'un sommet dans $\tilde{\mathcal{P}}_{S,R}$. C'est un graphe $L(S,R)$ dont l'ensemble des sommets s'identifie à $S \cup S^{-1}$. Il y a une arête reliant z à z' chaque fois qu'il existe $z" \in S \cup S^{-1}$ tel que $z^{-1}z'z''$ ou $z'^{-1}z''z$ ou $z''^{-1}zz'$ appartient à R.

Théorème 13 (Zuk, [Z2]). *On se place dans le modèle où les relateurs sont de longueur 3. Si $d < 1/3$, génériquement G possède un quotient libre à deux générateurs. Si $d > 1/3$, génériquement le graphe $L(S,R)$ a un bas du spectre proche de 1. En particulier, il satisfait*

$$\lambda(L(S,R), \mathbf{R}) > \frac{1}{2}.$$

Preuve. On introduit un modèle de graphes aléatoires, et on montre que génériquement en densité $> 1/3$, $L(S,R)$ a les mêmes propriétés spectrales qu'un graphe aléatoire. ■

Corollaire 67 *Dans le modèle où les relateurs sont de longueur 3, et en densité $1/3 < d < 1/2$, le groupe associé à une présentation générique est infini et possède la propriété (T) de Kazhdan. En revanche, en densité $< 1/3$, il ne possède pas la propriété (T).*

Preuve. Comme le polyèdre de Cayley n'est pas à proprement parler un complexe simplicial, le résultat ne découle pas littéralement des méthodes du paragraphe 4.1, mais l'esprit est le même. Voir [Z2] pour les détails. ■

7.3 Autres modèles

Dans [Gr3], Gromov introduit un procédé de construction de groupes dont le graphe de Cayley est modelé sur un graphe donné. Il y a un choix supplémentaire, celui d'un étiquetage du groupe. Comme on peut faire ce choix au hasard, on obtient ainsi un nouveau modèle de groupe aléatoire. Pour des exposés de cette construction, voir [Gh] et [O3].

Des idées voisines de celles exposées dans ce texte (présence dans le graphe de Cayley d'un groupe d'un sous-graphe de grand λ_1) permettent de prouver que la propriété (T) (section 3 de [Gr3], [Si]) et une propriété de point fixe sur une classe d'espaces CAT(0) ([NS]) sont génériques aussi dans ce modèle.

7.4 Conclusion

Je ne crois pas qu'on connaisse des groupes infinis qui possèdent la propriété de point fixe sur tous les espaces CAT(0). Il est tentant d'appliquer le théorème de superrigidité de N. Monod, [Mon], mais les conditions de non évanescence ou de réductivité en limitent pour l'instant le champ d'application.

A ma connaissance, la question de savoir si la propriété de point fixe sur tous les espaces CAT(0) est générique dans un modèle de groupes aléatoires est encore ouverte.

La propriété FSI est strictement plus faible. En effet, M. Burger et S. Mozes ont construit dans [BM1], [BM2] des groupes simples (ils ont donc la propriété FSI) qui sont des réseaux dans des produits d'arbres, donc agissent sans point fixe sur un immeuble (voir aussi [CR]). Pourtant, on ne sait pas plus si elle est générique.

Références

[Bar] S. BARRE, *Immeubles de Tits triangulaires exotiques.* Ann. Fac. Sci. Toulouse, VI. Sér., Math. **9**, 575 – 603 (2000).

[Bas] H. BASS, *Groups of integral representation type.* Pac. J. Math. **86**, 15 – 51 (1980).

[BaS] W. BALLMANN, J. SWIATKOVSKY, *On L^2-cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell-complexes.* G.A.F.A. **7**, 615 – 645 (1997).

[Bo1] A. BOREL, *Introduction aux groupes arithmétiques.* Hermann, Paris (1969).

[Bo2] A. BOREL, *Cohomologie de certains groupes discrets et laplacien p-adique (d'après H. Garland).* Sém. Bourbaki 1973/74, Exposé **437**, Lect. Notes Math. **431**, Springer, Berlin, 12 – 35 (1975).

[BH] M. BRIDSON, A. HAEFLIGER, *Metric spaces of non-positive curvature.* Grundl. der Math. Wissensch. **319**. Springer, Berlin (1999).

[BM1] M. BURGER, S. MOZES, *Groups acting on trees : From local to global structure.* Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **92**, 113 – 150 (2000).

[BM2] M. BURGER, S. MOZES, *Lattices in product of trees.* Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **92**, 151 – 194 (2000).

[BS] M. BRODER, E. SHAMIR, *On the second eigenvalue of random regular graphs.* In 28th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE, 286 – 294 (1987).

[BT] F. BRUHAT, J. TITS, *Groupes reductifs sur un corps local.* Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **41**, 5 – 251 (1972).

[Ca] E. CARTAN, *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann.* Bull. Soc. Math. de France **54**, 214 – 264 (1926) et **55**, 114 – 134 (1927).

[CMSZ] D. CARTWRIGHT, A.-M. MANTERO, T. STEGER, A. ZAPPA, *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type $\tilde{A}_2$. I.* Geom. Dedicata **47**, 143 – 166 (1993). *II : The cases $q = 2$ and $q = 3$.* Geom. Dedicata **47**, 167 – 223 (1993).

[Ch] C. CHAMPETIER, *L'espace des groupes de type fini.* Topology **39**, 657 – 680 (2000).

[Co] K. CORLETTE, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry.* Ann. Math. **135**, 165 – 182 (1992).

[CR] P.-E. CAPRACE, B. REMY, *Simplicity and superrigidity of twin building lattices.* Preprint (2006), disponible sur arxiv : math.GR/0607664, et sur HAL : hal-00087683.

[DJ] J. DYMARA, T. JANUSKIEWICZ, *New Kazhdan groups.* Geom. Dedicata **80** 311 – 317 (2000).

[DV] P. DE LA HARPE, A. VALETTE, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts.* Astérisque **175**. Société Mathématique de France, Paris (1989).

[ES] J. EELLS, J.H. SAMPSON, *Harmonic maps of Riemannian manifolds.* Amer. J. Math. **86**, 109 – 160 (1964).

[FH] W. FEIT, G. HIGMAN, *The nonexistence of certain generalized polygons.* J. Algebra **1**, 114 – 131 (1964).

[Fr] J. FRIEDMAN, *On the second eigenvalue and random walks in random d-regular graphs.* Combinatorica **11**, 331 – 362 (1991).

[Ga] H. GARLAND, *p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups.* Ann. Math. **97**, 375 – 423 (1973).

[Gh] E. GHYS, *Groupes aléatoires (d'après Misha Gromov, ...).* Astérisque **294**, 173 – 204 (2004).

[GKM] T. GELANDER, A. KARLSSON, G. MARGULIS, *Superrigidity, generalized harmonic maps and uniformly convex spaces.* Preprint Yale University, (2006).

[GP] M. GROMOV, I. PIATETSKI-SHAPIRO, *Non-arithmetic groups in Lobachevsky spaces.* Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci. **66**, 93 – 103 (1988).

[Gr1] M. GROMOV, *Asymptotic invariants of infinite groups.* in Geometric group theory. Volume 2 : Proceedings of the symposium held at the Sussex University, Brighton, July 14-19, 1991. London Mathematical Society Lecture Note Series. **182**. Cambridge University Press. Cambridge (1993).

[Gr2] M. GROMOV, *CAT(κ)-spaces : construction and concentration.* J. Math. Sci., New York **119**, No.2, 178 – 200 (2004) ; translation from Zap. Nauchn. Semin. POMI **280**, 101 – 140 (2001).

[Gr3] M. GROMOV, *Random walk in random groups.* Geom. Funct. Anal. **13**, 73 – 146 (2003).

[GS] M. GROMOV, R. SCHOEN, *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one.* Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **76**, 165 – 246 (1992).

[GW] D. GROMOLL, J. WOLF, *Some relations between the metric structure and the algebraic structure of the fundamental group in manifolds of nonpositive curvature.* Bull. Amer. Math. Soc. **77**, 545 – 552 (1971).

[IN] H. IZEKI, S. NAYATANI, *Combinatorial harmonic maps and discrete-group actions on Hadamard spaces.* Geom. Dedic. **114**, 147 – 188 (2005).

[IKN] H. IZEKI, T. KONDO, S. NAYATANI, *Fixed point property of random groups.* Prépublication (2006).

[Jo] J. JOST, *Equilibrium maps between metric spaces.* Calc. Var. Partial Differ. Equ. **2** 173 – 204 (1994).

[Ka] D.A. KAZHDAN, *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups.* Funct. Anal. Appl. **1**, 63 – 65 (1967) ; translation from Funkts. Anal. Prilozh. **1**, 71 – 74 (1967).

[Kap] M. KAPOVICH, *Representations of polygons of finite groups.* Geometry and Topology, **9**, 1915 – 1951 (2005).

[Kl] B. KLINGLER, *Sur la rigidité de certains groupes fondamentaux, l'arithméticité des réseaux hyperboliques complexes, et les "faux plans projectifs".* Invent. Math. **153**, 105 – 143, (2003).

[KL] B.KLEINER, B. LEEB, *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings.* Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **86**, 115 – 197 (1997).

[Ko] T. KONDO, *Fixed-point property for $CAT(0)$ spaces.* Preprint Kyoto University, Kyoto-Math 2006-17 (2006).

[KS] N. KOREVAAR, R. SCHOEN, *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets.* Comm. Anal. Geom. **1**, 561 – 659 (1993).

[Ku] M. KURANISHI, *On the locally complete families of complex analytic structures.* Ann. Math. **75**, 536 – 577 (1962).

[Le] M. LEDOUX, *The concentration of measure phenomenon.* Math. Surveys and Monographs **89**, Amer. Math. Soc., Providence, (2001).

[LY] H. B. LAWSON, S.T. YAU, *Compact manifolds of nonpositive curvature.* J. Differen. Geom. **7** 211 – 228 (1972).

[Ma1] G.A. MARGULIS, *Arithmetic character and finite-dimensional representations of uniform lattices.* Funct. Anal. Appl. **8**, 258 – 259 (1974) ; translation from Funkts. Anal. Prilozh. **8**, 77 – 78 (1974).

[Ma2] G.A. MARGULIS, *Discrete groups of motions of manifolds of nonpositive curvature.* Proc. int. Congr. Math., Vancouver 1974, Vol. 2, 21 – 34 (1975).

[Ma3] G.A. MARGULIS, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups.* Ergebn. der Math. und ihrer Grenzgeb., 3. Folge, **17**. Springer, Berlin (1991).

[May] U.F. MAYER, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps.* Commun. Anal. Geom. **6**, 199 – 253 (1998).

[Mi] J. MILLSON, *Cycles and harmonic forms on locally symmetric spaces.* Can. Math. Bull. **28**, 3 – 38 (1985).

[Mok] N. MOK, *Harmonic forms with values in locally constant Hilbert bundles.* in "Conf. in honour of J.-P. Kahane, Orsay 1993", J. Fourier Anal. Appl., special issue, 433 – 454 (1995).

[Mon] N. MONOD, *Superrigidity for irreducible lattices and geometric splitting.* Prépublication ArXiv `math.GR/0504241`. To appear in J. Amer. Math. Soc.

[Mos] G.D. MOSTOW, *Existence of nonarithmetic monodromy groups.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **78**, 5948 – 5950 (1981).

[NS] A. NAOR, L. SILBERMAN, Work in progress.

[O1] Y. OLLIVIER, *Sharp phase transition theorems for hyperbolicity of random groups.* Geom. Funct. Anal. **14**, 595 – 679 (2004).

[O2] Y. OLLIVIER, *On a small cancellation theorem of Gromov.* To appear in Bull. Belg. Math. Soc.

[O3] Y. OLLIVIER, *A January 2005 invitation to random groups.* Ensaios Mat. **10**, (2005).

[P1] P. PANSU, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : Rigidité, arithméticité.* Séminaire Bourbaki. Volume 1993/94. Exposés **778**. Astérisque **227**, Société Mathématique de France, Paris 69 – 105 (1995).

[P2] P. PANSU, *Formules de Matsushima, de Garland et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles.* Bull. Soc. Math. France, **126**, 107 – 139 (1998).

[Pi] M. PICHOT, *Harmonic analysis from quasi-periodic domains.* Prépublication (2005).

[R1] Yu. RESHETNYAK, *A special mapping of a cone onto a polyhedron.* Mat. Sb., N. Ser. **53**, 39 – 52 (1961).

[R2] Yu. RESHETNYAK, *Inextensible mappings in a space of curvature no greater than K.* Sib. Mat. Zh. **9**, 918 – 927 (1968), Transl. Sib. Math. J. **9**, 918 – 927 (1968).

[Sch] V. SCHROEDER, *A splitting theorem for spaces of nonpositivce curvature.* Invent. Math. **79**, 323 – 327 (1985).

[Sh] Y. SHALOM, *Rigidity of commensurators and irreducible lattices.* Invent. Math. **141**, 1 – 54 (2000).

[Si] L. SILBERMAN, *Addendum to "Random walk in random groups" by M. Gromov.* Geom. Funct. Anal. **13**, 147 – 177 (2003).

[Ti1] J. TITS, *Classification of algebraic semisimple groups.* Proc. Symp. Pure Math. **9**, 33 – 62 (1966).

[Ti2] J. TITS, *Free subgroups in linear groups.* J. Algebra **20**, 250 – 270 (1972).

[Wa1] M.T. WANG, *A fixed point theorem of isometry action on Riemannian manifolds.* J. Differen. Geom. **50** 249 – 267 (1998).

[Wa2] M.T. WANG, *Generalized harmonic maps and representations of discrete groups.* Commun. Anal. Geom. **8**, 545 – 563 (2000).

[W1] A. WEIL, *Sur les surfaces à courbure négative.* C.R. Acad. Sci. Paris **182**, 1069 – 1071 (1926).

[W2] A. WEIL, *On discrete subgroups of Lie groups. I, II.* Ann. Math. **72**, 369 – 384 (1960) ; **75**, 578 – 602 (1962).

[Z1] A. ZUK, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres.* C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I **323**, 453 – 458 (1996).

[Z2] A. ZUK, *Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups.* Geom. Funct. Anal. **13**, 643 – 670 (2003).

Pierre Pansu
Laboratoire de Mathématique d'Orsay
UMR 8628 du C.N.R.S.
Bâtiment 425
Université Paris Sud - 91405 Orsay (France)
`Pierre.Pansu@math.u-psud.fr`
http ://www.math.u-psud.fr/∼pansu