Equations intégrales et éléments de frontière

Marc Bonnet

▶ **To cite this version:**

Marc Bonnet. Equations intégrales et éléments de frontière. CNRS Editions / Eyrolles, pp.328, 1995. hal-00121972

HAL Id: hal-00121972
https://hal.science/hal-00121972v1

Submitted on 20 Aug 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Equations intégrales et éléments de frontière

Applications en mécanique des solides et des fluides

CNRS Editions / Eyrolles

Marc BONNET
courrier électronique: *bonnet@lms.polytechnique.fr*

Octobre 1995

Avant-propos

Cet ouvrage est le fruit de cours effectués à l'Ecole Polytechnique (DEA de Mécanique des solides et des structures, formation doctorale) et également (en 1993) à la Faculté de Mathématiques de l'université de Bucarest.

Son propos est d'exposer la théorie et la mise en œuvre numérique des méthodes d'équations intégrales de frontière, comblant ainsi ce qui nous semble être un vide de la littérature francophone. Compte tenu du nombre et de la diversité des développements et applications existants ou potentiels, ce document ne prétend aucunement couvrir l'ensemble du sujet. Un large éventail d'aspects est néanmoins abordé, parmi lesquels :

- problèmes scalaires (Laplace, Poisson, Helmholtz...) et vectoriels (élasticité linéaire) ;
- statique et dynamique en domaine fréquentiel ou temporel ;
- approches par collocation et variationnelles ;
- mise en œuvre et exemples numériques ;
- dérivation des équations intégrales dans un domaine variable ;
- prise en compte de symétries géométriques ;
- représentations intégrales hypersingulières et applications aux solides fissurés.

Ce texte, conçu pour être raisonnablement autosuffisant sinon exhaustif, a l'ambition de permettre une bonne compréhension des fondements et des difficultés des méthodes d'équations intégrales, d'en délimiter les domaines d'applications existants et les potentialités, et de fournir les éléments nécessaires aux applications numériques.

L'exposé est principalement axé sur les problèmes avec géométries tridimensionnelles. Les travaux antérieurs de l'auteur influencent la présentation du sujet adoptée, notamment à travers le recours systématique à la régularisation indirecte, qui conduit à des formulations faiblement singulières et adaptées aux applications numériques. Elle correspond aux recherches et à la pratique modernes, et s'écarte de l'approche, employée dans les ouvrages classiques, qui repose sur la notion d'intégrale en valeur principale de Cauchy. En particulier, l'obtention de formulations intégrales sous forme régularisée, équivalentes à celles données dans la littérature classique mais ne faisant intervenir que des singularités faibles d'évaluation numérique aisée, est traitée en détail.

Pour aborder cet ouvrage, le lecteur doit avoir une certaine familiarité avec les équations aux dérivées partielles associées à certains des contextes physiques évoqués (solides, fluides, acoustique...) et avec les techniques usuelles d'approximation par

éléments finis. Les notions classiques d'analyse vectorielle (opérateurs différentiels classiques, intégrales multiples...), de géométrie différentielle élémentaire (courbes et surfaces), ainsi que l'algèbre tensorielle et ses conventions, sont supposées connues. Il n'est pour ainsi dire pas fait usage de notions mathématiques abstraites (analyse fonctionnelle), de sorte que l'ouvrage conserve un caractère relativement élémentaire.

De nombreuses références bibliographiques, françaises et étrangères, sont fournies. Certains points techniques sont traités en annexe.

Ce document a été composé par l'auteur à l'aide du traitement de textes scientifiques LaTeX.

REMERCIEMENTS. Je souhaite avant tout, à travers cet ouvrage, témoigner de mon respect pour Huy Duong BUI, qui fut mon directeur de thèse et mon responsable scientifique durant mes premières années au CNRS. On ne pourrait rêver meilleure initiation à la recherche en général et aux subtilités des méthodes intégrales en particulier.

Je souhaite également remercier Pierre BÉREST, Qoc Son NGUYEN, Jean SALENÇON et André ZAOUI pour m'avoir encouragé dans cette (trop?) lourde tâche, et adresser un amical et collectif salut à tous mes collègues et amis du laboratoire de Mécanique des solides et d'ailleurs.

Toute mon affection va plus que jamais à Bénédicte, Pierre et Benoît. Et ce d'autant plus qu'entreprendre la rédaction d'un ouvrage ne représente sans doute pas la meilleure nouvelle qu'on puisse rapporter à domicile !

Je dédie ce livre à la mémoire de Robert BONNET.

Table des matières

Introduction **1**

1 Principe et champs d'application **5**
1.1 Principe 5
1.2 Domaines d'application 7
1.3 Conduction de la chaleur 8
1.4 Ecoulement de fluides 9
1.5 Electromagnétisme 11
1.6 Elastostatique linéaire 12

I Statique

2 Représentations et équations intégrales pour l'équation de Poisson **17**
2.1 Représentation intégrale 18
2.2 Equation intégrale de frontière 23
2.3 Problèmes extérieurs et conditions à l'infini 26
2.4 Représentations et équations intégrales indirectes 29
2.5 Problèmes plans 31
Annexe 2.1 – Quelques formules utiles 33
Annexe 2.2 – Calcul de la solution élémentaire du laplacien 34
Annexe 2.3 – Intégrabilité de $r_{,n}/r^2$ 35
Références bibliographiques 36

3 Résolution numérique par éléments de frontière **37**
3.1 Représentation de la géométrie par éléments de frontière 37
3.2 Discrétisation des inconnues 42
3.3 Construction et résolution numérique du problème discrétisé 43
3.4 Calcul des intégrales élémentaires régulières 47
3.5 Calcul des intégrales élémentaires singulières 53
3.6 Traitement des intégrales de domaine 57
3.7 Sous-structuration 59
Références bibliographiques 61

4 Représentations et équations intégrales pour l'élastostatique 63
4.1 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti . . . 63
4.2 Solutions élémentaires de l'élasticité linéaire . . . 64
4.3 Formules de représentation intégrale . . . 68
4.4 Equation intégrale régularisée en déplacement . . . 70
4.5 Méthode des équations intégrales en élastostatique . . . 74
4.6 Equations intégrales pour les problèmes extérieurs . . . 76
4.7 Méthode des éléments de frontière . . . 78
4.8 Elasticité en déformations planes . . . 85
4.9 Exemples numériques . . . 87
Annexe 4.1 – Calcul de la solution de Kelvin tridimensionnelle . . . 90
Annexe 4.2 – Intégrale du vecteur contrainte de Kelvin . . . 93
Annexe 4.3 – Solution élémentaire pour le demi-espace . . . 95
Annexe 4.4 – Solution élémentaire pour deux demi-espaces joints . . . 97
Références bibliographiques . . . 98

5 Représentations de gradients ou contraintes à la frontière 99
5.1 Définition par passage à la limite . . . 101
5.2 Régularisation au second ordre . . . 102
5.3 Intégration par parties et régularisation au premier ordre . . . 104
5.4 Extension à l'élastostatique . . . 106
5.5 Equations intégrales indirectes . . . 110
5.6 Commentaires sur les équations intégrales . . . 114
5.7 Discrétisation par élements de frontière . . . 115
Annexe 5.1 – Identités intégrales sur les tenseurs de Kelvin . . . 118
Annexe 5.2 – Preuve de l'expression (5.16) du terme libre . . . 121
Annexe 5.3 – Preuve de l'expression (5.28) du terme libre élastique . . . 122
Références bibliographiques . . . 124

6 Quelques résultats mathématiques classiques 125
6.1 Problèmes fondamentaux de la théorie du potentiel . . . 125
6.2 Equations intégrales singulières de l'élasticité . . . 126
6.3 Tenseur de Green pour un domaine borné . . . 127
6.4 Problèmes fondamentaux de la théorie de l'élasticité . . . 127
Références bibliographiques . . . 128

II Ondes et problèmes d'évolution

7 Ondes et élastodynamique en domaine temporel 131
7.1 Equations des ondes et solutions élémentaires . . . 131
7.2 Représentation intégrale des solutions de l'équation des ondes . . . 133
7.3 Equations intégrales de frontière . . . 135
7.4 Problèmes extérieurs et conditions à l'infini . . . 138
7.5 Méthode des éléments de frontière en dynamique . . . 140
7.6 Equations de l'élastodynamique linéaire . . . 146
7.7 Solutions élémentaires élastodynamiques . . . 148

7.8 Représentations intégrales des états élastodynamiques 151
7.9 Equations intégrales de frontière en élastodynamique transitoire 153
7.10 Problèmes extérieurs et conditions à l'infini 155
7.11 Exemples numériques en élastodynamique transitoire 158
Références bibliographiques 160

8 Ondes et élastodynamique en domaine fréquentiel 161
8.1 Equation de Helmholtz et solutions élémentaires 161
8.2 Représentations et équations intégrales 163
8.3 Equations intégrales indirectes et problème des valeurs propres fictives . 166
8.4 Méthode des éléments de frontière en régime fréquentiel 168
8.5 Elastodynamique en variable fréquentielle 170
8.6 Représentations et équations intégrales en élastodynamique stationnaire 173
8.7 Exemples numériques en élastodynamique stationnaire 175
Références bibliographiques 182

9 Diffusion, écoulements fluides 183
9.1 Equation de la diffusion 183
9.2 Ecoulements fluides 185
Références bibliographiques 188

III Techniques complémentaires

10 Equations intégrales variationnelles 191
10.1 Formulation intégrale symétrique pour l'équation de Laplace 191
10.2 Formulation intégrale variationnelle pour le problème aux limites mixte 196
10.3 Stationnarité d'une fonctionnelle 198
10.4 Formulation variationnelle intégrale indirecte 199
10.5 Mise en oeuvre numérique des éléments finis de frontière 201
10.6 Elasticité 203
10.7 Commentaires 205
Références bibliographiques 206

11 Exploitation des symétries géométriques 207
11.1 Introduction 207
11.2 Symétries géométriques et problèmes aux limites 208
11.3 Equations intégrales de frontière et symétries géométriques 214
11.4 Discrétisation de l'équation intégrale (11.22) 216
11.5 Représentations intégrales aux points intérieurs 217
11.6 Exploitation des symétries : récapitulation 219
11.7 Exemple numérique en élastodynamique 220
Références bibliographiques 222

12 Dérivation par rapport au domaine **223**
12.1 Motivation . . . 223
12.2 Dérivation dans une variation de domaine . . . 224
12.3 Equation intégrale sur la dérivée première de l'état . . . 226
12.4 Equation intégrale régularisée sur les variations secondes de l'état . . . 231
12.5 Commentaires concernant les équations intégrales dérivées . . . 234
12.6 Discrétisation par éléments de frontière . . . 236
12.7 Exemples . . . 238
Annexe 12.1 – Dérivée de l'élément d'aire . . . 240
Annexe 12.2 – Preuve de l'identité (4.61) . . . 241
Annexe 12.3 – Expression de $(D_{ij}f)^\star$, $(D_if)^\star$, $(D_iu_i)^\star$ . . . 242
Annexe 12.4 – Expression symétrique de $K_1(x,u;\theta,\mu)$ . . . 243
Références bibliographiques . . . 244

IV Aspects complémentaires en mécanique des solides

13 Equations intégrales pour les solides élastiques fissurés **249**
13.1 Inapplicabilité des équations intégrales en déplacements . . . 249
13.2 Méthode de sous-structuration . . . 251
13.3 Méthode des discontinuités de déplacement pour un solide non borné . . . 252
13.4 Méthode des discontinuités de déplacement pour un solide borné . . . 257
13.5 Evaluation des facteurs d'intensité de contraintes en front de fissure . . . 259
13.6 Exemples numériques . . . 262
13.7 Formulations intégrales pour l'approche énergétique de la rupture fragile 265
Références bibliographiques . . . 269

14 Déformations ou contraintes initiales : inclusions, élastoplasticité **271**
14.1 Problèmes élastostatiques avec déformations ou contraintes initiales . . . 271
14.2 Champs élastiques créés par des inclusions . . . 275
14.3 Elastoplasticité en petites transformations . . . 276
14.4 Exemples de calculs élastoplastiques par éléments de frontière . . . 280
Références bibliographiques . . . 284

Annexes

A Opérateurs différentiels tangentiels et intégration par parties **287**

B Fonctions d'interpolation et intégration numérique **291**
B.1 Fonctions de forme usuelles : problèmes bidimensionnels . . . 291
B.2 Fonctions de forme usuelles : problèmes tridimensionnels . . . 292
B.3 Intégration numérique par points de Gauss . . . 296
Références bibliographiques . . . 298

Bibliographie **299**
Ouvrages généraux sur le sujet . . . 299
Thèses . . . 300
Articles . . . 301
Solutions fondamentales . . . 301
Thermique . . . 301
Géophysique et géodynamique . . . 302
Elasticité . . . 302
Mécanique des fluides . . . 302
Méthodes mathématiques et numériques . . . 303
Régularisation . . . 304
Problèmes avec non-linéarités . . . 305
Problèmes inverses, domaines variables . . . 306
Fissures, mécanique de la rupture . . . 307
Dynamique . . . 308
Formulations variationnelles intégrales . . . 309
Rapports internes et documents techniques . . . 310
Ouvrages d'intérêt général . . . 310

Index **313**

Introduction

La modélisation d'un grand nombre de situations d'intérêt pratique pour l'ingénieur conduit à la recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles, assorties de conditions aux limites et, pour les problèmes d'évolution, de conditions initiales, posées notamment par la mécanique des solides ou des fluides, l'acoustique, la thermique, l'électromagnétisme... Ces équations sont généralement posées sur des domaines géométriques ne permettant pas l'emploi des techniques classiques de recherche de solutions exactes : séparation de variables, transformations intégrales..., et doivent donc être résolues par des méthodes numériques. Les plus couramment utilisées sont les différences finies, les éléments finis et les éléments de frontière ; la méthode des caractéristiques ou l'approche spectrale sont également rencontrées.

La méthode des éléments de frontière repose sur la discrétisation d'équations intégrales de frontière. L'étude de ces dernières a commencé il y a plus d'un siècle et constitue une branche importante de la physique mathématique classique : la théorie du potentiel (voir, par exemple, les ouvrages de Kellogg [4], Gunther [3]). L'identité intégrale de Somigliana pour l'élastostatique, par exemple, a été publiée en 1886 [9]. Le développement de la méthode des éléments de frontière en tant qu'outil de résolution numérique est toutefois postérieur à celui des méthodes d'éléments finis et de différences finies. Les premiers développements numériques ont été proposés durant les années 1960 : Shaw [8], Rizzo [7], Cruse [2], pour n'en citer que quelques-uns.

La théorie du potentiel classique traite surtout de champs scalaires (température, potentiel électrostatique, ondes acoustiques, potentiel des vitesses d'un fluide parfait...) vérifiant des équations aux dérivées partielles faisant intervenir le laplacien : équations de Poisson, des ondes, de la diffusion... Par exemple, des solutions de l'équation de Poisson $\Delta u + f = 0$ peuvent être représentées comme combinaisons de *potentiels* créés dans l'espace par des sources distribuées sur un volume V ou une surface S, tels que les potentiels newtoniens :

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V f(\boldsymbol{y}) \frac{\mathrm{d}V_y}{|y - x|}$$

les potentiels de simple couche :

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \phi(\boldsymbol{y}) \frac{\mathrm{d}S_y}{|y - x|}$$

les potentiels ou de double couche :

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \psi(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|y - x|} \, \mathrm{d}S_y$$

On peut ainsi ramener la résolution de l'équation de Poisson à une équation intégrale, posée sur la frontière du domaine d'étude (la distribution f du potentiel newtonien étant donnée : forces, masse, production de chaleur...), d'inconnue ϕ ou ψ. On note que les potentiels sont exprimés en termes d'intégrales singulières pour $\boldsymbol{x} \in V, S$. L'étude de l'existence d'une solution, pour des conditions aux limites données, est alors ramenée à celle de l'existence d'une solution à une équation intégrale de frontière, ce qui permet d'appliquer les théorèmes de Fredholm (cf. Tricomi [10]), étendus aux équations intégrales singulières multidimensionnelles. Cette démarche a été étendue à l'élasticité statique et dynamique, notamment par Kupradze [5], [6], qui a défini des potentiels élastiques similaires aux potentiels scalaires et démontré, au moyen d'une approche de régularisation, que les théorèmes de Fredholm sont applicables aux équations intégrales pour les problèmes fondamentaux de l'élasticité.

Les équations intégrales issues de la théorie du potentiel portent sur une inconnue intermédiaire : une distribution (réelle ou fictive) de sources, et sont qualifiées d'"indirectes". Elles sont classiquement utilisées pour la formulation des problèmes fondamentaux (de Dirichlet, Neumann ou Robin). D'autres formulations intégrales, dites "directes", établissent une relation entre les variables physiques (potentiel et flux, déplacement et vecteur-contrainte) sur la frontière du domaine d'étude, et leur applicabilité n'est pas restreinte à des conditions aux limites spécifiques.

Les équations intégrales, directes comme indirectes, doivent bien sûr être résolues numériquement dans la plupart des cas, ce qui a entraîné l'apparition de la méthode des éléments de frontière. Celle-ci repose fortement sur l'adaptation de notions initialement créées et développées dans le contexte de la méthode des éléments finis (Batoz et Dhatt [1]) : maillage, interpolation par fonctions à support borné. L'avantage conceptuel des méthodes intégrales sur d'autres techniques comme les éléments finis est le gain d'une dimension d'espace pour la discrétisation : le support des inconnues est la frontière, et non le domaine qu'elle limite.

Eléments finis vs. éléments de frontière. La question de l'efficacité relative des méthodes d'éléments finis et d'éléments de frontière, objet de nombreuses discussions, nous semble peu pertinente. La méthode des éléments finis occupe une position dominante, son champ d'application étant incontestablement plus vaste que celui des méthodes intégrales, et notre intention dans cet ouvrage n'est nullement de défendre un point de vue contraire. Les méthodes intégrales présentent une supériorité pour le traitement de certaines situations (problèmes linéaires, propagation d'ondes, présence de milieux infinis, frontières mobiles ou inconnues). Il faut donc sans doute considérer les deux approches comme complémentaires plutôt que concurrentes ; l'intersection de leurs domaines de compétences est d'ailleurs loin d'être vide. Ce point de vue est parfois concrétisé par certaines méthodes mixtes reposant sur l'utilisation couplée des éléments finis (pour la portion du domaine d'étude siège de non-linéarités ou d'hétérogénéités de comportement) et de frontière (pour la partie complémentaire du domaine).

Organisation de l'ouvrage

Un chapitre introductif discute le champ d'application des méthodes intégrales et rappelle brièvement les équations de quelques classes de problèmes qu'il est possible de

résoudre numériquement par éléments de frontière.

Le corps de l'ouvrage est divisé en quatre parties principales. La première traite des équations intégrales associées à des problèmes statiques et décrit les aspects généraux de la discrétisation par éléments de frontière. Elle introduit des concepts qui sont essentiels, notamment en raison du fait que les difficultés liées à la manipulation d'opérateurs intégraux singuliers sont concentrées dans les termes statiques, et constitue donc le "noyau dur" de l'ouvrage. Elle s'achève par un court chapitre rappelant quelques résultats mathématiques classiques de la théorie du potentiel.

La seconde partie présente les méthodes intégrales pour des problèmes d'évolution : équations des ondes scalaires ou élastiques, en régime temporel ou fréquentiel, ainsi que l'équation de la diffusion.

La troisième partie regroupe quelques développements résultant de recherches récentes : équations intégrales variationnelles pour les problèmes aux limites mixtes, réduction du maillage par exploitation des symétries géométriques, dérivation des équations intégrales par rapport à un domaine variable.

La quatrième et dernière partie concerne deux aspects complémentaires importants pour la mécanique des solides : les solides élastiques fissurés et la résolution de problèmes avec déformations ou contraintes initiales et de problèmes élastoplastiques en petites transformations. Ces derniers constituent une classe importante de problèmes non-linéaires susceptibles d'être résolus numériquement par méthodes intégrales.

Une bibliographie générale, assez volumineuse, distingue ouvrages de référence et articles représentant des jalons importants. Enfin, quelques compléments plus techniques sont donnés en annexe : opérateurs différentiels tangentiels et intégration par parties sur des surfaces, fonctions de forme classiques ou modifiées. D'autres annexes sont renvoyées à la fin de certains chapitres.

Notations

Certaines conventions et notations, que nous définissons ici, sont utilisées fréquemment dans cet ouvrage. Leur emploi est implicite, et les cas d'utilisation d'une manière autre que celle définie ci-après font l'objet d'une mention explicite.

INDICES, VECTEURS, TENSEURS. Les caractères maigres (f, $x\ldots$) désignent des grandeurs scalaires, et les caractères gras ($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{\Sigma}\ldots$) des grandeurs vectorielles, matricielles ou tensorielles. De manière générale, la convention de sommation d'Einstein est employée, sauf mention explicite du contraire. Les indices romains : $i, j, k, l\ldots$ (resp. grecs : $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ldots$) prennent les valeurs $1, 2, 3$ (resp. $1, 2$).

GÉOMÉTRIE. On note $\boldsymbol{x} = x_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = y_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{z} = z_i\boldsymbol{e}_i$ des points de l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, rapporté à un repère cartésien orthonormé $\mathcal{R} = (\boldsymbol{O}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Pour les solutions élémentaires (champs créés par une source ponctuelle), on convient de désigner par $\boldsymbol{y}$ le point courant et par $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}$ des points fixés (sources, points d'observation, points de collocation…). Une normale unitaire à une surface est notée $\boldsymbol{n}$; sauf mention contraire, la normale à la frontière d'un domaine est prise extérieure au domaine.

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS. La dérivation partielle est souvent notée par une virgule :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_{,x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f_{,xy} \qquad \frac{\partial f}{\partial y_i} \equiv f_{,i} \dots$$

De plus, dans le cas de quantités (scalaires, vectorielles, tensorielles) fonctions de *deux* points de l'espace, nous convenons de noter :

$$f_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \frac{\partial}{\partial y_j} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad f_{,\bar{j}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

La dérivée normale sera notée $(\cdot)_{,n}$:

$$f_{,n}(\boldsymbol{y}) = f_{,i}(\boldsymbol{y}) n_i(\boldsymbol{y}) \qquad f_{,n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_i(\boldsymbol{y})$$

De plus, nous utiliserons les notations suivantes pour certains opérateurs différentiels.

Gradient : $\boldsymbol{\nabla}(\cdot) = (\cdot)_{,i} \otimes \boldsymbol{e}_i$.

Gradient surfacique : $\boldsymbol{\nabla}_S(\cdot) = \boldsymbol{\nabla}(\cdot) - (\cdot)_{,n} \otimes \boldsymbol{n}$. En coordonnées cartésiennes orthonormées, on pourra écrire :

$$\boldsymbol{\nabla}_S(\cdot) = D_i(\cdot) \otimes \boldsymbol{e}_i \qquad D_i(\cdot) = (\cdot)_{,i} - (\cdot)_{,n} n_i$$

définissant ainsi la notation D_i : trace tangentielle de la dérivation partielle.

Divergence : $\operatorname{div} = \boldsymbol{\nabla}(\cdot) : \mathbf{1}$. En coordonnées cartésiennes orthonormées :
$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = u_{i,i}$.

Divergence surfacique : $\operatorname{div}_S(\cdot) = \operatorname{div}(\cdot) - (\cdot)_{,n} . \boldsymbol{n} = D_i(\cdot) . \boldsymbol{e}_i$.

Références bibliographiques

[1] BATOZ, J. L., DHATT, G. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermes, Paris (1990).

[2] CRUSE, T. A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. *Int. J. Solids Struct.*, **5**, 1259–1274 (1969).

[3] GUNTHER, N. M. *La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique*. Gauthier-Villars, Paris (1934).

[4] KELLOGG, O. D. *Fundations of potential theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1967).

[5] KUPRADZE, V. D. *Dynamical problems in elasticity*, vol. 3 of *Progress in solids mechanics*. North Holland (1963).

[6] KUPRADZE, V. D. (ed.). *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North Holland (1979).

[7] RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quart. Appl. Math.*, **25**, 83–95 (1967).

[8] SHAW, R. P. Diffraction of acoustic pulses by obstacles of arbitrary shape with a Robin condition – part A. *J. Acoust. Soc. Am.*, **41**, 855–859 (1962).

[9] SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. *Il Nuovo Cemento, serie III*, **20**, 181–185 (1886).

[10] TRICOMI, F. G. *Integral equations*. Interscience Publishers, New York (1957).

1

Principe et champs d'application

Ce chapitre introductif débute par une brève présentation du principe permettant de formuler des équations intégrales (section 1.1). Une discussion générale des domaines d'application des méthodes intégrales est ensuite proposée (section 1.2). Une revue de situations physiques gouvernées par des équations aux dérivées partielles faisant intervenir le laplacien (sections 1.3 à 1.5), complétée par un rappel des équations de l'élasticité linéaire, donne une idée des problèmes qu'on peut envisager de résoudre à l'aide d'une formulation intégrale. Un grand nombre de situations physiques sont gouvernées par une équation de Laplace ou de Poisson, scalaire ou vectorielle, et sont donc susceptibles d'être abordées par les méthodes exposées aux chapitres 2 et 3.

1.1 Principe

Un problème aux limites, d'inconnue u, posé sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, 3)$ et associé à un opérateur aux dérivées partielles du second ordre $\mathcal{L}$ présente typiquement la structure suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{L}u + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g_1 & \text{sur } S_u \\ T^n(u) = g_2 & \text{sur } S_{\mathrm{T}} \end{array} \right. \tag{1.1}$$

où g_1, g_2 et la source f sont données, et $u \to T^n(u)$ est un opérateur différentiel du premier ordre sur u et linéaire par rapport à la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ à $\partial\Omega$ extérieure à Ω ; S_u, S_{T} définissent une partition de la frontière $\partial\Omega$.

On montre qu'il est possible d'associer à chaque opérateur $\mathcal{L}$ une *formule de réciprocité* :

$$\int_\Omega (\mathcal{L}u.v - \mathcal{L}v.u)\, \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} (T^n(u).v - T^n(v).u)\, \mathrm{d}S \tag{1.2}$$

Remplaçons alors v par une solution particulière, dite *élémentaire*, qui vérifie l'équation locale $(1.1)_1$ pour une source ponctuelle $f(\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ appliquée en un point fixé $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$; notons $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ cette solution élémentaire, fonction du point courant $\boldsymbol{y}$. On

rappelle que la mesure de Dirac $\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ est définie par la propriété :

$$\int_\Omega \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y = \kappa u(\boldsymbol{x}) \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} \kappa = 1 & \boldsymbol{x}\in\Omega \\ \kappa = 0 & \boldsymbol{x}\notin\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

La substitution de v par G dans l'identité de réciprocité (1.2) conduit ainsi à la relation suivante, vraie pour $\boldsymbol{x}\notin\partial\Omega$:

$$\kappa u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega f(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y + \int_{\partial\Omega}[u(\boldsymbol{y})T^nG(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - T^nu(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\,\mathrm{d}S_y \tag{1.4}$$

Cette *formule de représentation intégrale* donne explicitement la valeur de u en tout point $\boldsymbol{x}$ intérieur à Ω comme somme :

- d'une intégrale de domaine contenant la source f, solution particulière de $(1.1)_1$ ne vérifiant en général pas les conditions aux limites $(1.1)_{2,3}$;
- d'un terme intégral sur $\partial\Omega$ faisant intervenir les valeurs de u, T^nu, pour moitié prescrites par les conditions aux limites $(1.1)_{2,3}$ et pour moitié inconnues.

Elle réalise ainsi une "quasi-inversion" de l'équation $(1.1)_1$, le calcul de u dans Ω étant ramené à celui des valeurs de (u, T^nu) sur $\partial\Omega$ restées inconnues après prise en compte des conditions aux limites $(1.1)_{2,3}$. Il est ainsi possible de restreindre le support géométrique de la phase de résolution (détermination d'un champ inconnu), et donc une éventuelle discrétisation, à la frontière $\partial\Omega$: on a "gagné" une dimension d'espace.

PRINCIPE DE LA MÉTHODE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES. La formule de représentation (1.4) n'est a priori valable que pour $\boldsymbol{x}\notin\partial\Omega$. Il reste donc à formuler une *équation intégrale de frontière* qui ne porterait que sur les valeurs à la frontière de u, T^nu. Toutefois, il s'avère que, pour les problèmes bi- ou tridimensionnels, les solutions élémentaires G sont telles que T^nG présente en $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ une singularité non intégrable, et il n'est donc pas correct d'écrire directement (1.4) pour $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$. L'obtention d'une équation intégrale de frontière à partir de (1.4) repose donc sur un passage à la limite. Une fois celui-ci accompli, la méthode des équations intégrales procède en deux temps :

1. Résolution de l'*équation intégrale de frontière*, permettant de connaître les valeurs de $(u, T^nu)\,|_{\partial\Omega}$ en tout point de $\partial\Omega$.
2. Application de la formule de *représentation intégrale* (1.4), permettant le calcul explicite de la valeur de $u(\boldsymbol{x})$ en tout point intérieur $\boldsymbol{x}$.

Ceci doit être considéré comme le canevas d'une méthode de résolution *numérique*, applicable à des géométries et des conditions aux limites quelconques, la résolution analytique des équations intégrales n'étant que rarement envisageable.

REMARQUE. On note qu'aucune condition aux limites n'entre dans la définition de G, qui n'est donc pas définie de manière unique. Le plus souvent, on utilise la solution G associée à l'espace infini $\mathbb{R}^n$ entier, qui est le choix le plus simple.

1.2 Domaines d'application

La formulation d'équations intégrales de frontière est intimement liée à la présence d'un opérateur différentiel linéaire dans les équations locales vérifiées par les champs physiques ; les équations intégrales indirectes reposent sur un principe de superposition. Les méthodes d'éléments de frontière permettent donc principalement la résolution numérique de problèmes régis par des équations aux dérivées partielles linéaires : équation de Laplace ou de Poisson (problèmes de potentiel scalaire, d'origines physiques très nombreuses), équation des ondes en régime fréquentiel ou temporel (propagation acoustique ou électromagnétique), équations de l'élastostatique ou de l'élastodynamique linéaires, équation biharmonique (flexion des plaques élastiques). Les milieux physiques considérés doivent avoir des caractéristiques homogènes.

Mécanique des solides déformables. Dans le domaine de la Mécanique des solides, les éléments de frontière sont notamment appliqués au calcul des structures élastiques. Dans ce cas, les efficacités relatives (en termes de nombre d'inconnues et de temps de calcul) des méthodes d'éléments finis et d'équations intégrales dépendent entre autres du caractère massif ou élancé du solide considéré. De nombreuses applications concernent également les solides fissurés, dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile : les difficultés soulevées par le maillage par éléments finis de domaines tridimensionnels fissurés, liées en particulier à la nécessité de raffiner le maillage autour du front de fissure, rendent avantageux l'emploi d'éléments de frontière, en particulier pour l'étude de l'avancement d'un front de fissure.

Problèmes extérieurs. Un des points forts des méthodes fondées sur les équations intégrales est la possibilité de traiter des domaines infinis ou semi-infinis sans avoir à tronquer artificiellement le domaine d'étude. Ce point est particulièrement important en dynamique, où une frontière artificielle crée des réflexions parasites (non physiques) d'ondes sortantes. De plus, l'utilisation de méthodes d'éléments finis ou de différences finies pour les problèmes de propagation d'ondes pose d'autres difficultés liées au fait que la discrétisation du domaine introduit une anisotropie artificielle des propriétés de propagation du milieu modélisé[1]. Les problèmes faisant intervenir des milieux considérés comme infinis sont donc prioritairement traités par équations intégrales et éléments finis de frontière, notamment en dynamique. Ceci correspond à des applications pour l'acoustique (propagation en milieu ouvert, aérien ou sous-marin), la simulation des ondes élastiques (par exemple en géophysique, sismologie et génie parasismique), la propagation des ondes électromagnétiques, le calcul des champs élastiques créés par des inclusions, ainsi que tous les problèmes couplés dont l'un des composants occupe un domaine infini (couplage sol/structure ou sol/fluide/structure).

Problèmes avec non-linéarités. Le fait que les formulations intégrales reposent sur la présence d'un opérateur linéaire n'implique pas l'impossibilité de considérer des non-linéarités géométriques ou de comportement. Quand les équations du problème

[1] Voir la référence Bamberger A., Chavent G., Lailly Cl. : *Etude de schémas numériques pour les équations de l'élastodynamique linéaire*, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, rapport no. 41, 1980.

présentent une partie non-linéaire (comportement élasto-plastique, non-linéarités liées à des conditions aux limites ou des variations du domaine géométrique d'étude), on est conduit à la résolution d'une succession de problèmes linéaires. Les contributions des non-linéarités prennent souvent la forme de termes additionnels de sources (assimilables à des déformations ou contraintes initiales pour le cas de l'élastoplasticité), qui conduisent à des intégrales de domaine connues (le support des inconnues étant toujours la frontière), ce qui fait perdre une partie de l'avantage à formuler un problème sur la frontière plutôt que sur le domaine. Il est difficile à l'heure actuelle de donner un jugement définitif quant à l'efficacité comparée des méthodes d'éléments finis et d'équations intégrales pour le traitement de non-linéarités, qui dépend fortement de l'étendue relative de la zone géométrique atteinte par les non-linéarités.

DOMAINES VARIABLES OU INCONNUS. La méthode des équations intégrales est aussi bien adaptée à la résolution de problèmes dont une variable principale est le domaine, variable ou inconnu : propagation de fissures ou de zones d'endommagement, optimisation de la forme de structures, problèmes inverses à domaine inconnu (identification d'obstacles, d'inclusions, de fissures...), problèmes à surface libre inconnue (simulation de nappes aquatiques souterraines, ondes de gravité). Cet aspect de l'utilisation des méthodes intégrales est encore dans une phase de développement, et devrait progresser fortement durant les prochaines années.

1.3 Conduction de la chaleur

La température T d'un milieu Ω de conductivité $\boldsymbol{k}$ (homogène mais éventuellement anisotrope, $\boldsymbol{k}$ étant alors un tenseur d'ordre 2 symétrique), régi par la loi de Fourier (flux thermique q relié à T par $q = -\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\nabla} T$), à l'équilibre thermique sous l'effet d'une source de chaleur interne répartie r et de sollicitations externes (température ou flux thermique imposés, condition d'échange avec le milieu ambiant), vérifie l'équation locale :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\nabla} T) + r = 0 \tag{1.5}$$

qui, pour une conductivité isotrope ($\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{I}$), se réduit à une équation de Poisson :

$$k\Delta T + r = 0 \tag{1.6}$$

En régime transitoire, la température T dépend également du temps et vérifie l'équation locale de la diffusion :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{k}.\boldsymbol{\nabla} T - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + r = 0 \tag{1.7}$$

où c est la chaleur massique et ρ la masse volumique.

Les formulations intégrales associées à l'équation de Poisson (1.6) ou sa généralisation anisotrope (1.5), font l'objet des chapitres 2, 3 ; celle associée à l'équation de diffusion (1.7) étant traitée au chapitre 9.

CONDUCTIVITÉ THERMIQUE NON-LINÉAIRE. Le cas où la conductivité est fonction de la température ($k = k(T)$) peut être ramené à une équation de Laplace grâce à la *transformation de Kirchhoff*, qui consiste en l'introduction d'une inconnue auxiliaire ϕ définie par :

$$\phi(\boldsymbol{y}) = -\int_{T_0}^{T(y)} k(\tau)d\tau \tag{1.8}$$

de sorte que l'équation de la chaleur (1.6) se ramène à :

$$\Delta\phi = r$$

Le flux thermique est alors donné par :

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\nabla}\phi$$

Ainsi, la transformation (1.8) linéarise l'équation locale de conduction (1.6) *et* les conditions aux limites en flux imposé. Si la température est donnée en un point, la transformation (1.8) lui associe une valeur donnée de ϕ, et le problème en ϕ est linéaire.

1.4 Ecoulement de fluides

ECOULEMENTS DE FLUIDES PARFAITS. Le champ des vitesses $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y}, t)$ d'un écoulement de fluide parfait (c'est-à-dire non visqueux) incompressible et irrotationnel dérive d'un potentiel $\phi(\boldsymbol{y}, t)$: $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\nabla}\phi$ qui satisfait (condition d'incompressibilité) l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0$$

Cette équation locale est complétée par des conditions aux limites cinématiques : imperméabilité de parois ou d'obstacles ($\phi_{,n} = \boldsymbol{\nabla}\phi.\boldsymbol{n} = 0$), donnée d'une vitesse à l'infini... ou dynamiques : équilibre avec la pression ambiante... de sorte que ϕ soit solution d'un problème bien posé. Bien que le laplacien ne porte que sur les coordonnées spatiales, ϕ pourra (en cas d'écoulement instationnaire) dépendre du temps. Une fois le potentiel des vitesses calculé (par exemple par la méthode des éléments de frontière...), le théorème de Bernoulli généralisé :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}|\boldsymbol{U}|^2 + g + \frac{\partial\phi}{\partial t} = C$$

(g : intensité de la pesanteur, ρ : masse volumique, C : constante valable dans toute la région fluide) permet l'évaluation du champ de pression $p(\boldsymbol{y}, t)$ en tout point $\boldsymbol{y}$ de la région fluide et à tout instant t.

On peut également faire dériver $\boldsymbol{U}$ d'un potentiel vecteur : $\boldsymbol{U} = \mathbf{rot}\boldsymbol{\psi}$, qui vérifie (condition d'irrotationnalité) l'équation de Laplace vectorielle :

$$\Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$$

Le potentiel vecteur devient scalaire ($\boldsymbol{\psi} = \psi\boldsymbol{e}_3$) pour les écoulements plans perpendiculaires à $\boldsymbol{e}_3$ et vérifie donc l'équation de Laplace à deux dimensions.

ECOULEMENTS SOUTERRAINS. L'écoulement souterrain d'un fluide parfait incompressible et suivant la loi de Darcy ($\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\nabla}\phi$, où $\phi = p/\rho + gz$ est la charge statique et $\boldsymbol{k}$ le tenseur des conductivités hydrauliques) est un autre exemple de problème gouverné par l'équation de Laplace :

$$k\Delta\phi = 0 \quad \text{(cas isotrope)} \qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0 \quad \text{(cas anisotrope)}$$

ACOUSTIQUE. Le potentiel des vitesses ϕ pour les petits mouvements irrotationnels, autour du repos ($\boldsymbol{U}(\boldsymbol{y},t) = 0$, $p(\boldsymbol{y},t) = p_0$, $\rho(\boldsymbol{y},t) = \rho_0$), d'un fluide parfait compressible barotrope (la loi de comportement donne ρ en fonction de p : $\rho = h(p)$) vérifie l'équation des ondes scalaire :

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \qquad \frac{1}{c^2} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\rho}(\rho_0)$$

c étant la célérité des ondes acoustiques. Les variables physiques sont alors reliées au potentiel des vitesses par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{y},t) &= \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{y},t) \\ p(\boldsymbol{y},t) - p_0 &= -\rho_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{Cste}(t) \\ \rho(\boldsymbol{y},t) - \rho_0 &= \frac{1}{c^2}[p(\boldsymbol{y},t) - p_0] \end{aligned}$$

Les formulations intégrales pour l'équation des ondes font l'objet des chapitres 7 (variable temporelle) et 8 (variable fréquentielle).

ECOULEMENTS LENTS DE FLUIDES VISQUEUX INCOMPRESSIBLES. Les champs de vitesse $\boldsymbol{U}$ et de pression p d'un fluide incompressible de viscosité μ vérifient l'équation de Navier-Stokes et la condition d'incompressibilité :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\Delta\boldsymbol{U} = \rho\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{U}.\boldsymbol{U}\right) - \rho g\boldsymbol{e}_3 \\ \operatorname{div}\boldsymbol{U} = 0 \end{cases}$$

qui se réduisent, pour les mouvements lents stationnaires et en l'absence de gravité, à :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla}p + \mu\Delta\boldsymbol{U} = 0 \\ \operatorname{div}\boldsymbol{U} = 0 \end{cases}$$

Elles sont associées à des conditions aux limites cinématiques (exemples : adhérence à un obstacle ($\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{obstacle}$), vitesse à l'infini donnée) ou dynamiques (exemple : équilibre avec la pression ambiante). La formulation intégrale du système de Stokes est traitée au chapitre 9.

1.5 Electromagnétisme

Les champs électrique $\boldsymbol{E}$ et magnétique $\boldsymbol{B}$ ainsi que la densité de charge électrique ρ dans un milieu linéaire, isotrope, homogène et stationnaire (conductivité électrique σ,

susceptibilités électrique χ_e et magnétique χ_m) vérifient les équations de Maxwell :

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0(1+\chi_e)} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{rot}\boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \\ \mathbf{rot}\boldsymbol{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mu_0(1+\chi_m)\sigma\boldsymbol{E} \end{array}\right. \tag{1.9}$$

où $c^2 = (\varepsilon_0(1+\chi_e)\mu_0(1+\chi_m))^{-1}$ est la célérité des ondes électromagnétiques dans le milieu considéré ; $\varepsilon_0 =$ et $\mu_0 =$ sont les constantes du vide. Une combinaison adéquate des équations ci-dessus donne les équations aux dérivées partielles vérifiées par $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$:

$$\begin{array}{l} \Delta\boldsymbol{E} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu_0(1+\chi_m)\sigma\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{\varepsilon_0(1+\chi_e)}\boldsymbol{\nabla}\rho \\ \Delta\boldsymbol{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} - \mu_0(1+\chi_m)\sigma\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \end{array} \tag{1.10}$$

Electrostatique. Le champ électrique dérive d'un potentiel scalaire : $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}V$, qui vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0(1+\chi_e)} = 0 \tag{1.11}$$

L'état électrostatique induit par un domaine chargé Ω est alors obtenu par résolution de l'équation ci-dessus assortie de conditions aux limites sur la frontière : potentiel donné ($V = V_D$), isolation ($\boldsymbol{\nabla}V.\boldsymbol{n} = 0$), etc.

Ondes. Si les constantes physiques en présence sont telles que :

$$\sigma\varepsilon_0(1+\chi_e)\mu_0^2(1+\chi_m)^2 \ll 1$$

le terme de diffusion dans (1.10) est négligé devant celui de propagation. Les champs $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ vérifient alors (en l'absence de charge électrique) l'équation des ondes (chapitre 7) vectorielle :

$$\Delta\boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$$

Si on suppose des variations temporelles sinusoïdales ($\boldsymbol{H}(\boldsymbol{y}, t) = \hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{y})e^{i\omega t}$), on obtient l'équation de Helmholtz (chapitre 8) vectorielle :

$$\{\Delta + \omega^2\}\hat{\boldsymbol{H}} = \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$$

qui résulterait aussi d'une transformation de Fourier en temps.

Induction. Inversement, si les constantes physiques en présence sont telles que :

$$\sigma\varepsilon_0(1+\chi_e)\mu_0^2(1+\chi_m)^2 \gg 1$$

le terme de propagation dans (1.10) est négligé devant celui de diffusion. Les champs $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ vérifient alors (en l'absence de charge électrique) l'équation vectorielle de diffusion (voir chapitre 9) :

$$\Delta\boldsymbol{H} - \mu_0(1+\chi_m)\sigma\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \qquad (\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$$

On cherche souvent à évaluer les *courants de Foucault* $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$ induits dans un solide conducteur par l'application d'un champ magnétique extérieur $\boldsymbol{B}_0$ connu, et l'échauffement (souhaité ou nuisible) créé par effet Joule induit.

PROBLÈMES BIDIMENSIONNELS. Le champ magnétique dérive d'un potentiel vecteur : $\boldsymbol{B} = \mathbf{rot}\boldsymbol{A}$. En deux dimensions d'espace, on peut se ramener à un potentiel scalaire $\boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e}_3$ et poser (par exemple) les problèmes de propagation de champs électromagnétiques ou d'induction en termes d'équations des ondes ou de diffusion scalaires.

1.6 Elastostatique linéaire

L'équilibre élastique d'un solide occupant le domaine Ω, sous l'hypothèse des petites perturbations, est caractérisé par les équations locales suivantes reliant les champs de déplacement $\boldsymbol{u}$, de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ vérifiées en tout point de Ω :

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \tag{1.12}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = C_{ijkl}u_{k,l} \tag{1.13}$$

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0 \tag{1.14}$$

dans lesquelles la distribution massique de forces $\boldsymbol{F}$ peut traduire des effets variés : pesanteur, inertie ou effets thermiques (voir chapitre 4), termes inélastiques, déformations ou contraintes initiales (voir chapitre 14)... Les constantes élastiques du matériau, qui interviennent dans la relation de comportement élastique (1.13), sont regroupées dans le tenseur du quatrième ordre $\boldsymbol{C}$, dit tenseur de Hooke. Celui-ci vérifie les symétries :

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \tag{1.15}$$

de sorte que le comportement élastique le plus général est représenté par 21 coefficients indépendants. Tout triplet $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{F})$ vérifiant (1.12–1.13–1.14) sera qualifié d'*état élastostatique* sur Ω.

La frontière $\partial\Omega$ supporte par ailleurs des conditions aux limites : par exemple, efforts de contact $\boldsymbol{t}^D$ appliqués sur $S_\mathrm{T} \subset \partial\Omega$:

$$\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}) \equiv \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}^D \qquad \text{sur } S_\mathrm{T}$$

et déplacements $\boldsymbol{u}^D$ imposés sur la portion complémentaire $S_u = \partial\Omega - S_\mathrm{T}$:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^D \qquad \text{sur } S_u$$

Les relations (1.12), (1.13), (1.14) combinées conduisent à l'équation de Navier gouvernant les déplacements :

$$\boldsymbol{\Delta}^*\boldsymbol{u} + \rho\boldsymbol{F} = 0 \qquad \text{avec} \qquad \boldsymbol{\Delta}^*\boldsymbol{u} \equiv C_{ijkl}u_{k,lj}\boldsymbol{e}_i \tag{1.16}$$

ELASTICITÉ ISOTROPE. Le tenseur de Hooke $\boldsymbol{C}$ ne dépend alors plus que de deux constantes élastiques indépendantes : λ, μ (constantes de Lamé) ou E, ν (module d'Young et coefficient de Poisson), avec :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Il est donné par :

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) = \mu(\frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1.17}$$

L'expression du vecteur-contrainte en fonction du déplacement est :

$$\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}) = 2\mu\boldsymbol{u}_{,n} + \lambda\boldsymbol{n}\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} + \mu\boldsymbol{n}\wedge\mathbf{rot}\boldsymbol{u} \tag{1.18}$$

L'opérateur $\boldsymbol{\Delta}^*$ de l'équation de Navier (1.16) s'écrit :

$$\boldsymbol{\Delta}^* = \mu\boldsymbol{\Delta} + (\lambda+\mu)\boldsymbol{\nabla}\mathrm{div} \tag{1.19}$$

Enfin, on rappelle que toute solution de l'équation de Navier isotrope (1.16)–(1.19) admet une représentation de la forme :

$$\boldsymbol{u} = 2(1-\nu)\boldsymbol{\Delta G} - \boldsymbol{\nabla}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{G}) \tag{1.20}$$

où, par substitution de (1.20) dans (1.16), le *vecteur de Galerkin* $\boldsymbol{G}$ vérifie :

$$\boldsymbol{m}\Delta\Delta\boldsymbol{G} + \frac{\rho}{2\mu(1-\nu)}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$$

ELASTICITÉ ANTIPLANE. Il s'agit de situations particulières où le domaine d'étude Ω est invariant par translation le long de $\boldsymbol{e}_3$ et le champ de déplacement est cherché de la forme :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = u(y_1, y_2)\boldsymbol{e}_3$$

Dans ce cas, les seules composantes non nulles de $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont :

$$2\varepsilon_{\alpha 3} = u_{,\alpha} \quad \sigma_{\alpha 3} = 2\mu\varepsilon_{\alpha 3} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

et l'équation de Navier (1.16) se réduit à l'équation scalaire :

$$\Delta_2 u + F = 0$$

c'est-à-dire l'équation de Poisson en deux dimensions.

Partie I

Statique

2

Représentations et équations intégrales pour l'équation de Poisson

Ce chapitre décrit les représentations et équations intégrales pour les problèmes associés à l'équation de Poisson:

$$\Delta u + b = 0 \qquad \boldsymbol{y} \in \Omega \tag{2.1}$$

posée sur un domaine borné tridimensionnel Ω, d'inconnue u (nommée *potentiel* dans ce chapitre), la source b étant donnée. Le champ u est également astreint à vérifier une condition à la limite en tout point de la frontière $\partial\Omega$. Les problèmes fondamentaux associés à l'équation (2.1) correspondent aux cas du flux imposé sur toute la frontière (*problème de Neumann*):

$$q(\boldsymbol{y}) \equiv \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{y}).\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}) = q^D(\boldsymbol{y}) \qquad (\boldsymbol{y} \in \partial\Omega)$$

et du potentiel imposé sur toute la frontière (*problème de Dirichlet*):

$$u(\boldsymbol{y}) = u^D(\boldsymbol{y}) \qquad (\boldsymbol{y} \in \partial\Omega)$$

On considère aussi fréquemment des conditions mixtes: flux donné sur une partie S_{q} de la frontière et potentiel donné sur la partie complémentaire $S_u = \partial\Omega - S_q$. Des conditions aux limites plus générales sont parfois envisagées, par exemple la donnée d'une combinaison linéaire du potentiel et du flux[1].

Le corps de l'exposé porte sur les situations tridimensionnelles, le passage aux problèmes plans étant traité en section 2.5.

Hypothèses géométriques. On considère un domaine borné[2] $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$, supposée régulière (C^2 au moins) par morceaux, admet la présence de coins ou d'arêtes[3] et n'est pas nécessairement connexe[4]. L'intérieur de chacune des

[1] Par exemple, certains échanges thermiques avec l'extérieur d'un milieu conducteur Ω sont tels que le flux thermique à travers $\partial\Omega$ est proportionnel à la différence entre les températures extérieure ambiante et de surface du corps.

[2] L'extension aux domaines infinis est traitée en section 2.3.

[3] Plus généralement, on admet la présence d'un nombre fini de points où concourent plusieurs plans tangents, comme les sommets d'un polyèdre, mais pas de points de rebroussement.

[4] Penser à un domaine avec plusieurs cavités.

composantes connexes est supposé *de mesure non nulle*, excluant la présence de lignes ou surfaces de discontinuité telles qu'écrans, fissures... qui relèvent d'un traitement distinct (chapitre 5). La normale unitaire est, par convention, extérieure à Ω.

2.1 Représentation intégrale

La démarche permettant d'établir une formule de représentation intégrale, présentée en section 1.1 pour un opérateur différentiel linéaire quelconque $\mathcal{L}$, est maintenant appliquée avec $\mathcal{L} \equiv \Delta$ (laplacien) et $T^n \equiv \boldsymbol{\nabla}().\boldsymbol{n}$ (dérivée normale).

IDENTITÉ DE RÉCIPROCITÉ. Multiplier l'équation de Poisson d'inconnue u^1 par un champ u^2 et intégrer le résultat sur Ω conduit à:

$$\int_{\partial\Omega} q^1 u^2 \,\mathrm{d}S + \int_\Omega (b^1 u^2 - \boldsymbol{\nabla} u^1 . \boldsymbol{\nabla} u^2) \,\mathrm{d}V = 0 \tag{2.2}$$

par application à $\boldsymbol{v} = u^2 \boldsymbol{\nabla} u^1$ de la formule de la divergence:

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}) \,\mathrm{d}S$$

Si (u^1, u^2) sont deux potentiels vérifiant (2.1) avec les sources (b^1, b^2), l'application de la formule (2.2) à (u^1, q^1, b^1) pour la fonction-test u^2 puis à (u^2, q^2, b^2) pour la fonction-test u^1 suivie de la soustraction membre à membre des relations obtenues conduit à l'identité de réciprocité:

$$\int_{\partial\Omega} (q^1 u^2 - q^2 u^1) \,\mathrm{d}S = \int_\Omega (b^2 u^1 - b^1 u^2) \,\mathrm{d}V \tag{2.3}$$

Celle-ci peut aussi, compte tenu de l'équation de Poisson vérifiée par les deux états, être écrite sous la forme bien connue de la *troisième formule de Green*:

$$\int_{\partial\Omega} (q^1 u^2 - q^2 u^1) \,\mathrm{d}S = \int_\Omega (u^2 \Delta u^1 - u^1 \Delta u^2) \,\mathrm{d}V \tag{2.4}$$

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES. Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^3$. On appelle *solution élémentaire* une solution $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de (2.1) pour une source ponctuelle unitaire $b(\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ appliquée en un point fixé $\boldsymbol{x} \in E$, vérifiant donc:

$$G_{,jj}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = 0 \qquad (\boldsymbol{y} \in E) \tag{2.5}$$

la notation $f_{,j}$ désignant par convention la dérivée partielle de $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ par rapport à la composante y_j du point courant $\boldsymbol{y}$. La solution élémentaire $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est considérée comme fonction du point courant $\boldsymbol{y}$, le support $\{\boldsymbol{x}\}$ de la source ponctuelle étant fixé. On introduit également la notation $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pour désigner le flux au point $\boldsymbol{y}$ dans la direction $\boldsymbol{n}$ associé à $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$:

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) \tag{2.6}$$

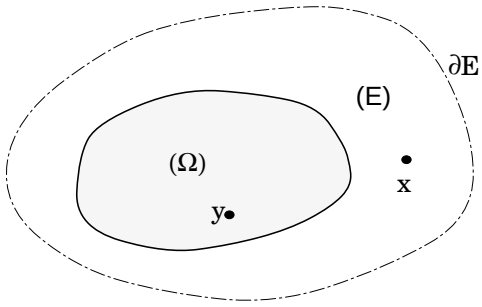

Figure 2.1: Domaine d'étude Ω et domaine auxiliaire E servant à définir $G(x, y)$.

Sur le plan du principe, on peut définir une solution élémentaire pour tout choix du domaine E et des conditions aux limites sur ∂E[5]. Toutefois, cette définition n'a d'intérêt pratique que quand une expression analytique de $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est connue.

Equilibre global. Pour toute solution élémentaire vérifiant (2.5), pour tout domaine $\Omega \subseteq E$ et tout point fixé $\boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$, l'intégration sur Ω de l'équation (2.5) et l'application de la formule de la divergence conduisent à l'identité:

$$\kappa + \int_{\partial\Omega} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = 0 \qquad \text{avec} \begin{cases} \kappa = 1 & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \kappa = 0 & \boldsymbol{x} \notin \Omega \end{cases} \tag{2.7}$$

qui exprime l'équilibre entre le flux H à travers $\partial\Omega$ et la source ponctuelle unitaire exercée en $\boldsymbol{x}$.

Solution élémentaire pour l'espace infini. Le champ créé dans l'espace infini $E = \mathbb{R}^3$ par une source ponctuelle unitaire placée en $\boldsymbol{x}$ et le flux associé sont égaux à:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi r} \qquad H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{4\pi r^2} r_{,n} \tag{2.8}$$

où $r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ est la distance euclidienne entre la source $\boldsymbol{x}$ et le point courant $\boldsymbol{y}$ et $r_{,n}$ est la dérivée de r dans la direction $\boldsymbol{n}$ (dérivée normale):

$$r_n = r_{,i} n_i = \frac{y_i - x_i}{r} n_i$$

La solution élémentaire (2.8) est singulière en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ ($r = 0$), ce qui était prévisible: une source *concentrée* d'intensité finie crée nécessairement, en son point d'application, un champ infini. On a d'autre part:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \qquad G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -G_{,\bar{\jmath}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{2.9}$$

où la notation $f_{,\bar{\jmath}}$ désigne par convention la dérivée partielle de f par rapport à la composante x_j du point source $\boldsymbol{x}$.

[5]En statique, des données aux limites en flux pour G doivent respecter la contrainte de l'équilibre avec la source ponctuelle, éq. (2.7).

Autres solutions élémentaires. Il existe quelques autres configurations pour lesquelles la solution élémentaire a une expression analytique connue. Pour des conditions de Dirichlet homogènes sur ∂E, on parle de *fonction de Green* du domaine E.

- *Demi-espace:* E est la région de l'espace $y_3 \leq 0$. Notant $\bar{\boldsymbol{x}} = (x_1, x_2, -x_3)$ le symétrique du point source $\boldsymbol{x}$ par rapport au plan $y_3 = 0$ et $\bar{r} = |\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{x}}|$, on peut construire par la *méthode des images* les solutions élémentaires vérifiant une condition de Dirichlet ($G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ en $y_3 = 0$):

$$G^D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{r}}\right) \tag{2.10}$$

ou une condition de Neumann ($H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ en $y_3 = 0$):

$$G^N(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}\right) \tag{2.11}$$

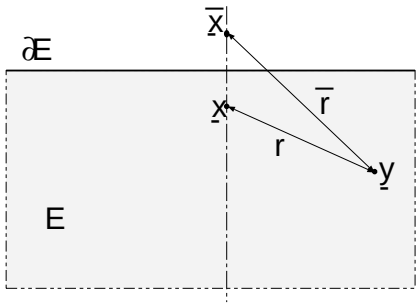

Figure 2.2: Demi-espace et méthode des images.

- *Sphère:* E est la sphère centrée à l'origine et de rayon a, et la source ponctuelle $\boldsymbol{x}$ est à une distance $\rho_0 \leq a$ du centre. Notant $\bar{\boldsymbol{x}} = (a^2/\rho^2)\boldsymbol{x}$ l'inverse de $\boldsymbol{x}$ par rapport à la sphère et $\bar{r} = |\boldsymbol{y} - \bar{\boldsymbol{x}}|$, le champ:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{a}{\rho_0}\frac{1}{\bar{r}}\right) \tag{2.12}$$

Propriétés générales des solutions élémentaires. Toutes les solutions élémentaires sont singulières en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. De plus, cette singularité est égale à celle de la solution de l'espace infini si $\boldsymbol{x} \notin \partial E$ mais en diffère si $\boldsymbol{x} \in \partial E$.

D'autre part, considérons une solution élémentaire pour un certain domaine E et des sources ponctuelles unitaires appliquées en $\boldsymbol{x}$ et en $\boldsymbol{y}$. Cela définit un couple d'états qui vérifie l'identité de réciprocité (2.3):

$$\int_{\partial E} [H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) - H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})]\, \mathrm{d}S_z = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - G(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

Cette équation entraîne que la propriété (2.9) est vérifiée par toute solution élémentaire présentant des conditions aux limites (en potentiel ou flux) nulles sur ∂E[6].

[6] Cela inclut la décroissance à l'infini, par exemple pour $E = \mathbb{R}^3$.

FORMULES DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE. La formule de réciprocité (2.3) est appliquée à l'état inconnu (u, q, b) et à une solution élémentaire définie par (2.5); le point-source est pris hors de la frontière $\partial\Omega$. Cela conduit à:

$$\int_\Omega \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y = \int_{\partial\Omega} \{q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y + \int_\Omega b(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y$$

De plus, par définition de la mesure de Dirac, on a:

$$\int_\Omega \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y = \kappa u(\boldsymbol{x}) \qquad \text{avec } \begin{cases} \kappa = 1 & \boldsymbol{x}\in\Omega \\ \kappa = 0 & \boldsymbol{x}\notin\Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

ce qui permet d'établir les résutats qui suivent.

FORMULE DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE DU POTENTIEL. Si $\boldsymbol{x}$ est un point intérieur à Ω, la valeur $u(\boldsymbol{x})$ d'une solution de l'équation de Poisson est donnée en fonction de la source b et des valeurs prises par (u, q) sur la frontière $\partial\Omega$ par la formule de représentation intégrale:

$$\kappa u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \{q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y + \int_\Omega b(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y \tag{2.14}$$

avec $\kappa = 1$ pour $\boldsymbol{x}\in\Omega$ (représentation intérieure) ou $\kappa = 0$ pour $\boldsymbol{x}\notin\Omega$ (représentation extérieure).

FORMULE DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE DU GRADIENT. Quand $\boldsymbol{x}\notin\partial\Omega$, les intégrales de (2.14) sont des fonctions différentiables de $\boldsymbol{x}$. La représentation intégrale du gradient de u est donc obtenue par simple dérivation de (2.14) sous le signe intégral:

$$\begin{aligned}\kappa u_{,i}(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \{qG_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})G_{\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y \\ &+ \int_\Omega b(\boldsymbol{y})G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y\end{aligned} \tag{2.15}$$

Variante de la représentation du gradient. Dans le cas où la solution élémentaire (2.8) est utilisée dans (2.15), on peut exploiter la propriété (2.9) d'échange des dérivées par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ pour reformuler (2.15) comme:

$$\kappa u_{,i}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \{u(\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})G_{,ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y - \int_\Omega b(\boldsymbol{y})G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y$$

On procède ensuite à une intégration par parties. En effet, pour toute surface *fermée* S ne contenant pas $\boldsymbol{x}$, on a:

$$\int_S u(\boldsymbol{y})G_{,ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = \int_S u(\boldsymbol{y})[D_{ji}G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + G_{,jj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_i(\boldsymbol{y})]\,\mathrm{d}S_y$$

de manière à faire apparaître l'opérateur différentiel tangentiel $D_{ij}() = n_i()_{,j} - n_j()_{,i}$ défini en annexe A. D'autre part, G vérifie $G_{,jj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ sur S puisque $\boldsymbol{x}\notin S$. Il reste à appliquer l'identité (A.7) d'intégration par parties, ce qui donne:

$$\int_S u(\boldsymbol{y})D_{ji}G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = \int_S D_{ij}u(\boldsymbol{y})G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$

Ce schéma d'intégration par parties apparaît par exemple dans Kupradze [3], Sladek et Sladek [4]. Les composantes du gradient du potentiel sont ainsi données par:

$$\kappa u_{,i}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \{D_{ij}u(\boldsymbol{y})G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y - \int_{\Omega} b(\boldsymbol{y})G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y \quad (2.16)$$

Cette formule présente l'avantage de ne comporter que des intégrales en $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-1,-2}$, contrairement à (2.15) qui présente également un terme en $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-3}$. On ne sait cependant l'établir que pour la solution élémentaire (2.8).

NÉCESSITÉ D'UNE ÉQUATION INTÉGRALE. Pour un point d'observation $\boldsymbol{x}$ intérieur à Ω, les expressions (2.14), (2.15) donnent ainsi la valeur en un point intérieur $\boldsymbol{x}$ du potentiel u et de son gradient en termes des sources b et des valeurs prises par (u,q) sur la frontière $\partial\Omega$. Pour tout problème bien posé, la moitié des valeurs de $(u,q)\mid_{\partial\Omega}$ est donnée par les conditions aux limites, l'autre moitié restant inconnue. Les formules (2.14), (2.15) montrent que la résolution d'un problème aux limites se ramène à la détermination de celles des valeurs de $(u,q)\mid_{\partial\Omega}$ qui ne sont pas prescrites par les conditions aux limites. Elles réalisent une "quasi-inversion" de l'équation de Poisson (2.1), reportant la recherche d'inconnues sur la frontière.

Si $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ est la fonction de Green de Ω, et donc vérifie $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ sur $\partial\Omega$, les formules de représentation (2.14), (2.15) donnent directement la solution explicite pour le problème de Dirichlet:

$$u(\boldsymbol{x}) = -\int_{\partial\Omega} u^D(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$

Cette situation favorable est toutefois exceptionnelle car la fonction de Green n'est connue que pour quelques domaines particuliers de formes très simples.

Il faut toutefois noter qu'un choix judicieux de la solution élémentaire permet parfois de réduire la portion de frontière sur laquelle des inconnues subsistent. Par exemple, si on considère le domaine $\Omega = E - C$, occupant un demi-espace E privé d'une cavité C, le support géométrique des inconnues est restreint à ∂C si on utilise dans (2.14) celle des solutions (2.10)–(2.11) correspondant au type de conditions aux limites imposées sur le demi-espace. Si u est imposé sur ∂E et ∂C, cela donne:

$$u(\boldsymbol{x}) = -\int_{\partial E} u^D(\boldsymbol{y})H^D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y + \int_{\partial C} \left\{q(\boldsymbol{y})G^D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u^D(\boldsymbol{y})H^D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\}\,\mathrm{d}S_y$$

où seul le flux q à travers ∂C est inconnu.

2.2 Equation intégrale de frontière

Il reste donc en général à définir une *équation intégrale de frontière* portant *seulement* sur les valeurs de (u,q) à la frontière. Il n'est toutefois pas correct de se contenter d'écrire (2.14) ou (2.15) pour des points $\boldsymbol{x}$ pris sur la frontière: $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ étant singulier comme $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-2}$, l'intégrale sur $\partial\Omega$ cesse a priori d'avoir un sens pour $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. D'autre part, la relation (2.13) ne vaut que pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$. L'établissement d'une équation

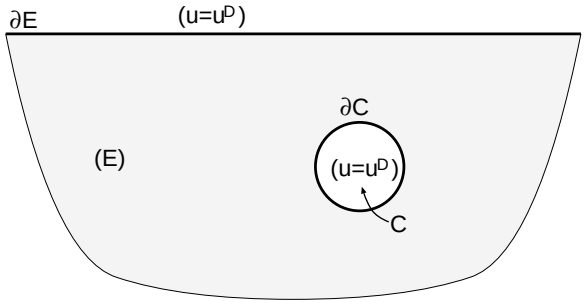

Figure 2.3: Demi-espace avec cavité.

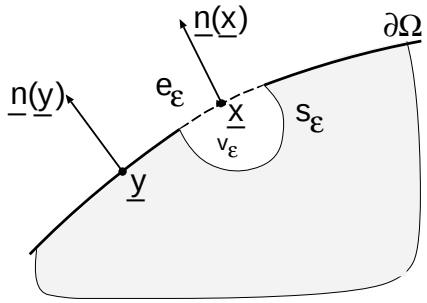

Figure 2.4: Voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(x)$ et autres notations utilisées pour le passage à la limite.

intégrale doit donc recourir à une procédure de *passage à la limite* permettant de tenir compte du caractère singulier de la solution élémentaire employée.

Soit $\boldsymbol{x}$ un point fixé de $\partial\Omega$, et supposons que $\partial\Omega$ est C^2 en $\boldsymbol{x}$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère[7] un voisinage $v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ de $\boldsymbol{x}$, connexe, de diamètre $\leq \varepsilon$, appelé *voisinage d'exclusion*. Le domaine $\Omega_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \Omega - v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ obtenu en retranchant de Ω le voisinage $v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ (figure 2.4) est tel que le point $\boldsymbol{x}$ est extérieur à $\Omega_\varepsilon(\boldsymbol{x})$. La frontière de Ω_ε est alors $\partial\Omega_\varepsilon = (\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon$, en posant $s_\varepsilon = \Omega \cap \partial v_\varepsilon$, $e_\varepsilon = \partial\Omega \cap v_\varepsilon$. L'idée poursuivie est de prendre la limite $\varepsilon \to 0$ dans la formule de représentation (2.14) écrite pour le domaine Ω_ε; cette dernière s'écrit, puisque $\boldsymbol{x}$ est extérieur à Ω_ε:

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} b(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y + \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \{q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y \qquad (2.17)$$

Dans un premier temps, on remarque que l'identité (2.7) entraîne:

$$0 = u(\boldsymbol{x}) \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$

[7] Ces définitions s'inspirent de Guiggiani et coll. [2].

La soustraction membre à membre des deux dernières égalités donne alors:

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} b(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y + \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \{q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - [u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y \tag{2.18}$$

Si l'hypothèse de régularité[8] $u \in C^{0,\alpha}$ en $\boldsymbol{x}$, c'est-à-dire:

$$\exists(\alpha, C) > 0, \qquad |u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})| \leq C\,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^\alpha$$

est satisfaite par u, alors le flux q vérifie[9], pour $\boldsymbol{y}$ voisin de $\boldsymbol{x}$:

$$|q(\boldsymbol{y})| \leq C\,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{\alpha-1}$$

et on a, compte tenu des propriétés de singularité (4.11):

$$\begin{aligned} |[u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| &\leq C\,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{\alpha-2} \\ |q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| &\leq C\,|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{\alpha-2} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (2.18) est maintenant considéré. Les intégrales sur s_ε, sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$ et sur Ω_ε sont traitées séparément.

Intégrale sur s_ε. En raison de (2.19) et puisque $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| \sim \varepsilon$, $\mathrm{d}S_y \sim \varepsilon^2 d\omega$ (où ω est l'angle solide vu du point $\boldsymbol{x}$), on a:

$$\{[u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y = O(\varepsilon^\alpha)d\omega$$

et donc:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{s_\varepsilon} \{[u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y = 0$$

Intégrale sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$. En raison de (2.19), l'intégrand se comporte au voisinage de $\boldsymbol{x}$ comme:

$$[u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \sim |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{\alpha-2}$$

et la limite pour $\varepsilon \to 0$ de l'intégrale sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$ dans (4.29) est simplement l'intégrale impropre correspondante sur $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \{[u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y \\ &= \int_{\partial\Omega} \{[u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

Intégrale sur Ω_ε. En raison de la faible singularité $\sim |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-1}$ de $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, elle ne pose pas de difficulté, et tend vers l'intégrale impropre correspondante sur Ω:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} b(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y$$

[8] C'est la "continuité au sens de Hölder" d'exposant α, hypothèse plus forte que la continuité simple mais plus faible que la différentiabilité.

[9] En supposant $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ situés sur une même composante régulière de $\partial\Omega$ et la continuité $C^{0,\alpha}$ de la normale $\mathbf{n}$ en $\mathbf{x}$.

EQUATION INTÉGRALE DE FRONTIÈRE. Le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ dans l'identité (2.18) conduit donc à l'*équation intégrale de frontière* recherchée:

$$\int_{\partial\Omega} \{[u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\, \mathrm{d}S_y = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}V_y \qquad (2.20)$$

Celle-ci, qui lie les valeurs des variables (u, q) sur $\partial\Omega$ et ne fait pas intervenir de quantité inconnue dans le domaine, gouverne *toute* solution de l'équation de Poisson sur Ω vérifiant les hypothèses (2.19). Elle ne fait intervenir que des intégrales convergentes, présentant des singularités en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ intégrables. C'est le résultat principal de ce chapitre.

L'équation intégrale (2.20) redonne pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$ la représentation intégrale (2.14) et couvre donc toutes les positions relatives de $\boldsymbol{x}$ par rapport à Ω (ceci découle de l'identité (2.7)). Elle est donc valable pour tout $\boldsymbol{x}$ dans le domaine de définition E de la solution élémentaire considérée.

PRÉSENTATION CLASSIQUE. Elle consiste à effectuer le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (2.17) directement, sans utiliser l'identité (2.7), et donne l'équation intégrale sous la forme:

$$\kappa(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \{u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\, \mathrm{d}S_y = \int_{\Omega} b(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}V_y \qquad (2.21)$$

L'intégrale contenant $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ est convergente (voir l'annexe 2.3). Le *terme libre* $\kappa(\boldsymbol{x})$ est défini par:

$$\kappa(\boldsymbol{x}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{s_\varepsilon} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y$$

et vaut $1/2$ si $\boldsymbol{x}$ est un point régulier de $\partial\Omega$.

On a préféré établir et présenter l'équation intégrale de frontière sous sa forme *régularisée* (2.20) par souci d'homogénéité de l'ouvrage. En effet, anticipant sur le chapitre 4, la situation en élasticité est plus complexe dans la mesure où la formulation intégrale non régularisée fait cette fois intervenir des intégrales non convergentes au sens ordinaire.

MOTIVATION A POSTERIORI DE LA DÉFINITION DES SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES. L'utilisation de solutions élémentaires singulières étant source de difficultés, on peut s'interroger sur les raisons conduisant à leur intervention. Pour cela, discutons quelques choix envisageables pour le support géométrique D de la source b^2 associée au champ auxiliaire u^2 dans l'identité de réciprocité (2.3).

- $D \subset \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Dans ce cas, (2.3) donne:

$$\int_{\partial\Omega} (q^1u^2 - q^2u^1)\, \mathrm{d}S = \int_D b^2u^1\, \mathrm{d}V - \int_{\Omega} b^1u^2\, \mathrm{d}V$$

  cette relation porte sur l'inconnue u^1 par l'intermédiaire des valeurs non seulement de u^1, q^1 sur $\partial\Omega$ mais aussi de u^1 sur D. Par conséquent, elle ne peut conduire ni à une équation intégrale de frontière ni à une formule de représentation de u^1 en un point intérieur $\boldsymbol{x} \in \Omega$.

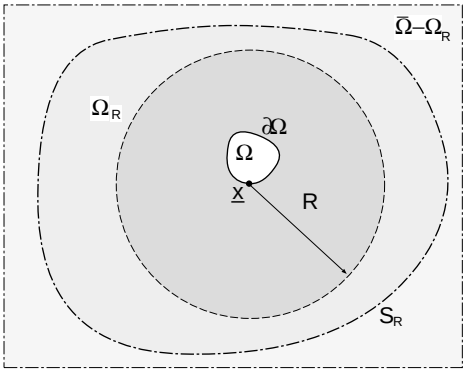

Figure 2.5: Domaine Ω_R pour le passage à la limite $r \to \infty$.

- $D = \emptyset$: absence de source pour l'état auxiliaire. Dans ce cas, (2.3) donne:

$$\int_{\partial\Omega} (q^1 u^2 - q^2 u^1)\,\mathrm{d}S = -\int_{\Omega} b^1 u^2\,\mathrm{d}V$$

  cette relation porte sur l'inconnue u^1 par l'intermédiaire des valeurs de u^1, q^1 sur $\partial\Omega$ seulement, et constitue bien une équation intégrale de frontière. Par contre, elle ne permet pas d'écrire une formule de représentation de u^1 en un point intérieur $\boldsymbol{x} \in \Omega$. De plus, l'équation intégrale obtenue est du type Fredholm de première espèce, connue pour être très sensible aux erreurs sur les données (Tricomi [5]).

- $D = \{\boldsymbol{x}\}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$: source ponctuelle unitaire appliquée en $\boldsymbol{x}$. Ce choix, on l'a vu, permet d'obtenir représentations intégrales *et* équations intégrales de frontière. Ces dernières peuvent de plus être mises sous la forme (2.28) d'équations de Fredholm de deuxième espèce, stables par rapport aux erreurs sur les données.

2.3 Problèmes extérieurs et conditions à l'infini

On considère maintenant un domaine $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$, Ω étant borné; la normale $\bar{\boldsymbol{n}}$ à $\partial\bar{\Omega}$ est prise extérieure à $\bar{\Omega}$. On suppose momentanément $b = 0$. Le propos de cette section est de montrer que l'équation intégrale (2.20) et la représentation (2.14) sont encore valables pour un domaine infini, à condition que u, q vérifient certaines conditions de décroissance à l'infini. On peut pour cela procéder à un passage à la limite pour un domaine borné arbitrairement grand. Pour un point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, on considère une surface fermée régulière S_R choisie de façon à enfermer la boule de centre $\boldsymbol{x}$ et de grand rayon R fixé et à entourer la frontière $\partial\Omega$. L'équation intégrale (2.20) est alors écrite pour le domaine *borné* $\Omega_R \subset \bar{\Omega}$ limité extérieurement par S_R (figure 2.5):

$$\int_{\partial\bar\Omega} \{[u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y$$
$$= \int_{S_R} \{q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y$$

où, puisqu'on se propose de faire $R \to \infty$, la solution élémentaire utilisée est nécessairement celle du milieu infini. Le point $\boldsymbol{x}$ étant par construction intérieur à S_R, l'identité (2.7) pour S_R permet de transformer l'équation ci-dessus en:

$$\int_{\partial\bar\Omega} \{[u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y$$
$$= -u(\boldsymbol{x}) + \int_{S_R} \{q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y \tag{2.22}$$

La solution élémentaire (2.8) et l'élément différentiel de surface sur S_R vérifient:

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = O(1/R) \qquad H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = O(1/R^2) \qquad \mathrm{d}S_y = O(R^2)d\omega \qquad (\boldsymbol{y} \in S_R)$$

(ω: angle solide algébrique vu de $\boldsymbol{x}$). On voit ainsi qu'il suffit que u, q vérifient:

$$u = o(1) \qquad q = o(R^{-1}) \qquad (\boldsymbol{y} \in S_R) \tag{2.23}$$

pour obtenir:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \{u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y = 0$$

et ceci ne dépend pas de la forme précise de la surface S_R.

Equation intégrale pour les problèmes extérieurs. Le passage à la limite $R \to \infty$ dans (2.22) a donc pour résultat l'*équation intégrale pour un domaine $\bar\Omega$ non borné*:

$$u_k(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \{[u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y = 0 \tag{2.24}$$

qui gouverne toute solution de l'équation de Laplace sur $\bar\Omega$ vérifiant les conditions de décroissance (2.23). Ce résultat diffère de son homologue (2.20) pour un domaine borné par l'apparition d'un "terme libre" $u(\boldsymbol{x})$ hors signe intégral et par l'orientation de la normale unitaire $\boldsymbol{n}$, extérieure à $\bar\Omega$ donc intérieure à $\partial\Omega$.

Formules de représentation intégrale. L'équation (2.24) peut être prise pour tout point source $\boldsymbol{x}$. Pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$, l'identité (2.7) appliquée à $\partial\bar\Omega$ devient, compte tenu du fait que $\boldsymbol{n}$ est *intérieure* à $\partial\bar\Omega$:

$$(1-\kappa) - \int_{\partial\bar\Omega} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = 0 \qquad \text{avec} \begin{cases} \kappa = 1 & \boldsymbol{x} \in \bar\Omega \\ \kappa = 0 & \boldsymbol{x} \notin \bar\Omega \end{cases}$$

Cette formule, appliquée à l'équation (2.24) pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$, entraîne

$$\kappa u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\bar{\Omega}} \{q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y$$

Ce résultat est identique à (2.14). La même formule de représentation est donc applicable aux domaines bornés ou non bornés (la normale, toujours extérieure au domaine considéré, change d'orientation).

COMPORTEMENT À L'INFINI DES CHAMPS DONNÉS PAR REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES. Réciproquement, on montre facilement que tout potentiel u donné par représentation intégrale vérifie les conditions de décroissance (2.23).

SOURCES NON NULLES. Le passage à la limite $R \to +\infty$ et la formule (2.14) restent valables en présence de sources volumiques b sous la condition:

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\Omega_R} b(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y \right| < +\infty$$

Sinon, il faut procéder par superposition, en supposant connue une solution particulière u^P de l'équation de Poisson: on pose $u = u^0 + u^P$ et prend u^0, solution de l'équation de Laplace, comme inconnue. Il faut aussi utiliser une solution particulière et procéder par superposition en cas de données à l'infini (exemple: écoulement potentiel avec vitesse à l'infinie donnée).

REMARQUES. Si le support géométrique de la source b est une partie *bornée* de $\bar{\Omega}$ et en l'absence de données à l'infini, (u, q) se comportent à l'infini comme un multiple de la solution élémentaire (G, H) et décroissent donc comme R^{-1} et R^{-2} respectivement, satisfaisant ainsi les conditions (2.23).

Les résultats établis dans cette section montrent que la résolution d'un problème extérieur peut être ramenée à une équation intégrale sur une frontière bornée. Cela dispense en particulier de devoir considérer un domaine tronqué à une distance finie ou introduire des "éléments infinis" (Bettess [1]) qui tiennent compte de la forme asymptotique de la décroissance à l'infini. Les méthodes d'équations intégrales sont ainsi très attractives pour les problèmes extérieurs.

2.4 Représentations et équations intégrales indirectes

Considérons simultanément un domaine borné Ω et le domaine non borné complémentaire $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$, et soient $u, \bar{u}$ des solutions de l'équation de Laplace sur Ω et $\bar{\Omega}$ respectivement (problèmes *intérieur* et *extérieur*, avec $b = \bar{b} = 0$). Si $\boldsymbol{x}$ est un point intérieur à Ω, la formule de représentation (2.14) donne:

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \{q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y$$

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left\{\bar{q}(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \bar{u}(\boldsymbol{y})\bar{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\}\ \mathrm{d}S_y$$

soit, après addition membre à membre:

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \{(q+\bar{q})(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - (u-\bar{u})(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\, \mathrm{d}S_y \tag{2.25}$$

où H est pris par convention pour la normale $\boldsymbol{n}$ extérieure à Ω.

- *Représentation de u par potentiel de simple couche.* Supposons le potentiel u continu à la traversée de $\partial\Omega$: $u = \bar{u}$ sur $\partial\Omega$, et introduisons le saut ϕ du flux à travers $\partial\Omega$:

  $$\phi \equiv \bar{q} + q = -(\boldsymbol{\nabla}\bar{u} - \boldsymbol{\nabla}u).\boldsymbol{n}$$

  L'identité (2.25)) conduit alors à la représentation intégrale de u par *potentiel de simple couche de densité ϕ*:

  $$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \tag{2.26}$$

- *Représentation de u par potentiel de double couche.* Supposons le flux q continu à la traversée de $\partial\Omega$: $q + \bar{q} = 0$ sur $\partial\Omega$, et introduisons le saut ψ du potentiel à travers $\partial\Omega$:

  $$\psi \equiv \bar{u} - u$$

  L'identité (2.25) conduit alors à la représentation intégrale de u par *potentiel de double couche de densité ψ*:

  $$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \psi(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y$$

Ces deux sortes de représentations sont qualifiées d'*indirectes* car exprimées en termes d'intégrales contenant des inconnues intermédiaires (densité ϕ ou ψ) et non les variables physiques u, q. Les définitions précédentes montrent que *toute* fonction harmonique dans Ω ou $\bar{\Omega}$ admet une représentation indirecte. Réciproquement, tout potentiel de simple ou double couche est harmonique dans Ω et $\bar{\Omega}$, soit:

$$\Delta_x \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y = 0 \qquad \Delta_x \int_{\partial\Omega} \psi(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y = 0$$

résultat classique qui découle facilement des propriétés de la solution élémentaire $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

Les formules (2.26), (2.4) prises pour $\boldsymbol{x}$ intérieur à $\bar{\Omega}$ donnent les représentations indirectes du potentiel $\bar{u}$ solution du problème extérieur, les définitions de ϕ, ψ et l'orientation de $\boldsymbol{n}$ étant inchangées[10].

[10] On peut également poser $\phi = q + \bar{q}$, $\psi = u - \bar{u}$ et prendre $\mathbf{n} = \bar{\mathbf{n}}$, normale extérieure à Ω, ce qui revient au même mais transpose de manière cohérente les conventions adoptées pour le problème intérieur.

EQUATIONS INTÉGRALES INDIRECTES. Prenons les équations intégrales (2.20) en $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ pour $(u, q, b = 0)$ (problème intérieur) puis (2.24) pour $(\bar{u}, \bar{q}, \bar{b} = 0)$ (problème extérieur), ce qui donne[11]:

$$\bar{u}(\boldsymbol{x}) - \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} [\psi(\boldsymbol{y}) - \psi(\boldsymbol{x})] H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = 0$$

Considérons par exemple le problème intérieur de Dirichlet pour l'équation de Laplace:

$$\Delta u = 0 \quad (\boldsymbol{y} \in \Omega) \qquad u = u^D \quad (\boldsymbol{y} \in \partial\Omega)$$

- *Formulation par potentiel de simple couche.* Le potentiel est supposé continu à travers $\partial\Omega$: $u = \bar{u} = u^D$ et $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$. Cela conduit à une équation intégrale indirecte d'inconnue ϕ pour le problème de Dirichlet

  $$\int_{\partial\Omega} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \phi(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = u^D(\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega)$$

  qui a la structure d'une équation de Fredholm de première espèce (Tricomi [5]). Les valeurs du potentiel u dans Ω sont ensuite données par la représentation (2.26).

- *Formulation par potentiel de double couche.* Le flux est supposé continu à travers $\partial\Omega$: $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$. Puisque $\bar{u} = u + \psi = u^D + \psi$, on obtient une équation intégrale indirecte d'inconnue ψ pour le problème de Dirichlet

  $$-\psi(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} [\psi(\boldsymbol{y}) - \psi(\boldsymbol{x})] H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = u^D(\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega) \tag{2.27}$$

  qui peut aussi, à partir de (2.21), être écrite sous la forme non régularisée

  $$-\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \psi(\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = u^D(\boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{x} \in \partial\Omega) \tag{2.28}$$

  qui a la structure d'une équation de Fredholm de deuxième espèce. Les valeurs du potentiel u dans Ω sont ensuite données par la représentation (2.4).

Les équations indirectes pour le problème de Neumann seront traitées au chapitre 5.

2.5 Problèmes plans

L'exposé a porté jusqu'ici sur des problèmes tridimensionnels. La construction de représentations et d'équations intégrales au moyen d'une identité de réciprocité et d'une solution élémentaire est bien sûr également possible pour les problèmes bidimensionnels. Une autre voie consiste à considérer ces derniers comme des problèmes tridimensionnels particuliers, invariants par translation selon la direction $\boldsymbol{e}_3$, et intégrer par rapport à y_3 les équations intégrales tridimensionnelles.

[11] $H(x, y)$ est calculé avec la normale $\bar{\mathbf{n}}$ extérieure à $\partial\Omega$.

Le domaine Ω est donc supposé de la forme $\Omega = D \times \mathbb{R}$, où D est un ouvert du plan y_1y_2, et (u, q, b) indépendants de y_3. L'équation intégrale (2.20) pour le domaine *tridimensionnel* Ω, de frontière $\partial D \times \mathbb{R}$ s'écrit:

$$\int_{\partial D} [u(\tilde{y}) - u(\tilde{x})] \int_{\mathbb{R}} H(\tilde{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}y_3 \, \mathrm{d}s_y - \int_{\partial D} q(\tilde{y}) \int_{\mathbb{R}} G(\tilde{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}y_3 \, \mathrm{d}s_y = \int_D b(\tilde{y}) \int_{\mathbb{R}} G(\tilde{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}y_3 \, \mathrm{d}D_y \tag{2.29}$$

en notant $\tilde{x} = (x_1, x_2)$, $\tilde{y} = (y_1, y_2)$ les points dans $\mathbb{R}^2$. Elle suggère de définir une solution élémentaire bidimensionnelle par intégration de la solution élémentaire tridimensionnelle:

$$[G(\tilde{x}, \tilde{y})]_{2D} = \int_{\mathbb{R}} G(\tilde{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}y_3 \qquad [H(\tilde{x}, \tilde{y})]_{2D} = \int_{\mathbb{R}} H(\tilde{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}y_3 \tag{2.30}$$

sous réserve que ces intégrales soient convergentes. La solution élémentaire tridimensionnelle est supposée invariante par translation[12] suivant $\boldsymbol{e}_3$; elle ne dépend donc de x_3, y_3 qu'à travers $(y_3 - x_3)$, de sorte que $\{G, H\}(\tilde{x}, \boldsymbol{y}) = \{G, H\}(\boldsymbol{x}, \tilde{y})$. On peut donc poser (toujours sous réserve de convergence):

$$[G(\tilde{x}, \tilde{y})]_{2D} = \int_{\mathbb{R}} G(\boldsymbol{x}, \tilde{y}) \, \mathrm{d}x_3 \qquad [H(\tilde{x}, \tilde{y})]_{2D} = \int_{\mathbb{R}} H(\boldsymbol{x}, \tilde{y}) \, \mathrm{d}x_3 \tag{2.31}$$

définissant ainsi $[G, H]_{2D}$ comme la réponse à une superposition de sources ponctuelles disposées sur les points de la droite dirigée par $\boldsymbol{e}_3$ et passant par $\tilde{x}$. La résultante de ce système de sources est infinie.

Anticipant la possibilité d'intégrales divergentes dans (2.31), on va d'abord reformuler l'équation (2.29) en notant qu'en vertu de l'équilibre entre les flux sur ∂D et la source b on a:

$$\int_{\partial D} q(\tilde{y}) \, \mathrm{d}s_y + \int_D b(\tilde{y}) \, \mathrm{d}D_y = 0$$

Soit alors $\tilde{z} \neq \tilde{x}$ un point fixé de D. L'identité précédente est multipliée par $G(\boldsymbol{x}, \tilde{z})$, intégrée par rapport à y_3 et retranchée de (2.29), ce qui donne:

$$\int_{\partial D} [u(\tilde{y}) - u(\tilde{x})] \int_{\mathbb{R}} H(\boldsymbol{x}, \tilde{y}) \, \mathrm{d}x_3 \, \mathrm{d}s_y - \int_{\partial D} q(\tilde{y}) \int_{\mathbb{R}} [G(\boldsymbol{x}, \tilde{y}) - G(\boldsymbol{x}, \tilde{z})] \, \mathrm{d}x_3 \, \mathrm{d}s_y = \int_D b(\tilde{y}) \int_{\mathbb{R}} [G(\boldsymbol{x}, \tilde{y}) - G(\boldsymbol{x}, \tilde{z})] \, \mathrm{d}x_3 \, \mathrm{d}D_y \tag{2.32}$$

Solution élémentaire pour le plan infini. Elle est obtenue à partir de la solution élémentaire pour $E = \mathbb{R}^3$. On remarque tout d'abord que la définition (2.30) de $[G]_{2D}$ conduirait à une intégrale divergente:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{r} \, \mathrm{d}x_3 = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + x_3^2}} \, \mathrm{d}x_3 = +\infty \tag{2.33}$$

[12] En toute rigueur, cette hypothèse n'est pas obligatoirement vérifiée mais les contre-exemples sont "tordus" et ne présentent aucun intérêt pratique.

(avec $\rho^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$). Il faut donc définir $[G]_{2D}$ à partir de (2.32), et ainsi:

$$\begin{aligned}[G(\tilde{x},\tilde{y})]_{2D} &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2+x_3^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho'^2+x_3^2}}\right)\mathrm{d}x_3 \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[\mathrm{Log}\left(\frac{x_3+\sqrt{\rho^2+x_3^2}}{x_3+\sqrt{\rho'^2+x_3^2}}\frac{\rho'}{\rho}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= -\frac{1}{2\pi}\log\frac{\rho}{\rho'}\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}[H(\tilde{x},\tilde{y})]_{2D} &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{(\tilde{y}-\tilde{x}).\boldsymbol{n}}{(\rho^2+x_3^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x_3 \\ &= -\frac{1}{2\pi}\frac{(\tilde{y}-\tilde{x}).\boldsymbol{n}}{\rho^2}\end{aligned}$$

Finalement, la solution élémentaire pour le plan infini est donnée par:

$$[G(\tilde{x},\tilde{y})]_{2D} = \frac{1}{2\pi}\log\frac{\rho'}{\rho} \qquad [H(\tilde{x},\tilde{y})]_{2D} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\rho_{,n}}{\rho} \tag{2.34}$$

La recherche directe d'une solution élémentaire de l'équation de Poisson bidimensionnelle donnerait le même résultat que l'intégration de la solution élémentaire tridimensionnelle présentée ici. La solution $[G]_{2D}$ obtenue est définie à une constante près, via le choix arbitraire de $\tilde{z}$ (et donc de ρ'). Elle est singulière comme $\log r$ en $\tilde{y} = \tilde{x}$. Son comportement à l'infini est assez curieux: $[G]_{2D} \to \infty$ pour $\rho \to \infty$. Ceci, ainsi que la divergence de l'intégrale (2.33), s'explique par le fait que $[G]_{2D}$ est le potentiel créé dans l'espace infini tridimensionnel par une source *de résultante infinie*.

EQUATION INTÉGRALE. L'équation intégrale vérifiée par toute solution de l'équation de Poisson bidimensionnelle s'écrit ainsi:

$$\int_{\partial D}\{[u(\tilde{y})-u(\tilde{x})]H(\tilde{x},\tilde{y}) - q(\tilde{y})G(\tilde{x},\tilde{y})\}\,\mathrm{d}s_y = \int_D b(\tilde{y})G(\tilde{x},\tilde{y})\,\mathrm{d}D_y \tag{2.35}$$

avec $(G,H) \equiv ([G]_{2D},[H]_{2D})$. Elle est valable pour $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ et donne la représentation intégrale de $u(\tilde{x})$ pour $\tilde{x} \notin \partial D$. Les équations et représentations intégrales ont ainsi la même forme en deux ou trois dimensions.

PROBLÈMES EXTÉRIEURS. Le passage à un domaine non borné $\bar{D} = \mathbb{R}^2 - D$ (avec $b = 0$) se fait comme pour le cas tridimensionnel. Il découle du comportement à l'infini de la solution élémentaire bidimensionnelle (2.34) que tout potentiel u vérifiant les conditions suffisantes de décroissance

$$u(\boldsymbol{y}) = O(R^{-\alpha}), \quad \boldsymbol{\nabla}u(\boldsymbol{y}) = O(R^{-1-\alpha}) \qquad (\boldsymbol{y} \in S_R, R \to +\infty) \tag{2.36}$$

est gouverné par l'équation intégrale:

$$u(\tilde{x}) + \int_{\partial D} \{[u(\tilde{y}) - u(\tilde{x})]H(\tilde{x},\tilde{y}) - q(\tilde{y})G(\tilde{x},\tilde{y})\}\ \mathrm{d}s_y = 0$$

Comme en trois dimensions, pour $\tilde{x} \notin \partial D$, la représentation intégrale de $u(\tilde{x})$ a une forme identique que le domaine D soit borné ou non (seul le signe de la normale à ∂D change).

Annexe 2.1 – Quelques formules utiles

Soient $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ deux points de $\mathbb{R}^n$. La norme euclidienne r du rayon vecteur $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = (y_i - x_i)\boldsymbol{e}_i = r_i \boldsymbol{e}_i \qquad r = |\boldsymbol{r}|$$

admet des dérivées partielles données par

$$\begin{aligned} r_{,i} &= \frac{y_i - x_i}{r} \qquad r_{,ij} = \frac{1}{r}(\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}) \\ r_{,ijk} &= \frac{1}{r^2}(3r_{,i}r_{,j}r_{,k} - \delta_{ij}r_{,k} - \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i}) \end{aligned} \tag{2.37}$$

et on note que le vecteur $\boldsymbol{\nabla r} = r_{,i}\boldsymbol{e}_i$ est unitaire: $r_{,i}r_{,i} = 1$. Les formules ci-dessus permettent facilement d'établir:

$$\Delta r = \frac{n-1}{r} \quad \Delta\frac{1}{r} = \frac{n-3}{r^3} \qquad (\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}) \tag{2.38}$$

Annexe 2.2 – Calcul de la solution élémentaire du laplacien

La solution élémentaire $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ du laplacien pour l'espace tridimensionnel infini vérifie:

$$G_{,aa}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = 0 \qquad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 - \{\boldsymbol{x}\} \tag{2.39}$$

La transformée de Fourier $\hat{G}$ de G par rapport à la variable tridimensionnelle $\boldsymbol{y}$, définie par

$$\hat{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) e^{-i\xi_j y_j}\ \mathrm{d}V_y \tag{2.40}$$

est appliquée à l'équation (2.39), ce qui donne:

$$-\xi^2 \hat{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i\xi_j x_j} = 0$$

en posant $\boldsymbol{\xi} = |\boldsymbol{\xi}|\,\boldsymbol{\eta} = \xi\boldsymbol{\eta}$ et $|\eta| = 1$. La solution $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ est obtenue par transformée de Fourier inverse:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \int_S e^{i\xi\eta_j(y_j - x_j)} d\omega d\xi \tag{2.41}$$

($d\omega$ désignant l'élément différentiel d'angle solide sur la sphère unité S définie par $|\eta| = 1$). D'autre part, remarquant que le changement de variable $\boldsymbol{\eta} \to -\boldsymbol{\eta}$ laisse S invariante, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \left\{ \int_S e^{i\xi\eta_j(y_j-x_j)} d\omega \right\} d\xi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_S e^{i\xi\eta_j(y_j-x_j)} d\omega + \int_S e^{-i\xi\eta_j(y_j-x_j)} d\omega \right\} d\xi \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{+\infty} \int_S e^{i\xi\eta_j(y_j-x_j)} d\omega d\xi + \int_S \int_{-\infty}^{0} e^{i\xi\eta_j(y_j-x_j)} d\omega d\xi \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_S e^{i\xi\eta_j(y_j-x_j)} d\omega d\xi
\end{aligned} \tag{2.42}$$

L'intégration par rapport à ξ redonne une mesure de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi\eta_j(y_j-x_j)} d\xi = 2\pi\delta(\eta_j(y_j - x_j)) \tag{2.43}$$

Un repère orthonormé direct $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ est maintenant introduit, tel que $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{a}_3$. On a alors $\boldsymbol{\eta} = r\sin\varphi(\cos\boldsymbol{a}\theta_1 + \sin\boldsymbol{a}\theta_2) + r\cos\varphi\boldsymbol{a}_3$ et $d\omega = \sin\varphi d\theta d\phi$ (θ, ϕ désignant les angles des coordonnées sphériques de centre $\boldsymbol{x}$ et d'axe $\boldsymbol{a}_3$), puis $\boldsymbol{\eta}.(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) = r\cos\varphi$. Par conséquent, (2.41), (2.42) et (2.43) conduisent au résultat recherché:

$$\begin{aligned}
G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \delta(r\cos\varphi)\sin\varphi d\phi \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-r}^{r} \delta(u)\frac{du}{r} \\
&= \frac{1}{4\pi r}
\end{aligned}$$

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DU BILAPLACIEN. Puisque $\Delta r = 2/r$, le résultat précédent permet immédiatement d'établir que l'équation biharmonique

$$\Delta\Delta u = 0$$

a pour solution élémentaire dans $\mathbb{R}^3$:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{r}{8\pi}$$

MILIEU ANISOTROPE. On considère l'équation

$$k_{ij}u_{,ij} = 0 \tag{2.44}$$

où le tenseur $\boldsymbol{k}$ est symétrique et défini positif. Le changement de coordonnées:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{k}^{-1/2}.\boldsymbol{y}$$

donne alors, posant $v(\boldsymbol{Y}) = u(\boldsymbol{y})$:

$$u_{,i} = v_{,I} k_{Ii}^{-1/2} \qquad u_{,ij} = v_{,IJ} k_{Ii}^{-1/2} k_{Jj}^{-1/2} \qquad k_{ij} u_{,ij} = v_{,II}$$

Cela montre que l'équation de conduction anisotrope (2.44) est transformée en l'équation de Laplace dans les coordonnées Y_I. Par conséquent, la solution élémentaire $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, de (2.44) est simplement obtenue à partir de la solution élémentaire isotrope $G(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ en faisant $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{k}^{-1/2}.\boldsymbol{y}$, ce qui donne:

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi \left|\boldsymbol{k}\right|^{1/2}} \frac{1}{\bar{r}} \qquad (E = \mathbb{R}^3)$$

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\pi \left|\boldsymbol{k}\right|^{1/2}} \log \frac{1}{\bar{r}} \qquad (E = \mathbb{R}^2)$$

avec:

$$|\boldsymbol{k}| = \det(\boldsymbol{k}) \qquad \bar{r}^2 = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})^T \boldsymbol{K}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

Les solutions élémentaires pour le demi-espace et le demi-plan sont donc ici aussi obtenues par la méthode des images.

Annexe 2.3 – Intégrabilité de $r_{,n}/r^2$

Soit S une surface régulière orientée, le sens de la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ étant donc choisi *a priori*[13], et $\boldsymbol{x} \in S$. Supposons que S admette une description paramétrique de la forme

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = r(\phi, \theta) \boldsymbol{e}_r \tag{2.45}$$

$\phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]$ étant les angles sphériques d'axe $\boldsymbol{e}_3$ et d'origine prise en $\boldsymbol{x}$, et $r(\phi, \theta)$ une fonction différentiable[14]. La relation

$$\tilde{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S_y = (\boldsymbol{r}_{,\phi} \wedge \boldsymbol{r}_{,\theta}) d\phi d\theta$$

est vraie pour toute surface paramétrée, $\tilde{\boldsymbol{n}}$ étant la normale calculée à partir du paramétrage (2.45) et dont l'orientation peut donc différer de celle de $\boldsymbol{n}$. Puisque

$$\boldsymbol{r}_{,\phi} = r_{,\phi} \boldsymbol{e}_r + r \boldsymbol{e}_\phi \qquad \boldsymbol{r}_{,\theta} = r_{,\theta} \boldsymbol{e}_r + r \sin\varphi \boldsymbol{e}_\theta$$

on obtient:

$$\tilde{\boldsymbol{n}} \, \mathrm{d}S_y = (r^2 \sin\varphi \boldsymbol{e}_r - r r_{,\phi} \sin\varphi \boldsymbol{e}_\phi - r r_{,\theta} \boldsymbol{e}_\theta) d\phi d\theta$$

et donc:

$$r_{,\tilde{n}} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} = \boldsymbol{r}.\tilde{\boldsymbol{n}} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^3} = r \boldsymbol{e}_r.\tilde{\boldsymbol{n}} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^3} = \sin\varphi d\phi d\theta$$

(remarque: on a toujours, par construction, $\tilde{\boldsymbol{n}}.\boldsymbol{e}_r \geq 0$). On en déduit que

$$\int_S r_{,n} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} = \int_S d\omega = \omega(\boldsymbol{x}, S) \tag{2.46}$$

[13] Par exemple, si S est fermée, $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à S.

[14] On suppose donc que tout rayon issu de $\mathbf{x}$ ne coupe qu'une fois S.

où $d\omega$ est l'élément différentiel d'angle solide algébrique[15] et $\omega(\boldsymbol{x}, S)$ l'angle solide algébrique sous lequel $\boldsymbol{x}$ voit S. L'intégrale $\int_S r^{-2} r_{,n}\, \mathrm{d}S_y$ est en particulier convergente. Si S est fermée, on a notamment:

$$\int_S r_{,\tilde{n}} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} = \int_S d\omega = 2\pi \tag{2.47}$$

Une surface S quelconque, régulière, admet une partition $S = S_1, \ldots, S_N$ telle que chaque S_j soit descriptible par (2.45), de sorte que (2.46) reste vraie.

Références bibliographiques

[1] BETTESS, P. *Infinite elements*. Penshaw Press (1992).

[2] GUIGGIANI, M., KRISHNASAMY, G., RUDOLPHI, T. J., RIZZO, F. J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *ASME J. Appl. Mech.*, **59**, 604–614 (1992).

[3] KUPRADZE, V. D. (ed.). *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North Holland (1979).

[4] SLADEK, J., SLADEK, V. Three-dimensional curved crack in an elastic body. *Int. J. Solids Struct.*, **19**, 425–436 (1983).

[5] TRICOMI, F. G. *Integral equations*. Interscience Publishers, New York (1957).

[15] C'est-à-dire compté positivement quand $\mathbf{n}.\mathbf{e}_r \geq 0$.

3

Résolution numérique des équations intégrales par éléments de frontière

Ce chapitre traite de la méthode des éléments de frontière pour l'équation de Poisson $\Delta u + b = 0$. Par commodité de présentation, les sources b sont d'abord supposées nulles, leur prise en compte étant traitée en section 3.6.

En l'absence de sources, le potentiel u et le flux q vérifient l'équation intégrale régularisée (2.20), que nous rappelons:

$$\int_{\partial\Omega} \{[u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y = 0 \tag{3.1}$$

le *point de collocation* $\boldsymbol{x}$ étant pris sur $\partial\Omega$. Ce chapitre expose la *méthode de collocation*, qui consiste à discrétiser l'équation intégrale prise en un nombre fini de points de collocation $\boldsymbol{x}$, suffisant pour fournir au moins autant d'équations que le problème discret compte d'inconnues.

La discrétisation par éléments de frontière résulte d'une transposition directe des méthodes de représentation de la géométrie et des variables par fonctions de forme et valeurs nodales classiquement utilisées dans le contexte des méthodes d'éléments finis. Ce choix est principalement motivé par des exigences de *généralité* et de *souplesse*: pouvoir décrire et traiter, par une approche unifiée, des problèmes aux limites posés sur des domaines de forme quelconque et supportant des conditions aux limites quelconques.

3.1 Représentation de la géométrie par éléments de frontière

Le point de départ de la discrétisation consiste en l'introduction d'une partition de la frontière $\partial\Omega$ en N_E *éléments de frontière* $E_1, \ldots, E_{N_E}$ disjoints: $\partial\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_E} E_e$. Les E_e sont ainsi des portions de courbes (domaine Ω plan) ou de surfaces (domaine Ω tridimensionnel). L'équation intégrale (3.1) est alors écrite comme une somme d'*intégrales*

élémentaires:

$$\sum_{e=1}^{N_E} \int_{E^{(e)}} \{[u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y = 0$$

Le calcul effectif de ces dernières repose sur une description analytique de chaque élément de frontière, par un paramétrage:

$$\boldsymbol{\xi} \in \Delta_e \rightarrow \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) \in E_e \qquad (1 \leq e \leq N_E)$$

chaque élément E_e de l'espace physique étant rapporté à un *élément de référence* Δ_e, segment de la droite réelle $\boldsymbol{\xi} = (\xi)$ si $\partial\Omega$ est une courbe ou domaine du plan $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ si $\partial\Omega$ est une surface.

DESCRIPTION DES ÉLÉMENTS PAR NŒUDS ET FONCTIONS DE FORME. Le plus souvent on ne cherche pas à représenter exactement la frontière $\partial\Omega$, opération en général complexe et se prêtant peu à des algorithmes généraux et applicables à des classes étendues de frontières $\partial\Omega$. On préfère introduire des descriptions paramétriques génériques (généralement polynômiales), dépendant pour chaque élément d'un petit nombre de coefficients. Ce procédé ne permet en général que la construction d'une frontière approchée $\partial\tilde{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_E} E_e$ de $\partial\Omega$, mais donne en contrepartie une méthode unifiée de représentation de frontières quelconques.

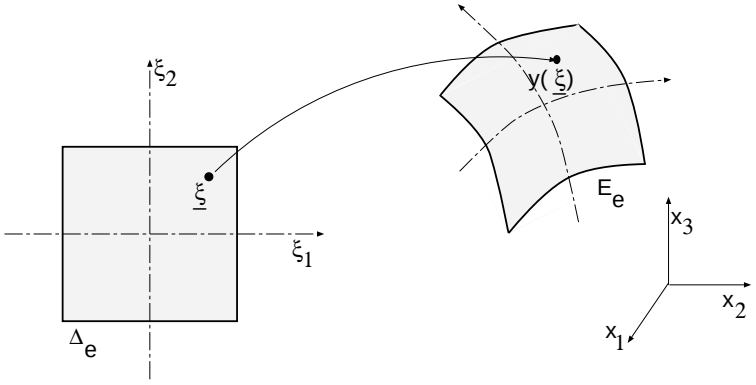

Figure 3.1: Elément de frontière E_e et élément de référence Δ_e.

Ces considérations ne font que reprendre celles qui ont conduit aux représentations de domaines par éléments finis. Les éléments de frontière classiques reposent ainsi sur la représentation par nœuds et fonctions de forme. Les éléments de référence Δ_e sont choisis de forme simple: segment $\xi \in [-1, 1]$ pour les problèmes plans, carré $\boldsymbol{\xi} \in [-1, 1]^2$ ou triangle $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, 1 - \xi_1 - \xi_2 \geq 0$ pour les problèmes tridimensionnels. Chaque élément E_e de la frontière approchée $\partial\tilde{\Omega}$ est décrit par un paramétrage de la forme:

$$\boldsymbol{\xi} \in \Delta_e \rightarrow \boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{m=1}^{N_e} N_m(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{y}^m \qquad \boldsymbol{\xi} \in \Delta_e \tag{3.2}$$

pour lequel on suppose donnés:

- N_e points $\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{N_e}$ de $\partial\Omega$ appelés *nœuds géométriques*, donnés ici en *numérotation locale* $1 \leq m \leq N_e$.
- N_e *fonctions de forme* $N_1(\boldsymbol{\xi}), \ldots, N_{N_e}(\boldsymbol{\xi})$ (habituellement polynômiales), vérifiant les propriétés suivantes:

$$N_p(\boldsymbol{\xi}^q) = \delta_{pq} \qquad \sum_{m=1}^{N_e} N_q(\boldsymbol{\xi}) = 1 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \Delta_e \tag{3.3}$$

où $\boldsymbol{\xi}^q \in \Delta_e$ est l'*antécédent* du nœud $\boldsymbol{y}^q \in E_e$. Il y a bien sûr un lien entre le nombre N_e de nœuds choisi pour décrire l'élément et le type de fonction de forme utilisé.

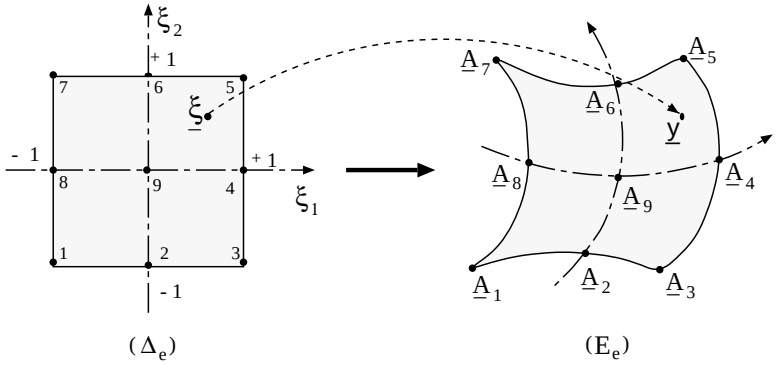

Figure 3.2: Paramétrage d'un élément de frontière quadrangulaire à 9 nœuds.

Ce formalisme permet de définir sans difficulté des éléments de frontière courbes. D'autre part les intégrales élémentaires sont calculées au moyen du changement de variable inverse de (3.2); ainsi tous les éléments curvilignes (resp. triangulaires, quadrangulaires) sont rapportés au *même* segment (resp. triangle, carré) de référence.

Construction de la frontière approchée. Elle consiste à accomplir les étapes suivantes:

1. Choix de N_N *nœuds géométriques* $\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{N_N}$ situés sur $\partial\Omega$. Cette information est consignée sous la forme d'une *table de coordonnées*, donnant pour chaque p $(1 \leq p \leq N_N)$ les coordonnées cartésiennes du nœud $\boldsymbol{y}^p$.
2. Partition de $\partial\Omega$ en N_E éléments (segments, triangles ou quadrangles curvilignes). La *table de connectivité* $e, q \to m(e,q)$ donne, pour un nœud $\boldsymbol{y}^q$ de numéro local q sur l'élément de numéro e, son *numéro global* $m(e,q)$ $(1 \leq m(e,q) \leq N_N)$. Inversement, l'élément E_e est défini par la donnée des N_e nœuds $\boldsymbol{y}^{m(e,1)}, \ldots, \boldsymbol{y}^{m(e,N_e)}$.

Les tables de coordonnées et de connectivité sont les deux composants essentiels du maillage, et le définissent complètement. La surface approchée complète résulte alors d'une interpolation de type (3.2) sur chaque élément.

CONSTRUCTION DES FONCTIONS DE FORME. Toute représentation approchée de $\partial\Omega$ en éléments de frontière $(E_1, \ldots, E_{N_E})$ doit être telle que deux éléments voisins se raccordent exactement et ne présentent entre eux ni recouvrement, ni "trous". Les fonctions de forme classiquement utilisées en éléments finis sont construites pour vérifier ces critères (quelques familles de fonctions de forme usuelles sont rappelées en annexe B.2). Il est nécessaire que deux éléments adjacents partagent les mêmes nœuds-frontière (caractère *conforme* du maillage). L'approximation de $\partial\Omega$ par nœuds et fonctions de forme garantit alors

- l'existence et la continuité du plan tangent et de la normale en tout point intérieur d'un élément;
- La continuité et le non-recouvrement de $\partial\tilde{\Omega}$ à la jonction entre deux éléments.

Le plan tangent et la normale sont généralement discontinus à la traversée de la frontière entre deux éléments.

TANGENTE ET NORMALE. La géométrie différentielle classique donne alors la tangente $\boldsymbol{\tau}$ unitaire ainsi que l'élément d'abscisse curviligne $\mathrm{d}s$ au point $\boldsymbol{y}(\xi)$ d'un élément de frontière curviligne comme:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{J}\sum_{q=1}^{N_e} N'_q(\xi)\boldsymbol{y}^q \qquad \mathrm{d}s = Jd\xi \qquad J = \left|\sum_{q=1}^{N_e} N'_q(\xi)\boldsymbol{y}^q\right| \tag{3.4}$$

la normale unitaire étant alors donnée par:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{\tau} \qquad \text{soit} \quad n_j = e_{ij}\tau_i$$

De même, la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ et l'élément d'aire $\mathrm{d}S$ au point $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})$ d'un élément de surface sont donnés par des formules classiques de la théorie des surfaces:

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{J}(\boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2}) \qquad \mathrm{d}S = J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi \tag{3.5}$$

avec:

$$J(\boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2}| = \left\{|\boldsymbol{a}_1|^2\,|\boldsymbol{a}_2|^2 - (\boldsymbol{a}_1.\boldsymbol{a}_2)^2\right\}^{1/2} \tag{3.6}$$

où $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ sont les vecteurs de la *base naturelle* du plan tangent à E_e en $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})$ associée au paramétrage (3.2):

$$\boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{q=1}^{N_e} N_{q,\alpha}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{y}^q \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{3.7}$$

$J(\boldsymbol{\xi})$ est le jacobien du changement de variable $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{\xi}$ inverse du paramétrage (3.2) de l'élément de surface. Il faut évidemment que $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ soient linéairement indépendants pour tout $\boldsymbol{\xi} \in \Delta_e$ pour avoir $J(\boldsymbol{\xi}) > 0$, condition nécessaire pour que l'élément E_e soit non-dégénéré.

EXEMPLE: FACETTES TRIANGULAIRES PLANES. C'est la méthode la plus simple d'approximation de surfaces par éléments de frontière. On définit une partition de la surface considérée en triangles (curvilignes), dont les sommets $\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{N_N}$ (numérotation globale) sont pris comme nœuds géométriques. La surface approchée est alors constituée des facettes planes triangulaires dont les sommets sont ceux des triangles curvilignes constituant la partition de la surface réelle. Chacun de ces éléments de frontière a donc trois nœuds (les sommets du triangle) et peut être paramétré sur le triangle de référence. Le paramétrage (3.2) utilise des fonctions de forme linéaires:

$$\boldsymbol{y} = \xi_1 \boldsymbol{y}^1 + \xi_2 \boldsymbol{y}^2 + (1 - \xi_1 - \xi_2)\boldsymbol{y}^3 \tag{3.8}$$

La base naturelle associée est donnée par:

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{y}^1 - \boldsymbol{y}^3 \qquad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{y}^2 - \boldsymbol{y}^3$$

Le calcul de J, $\boldsymbol{n}$ et $\mathrm{d}S$ par (3.5) et (3.6) est immédiat. Bien entendu, l'approximation ainsi construite est d'autant meilleure que les nœuds sont plus nombreux et la taille des éléments plus petite. Le placement des nœuds aux sommets des triangles assure la continuité de la surface décrite sur chaque triangle par le paramétrage (3.8).

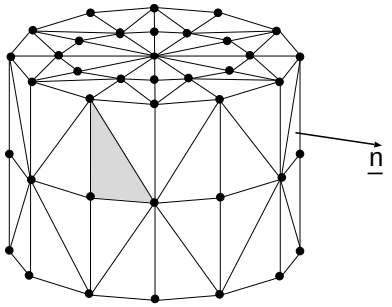

Figure 3.3: Approximation de la frontière d'un domaine tridimensionnel par éléments de frontière triangulaires plans.

EXEMPLE: SEGMENTS CURVILIGNES. Une courbe fermée est découpée en N_E segments curvilignes. Sur chacun d'eux, on considère trois nœuds: les deux extrémités $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^3$ et un point intermédiaire $\boldsymbol{y}^2$ (numérotation locale), soit un total de $N_N = 2N_E$ nœuds. Avec la numérotation globale décrite par la figure 3.4, la table de connectivité serait:

e	1			2			3			...			N_E		
q	1	2	3	1	2	3	1	2	3	...	...	...	1	2	3
$m(e,q)$	1	2	3	3	4	5	5	6	7	...	...	...	$2N_E-1$	$2N_E$	1

Le paramétrage (3.2) utilise sur chaque élément des fonctions de forme quadratiques:

$$\boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)\boldsymbol{y}^1 + (1 - \xi^2)\boldsymbol{y}^2 + \frac{1}{2}\xi(\xi + 1)\boldsymbol{y}^3 \qquad \xi \in [-1, 1] \tag{3.9}$$

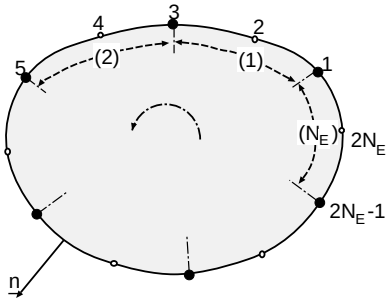

Figure 3.4: Approximation de la frontière d'un domaine plan par éléments de frontière curvilignes.

et on trouve:

$$\boldsymbol{\tau}\,\mathrm{d}s = [\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}^3 - \boldsymbol{y}^1) + \xi(\boldsymbol{y}^1 + \boldsymbol{y}^3 - 2\boldsymbol{y}^2)]d\xi$$

3.2 Discrétisation des inconnues

La représentation des variables u, q sur la frontière reprend encore le formalisme de la méthode des éléments finis. Une famille de N_I points de $\partial\Omega$ $\boldsymbol{z}^1, \ldots, \boldsymbol{z}^{N_\mathrm{I}}$ (en numérotation globale), appelés *nœuds d'interpolation*, est choisie. Chacun des $N_\mathrm{I}(e)$ nœuds d'interpolation $\boldsymbol{z}^k$ ($1 \leq k \leq N_\mathrm{I}(e)$, en numérotation locale) situés sur l'élément E_e ou sa frontière est associé à une *fonction d'interpolation* $M_k(\boldsymbol{\xi})$, vérifiant les propriétés (3.3). Une approximation des variables u, q sur E_e est définie par:

$$\tilde{u}(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{N_\mathrm{I}(e)} M_k(\boldsymbol{\xi})u^k \qquad \tilde{q}(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{N_\mathrm{I}(e)} M_k(\boldsymbol{\xi})q^k \qquad (\boldsymbol{\xi} \in \Delta_e) \tag{3.10}$$

où les (u^k, q^k) ($1 \leq k \leq N_\mathrm{I}(e)$) sont les *valeurs nodales* $\tilde{u}(\boldsymbol{z}^k), \tilde{q}(\boldsymbol{z}^k)$ du potentiel et du flux aux nœuds d'interpolation; $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{\xi}$ étant homologues par le paramétrage (3.2).

INTERPOLATIONS CONFORMES, NON CONFORMES, ISOPARAMÉTRIQUES. Une interpolation est dite *conforme* quand elle est construite de manière à garantir la continuité du champ interpolé à la jonction de deux éléments. Les conditions de conformité sont les mêmes que pour l'interpolation géométrique.

L'équation intégrale) (3.1 n'a de sens que si $u \in C^{0,\alpha}$ ($\alpha > 0$) en $\boldsymbol{x}$, ce qui implique la continuité de u en $\boldsymbol{x}$. Par conséquent, bien qu'on puisse *a priori* envisager d'approcher u, continu sur $\partial\Omega$, par une représentation $\tilde{\boldsymbol{u}}$ présentant des discontinuités (par exemple à l'aide de fonctions constantes par élément), celle-ci doit être continue au *point de collocation* $\boldsymbol{x}$. Il existe donc des choix incompatibles de fonctions d'interpolation $M_k(\boldsymbol{\xi})$ et de points de collocation $\boldsymbol{x}$: par exemple, utiliser des fonctions M_k constantes par élément n'est possible que si $\boldsymbol{x}$ est intérieur à un élément. Les interpolations conformes sont de loin les plus utilisées pour u, et une étude comparative (Manolis et Banerjee

[11]) conclut nettement en leur faveur. En revanche, une interpolation non conforme de q est acceptable, physiquement aussi bien que mathématiquement.

La définition (3.10) est écrite en termes des mêmes fonctions d'interpolation pour u et q: ce choix est fréquent mais pas obligatoire. Il est parfois bon d'utiliser des interpolations différentes pour u et q, notamment en présence d'arêtes ou de coins.

Le plus souvent, les nœuds géométriques sont aussi pris comme nœuds d'interpolation; on a alors $N_N = N_\mathrm{I}$ et $\boldsymbol{y}^i = \boldsymbol{z}^i$, $(1 \leq i \leq N_N)$, et les fonctions de forme et d'interpolation sont alors identiques: $N_k(\boldsymbol{\xi}) = M_k(\boldsymbol{\xi})$, $(1 \leq k \leq N_N)$. Ce type de représentation, dit *isoparamétrique*, est nécessairement conforme pour u et q.

3.3 Construction et résolution numérique du problème discrétisé

Discrétisation de l'équation intégrale. La méthode de *collocation* consiste à forcer l'équation intégrale (3.1) à être vérifiée exactement en certains *points de collocation* $\boldsymbol{x}^c$, en nombre fini N_c. Une fois le maillage créé, la discrétisation est effectuée par report des interpolations (3.2) pour la géométrie et (3.10) pour les variables dans:

$$\sum_{e=1}^{N_E} \int_{E^{(e)}} \{[\tilde{u}(\boldsymbol{y}) - \tilde{u}(\boldsymbol{x}^c)]H(\boldsymbol{x}^c, \boldsymbol{y}) - \tilde{q}(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x}^c, \boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y = 0 \qquad (1 \leq c \leq N_c)$$

Cette équation fait intervenir des intégrales élémentaires régulières ($\boldsymbol{x}^c \notin E_e$) ou singulières ($\boldsymbol{x}^c \in E_e$). Pour un point $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ donné, posons:

$$I(\boldsymbol{x}) = \{e \in [1, N_E], \boldsymbol{x} \in E_e] \qquad \bar{I}(\boldsymbol{x}) = [1, N_E] - I(\boldsymbol{x})$$

En d'autres termes, une intégrale élémentaire sur E_e est singulière pour $e \in I(\boldsymbol{x})$ et régulière pour $e \in \bar{I}(\boldsymbol{x})$; le support des intégrations élémentaires singulières pour le point de collocation $\boldsymbol{x}$ est la réunion d'éléments $\cup_{e \in I(\boldsymbol{x})} E_e$.

L'équation intégrale discrétisée prend alors la forme suivante, en distinguant intégrations singulières et régulières:

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{e \in I(\boldsymbol{x})} \sum_{p=1}^{N_\mathrm{I}(e)} \left\{ AS(e,p) u^{m(e,p)} - B(e,p) q^{m(e,p)} \right\} \\ & + \sum_{e \in \bar{I}(\boldsymbol{x})} \sum_{p=1}^{N_\mathrm{I}(e)} \left\{ AR(e,p) u^{m(e,p)} - B(e,p) q^{m(e,p)} \right\} - u(\boldsymbol{x}^c) \sum_{e \in \bar{I}(\boldsymbol{x})} \widehat{AR}(e) \end{aligned} \qquad (3.11)$$

avec les intégrales élémentaires:

$$\begin{aligned} AS(e,p) &= \int_{E^{(e)}} [M_p(\boldsymbol{\xi}) - M_p(\boldsymbol{\eta}_e)] H(\boldsymbol{x}^c, \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \\ B(e,p) &= \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) G(\boldsymbol{x}^c, \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \\ AR(e,p) &= \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) H(\boldsymbol{x}^c, \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \\ \widehat{AR}(e) &= \int_{E^{(e)}} H(\boldsymbol{x}^c, \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

dont le calcul numérique est traité aux sections 3.4 (intégrations régulières) et 3.5 (intégrations singulières) respectivement.

Pour un élément E_e, $e \in I(\boldsymbol{x}^c)$, l'antécédent de $\boldsymbol{x}^c$ par le paramétrage (3.2) est noté $\boldsymbol{\eta}_e \in \Delta_e$, ou plus simplement $\boldsymbol{\eta}$ en l'absence d'ambiguité concernant l'élément considéré. L'expression de l'intégrale élémentaire AS tient compte de ce que (3.10) appliquée au point $\boldsymbol{x}^c$ donne:

$$\forall e \in I(\boldsymbol{x}^c) \qquad u(\boldsymbol{x}^c) = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} M_p(\boldsymbol{\eta}_e) u^{m(e,p)}$$

où les M_p sont les fonctions d'interpolation associées à l'élément E_e. Par conséquent:

$$\forall e \in I(\boldsymbol{x}) \qquad u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x}^c) = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} [M_p(\boldsymbol{\xi}) - M_p(\boldsymbol{\eta}_e)] u^{m(e,p)} \tag{3.12}$$

ASSEMBLAGE DU SYSTÈME LINÉAIRE. Les N_c équations scalaires (3.11) présentent la forme matricielle:

$$[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{u}\} + [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{q}\} = [\boldsymbol{0}] \qquad \{\boldsymbol{u}\} = \{u^m\}_{1 \le m \le N_{\mathrm{I}}}\ ,\ \{\boldsymbol{q}\} = \{q^m\}_{1 \le m \le N_{\mathrm{I}}} \tag{3.13}$$

Les matrices $[\boldsymbol{A}]$ et $[\boldsymbol{B}]$, de dimensions $N_c \times N_{\mathrm{I}}$, sont *pleines*, ce qui constitue une différence majeure par rapport aux méthodes d'éléments finis. Cela est dû au fait que, par l'intermédiaire des solutions élémentaires $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, tout point de $\partial\Omega$ a une influence sur tout point de $\partial\Omega$, et ce quel que soit la méthode d'interpolation de (u, q) utilisée.

L'équation (3.13) est une relation linéaire en les $2N_{\mathrm{I}}$ valeurs nodales (u^m, q^m). En outre, des conditions aux limites bien posées contraignent chaque couple (u^m, q^m) à vérifier une relation, de sorte qu'il reste finalement N_{I} inconnues scalaires. Il est donc nécessaire d'avoir au moins N_{I} équations indépendantes dans (3.11). Le plus simple est d'opérer la collocation de l'équation intégrale en tous les nœuds d'interpolation: $\boldsymbol{x}^c = \boldsymbol{z}^c$, $(1 \le c \le N_{\mathrm{I}})$, ce qui permet de réutiliser des points déjà définis. Il y a alors autant de points de collocation que de nœuds d'interpolation ($N_c = N_{\mathrm{I}}$); c'est le choix le plus courant en pratique.
La construction des matrices $[\boldsymbol{A}]$ et $[\boldsymbol{B}]$, opération appelée *assemblage*, procède schématiquement comme suit:

Boucle sur les N_c points de collocation $\boldsymbol{x}^c$.

Pour chaque $\boldsymbol{x}^c$, boucle sur les N_E éléments: $1 \leq e \leq N_E$.
TEST: $e \in I(\boldsymbol{x}^c)$?

- *Si oui: intégrations singulières sur E_e, puis affectation:*

$$A_{cm} \leftarrow A_{cm} + AS(e,p) \quad B_{cm} \leftarrow B_{cm} - B(e,p) \qquad (m = m(e,p))$$

- *Si non, intégrations régulières sur E_e, puis affectation:*

$$A_{cm} \leftarrow A_{nm} + AR(e,p) \quad B_{cm} \leftarrow B_{cm} - B(e,p) \qquad (m = m(e,p))$$

et

$$A_{cc} \leftarrow A_{cc} + \widehat{AR}(e)$$

Fin de boucle

Fin de boucle

et le nombre d'intégrales à calculer est proportionnel à $N_E \times N_c$, N_c étant lui-même proportionnel à N_e.

Incorporation des conditions aux limites. Celles des composantes de $\{\boldsymbol{u}\}, \{\boldsymbol{t}\}$ qui sont données par les conditions aux limites sont remplacées par leur valeur dans (3.13), et les colonnes correspondantes envoyées au second membre; cela donne un système linéaire carré:

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{f}\} \tag{3.14}$$

dans lequel $\{\boldsymbol{v}\}$ désigne le vecteur formé des composantes de $\{\boldsymbol{u}\}, \{\boldsymbol{t}\}$ restées inconnues, $[\boldsymbol{K}]$ est formée des colonnes de $[\boldsymbol{A}], [\boldsymbol{B}]$ associées aux composantes de $\{\boldsymbol{v}\}$ et $\{\boldsymbol{f}\}$ est le second membre formé par la somme (changée de signe) des colonnes de $[\boldsymbol{A}], [\boldsymbol{B}]$ associées aux composantes connues de $\{\boldsymbol{u}\}, \{\boldsymbol{t}\}$ multipliées par la valeur de ces dernières. Par exemple, pour un problème à conditions aux limites mixtes ($q = q^D$ sur S_{q}, $u = u^D$ sur $S_u = \partial\Omega - S_{\mathrm{q}}$), moyennant une éventuelle renumérotation des colonnes, (3.13) s'écrit:

$$[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2]\{\boldsymbol{u}', \boldsymbol{u}^D\}^T + [\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2]\{\boldsymbol{q}^D, \boldsymbol{q}'\}^T = \boldsymbol{0}$$

et le système final, dont les inconnues sont les sous-vecteurs $\{\boldsymbol{u}'\}, \{\boldsymbol{q}'\}$, devient:

$$[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_2]\{\boldsymbol{u}', \boldsymbol{q}'\}^T = -[\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_1]\{\boldsymbol{u}^D, \boldsymbol{q}^D\}^T$$

soit l'équation (3.14) avec

$$[\boldsymbol{K}] = [\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{B}_2] \qquad \{\boldsymbol{v}\} = \{\boldsymbol{u}', \boldsymbol{q}'\}^T \qquad \{\boldsymbol{f}\} = -[\boldsymbol{A}_2, \boldsymbol{B}_1]\{\boldsymbol{u}^D, \boldsymbol{q}^D\}^T$$

Structure et résolution du système linéaire. La matrice $[\boldsymbol{K}]$ dans (3.14) est généralement *pleine et non symétrique*. Ce fait constitue une différence notable par rapport aux méthodes d'éléments finis, qui conduisent à une matrice de rigidité bande et symétrique (Batoz et Dhatt [1]).

Le système (3.14) est alors classiquement résolu par élimination de Gauss, la matrice $[\boldsymbol{K}]$ étant transformée en une matrice triangulaire supérieure, ce qui permet ensuite

de calculer la solution $\{\boldsymbol{v}\}$ par remontée. Des méthodes itératives ont également été proposées (Mullen et Rencis [12], Kane et coll. [9]) mais semblent d'un emploi moins courant. Nous ne décrivons pas ici la méthode d'élimination de Gauss, très classique (Ciarlet [3]); la bibliothèque LINPACK [5] (pour n'en citer qu'une), du domaine public, propose les programmes FORTRAN nécessaires.

Commentaires. On peut préférer incorporer les données u^D, q^D directement dans les intégrales élémentaires de l'équation intégrale discrétisée (3.11) à l'aide d'une expression analytique en fonction du point courant $\boldsymbol{y}$, quand elle est connue. Dans le cas de potentiel imposé non nul, il faut alors pouvoir mettre en facteur une puissance positive de $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$ dans l'expression analytique de $u^D(\boldsymbol{y})-u^D(\boldsymbol{x})$ pour évaluer correctement celles des intégrales élémentaires qui sont singulières.

D'autre part, la construction explicite des matrices $[\boldsymbol{A}], [\boldsymbol{B}]$ peut souvent être évitée au profit d'une construction directe de $[\boldsymbol{K}], \{\boldsymbol{f}\}$. Il faut alors organiser l'assemblage de manière à affecter directement les intégrales élémentaires à $[\boldsymbol{K}], \{\boldsymbol{f}\}$. Cela donne:

TEST: $e \in I(\boldsymbol{x})$*?*

- *Si oui: intégrations singulières sur* E_e*, puis affectation:*
  - *Si* $u^{m(e,q)}$ *est donné et* $q^{m(e,q)}$ *est inconnu, alors:*

$$K_{c,j(e,q)} \leftarrow K_{c,j(e,q)} - B(e,q), \qquad f_c \leftarrow f_c + \sum_{q=1}^{N_I(e)} AS(e,q)u^{m(e,q)}$$

  - *Sinon:*

$$K_{c,i(e,q)} \leftarrow K_{c,i(e,q)} + AS(e,q), \qquad f_c \leftarrow f_c - \sum_{q=1}^{N_I(e)} B(e,q)q^{m(e,q)}$$

- *Si non, intégrations régulières sur* E_e*, puis affectation:*
  - *Si* $u^{m(e,q)}$ *est donné et* $q^{m(e,q)}$ *est inconnu, alors:*

$$K_{c,j(e,q)} \leftarrow K_{c,j(e,q)} - B(e,q), \qquad f_c \leftarrow f_c - \sum_{q=1}^{N_I(e)} AR(e,q)u^{m(e,q)}$$

$$f_c \leftarrow f_c - \widehat{AR}(e)u^{m(e,q)} \qquad (\textit{pour le cas } m(e,q)=c)$$

  - *Sinon:*

$$K_{c,i(e,q)} \leftarrow K_{c,i(e,q)} + AR(e,q), \qquad f_c \leftarrow f_c + \sum_{q=1}^{N_I(e)} B(e,q)q^{m(e,q)}$$

$$K_{c,c} \leftarrow K_{c,c} + \widehat{AR}(e)$$

($i = i(e,q)$ et $j = j(e,q)$ étant les numéros d'ordre attribués à celles des valeurs nodales $u^{m(e,q)}$ et $q^{m(e,q)}$ qui sont inconnues).

POST-TRAITEMENT: CALCUL DES CHAMPS AUX POINTS INTÉRIEURS. Après résolution du système (3.14), les valeurs nodales $\{u^m\}, \{t^m\}$ $(1 \leq m \leq N_{\mathrm{I}})$ sont connues. On peut alors évaluer numériquement les formules (2.14), (2.15) de représentation, ce qui donne des valeurs approchées de $u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})$ en un point d'observation $\boldsymbol{x}$ intérieur:

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} \left\{ q^{m(e,p)} \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\xi \right. \\ \left. - u^{m(e,p)} \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\xi \right\} \tag{3.15}$$

$$u_{,i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} \left\{ q^{m(e,p)} \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\xi \right. \\ \left. - u^{m(e,p)} \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) G_{\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\xi \right\} \tag{3.16}$$

Les intégrales élémentaires apparaissant dans les expressions ci-dessus, dépendant de $\boldsymbol{x}$ à travers les solutions élémentaires, doivent être recalculées pour chaque point intérieur $\boldsymbol{x}$ et ne sont pas réutilisables. Le calcul numérique de nombreuses valeurs intérieures peut ainsi nécessiter un temps de calcul important.

D'autre part, des difficultés numériques apparaissent quand $\boldsymbol{x}$ est pris proche de $\partial\Omega$, en raison de la présence de termes variant en $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{-1}$, $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{-2}$ dans (3.15) et en $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{-2}$, $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{-3}$ dans (3.16). Bien que les intégrales ne soient pas à proprement parler singulières, la précision de leur évaluation numérique est sérieusement dégradée quand $\boldsymbol{x}$ s'approche trop de $\partial\Omega$; on parle parfois d'*intégrales quasi-singulières*, sur lesquelles on reviendra dans la prochaine section.

Quand cela est possible (c'est-à-dire dans le cas fréquent où la solution élémentaire pour le milieu infini est utilisée), il est préférable d'utiliser la variante de (2.15) intégrée par parties, qui ne contient que des termes en $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{-1}$, $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{-2}$:

$$u_{,i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} \left\{ u^{m(e,p)} \int_{E^{(e)}} D_{ij} M_p(\boldsymbol{\xi}) G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \right. \\ \left. - q^{m(e,p)} \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \right\} \tag{3.17}$$

3.4 Calcul des intégrales élémentaires régulières

Le calcul numérique des intégrales élémentaires régulières qui apparaissent dans l'équation intégrale discrétisée (3.11) et les représentations intégrales discrétisées (3.15), (3.16) repose habituellement, comme pour les méthodes d'éléments finis, sur l'utilisation de formules de quadrature par Points de Gauss.

PRINCIPE DE L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE PAR POINTS DE GAUSS. On se contente ici de quelques brefs rappels, renvoyant le lecteur aux ouvrages sur la théorie de

l'intégration numérique (Davis et Rabinowitz [4] ou Stroud et Secrest [15], par exemple).

Intégrales simples. La valeur approchée d'une intégrale sur le segment $[-1,1]$ est donnée par la formule:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i)$$

où les x_i et w_i sont respectivement les *points de Gauss* et les poids associés à ces points. Ils sont déterminés de manière unique pour N donné[1], et tabulés dans la littérature; l'annexe B.3 donne leurs valeurs pour $N \leq 7$. Les Points de Gauss sont caractérisés par le fait que l'intégration des monômes de degré $\leq 2N-1$ est exacte:

$$\forall k, 0 \leq k \leq 2N-1, \qquad \int_{-1}^{1} x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i^k \tag{3.18}$$

En ce sens-là, l'intégration par points de Gauss est optimale parmi les formules utilisant N points et poids.

Les points de Gauss sont intérieurs au segment: $\forall(i,N), x_i \in]-1,1[$, et les poids sont strictement positifs: $\forall(i,N), w_i > 0$. Leur répartition est symétrique par rapport au milieu du segment: $\forall(i,N), x_i = x_{N-i}$, $w_i = w_{N-i}$.

Le calcul numérique d'une intégrale sur $[a,b]$ demande un changement de variable:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi)d\xi$$

Il existe aussi des familles de points de Gauss modifiés pour l'évaluation d'intégrales du type:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{N} \hat{w}_i f(\hat{x}_i)$$

contenant un *poids* $g(x) \geq 0$ intégrable sur $[-1,1]$. Elles permettent par exemple le calcul numérique d'intégrales faiblement singulières, le poids $g(x)$ incorporant la singularité. Le tableau B.3 de l'annexe B donne les abscisses et poids pour l'intégration numérique unidimensionnelle en présence d'une singularité logarithmique:

$$[a,b] = [0,1] \qquad g(x) = \mathrm{Log}\frac{1}{x}$$

Intégrales doubles sur le carré $[-1,1]^2$*:* Elles sont évaluables au moyen de la "formule-produit":

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j f(x_i,x_j) \tag{3.19}$$

où les x_i, w_i sont les points et poids de Gauss pour l'intervalle $[1,1]$ utilisés dans (3.18).

[1] Ce sont les zéros du polynôme de Legendre d'ordre N

Intégrales doubles sur le triangle $\mathcal{T}$: $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, 1-\xi_1-\xi_2 \geq 0$. Le changement de variables $\xi_1 = 0.25(1+u)(1-v)$, $\xi_2 = 0.5(1+v)$ transforme le triangle $\mathcal{T}$ en le carré $[-1,1]^2$. Cela permet d'appliquer la formule-produit (3.19):

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{T}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(u,v)\frac{1}{8}(1-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j g(x_i,x_j)(1-y_j)\end{aligned}$$

mais cette méthode brise la symétrie du triangle en concentrant des points d'intégration près du sommet $x=0, y=1$, qui devient privilégié. Il existe d'autre part des formules d'intégration numérique utilisant des points (x_i^T, y_i^T) et poids w_i^T spécialement adaptés au triangle (Lyness et Jespersen [10]), et respectant la symétrie ternaire. Les intégrations numériques prennent alors la forme:

$$\int_{\mathcal{T}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \approx \sum_{i=1}^{N} w_i^T f(x_i^T, y_i^T)$$

L'annexe B.3 donne les (x_i^T, y_i^T, w_i^T) pour quelques valeurs de N.

Choix du nombre de Points de Gauss. Le nombre N de points de Gauss à utiliser pour une intégration régulière sur un élément de frontière E varie selon que la frontière est une courbe ou une surface.

Il dépend en outre, comme pour la méthode des éléments finis, de la représentation de la géométrie (variations du jacobien $J(\boldsymbol{\xi})$) et des inconnues (degré des fonctions d'interpolation M_k utilisées). Dans les cas courants (fonctions d'interpolation polynômiales usuelles[2], éléments ne présentant pas de distorsion sévère), un nombre modéré de points de Gauss (2×2 ou 3×3 sur un carré) est suffisant.

Il varie enfin, et cette considération est spécifique aux méthodes d'équations intégrales, selon les positions relatives de $\boldsymbol{x}$ et E. En effet, la présence de termes en r^{-1}, r^{-2}, r^{-3} ($r = |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$) provenant des solutions élémentaires $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ et leurs dérivées entraîne des variations très fortes de l'intégrand sur E si $\boldsymbol{x}$ est proche de E. Au contraire, si $\boldsymbol{x}$ est éloigné de E, ces termes deviennent à peu près constants. Donc un nombre de points de Gauss correspondant au choix des fonctions d'interpolation et aux variations du jacobien est satisfaisant si $\boldsymbol{x}$ est éloigné de E mais devient nettement insuffisant si $\boldsymbol{x}$ est proche de E. Bien entendu, la notion de "proximité" de $\boldsymbol{x}$ à E est à prendre en un sens relatif: rapport d'une distance caractéristique $d(\boldsymbol{x},E)$ de $\boldsymbol{x}$ à E à une dimension typique D de E.

Il est peu astucieux de calculer *toutes* les intégrales élémentaires régulières avec N_{max} points, où N_{max} permettrait de couvrir le cas de proximité entre $\boldsymbol{x}$ et E le plus sévère: cela conduirait à des temps de calcul d'intégrales inutilement élevés. Plus le maillage est fin, plus la proportion de couples $(\boldsymbol{x},E)$ "relativement éloignés" est grande, donc plus la proportion d'intégrales pour lesquelles N_{max} surévalue N est grande. Il

[2]Par exemple celles figurant en annexe B.2

est donc conseillé d'adapter N aux positions relatives de $\boldsymbol{x}$ et E, afin de maintenir une précision d'intégration numérique satisfaisante au moindre coût.

Plusieurs stratégies ont été proposées pour répondre concrètement à cette question difficile. Par exemple, une formule théorique de majoration d'erreur de quadrature, qui fait intervenir des dérivées d'ordre N de l'intégrand, est utilisée comme guide dans [2]. Une autre approche de la question consiste en une étude "empirique" (Rezayat et coll. [14]) assez systématique, sur un nombre élevé d'essais numériques, associée à une technique d'ajustement de courbes. Ces auteurs ont ainsi proposé, pour l'utilisation des éléments triangulaires à 6 nœuds ou quadrangulaires à 8 nœuds, le calcul d'un indicateur de sévérité IS défini par:

$$\mathrm{IS} = (2.37 + 0.424\cos\theta)D/d \tag{3.20}$$

avec D: taille de l'élément (plus grande diagonale d'un rectangle, plus grand côté d'un

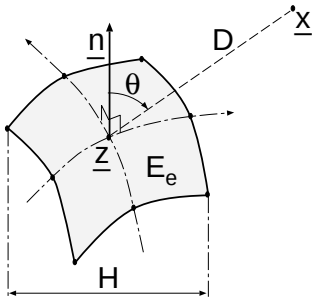

Figure 3.5: Indicateur de sévérité: notations géométriques.

triangle), $d = |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}|$ ($\boldsymbol{z}$ étant le centre de l'élément) et θ: angle entre $\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{z})$ choisi tel que $\cos\theta > 0$ (figure 3.5). Les valeurs de N à utiliser sont alors fonction de IS, selon le tableau 3.1. Cette méthode est simple à programmer et d'application pratique assez générale.

	Nombre de points de Gauss par élément	
IS	quadrilatères ($N_e = 8$)	triangles ($N_e = 6$)
1	2×2=4	6
2	3×3=9	7
3	4×4=16	16
4	5×5=25	19
5	6×6=36	28
6	$4 \times (4 \times 4)$=64	$4 \times 16 = 64$
7	$4 \times (5 \times 5)$=100	$4 \times 19 = 76$
8	$4 \times (6 \times 6)$=144	$4 \times 28 = 104$

Tableau 3.1 : Choix du nombre de points de Gauss selon l'indicateur de sévérité statique (d'après [14]).

INTÉGRALES QUASI-SINGULIÈRES. Les intégrations régulières pour $\boldsymbol{x}$ très proche de E ($d(\boldsymbol{x}, E) \ll D$) posent des difficultés liées à la grande rapidité des variations de l'intégrand au voisinage de la projection orthogonale $\boldsymbol{z}$ de $\boldsymbol{x}$ sur E, même si un grand nombre de points de Gauss sont utilisés; on parle dans la littérature d'intégrales quasi-singulières. Pour s'en rendre compte, considérons les intégrales:

$$I_m = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r dr}{(h^2 + r^2)^{m/2}} \qquad (m = 1, 2, 3)$$

représentatives de celles qui interviennent dans les représentations intégrales (3.15), (3.16); $h > 0$ est représentatif de la distance de $\boldsymbol{x}$ à sa projection orthogonale sur E. L'intégrale pour $m = 3$ présente la "quasi-singularité" la plus forte. Le tableau 3.2 donne les valeurs exacte et approchée (calculée avec 7 points de Gauss, qui intègrent donc exactement tous les polynômes de degré ≤ 13) des I_m pour $R = 20h$ et met ainsi en évidence les difficultés posées par l'évaluation des intégrales quasi-singulières ($h \ll R$).

	exacte	approchée	$\lvert\Delta I/I\rvert$
$I_1/(2\pi h)$	19.02498	19.01439	5.6(-4)
I_2/π	6.00003	5.99396	1.0(-4)
$I_3 h/2\pi$	0.98275	0.95006	3.4(-2)

Tableau 3.2 : Intégrales quasi-singulières: valeurs exacte et approchée (avec 7 points de Gauss) de I_1, I_2, I_3.

On remarque en particulier l'erreur de 3.4% faite sur I_3, qui est très importante en regard des précisions souhaitées pour les calculs d'intégrales élémentaires. Des méthodes ont été proposées pour améliorer la précision du calcul de ces intégrales quasi-singulières:

Transformation de Telles. Telles [16] introduit une transformation de l'intervalle $[-1, 1]$ sur lui-même permettant de concentrer les points de Gauss au voisinage de la projection orthogonale $\boldsymbol{x}_0$ de $\boldsymbol{x}$ sur l'élément considéré. Cette transformation est appliquée au calcul des intégrales quasi-singulières curvilignes (problèmes bidimensionnels) ou sur un élément de référence carré (application de la méthode-produit).

Pour un domaine d'intégration égal au segment $\{(\xi, 0), \xi \in [-1, 1]\}$ du plan, on pose $\boldsymbol{x} = (x_0, d)$, de sorte que sa projection orthogonale sur le segment est $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, 0)$. Les intégrales du type:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi) \frac{d\xi}{[(\xi - \eta)^2 + d^2]^{n/2}} \qquad (n = 1, 2)$$

sont calculées à l'aide du changement de variables $\xi \in [-1, 1] \rightarrow \gamma \in [-1, 1]$ défini par:

$$\xi \in [-1, 1] = \frac{1 - J}{1 + 3R^2} \left\{ \gamma^3 - 3R\gamma^2 + \frac{J + 3R^2}{1 - J} \gamma + 3R \right\} \qquad (\gamma \in [-1, 1])$$

où R est donné en fonction de x_0 et $J = d\xi/d\gamma\,|_{\xi=x_0}$ par:

$$R = \left[-q + \sqrt{q^2+p^3}\right]^{1/3} + \left[-q - \sqrt{q^2+p^3}\right]^{1/3} + \frac{x_0}{1+2J}$$
$$q = \frac{1}{2(1+2J)}\left[\frac{1}{2(1+2J)}\left(x_0(3-2J) - \frac{2x_0^3}{1+2J}\right) - x_0\right]$$
$$p = \frac{1}{3(1+2J)^2}\left[4J(1-J) + 3(1-x_0^2)\right]$$

la valeur de $J = d\xi/d\gamma\,|_{\xi=x_0}$ étant calculée selon la règle:

$$\begin{array}{ll} J = 0.85 + 0.24\mathrm{Log}d & 0.05 \le d \le 1.3 \\ J = 0.893 + 0.0832\mathrm{Log}d & 1.3 \le d \le 3.618 \\ J = 1 & 3.618 \le d \end{array}$$

Méthode PART. Hayami [8] propose pour des intégrales de surface quasi-singulières du type:

$$I = \int_S f(\boldsymbol{y})\frac{\mathrm{d}S_y}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^p}$$

(habituellement $p = 1, 2, 3$ pour les problèmes tridimensionnels), le point $\boldsymbol{x}$ étant proche de la surface S, la méthode PART (*Projection and Angular and Radial Transformation*), qui fonctionne comme suit:

1. Calcul de la projection orthogonale $\boldsymbol{z}$ de $\boldsymbol{x}$ sur S (par exemple au moyen de la méthode de Newton-Raphson). La distance $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|$ est notée d.
2. Projection de la surface courbe S sur le plan tangent en $\boldsymbol{z}$ à S: la surface projetée est notée $\tilde{S}$.
3. Introduction de coordonnées polaires (ρ, α), centrées en $\boldsymbol{z}$, sur $\tilde{S}$. L'intégrale I devient:
$$I = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\rho_{max}(\alpha)} f(\rho,\alpha)\frac{1}{r^p} J\rho d\rho$$
4. Application d'une transformation radiale $R(\rho)$ choisie de manière à affaiblir la quasi-singularité, qui est essentiellement reliée à ρ.
5. Application de la transformation angulaire $\alpha \to t$:
$$t(\alpha) = \frac{h_j}{2}\mathrm{Log}\left\{\frac{1+\sin(\alpha-\alpha_j)}{1-\sin(\alpha-\alpha_j)}\right\} \qquad d\alpha = \frac{\cos(\alpha-\alpha_j)}{h_j}dt = \frac{dt}{\rho_{max}}$$
6. Intégration numérique de I par points de Gauss, selon les variables transformées R, t, sous la forme:
$$I = \int_{t(0)}^{t(2\pi)} \frac{dt}{\rho_{max}} \int_{R(0)}^{R(\rho_{max}(\alpha))} f(\rho,\alpha)\frac{1}{r^p} J\rho \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}R} dR$$

L'auteur propose plusieurs transformations radiales, dont:

- La transformation $\mathrm{Log}-L_2$: $R(\rho) = \mathrm{Log}\sqrt{\rho^2+d^2}$
- La transformation $\mathrm{Log}-L_1$: $R(\rho) = \mathrm{Log}(\rho+d)$

Il conclut à la supériorité de la dernière citée et donne des résultats de convergence par rapport au nombre de points de Gauss.

3.5 Calcul des intégrales élémentaires singulières

Les intégrales élémentaires sont singulières quand $\boldsymbol{x}$ est situé sur l'élément E. Les formulations intégrales classiques font intervenir des intégrations en valeur principale de Cauchy, dont l'évaluation numérique correcte n'est maîtrisée de manière générale et satisfaisante que depuis peu (Guiggiani et coll. [7]). La démarche présentée au chapitre 2, fondée sur la régularisation indirecte, permet de n'avoir à traiter que des intégrales faiblement singulières. Cet avantage demande toutefois à être concrétisé par une méthode de calcul numérique adaptée, car les formules de quadrature gaussiennes ne s'appliquent qu'aux intégrales régulières. Nous la décrivons ci-après pour les deux types d'intégrales élémentaires singulières apparaissant dans (3.11):

$$I_1 = \int_{E^{(e)}} [N_p(\boldsymbol{\xi}) - N_p(\boldsymbol{\eta})] H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\xi \tag{3.21}$$

$$I_2 = \int_{E^{(e)}} N_p(\boldsymbol{\xi}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\xi \tag{3.22}$$

Problèmes tridimensionnels. Les intégrales élémentaires portent sur des éléments de surface. H est singulier comme $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{-2}$. La technique d'intégration singulière repose sur l'introduction d'un système de coordonnées polaires (ρ, α) centré en $\boldsymbol{\eta}$ *dans l'élément de référence* Δ_e (figure 3.6):

$$(\xi_1, \xi_2) = (\eta_1, \eta_2) + \rho(\cos\alpha, \sin\alpha) \tag{3.23}$$

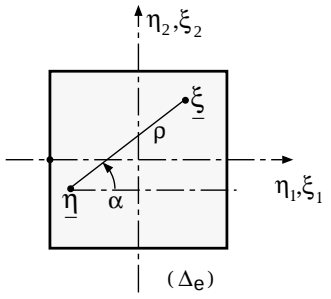

Figure 3.6: Coordonnées polaires sur l'élément de référence.

Fonctions de forme réduites. En vertu de la formule de Taylor pour les polynômes à deux variables, il existe des polynômes $N^I_{p;\alpha}(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta})$ tels que:

$$N_p(\boldsymbol{\xi}) - N_p(\boldsymbol{\eta}) = (\xi_\alpha - \eta_\alpha) N^I_{p;\alpha}(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}) \tag{3.24}$$

Le report du passage en coordonnéees polaires (3.23) donne alors:

$$\begin{aligned} N_p(\boldsymbol{\xi}) - N_p(\boldsymbol{\eta}) &= \rho \left[\cos\alpha N^I_{p;1}(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}) + \sin\alpha N^I_{p;2}(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}) \right] \\ &= \rho \hat{N}_p(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) \end{aligned} \tag{3.25}$$

ce qui définit des fonctions de forme modifiées $\hat{N}_p(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta})$. L'apparition de ρ en facteur de $\hat{N}_p$ est le but de cette manipulation. Par exemple, dans le cas le plus simple des fonctions de forme linéaires (3.8) pour l'élément triangulaire, il est facile de montrer que les fonctions $\hat{N}$ associées s'écrivent:

$$\hat{N}_1 = -(\cos\alpha + \sin\alpha) \qquad \hat{N}_2 = \cos\alpha \qquad \hat{N}_3 = \sin\alpha$$

Les fonctions de forme modifiées associées aux éléments de frontière usuels sont données en annexe B.2.

EXPRESSION DES INTÉGRALES SINGULIÈRES DANS LE SYSTÈME ρ, α. Compte tenu de ce qui précède, $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ est maintenant exprimé, à partir du paramétrage (3.2) du point courant sur l'élément, à l'aide des *fonctions de forme réduites*:

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = \sum_{q=1}^{N_e} [N_q(\boldsymbol{\xi}) - N_q(\boldsymbol{\eta})]\boldsymbol{y}^q = \sum_{q=1}^{N_e} \rho \hat{N}_q \boldsymbol{y}^q$$

de façon à mettre ρ en facteur de $(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$. En poussant le développement (3.24) à un ordre supérieur, on peut écrire que:

$$N^I_{q;\alpha}(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}) = N_{q,\alpha}(\boldsymbol{\eta}) + \frac{1}{2}(\xi_\beta - \eta_\beta) N^{II}_{q;\alpha\beta}(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta})$$

ce qui permet de voir que:

$$\sum_{q=1}^{N_e} \hat{N}_q \boldsymbol{y}^q = \boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{\eta}) \cos\alpha + \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{\eta}) \sin\alpha + \rho O(1)$$

D'autre part le caractère linéairement indépendant en tout point de la base naturelle $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ entraîne $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{\eta}) \cos\alpha + \boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{\eta}) \sin\alpha \neq \boldsymbol{0}$ quel que soit l'angle α. On a ainsi prouvé que $r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ peut être réécrit sous la forme:

$$r = \rho \hat{r}(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) = \rho \left| \sum_{q=1}^{N_e} \hat{N}_q \boldsymbol{y}^q \right| \tag{3.26}$$

où le facteur $\hat{r}$ est non nul en $\rho = 0$. Les solutions élémentaires G, H sont alors mises sous la forme:

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{\rho^2} \hat{H}(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) \qquad G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{\rho} \hat{G}(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) \tag{3.27}$$

où $\hat{G}, \hat{H}$ sont non-singulières en $\rho = 0$. Enfin l'élément différentiel devient:

$$\mathrm{d}\xi = \rho d\rho d\alpha \tag{3.28}$$

La combinaison de (3.25), (3.26), (3.27) et (3.28) permet finalement de réécrire les intégrales singulières (3.21), (3.22) sous une forme complètement régulière dans le

système ρ, α:

$$I_1 = \int_{E^{(e)}} \hat{M}_p(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) \hat{H}(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) J(\boldsymbol{\xi}) d\rho d\alpha \tag{3.29}$$

$$I_2 = \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) \hat{G}(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) J(\boldsymbol{\xi}) d\rho d\alpha \tag{3.30}$$

Ainsi, la mise en facteur de ρ via l'introduction des fonctions de forme modifiées (3.25) permet de concrétiser l'effet régularisant du terme $N_p(\boldsymbol{\xi}) - N_p(\boldsymbol{\eta})$ dans (3.21).

Calcul de I_1, I_2 par points de Gauss. Le calcul numérique effectif des expressions (3.29), (3.30) ci-dessus nécessite un dernier changement de variable. En effet, la description de l'élément de référence Δ_e en coordonnées polaires (ρ, α) utilise une subdivision en triangles (quatre et trois triangles respectivement pour l'élément de référence carré et triangulaire), selon la figure 3.7. Chacun de ces triangles est caractérisé par la donnée de quatre paramètres $\rho_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_m$ et contient les points $\boldsymbol{\xi}(\rho, \alpha)$ tels que:

$$\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \;\; 0 \leq \rho \leq \rho_0 / \cos(\alpha - \alpha_m)$$

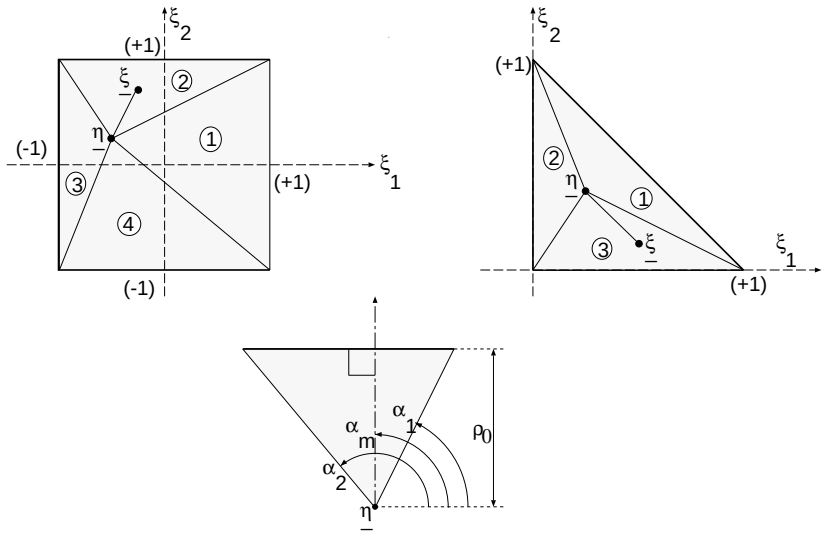

Figure 3.7: Subdivision de l'élément de référence en triangles.

Pour le cas général où $\boldsymbol{\eta}$ est un point intérieur de Δ_e, on prend $\alpha_m = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (Δ_e: carré de référence) ou $\alpha_m = \pi/4, \pi, 3\pi/2$ (Δ_e: triangle de référence). Sur chacun des triangles de la subdivision de Δ_e, on considère alors le changement de variables $(v_1, v_2) \rightarrow (\rho, \alpha)$ défini par:

$$\alpha = \frac{\alpha 2 - \alpha 1}{2} v_2 + \frac{\alpha 2 + \alpha 1}{2} \qquad \rho = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)} (1 + v_1)$$

Les variables (v_1, v_2) parcourent le carré $[-1, 1]^2$ pour chaque triangle de la figure 3.7. L'élément différentiel se transforme en:

$$d\rho d\alpha = \frac{1}{4}(\alpha_2 - \alpha_1)\frac{\rho_0}{\cos(\alpha - \alpha_m)} dv_1 dv_2$$

Cet ultime changement de variable permet ainsi de calculer les intégrales singulières I_1, I_2 à l'aide de points de Gauss sur le carré $[-1, 1]$.

PROBLÈMES PLANS. Les intégrales élémentaires sont curvilignes. La technique précédente est applicable, sous une forme un peu plus simple; elle n'est utilisée que pour l'intégrale contenant $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, singulier comme $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{-1}$:

$$I_1 = \int_{E^{(e)}} [N_p(\boldsymbol{\xi}) - N_p(\boldsymbol{\eta})] H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}s_y \tag{3.31}$$

Les fonctions de forme M_p sont (habituellement) des polynômes de la variable ξ. En vertu de la formule de Taylor, il existe des polynômes $\hat{N}_p(\xi; \eta)$ tels que:

$$N_p(\xi) - N_p(\eta) = (\xi - \eta)\hat{N}_p(\xi; \eta)$$

On écrit ensuite que:

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = (\xi - \eta)\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \text{avec} \quad \hat{\boldsymbol{r}} = \sum_{q=1}^{N_e} \hat{M}_q(\xi; \eta)\boldsymbol{y}^q$$

et on pose[3]:

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{\xi - \eta}\hat{H}(\xi; \eta)$$

pour obtenir l'intégrale singulière (3.31) sous la forme complètement régulière:

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \hat{M}_p(\xi; \eta)\hat{H}(\xi; \eta) J d\xi \tag{3.32}$$

qui peut être intégrée sous cette forme par points de Gauss classiques.

COMMENTAIRES. Insistons ici encore sur le fait que cette procédure d'intégration singulière concrétise l'opération de régularisation des équations intégrales. Elle exploite ainsi les avantages de la méthode des points de Gauss: précision, stabilité, évite les difficultés liées aux valeurs principales de Cauchy et permet *in fine* une évaluation fiable et précise des intégrales singulières.

Cette technique permet d'utiliser sans problème toutes les fonctions de forme usuelles, pour la représentation aussi bien de $\partial\Omega$ (éléments de frontière courbes) que des champs inconnus (interpolations de degré élevé). Cette souplesse est également possible avec les formulations du type valeur principale de Cauchy, mais à la condition de traiter très soigneusement le passage à la limite $\varepsilon \to 0$, voir Guiggiani et coll. [6].

[3]Noter la mise en facteur de $\xi - \eta$ et non de $|\xi - \eta|$. Pour la solution élémentaire du plan infini, on a $H = -(\mathbf{r}.\mathbf{n})/(2\pi r^2)$ et donc $\hat{H} = -(\hat{\mathbf{r}}.\mathbf{n})/(2\pi\hat{r}^2)$.

Le caractère singulier de l'équation intégrale (3.1) est, en définitive, un avantage. En effet, les intégrales élémentaires singulières de (3.11) tendent à rendre dominants les termes proches de la diagonale dans les matrices $[\boldsymbol{A}], [\boldsymbol{B}]$ de l'équation (3.13), en particulier si les points de collocation et les nœuds d'interpolation sont confondus et partagent la même numérotation, et donc à produire un système linéaire final bien conditionné. Par conséquent, de deux choses l'une:

1. Si on sait évaluer numériquement avec précision les intégrales singulières, on profite pleinement de l'avantage du bon conditionnement du système linéaire.

2. Dans le cas contraire, une mauvaise évaluation des intégrales singulières est source d'erreurs importantes, car les termes dominants de la matrice $[\boldsymbol{K}]$ sont altérés.

L'importance d'une évaluation correcte de ces intégrales, et l'intérêt de la régularisation complétée par la technique d'intégration singulière exposée ici, apparaissent donc clairement.

3.6 Traitement des intégrales de domaine

En présence de sources volumiques non nulles, l'équation intégrale (2.20) comporte au second membre le terme:

$$\int_\Omega b(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y \tag{3.33}$$

Sa conversion en intégrales de frontière est souhaitable, afin de restreindre le support géométrique de l'ensemble des calculs d'intégrales au maillage de la frontière $\partial\Omega$; cela est parfois réalisable au moyen de la *méthode de réciprocité multiple*. Il faut sinon recourir à des intégrations de domaine, qui utilisent habituellement des *cellules d'intégration* sur lesquelles la méthode des points de Gauss est utilisée.

Méthode de réciprocité multiple. Proposée par Brebbia et Nowak [13], elle repose sur la construction d'une suite $G^{(N)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), N \geq 0$ de solutions élémentaires telle que:

$$G^{(N)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Delta G^{(N+1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

de terme initial $G^{(0)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Pour le cas usuel $G = G^{(0)} = 1/(4\pi r)$, on trouve:

$$G^{(N)} = \frac{1}{4\pi} \frac{r^{2N-1}}{(2N)!} \qquad (n \geq 0) \tag{3.34}$$

On peut alors écrire, par application itérée de la troisième formule de Green (2.4) et pour tout champ b suffisamment régulier:

$$\begin{aligned}\int_\Omega bG\,\mathrm{d}V_y &= \int_\Omega \Delta bG^{(1)}\,\mathrm{d}V_y + \int_{\partial\Omega}\left(G^{(1)}_{,n}b - G^{(1)}b_{,n}\right)\,\mathrm{d}S_y \\ &= \int_\Omega \Delta\Delta bG^{(2)}\,\mathrm{d}V_y + \int_{\partial\Omega}\left(G^{(1)}_{,n}b - G^{(1)}b_{,n}\right)\,\mathrm{d}S_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega}\left(G^{(2)}_{,n}\Delta b - G^{(2)}(\Delta b)_{,n}\right)\,\mathrm{d}S_y \\ &\vdots \\ &= \int_\Omega \Delta^N bG^{(N)}\,\mathrm{d}V_y + \sum_{p=0}^{N-1}\int_{\partial\Omega}\left(G^{(p+1)}_{,n}\Delta^k b - G^{(p+1)}(\Delta^k b)_{,n}\right)\,\mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

pour un entier quelconque N, et où Δ^p désigne le laplacien itéré p fois. Si le terme de volume résiduel:

$$\int_\Omega \Delta^N bG^{(N)}\,\mathrm{d}V_y$$

peut être rendu suffisamment petit au-delà d'une certaine valeur de N, on a réalisé la conversion approchée de l'intégrale de domaine en intégrales de frontières.

Le problème de la conversion des intégrales de volume n'est toutefois pas complètement résolu par cette méthode. La convergence vers zéro du terme de volume résiduel, suggérée par l'apparition des inverses de $(2N+2)!$ dans $G^{(N)}$, reste à établir formellement. Ce traitement se prête surtout au cas où la distribution volumique de sources b est donnée analytiquement, car il semble illusoire de prétendre disposer de valeurs correctes de laplaciens itérés d'un champ b connu seulement par des valeurs numériques en un nombre fini de points, en raison du caractère mal posé de la dérivation numérique.

UTILISATION DE CELLULES D'INTÉGRATION. Si les sources volumiques b ne sont connues que sous forme numérique[4], les intégrales de domaine doivent être calculées

[4]Par exemple comme résultat de la résolution numérique d'un autre problème.

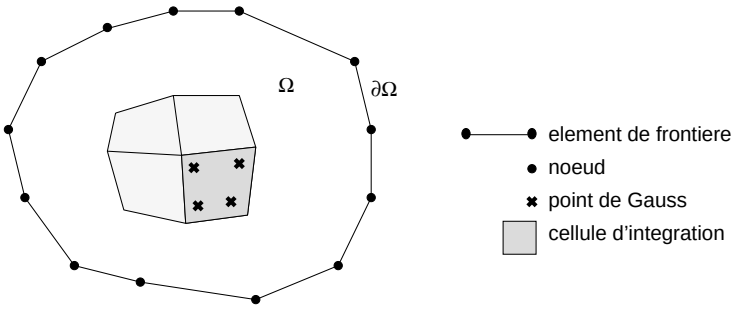

Figure 3.8: Cellules d'intégration et éléments de frontière pour un domaine bidimensionnel: illustration schématique.

numériquement. On est alors conduit à découper Ω en *cellules d'intégration*, construites à l'aide d'un maillage de type éléments finis de domaine[5]; elles sont ainsi paramétrées à l'aide d'une cellule de référence (cube, prisme, tétraèdre... pour un domaine tridimensionnel). Leur seule fonction est de permettre l'intégration numérique (par points de Gauss par exemple) pour un domaine Ω de forme quelconque.

Il se peut que le point de collocation $\boldsymbol{x}$ appartienne à une cellule d'intégration: soit le support géométrique des efforts de volume rencontre $\partial\Omega$, soit on considère la formule de représentation en un point intérieur. L'intégrale de domaine dans l'équation ou la représentation intégrale est faiblement singulière, et on peut procéder à un passage en coordonnées polaires sur la cellule de référence, selon la méthode développée en section 3.5 pour les intégrales élémentaires singulières.

3.7 Sous-structuration

Opérer une partition du domaine d'étude Ω en sous-domaines Ω_j, $(1 \leq j \leq N)$ peut conduire à une diminution des temps de calcul d'assemblage et de résolution.

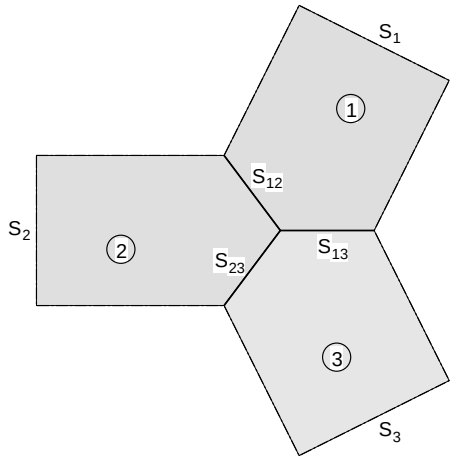

Figure 3.9: Sous-structuration: notations géométriques (pour $N = 3$).

Montrons, pour fixer les idées, comment fonctionne la sous-structuration en $N = 3$ sous-domaines Ω_1 ,Ω_2, Ω_3, délimités par les surfaces (S_1, S_{12}, S_{13}), (S_2, S_{12}, S_{23}) et (S_3, S_{13}, S_{23}) respectivement (figure 3.9). Chaque sous-domaine est considéré isolément, et il faut donc imposer des conditions de raccordement (continuité au passage des interfaces) entre les solutions (u^i, q^i) sur chaque Ω_i:

$$\begin{aligned} u^1 = u^2 \text{et} q^1 + q^2 = 0 \qquad & \text{sur } S_{12} \\ u^1 = u^3 \text{et} q^1 + q^3 = 0 \qquad & \text{sur } S_{13} \\ u^2 = u^3 \text{et} q^2 + q^3 = 0 \qquad & \text{sur } S_{23} \end{aligned} \tag{3.35}$$

[5]Le choix du terme "cellule" rappelle qu'elles ne sont pas le support géométrique d'inconnues.

On considère alors, pour chaque sous-domaine pris séparément, l'équation intégrale discrétisée (3.11). Après assemblage, si $\{\boldsymbol{v}_1\}, \{\boldsymbol{v}_{12}\}, \{\boldsymbol{v}_{13}\}$ désignent les vecteurs des inconnues sur S_1, S_{12}, S_{13} après prise en compte des conditions aux limites, le système linéaire (3.14) pour le sous-domaine Ω_1 prend la forme:

$$\left[\begin{array}{ccc} \boldsymbol{K}_s^1 & \boldsymbol{K}_s^{12} & \boldsymbol{K}_s^{13} \\ \boldsymbol{K}_i^1 & \boldsymbol{K}_i^{12} & \boldsymbol{K}_i^{13} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_{12} \\ \boldsymbol{v}_{13} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{f}_s \\ \boldsymbol{f}_i \end{array} \right\} \tag{3.36}$$

où les sous-matrices contiennent les lignes de la matrice globale $[\boldsymbol{K}]$ pour le sous-domaine Ω_1 correspondant aux points de collocation respectivement situés sur les interfaces S_{12}, S_{13} (indice i) et sur S_1s (indice s). Une décomposition analogue est faite pour les sous-domaines Ω_2, Ω_3.

Ces systèmes linéaires sont couplés par les conditions de continuité (3.35). Les étapes permettant la résolution du problème complet sont:

1. *Triangulation partielle:* on opère dans (3.36) une triangulation de Gauss sur les colonnes correspondant au sous-vecteur $\{\boldsymbol{v}_1\}$ des inconnues non interfaciales:

$$\left[\begin{array}{ccc} \boldsymbol{T}_s^1 & \boldsymbol{K}_s^{12} & \boldsymbol{K}_s^{13} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_i^{12} & \boldsymbol{K}_i^{13} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_{12} \\ \boldsymbol{v}_{13} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{y}_s \\ \boldsymbol{y}_i \end{array} \right\} \tag{3.37}$$

   la sous-matrice $[\boldsymbol{T}_s^1]$ étant triangulaire supérieure. Cette manœuvre permet d'isoler les inconnues interfaciales dans les équations correspondant aux sous-matrices d'indice i.

2. *Calcul des degrés de liberté interfaciaux.* Ces dernières équations et les seconds membres correspondants, une fois construits pour les trois sous-domaines, permettent de constituer un système linéaire sur les seules inconnues interfaciales:

$$\left[\begin{array}{ccc} \boldsymbol{K}_i^{(1)12} & \boldsymbol{K}_i^{(1)13} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{K}_i^{(2)12} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_i^{(2)23} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{K}_i^{(3)13} & \boldsymbol{K}_i^{(3)23} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{v}_{12} \\ \boldsymbol{v}_{13} \\ \boldsymbol{v}_{23} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{y}_i^{(1)} \\ \boldsymbol{y}_i^{(2)} \\ \boldsymbol{y}_i^{(3)} \end{array} \right\} \tag{3.38}$$

   qui est factorisé et résolu en $\{\boldsymbol{v}_{12}\}, \{\boldsymbol{v}_{13}\}, \{\boldsymbol{v}_{23}\}$.

3. *Résolution du problème complet.* Les valeurs de $\{\boldsymbol{v}_{12}\}, \{\boldsymbol{v}_{13}\}, \{\boldsymbol{v}_{23}\}$ sont enfin reportées dans les systèmes (3.36) associés à chaque sous-domaine, ce qui donne:

$$[\boldsymbol{T}^1]\{\boldsymbol{v}_1\} = \{\boldsymbol{y}_s\} - [\boldsymbol{K}_s^{12}]\{\boldsymbol{v}_{12}\} - [\boldsymbol{K}_s^{13}]\{\boldsymbol{v}_{13}\}$$

   pour le sous-domaine Ω_1. Ce système est résolu par rapport à $\{\boldsymbol{v}_1\}$ par simple remontée, la matrice $[\boldsymbol{T}^1]$ étant triangulaire, et le problème est complétement résolu.

Le gain de temps d'assemblage dépend clairement des tailles respectives des portions de frontières extérieures S_i et interfaciales S_{ij}[6], ces dernières devant être idéalement aussi petites que possible relativement aux premières. Dans la situation-limite idéale où $|S_{ij}| \ll |S|$, avec $|S_1| = |S_2| = |S_3| = |S|/3$ pour simplifier, on peut remarquer que:

[6] ou plus précisément des nombres respectifs de degrés de liberté supportés par les maillages des S_i et S_{ij}.

- Le nombre d'opérations pour l'assemblage passe de $a|S|^2$ à $3a(|S|/3)^2 = a|S|^2/3$: il est divisé par 3 (par N pour N sous domaines)
- Le nombre d'opérations pour la factorisation (par élimination de Gauss) du système linéaire passe de $b|S|^3/3$ à $b(|S|/3)^3 = |S|^2/27$: il est divisé par 9 (par N^2 pour N sous-domaines).
- Le nombre d'opérations pour la résolution du système linéaire sous forme triangulaire passe de $c|S|^2$ à $3c(|S|/3)^2 = c|S|^2/3$: il est divisé par 3 (par N pour N sous-domaines)

En pratique, pour des interfaces non négligeables, les gains de calcul sont inférieurs à ces valeurs. Il est même parfaitement possible de voir *augmenter* le temps de calcul en cas d'utilisation de la sous-structuration, si les interfaces sont mal choisies (en particulier si les S_{ij} et les S_i ont des tailles similaires): la sous-structuration ne garantit pas en toutes circonstances un gain de temps de calcul. Il faut que la géométrie de Ω s'y prête: plus Ω est massif et moins la sous-structuration est susceptible de procurer un avantage.

Références bibliographiques

[1] Batoz, J. L., Dhatt, G. *Modélisation des structures par éléments finis*. Hermes, Paris (1990).

[2] C. E. T. I. M. , (Centre Technique des Industries Mécaniques). Application de la méthode des équations intégrales à la mécanique. Rapport interne, CETIM, Senlis, France (1976).

[3] Ciarlet, P. G. *Analyse numérique matricielle et optimisation*. Masson, Paris (1982).

[4] Davis, J. J., Rabinowitz, P. *Methods of numerical integration*. Academic Press (1975).

[5] Dongarra, J. J., Bunch, J. R., Moler, C. B., Stewart, G. B. Linpack *users'guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA (1979).

[6] Guiggiani, M., Gigante, A. A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method. *ASME J. Appl. Mech.*, **57**, 906–915 (1990).

[7] Guiggiani, M., Krishnasamy, G., Rudolphi, T. J., Rizzo, F. J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *ASME J. Appl. Mech.*, **59**, 604–614 (1992).

[8] Hayami, K., Matsumoto, H. A numerical quadrature for nearly singular boundary element integrals. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **13**, 143–154 (1994).

[9] Kane, J. H., Keyes, D. E., Guru Prasad, K. Iterative solution techniques in boundary element analysis. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **31**, 1511–1536 (1991).

[10] Lyness, J. N., Jespersen, D. Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle. *J. Inst. Math. Appl.*, **15**, 19–32 (1975).

[11] Manolis, G. D., Banerjee, P. K. Conforming versus non-conforming boundary elements in three-dimensional elastostatics. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **23**, 1885–1904 (1986).

[12] MULLEN, R. L., RENCIS, J. J. Iterative methods for solving boundary element equations. *Computers and Structures*, **25**, 713–723 (1987).

[13] NOWAK, A. J., BREBBIA, C. A. The multiple-reciprocity method. A new approach for transforming BEM domain integrals to the boundary. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **6**, 164–168 (1989).

[14] REZAYAT, M., SHIPPY, D. J., RIZZO, F. J. On time-harmonic elastic wave analysis by the boundary element method for moderate to high frequencies. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **55**, 349–367 (1986).

[15] STROUD, A. H., SECREST, D. *Gaussian quadrature formulas*. Prentice-Hall (1966).

[16] TELLES, J. C. F. A self-adaptive coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **24**, 959–973 (1987).

4

Représentations et équations intégrales pour l'élastostatique

Ce chapitre présente les représentations et équations intégrales pour les problèmes d'équilibre en élasticité linéaire et sous l'hypothèse des petites perturbations, dont les équations fondamentales ont été rappelées en section 1.5. L'exposé est centré sur les situations tridimensionnelles, le passage aux déformations planes étant présenté en section 4.8.

Hypothèses géométriques. On considère un domaine borné[1] $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$, supposée régulière (C^2 au moins) par morceaux, admet la présence de coins ou d'arêtes[2] et n'est pas nécessairement connexe[3]. L'intérieur de chacune des composantes connexes est supposé de mesure non nulle[4]. La normale unitaire est, par convention, extérieure à Ω.

4.1 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti

L'identité de réciprocité pour l'élasticité est une conséquence du théorème des travaux virtuels, qui s'énonce (Salençon [15]) :

- *Quel que soit le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ en équilibre statique avec $\boldsymbol{F}$ (c'est-à-dire vérifiant $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$), quel que soit le champ de vecteurs ("déplacement virtuel") $\boldsymbol{u}'$ continûment différentiable sur Ω :*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}')\ \mathrm{d}V - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}).\boldsymbol{u}'\ \mathrm{d}S - \int_\Omega \rho \boldsymbol{F}.\boldsymbol{u}'\ \mathrm{d}V = 0 \tag{4.1}$$

[1] L'extension aux domaines infinis est traitée en section 4.6.

[2] Plus généralement, on admet la présence d'un nombre fini de points où concourent plusieurs plans tangents, comme les sommets d'un polyèdre, mais pas de points de rebroussement.

[3] Penser à un domaine avec plusieurs cavités.

[4] Les solides fissurés font l'objet du chapitre 12.

On considère alors deux états élastostatiques $(\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{F}^1)$ et $(\boldsymbol{u}^2, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{F}^2)$ distincts sur Ω. Appliquant le théorème des travaux virtuels (4.1) à $(\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{F}^1)$ travaillant dans le déplacement virtuel $\boldsymbol{u}^2$, puis à $(\boldsymbol{u}^2, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{F}^2)$ travaillant dans le déplacement virtuel $\boldsymbol{u}^1$, et retranchant les relations obtenues, on obtient :

$$\int_\Omega [\boldsymbol{\sigma}^1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^2) - \boldsymbol{\sigma}^2 : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^1)] \, \mathrm{d}V - \int_\Omega [\rho \boldsymbol{F}^1.\boldsymbol{u}^2 - \rho \boldsymbol{F}^2.\boldsymbol{u}^1] \, \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} [\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u^1}).\boldsymbol{u}^2 - \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u^2}).\boldsymbol{u}^1] \, \mathrm{d}S$$

De plus, la symétrie (1.15) de la loi de comportement élastique implique l'égalité :

$$\boldsymbol{\sigma}^1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^2) = \boldsymbol{\sigma}^2 : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^1)$$

Il en résulte que tout couple $(\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{F}^1)$, $(\boldsymbol{u}^2, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{F}^2)$ d'états élastostatiques sur Ω vérifie l'*identité de réciprocité de Maxwell-Betti* :

$$\int_{\partial\Omega} [(\boldsymbol{\sigma}^1.\boldsymbol{n}).\boldsymbol{u}^2 - (\boldsymbol{\sigma}^2.\boldsymbol{n}).\boldsymbol{u}^1] \, \mathrm{d}S = \int_\Omega [\rho \boldsymbol{F}^2.\boldsymbol{u}^1 - \rho \boldsymbol{F}^1.\boldsymbol{u}^2] \, \mathrm{d}V \tag{4.2}$$

qui peut aussi s'écrire, compte tenu de l'équation de Navier (1.16) satisfaite par les deux états élastiques, sous la forme d'une identité mathématique associée à l'opérateur $\boldsymbol{\Delta}^\star$ et analogue à la troisième formule de Green (2.4) :

$$\int_{\partial\Omega} \left[\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u^1}).\boldsymbol{u}^2 - \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u^2}).\boldsymbol{u}^1 \, \mathrm{d}S\right] = \int_\Omega \left[(\boldsymbol{\Delta}^\star \boldsymbol{u}^1).\boldsymbol{u}^2 - (\boldsymbol{\Delta}^\star \boldsymbol{u}^2).\boldsymbol{u}^1\right] \, \mathrm{d}V \tag{4.3}$$

On retrouve la structure (1.2) en mettant en correspondance $(\mathcal{L}, T^n(u))$ et $(\boldsymbol{\Delta}^\star, \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}))$, $\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u})$ étant l'opérateur qui à $\boldsymbol{u}$ associe le vecteur contrainte $\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}) \equiv \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}).\boldsymbol{n}$.

4.2 Solutions élémentaires de l'élasticité linéaire

DÉFINITION. Soit E un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Omega \subseteq E$. On appelle *solution élémentaire de l'élastostatique* un état élastostatique $(\boldsymbol{U}^k, \boldsymbol{\Sigma}^k, \boldsymbol{F}^k)$ associé à une force ponctuelle unitaire appliquée en un point fixé $\boldsymbol{x} \in E$ et de direction $\boldsymbol{e}_k$:

$$\rho \boldsymbol{F}^k(\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_k \qquad \boldsymbol{y} \in E \tag{4.4}$$

Le vecteur déplacement $\boldsymbol{U}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ et le tenseur des contraintes élastiques $\boldsymbol{\Sigma}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ dépendent du point courant $\boldsymbol{y}$, du point d'application $\boldsymbol{x}$ et de la direction k de la force ponctuelle (4.4). Les composantes cartésiennes $U_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ de toute solution élémentaire vérifient les équations d'équilibre et de comportement :

$$\Sigma_{ij,j}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \delta_{ik} = \boldsymbol{0} \qquad \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = C_{ijab} U_{a,b}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{4.5}$$

La notation $f_{,a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ désigne par convention la dérivée partielle de f par rapport à la composante y_a du point courant $\boldsymbol{y}$. On introduit également la notation $T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pour désigner le vecteur-contrainte associé à la solution élémentaire au point $\boldsymbol{y}$:

$$T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) = \left(T^n U^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right)_i \tag{4.6}$$

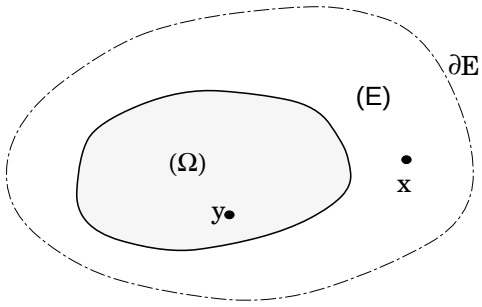

Figure 4.1: Domaine réel Ω et domaine auxiliaire E servant à définir $U^k(x,y)$.

Equilibre global. Pour toute solution élémentaire de l'élastostatique linéaire, pour tout domaine $\Omega \subseteq E$ et tout point fixé $\boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$, l'intégration sur Ω de l'équation d'équilibre $(4.5)_1$ et l'application de la formule de la divergence conduisent à l'identité :

$$\kappa\delta_{ik} + \int_{\partial\Omega} T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = 0 \qquad \text{avec} \begin{cases} \kappa = 1 & \boldsymbol{x} \in \Omega \\ \kappa = 0 & \boldsymbol{x} \notin \Omega \end{cases} \tag{4.7}$$

qui traduit simplement l'équilibre entre les efforts de contact T_i^k sur $\partial\Omega$ et la force ponctuelle unitaire exercée en $\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire extérieure à Ω).

Espace infini : solution de Kelvin. Il y a autant de solutions élémentaires que de choix du domaine E et des conditions aux limites sur ∂E ; la plus simple correspond à l'espace infini élastique isotrope avec conditions de décroissance à l'infini. Le calcul de la réponse élastique à l'application d'une force ponctuelle (4.4) dans un massif infini ($E = \mathbb{R}^3$), appelée *solution de Kelvin*, est un problème classique, présenté en annexe 4.1. La solution de Kelvin est donnée par :

$$U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r}\left[r_{,i}r_{,k} + (3-4\nu)\delta_{ik}\right] \tag{4.8}$$

$$\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left[3r_{,i}r_{,k}r_{,j} + (1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k})\right] \tag{4.9}$$

où $r = |\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ est la distance euclidienne entre les points courant $\boldsymbol{y}$ et source $\boldsymbol{x}$.

Propriétés générales de la solution de Kelvin. Etant définie pour l'espace infini homogène, la solution de Kelvin est invariante par translation (elle ne dépend de $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ qu'à travers $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$) et *homogène* par rapport à $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$:

$$U_i^k(\lambda\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{y}) = \lambda^{-1}U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad \Sigma_{ij}^k(\lambda\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{y}) = \lambda^{-2}\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{4.10}$$

Elle est donc en particulier singulière en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ ($r = 0$) :

$$U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = O(\frac{1}{r}) \qquad \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = O(\frac{1}{r^2}) \tag{4.11}$$

Au vu de ce qui précède et des expressions (4.8), (4.9), d'autres propriétés sont facilement établies : symétrie par rapport aux indices :

$$U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = U_k^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{4.12}$$

et effet de l'interversion des points $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$:

$$\begin{aligned} &U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = U_i^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) && \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \\ &U_{i,\bar{\ell}}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -U_{i,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) && \Sigma_{ij,\bar{\ell}}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\Sigma_{ij,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned} \tag{4.13}$$

où la notation $f_{,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ désigne par convention la dérivée partielle de f par rapport à la composante x_ℓ du point source $\boldsymbol{x}$. Les propriétés (4.12), (4.13) reposent sur les propriétés d'invariance par translation de $E = \mathbb{R}^3$, et sont donc fausses pour $E \neq \mathbb{R}^3$.

Remarquons que l'existence des singularités (4.11) était prévisible physiquement : une force *concentrée* d'intensité finie crée nécessairement, en son point d'application, des déplacements et contraintes élastiques infinis. De plus, toute solution élémentaire a une énergie de déformation infinie.

Identité intégrale pour la solution de Kelvin. On montre en annexe 4.2 que l'intégrale du vecteur-contrainte de Kelvin sur toute surface S (ouverte ou fermée) ne contenant pas $\boldsymbol{x}$ admet l'expression :

$$\int_S T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = \frac{e_{ijp}}{8\pi(1-\nu)}\int_{\partial S}\left[r_{,j}r_{,k} - (1-2\nu)\delta_{jk}\right]\tau_p\frac{\mathrm{d}s_y}{r} - \delta_{ik}\frac{\omega(S)}{4\pi} \tag{4.14}$$

dans laquelle ω désigne l'angle solide orienté sous lequel $\boldsymbol{x}$ voit S. Si S est fermée, on retrouve la formule (4.7) ($\omega = 4\pi$ ou $\omega = 0$ selon que $\boldsymbol{x}$ est intérieur ou extérieur à S).

Le vecteur-contrainte de Kelvin n'est pas intégrable. Les intégrales curvilignes de (4.14) sont invariantes par homothétie de centre $\boldsymbol{x}$ mais dépendent de la forme de ∂S. La valeur d'une intégrale impropre convergente ne pouvant pas dépendre de la forme du contour d'un voisinage évanouissant pris autour du point singulier, on déduit que le vecteur-contrainte de Kelvin n'est pas intégrable sur une surface contenant $\boldsymbol{x}$. Cette propriété met en lumière une différence de nature importante entre les solutions élémentaires des équations de Laplace et de Navier, puisque $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1/(4\pi r)$ a une dérivée normale intégrable[5] (annexe 2.5).

Dans le cas particulier où ∂S est un cercle de centre $\boldsymbol{x}$, on peut montrer que les intégrales curvilignes de (4.14) sont nulles (annexe 4.2) et que $\omega(S) = 2\pi$. Considérons alors un domaine Ω de frontière $\partial\Omega$, $\boldsymbol{x}$ étant un point régulier de $\partial\Omega$. On peut appliquer la remarque précédente à la surface $S_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \partial\Omega - B(\boldsymbol{x},\varepsilon)$, où $B(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ est la boule de centre $\boldsymbol{x}$ et de rayon ε : le bord de S_ε est, à la limite $\varepsilon \to 0$, un cercle de rayon ε centré en $\boldsymbol{x}$. La limite pour $\varepsilon \to 0$ d'une intégrale sur $S_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ ainsi construit, si elle existe, est la *valeur principale de Cauchy*, notée $\int^\star$, de l'intégrale sur $\partial\Omega$. Ici, l'intégrale du vecteur-contrainte de Kelvin est ainsi convergente au sens des valeurs principales :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon(x)} T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \overset{def}{=} \int_{\partial\Omega}^\star T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = -\frac{1}{2}\delta_{ik}$$

[5] Son intégrale a pour valeur $-\omega(S)/4\pi$.

Solution de Kelvin pour l'élasticité anisotrope. La solution de Kelvin est également connue pour l'élasticité anisotrope générale, sous la forme (cf. annexe 4.1) :

$$U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{8\pi^2 r}\int_0^{2\pi} N_{ki}(\boldsymbol{\eta})d\theta \tag{4.15}$$

l'intégrale porte sur le vecteur unitaire $\boldsymbol{\eta}$ de l'espace de Fourier tridimensionnel, parcourant le cercle unité C centré à l'origine et d'axe dirigé suivant $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ (θ désignant l'angle de parcours le long de C). Les $N_{ki}(\boldsymbol{\eta})$ sont les coefficients de l'inverse de la matrice $[C_{ijk\ell}\eta_j\eta_\ell]$. L'intégrale par rapport à θ résulte d'une transformation inverse de Fourier en espace et n'a d'expression analytique connue que dans certains cas, comme l'anisotropie transverse, équation (4.58).

Autres solutions élémentaires. Elles sont notamment connues pour les configurations (E, conditions aux limites) suivantes, en élasticité isotrope :

- *Demi-espace avec surface libre* : solution de Mindlin (force ponctuelle appliquée en un point intérieur du demi-espace), donnée en annexe 4.3. Elle contient comme cas particuliers les solutions de Boussinesq et de Cerruti (force ponctuelle respectivement normale et tangentielle appliquée sur la surface libre).
- *Demi-espaces collés* : $E=\mathbb{R}^3$, les sous-domaines $y_3<0$ et $y_3>0$, en adhérence parfaite, ayant des caractéristiques élastiques distinctes (donnée en annexe 4.9).
- *Plaque épaisse infinie élastique* : E est la région $(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2, a\le y_3\le b$ (Benitez et Rosakis [2]). Cette solution, d'expression très volumineuse, nécessite le calcul de transformées de Hankel inverses.
- $E=\Omega$: tenseurs de Green (déplacement nul sur tout ∂E) ou de Neumann (efforts imposés sur ∂E en équilibre avec la force ponctuelle $\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}$). Leur expression générale (Pham [13]) fait intervenir des séries infinies d'opérateurs intégraux itérés. Le tenseur de Green en élasticité isotrope est donné au chapitre 6.

Propriétés générales de symétrie des solutions élémentaires. On considère une solution élémentaire pour un domaine E, pour des forces ponctuelles unitaires appliquées en $\boldsymbol{x}$ selon la direction k et en $\boldsymbol{y}$ selon la direction ℓ. Cela définit un couple d'états élastostatiques, qui vérifie l'identité de Maxwell Betti, soit :

$$\int_{\partial E}\left[T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})U_i^\ell(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) - T_i^\ell(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\right]\,\mathrm{d}S_z = U_\ell^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - U_k^\ell(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$$

Cette équation entraîne que toute solution élémentaire présentant des conditions aux limites (en déplacement ou en effort) nulles sur ∂E[6] vérifie la propriété de symétrie :

$$U_\ell^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = U_k^\ell(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \tag{4.16}$$

et ce pour tout choix de E. Celle-ci entraîne à son tour les relations :

$$C_{ijk\ell}U^k_{a,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Sigma^a_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \qquad C_{ijk\ell}\Sigma^k_{ab,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = C_{abk\ell}\Sigma^k_{ij,\ell}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \tag{4.17}$$

Ces propriétés sont plus générales mais plus faibles que celles (4.12), (4.13) vérifiées par la solution de Kelvin.

[6] Cela inclut la décroissance à l'infini, comme pour la solution de Kelvin.

SINGULARITÉ AU POINT-SOURCE. Toutes les solutions élémentaires élastostatiques sont singulières en $\boldsymbol{x}$. De plus, si $\boldsymbol{x}$ n'est pas situé sur la frontière de E, cette singularité est égale à celle de la solution de Kelvin, la différence $\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}^{Kelvin}$ étant dans ce cas un état élastostatique sur E sans forces de volume et avec conditions aux limites régulières sur ∂E, donc non-singulier. En revanche, si $\boldsymbol{x} \in \partial E$, la différence $\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}^{Kelvin}$ est singulière en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Par exemple, pour la solution de Mindlin, ces propriétés peuvent être directement établies à partir de l'expression (4.66).

AUTRES COMMENTAIRES. On remarque que les solutions élémentaires explicitement connues correspondent à des géométries simples. Elles deviennent rapidement très complexes à mesure que l'on s'écarte de l'espace infini. Dans le cas d'un domaine de forme quelconque, l'expression (2.4) du tenseur de Green, quoique mathématiquement explicite, ne se prête pas aux applications ; son évaluation numérique est une tâche beaucoup plus complexe et coûteuse qu'une résolution numérique approchée du problème élastique correspondant. Dans le même ordre d'idées, toute solution élémentaire, en tant que solution à un problème d'élasticité bien défini, peut bien entendu être calculée numériquement. Toutefois cette tâche, du même ordre de complexité que le calcul numérique de l'état élastique inconnu lui-même, ôterait tout intérêt pratique à l'emploi de formules de représentation intégrale.

4.3 Formules de représentation intégrale

On considère un solide élastique Ω borné[7]. Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti (4.2) est appliqué à l'état élastostatique inconnu $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{F})$ et à une solution élémentaire définie par (4.4–4.5) associée à un ouvert E compatible avec Ω ; le point source $\boldsymbol{x}$ est pris hors de la frontière $\partial\Omega$. Cela conduit à :

$$\int_\Omega \delta_{ik}\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y = \int_{\partial\Omega} \left\{t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{y})T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\}\,\mathrm{d}S_y + \int_\Omega \rho F_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y \tag{4.18}$$

où $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u})$ est le vecteur contrainte élastiquement associé au déplacement $\boldsymbol{u}$. De plus, par définition de la mesure de Dirac, on a :

$$\int_\Omega \delta_{ik}\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y = \kappa u_k(\boldsymbol{x}) \qquad \begin{cases} \kappa = 1 & (\boldsymbol{x} \in \Omega) \\ \kappa = 0 & (\boldsymbol{x} \notin \Omega) \end{cases} \tag{4.19}$$

FORMULE DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE DU DÉPLACEMENT. Il découle directement de (4.18–4.19) que, pour tout point $\boldsymbol{x} \in E$ *non situé sur* $\partial\Omega$, le déplacement en $\boldsymbol{x}$ est donné en fonction des variables élastiques sur la frontière par la formule :

$$\kappa u_k(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{y})T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\}\,\mathrm{d}S_y + \int_\Omega \rho F_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y \tag{4.20}$$

[7] L'extension aux domaines infinis est traitée en section 4.6

FORMULE DE REPRÉSENTATION INTÉGRALE DU TENSEUR DE CONTRAINTES. Quand $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$, les intégrales de (4.20) sont des fonctions différentiables de $\boldsymbol{x}$. La représentation intégrale du gradient de $\boldsymbol{u}$ est donc obtenue par simple dérivation de (4.20) sous le signe intégral :

$$\begin{aligned}\kappa u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ t_a(\boldsymbol{y}) U^k_{a,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_a(\boldsymbol{y}) n_b(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ab,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_\Omega \rho F_a(\boldsymbol{y}) U^k_{a,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{4.21}$$

Ensuite, l'application de la loi de Hooke (1.13) et les propriétés de symétrie (4.17) conduisent à la représentation intégrale des contraintes élastiques :

$$\begin{aligned}\kappa \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ t_a(\boldsymbol{y}) \Sigma^a_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) - u_a(\boldsymbol{y}) n_b(\boldsymbol{y}) C_{abk\ell} \Sigma^k_{ij,\ell}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_\Omega \rho F_a(\boldsymbol{y}) \Sigma^a_{ij}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \,\mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{4.22}$$

Si $\boldsymbol{x}$ est extérieur au domaine d'étude Ω (et donc $\kappa = 0$ dans (4.20), (4.21), (4.22)), on parle parfois de *formules de représentation extérieure*.

NÉCESSITÉ D'UNE ÉQUATION INTÉGRALE. Pour $\boldsymbol{x}$ intérieur à Ω, les expressions (4.20) et (4.22) donnent ainsi la valeur en un point intérieur $\boldsymbol{x}$ du déplacement $\boldsymbol{u}$ et de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ en termes des efforts de volume ρF et des valeurs prises par $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$ sur la frontière $\partial\Omega$. Pour tout problème d'élasticité bien posé, la moitié des composantes scalaires de $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})\,|_{\partial\Omega}$ est donnée par les conditions aux limites, l'autre moitié restant inconnue. Les formules (4.20), (4.22) montrent que la résolution d'un problème d'élasticité se ramène à la détermination de celles des composantes de $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})\,|_{\partial\Omega}$ qui ne sont pas prescrites par les conditions aux limites. Elles réalisent une "quasi-inversion" de l'équation de Navier (1.16), reportant la recherche d'inconnues sur la frontière.

VARIANTE DE LA REPRÉSENTATION DES CONTRAINTES. Dans le cas où la solution de Kelvin est utilisée, la propriété (4.13) d'échange des dérivées par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ permet de réécrire la formule (2.15) comme :

$$\begin{aligned}\kappa u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ u_a(\boldsymbol{y}) n_b(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ab,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_a(\boldsymbol{y}) U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &- \int_\Omega \rho F_a(\boldsymbol{y}) U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \end{aligned}$$

ce qui permet de procéder à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega} u_a(\boldsymbol{y}) n_b(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ab,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \\ &= \int_{\partial\Omega} u_a(\boldsymbol{y}) \left\{ D_{b\ell} \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + n_\ell(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ab,b}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &= \int_{\partial\Omega} D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

Ce calcul, similaire à celui fait au chapitre 2 pour établir la formule (2.16), utilise l'équation d'équilibre $\Sigma^k_{ab,b}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ ($\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$). Ainsi, quand la solution élémentaire de Kelvin est utilisée, les formules de représentation (2.15), (4.22) du gradient du déplacement et du tenseur des contraintes peuvent être remplacées par les expressions suivantes, qui présentent l'avantage de ne comporter que des intégrales en $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-2}$:

$$\begin{aligned}\kappa u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_a(\boldsymbol{y}) U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &- \int_\Omega \rho F_a(\boldsymbol{y}) U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \qquad (4.23)\\ \kappa \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{y}) C_{abk\ell} \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_a(\boldsymbol{y}) \Sigma^a_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &- \int_\Omega \rho F_a(\boldsymbol{y}) \Sigma^a_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \qquad (4.24)\end{aligned}$$

4.4 Equation intégrale régularisée en déplacement

Il reste donc à définir une *équation intégrale de frontière* portant *seulement* sur les champs élastiques à la frontière. Il n'est toutefois pas correct de se contenter d'écrire (4.20) ou (4.22) pour des points $\boldsymbol{x}$ de la frontière $\partial\Omega$: $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ étant singulier comme $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-2}$, les intégrales de frontière cessent a priori d'avoir un sens pour $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. D'autre part, la relation (4.20) ne vaut que pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$. L'établissement d'une équation intégrale doit donc recourir à une procédure de *passage à la limite* tenant compte du caractère singulier de la solution élémentaire employée.

IDENTITÉ DE CORPS RIGIDE. Afin de préparer le passage à la limite, on commence comme au chapitre 2 par considérer une solution particulière, à savoir un déplacement de translation rigide du solide borné Ω avec forces de volume nulles, soit :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}^0 (\text{constant}) \qquad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{y} \in \Omega \tag{4.25}$$

Cela définit un état élastostatique, solution de l'équation de Navier (1.16). La formule (4.20) lui est donc applicable et conduit à l'*identité de corps rigide* :

$$\kappa u^0_k + u^0_i \int_{\partial\Omega} T^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y = 0 \tag{4.26}$$

qui peut également être obtenue à partir de (4.7). Elle vaut en particulier pour $\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, c'est-à-dire la translation égale en tout point de Ω à la valeur en $\boldsymbol{x}$ du déplacement inconnu, ce qui donne :

$$\kappa u_k(\boldsymbol{x}) + u_i(\boldsymbol{x}) \int_{\partial\Omega} T^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y = 0 \tag{4.27}$$

L'identité ci-dessus est alors retranchée de (4.20), ce qui donne la relation :

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ [u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})] T^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y}) U^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y = \int_\Omega \rho F_i(\boldsymbol{y}) U^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \tag{4.28}$$

qui est vraie pour tout point source $\boldsymbol{x}$ non situé sur la frontière $\partial\Omega$.

PASSAGE À LA LIMITE. Le point source $\boldsymbol{x}$ est maintenant supposé situé sur la frontière $\partial\Omega$. Reprenant la méthode de passage à la limite du chapitre 2 et les notations géométriques correspondantes, on étudie donc la limite pour $\varepsilon \to 0$ de l'identité (4.28) prise pour le domaine Ω_ε de frontière $(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon$, soit :

$$\begin{aligned}\int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \left\{[u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \mathrm{d}S_y \\ = \int_{\Omega_\varepsilon} \rho F_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{4.29}$$

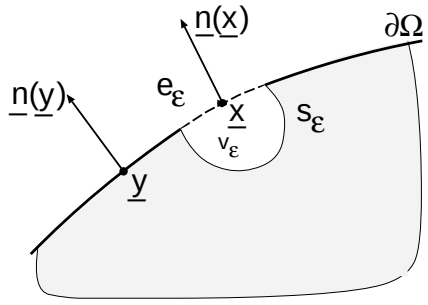

Figure 4.2: Voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(x)$ et autres notations utilisées pour le passage à la limite (4.29).

Par construction, $\boldsymbol{x} \notin \Omega_\varepsilon$. Si l'état élastostatique inconnu est tel que $\boldsymbol{u} \in C^{0,\alpha}$ en $\boldsymbol{x}$, c'est-à-dire vérifie :

$$\exists(\alpha, C) > 0, \qquad |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| \leq C\,|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^\alpha$$

alors le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y})$ vérifie, pour $\boldsymbol{y}$ voisin de $\boldsymbol{x}$:

$$|\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y})| \leq C\,|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{\alpha-1}$$

et on a, compte tenu des propriétés de singularité (4.11) :

$$\begin{aligned}\left|[u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right| &\leq C\,|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{\alpha-2} \\ \left|t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right| &\leq C\,|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{\alpha-2}\end{aligned} \tag{4.30}$$

Le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (4.29) est maintenant considéré. Les intégrales sur s_ε, sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$ et sur Ω_ε sont traitées séparément.

Intégrale sur s_ε. En raison de (4.30) et puisque $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \sim \varepsilon$, $\mathrm{d}S_y \sim \varepsilon^2 d\omega$ (où ω est l'angle solide vu du point $\boldsymbol{x}$), on a :

$$\left\{[u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \mathrm{d}S_y = O(\varepsilon^\alpha)d\omega$$

et donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{s_\varepsilon} \left\{[u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \mathrm{d}S_y = 0$$

Intégrale sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$. En raison de (4.30), l'intégrand se comporte au voisinage de $\boldsymbol{x}$ comme :

$$\big\{[u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big\} \sim |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{\alpha-2}$$

et la limite pour $\varepsilon \to 0$ de l'intégrale sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$ dans (4.29) est simplement l'intégrale impropre correspondante sur $\partial\Omega$:

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon}\big\{[u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big\}\,\mathrm{d}S_y\\ &= \int_{\partial\Omega}\big\{[u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big\}\,\mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

Intégrale sur Ω_ε. En raison de la faible singularité $\sim |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-1}$ des U_i^k, elle ne pose pas de difficulté, et tend vers l'intégrale impropre correspondante sur Ω :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon}\rho F_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y = \int_\Omega \rho F_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y$$

EQUATION INTÉGRALE DE FRONTIÈRE. Le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ dans l'identité (4.29) conduit donc à l'*équation intégrale de frontière en déplacement* recherchée :

$$\boxed{\int_{\partial\Omega}\big\{[u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big\}\,\mathrm{d}S_y = \int_\Omega \rho F_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y} \qquad (4.31)$$

Celle-ci, qui lie les valeurs des variables $\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}$ sur $\partial\Omega$ et ne fait pas intervenir les inconnues aux points intérieurs du domaine, gouverne *tout* état élastostatique sur Ω vérifiant (4.30). Elle ne fait intervenir que des intégrales convergentes, présentant des singularités en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ intégrables, et pour cette raison est qualifiée de *régularisée*. C'est le résultat principal de ce chapitre.

On remarque en fait que l'équation intégrale (4.31) est identique à la reformulation (4.28) de la représentation intégrale du déplacement (qui était considérée pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$). Elle couvre donc toutes les positions relatives de $\boldsymbol{x}$ par rapport à Ω, et est valable pour tout $\boldsymbol{x}$ dans le domaine de définition E de la solution élémentaire considérée.

IDENTITÉ DE SOMIGLIANA. Pour mémoire, indiquons que la présentation classique consiste à effectuer un passage à la limite $\varepsilon \to 0$ dans :

$$\int_{(\partial\Omega-e_\varepsilon)+s_\varepsilon}\big\{u_i(\boldsymbol{y})T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big\}\,\mathrm{d}S_y = \int_{\Omega_\varepsilon}\rho F_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y$$

soit sans retrancher l'identité de corps rigide (4.26) et pour le cas particulier où $v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ est une *boule* de centre $\boldsymbol{x}$ et de rayon ε. Le passage à la limite pour $\varepsilon \to 0$ donne l'*identité de Somigliana* :

$$\kappa_{ki}(\boldsymbol{x})u_i(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega}^{\star}\big\{u_i(\boldsymbol{y})T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big\}\,\mathrm{d}S_y = \int_\Omega \rho F_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y \qquad (4.32)$$

avec le *terme libre* :

$$\kappa_{ki}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{s_\varepsilon} T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y$$

(égal à $1/2\delta_{ki}$ si $\boldsymbol{x}$ est un point régulier de $\partial\Omega$) et l'intégrale ($\int^\star$) convergente en un sens affaibli, celui des *valeurs principales de Cauchy*, lié à la forme très particulière du voisinage d'exclusion considéré :

$$\int_{\partial\Omega}^\star \{\} \, \mathrm{d}S_y \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \{\} \, \mathrm{d}S_y \qquad v_\varepsilon(\boldsymbol{x}) : \text{boule de centre } \boldsymbol{x} \text{ et de rayon } \varepsilon$$

COMMENTAIRES. L'équation intégrale (4.31) est établie par passage à la limite sur la formule de représentation extérieure quand la taille ε d'un voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ tend vers 0, le point source $\boldsymbol{x}$ restant situé sur la frontière $\partial\Omega$. La forme de $v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ est arbitraire et peut varier quand $\varepsilon \to 0$.

Cette présentation diffère de la méthode classique, qui mène à une formulation intégrale, l'identité de Somigliana (4.32), faisant appel à un type particulier et restrictif de convergence d'intégrales contenant des singularités non intégrables. En fait, la formulation intégrale (4.31) est équivalente à (4.32) mais formulée en termes d'intégrales impropres convergentes. Cela tient essentiellement au fait que les contributions des termes très singuliers s'annulent réciproquement : la somme du terme libre et de la valeur principale présents dans l'identité de Somigliana (4.32) est connue, exactement et sans calcul, à l'aide de l'identité de corps rigide (4.27). Ainsi, sur un plan fondamental, les formulations intégrales sont en fait indépendantes du type de convergence des intégrales. Sur un plan pratique, le fait que toutes les singularités sont intégrables facilite la mise en œuvre numérique.

La régularisation exposée ici est *indirecte* : elle repose sur la connaissance d'identités intégrales particulières vérifiées par les solutions élémentaires (ici l'identité de corps rigide). Il existe également une approche *directe*, (Guiggiani et coll. [10]) pour laquelle la version (4.32) est discrétisée, le passage à la limite étant reporté au niveau du calcul des intégrales élémentaires. Cela impose de tenir soigneusement compte de la forme du voisinage d'exclusion lors du changement de variable (paramétrage de l'élément sur l'élément de référence, les intégrales élémentaires étant évaluées sur ce dernier).

Régularité des inconnues. Un autre point important est le caractère nécessaire de l'hypothèse de régularité $\boldsymbol{u} \in C^{0,\alpha}$ en $\boldsymbol{x}$, condition sans laquelle l'équation intégrale (4.31) n'est pas régularisée. Cette condition, qui apparaît naturellement lors de la régularisation, est exactement celle nécessaire à la convergence de l'intégrale en valeur principale dans la variante singulière (4.32) ; elle conditionne aussi la validité de l'approche directe de calcul des intégrales singulières en valeur principale [10]. A ce titre également, l'équation intégrale régularisée (4.31) est strictement équivalente à la formulation classique en valeur principale.

4.5 Méthode des équations intégrales en élastostatique

La méthode des équations intégrales procède ici encore en deux temps :

1. Résolution de l'*équation intégrale de frontière*, permettant de connaître les valeurs de $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})\,|_{\partial\Omega}$ en tout point de $\partial\Omega$.
2. Application des formules de *représentation intégrale* (4.20), (4.22) permettant le calcul explicite des valeurs prises par $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ en tout point intérieur $\boldsymbol{x}$.

Ceci doit être considéré comme le canevas d'une méthode de résolution *numérique*, applicable à des géométries et des conditions aux limites quelconques, la résolution analytique des équations intégrales n'étant que rarement envisageable.

INFLUENCE DU CHOIX DE LA SOLUTION ÉLÉMENTAIRE. L'équation intégrale régularisée (4.31) est valable quelle que soit la solution élémentaire utilisée. Son choix n'est pas nécessairement indifférent ; cela dépend du domaine d'étude Ω et des conditions aux limites associées à l'état inconnu. Considérons deux problèmes à titre d'illustration :

Plaque épaisse élastique encastrée. Une plaque épaisse élastique P occupe la région Ω de l'espace définie par :

$$\Omega = \{\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \mid (y_1, y_2) \in D, -h/2 \leq y_3 \leq h/2\}$$

où D est un domaine régulier connexe du plan y_1, y_2. L'épaisseur h n'est pas considérée comme petite devant les autres dimensions : le problème est tridimensionnel. Posons $\partial\Omega = S_L \cup S^- \cup S^+$, où S^-, S^+, S_L sont respectivement les surfaces inférieure, supérieure et latérale (figure 4.3). La plaque est soumise aux conditions aux limites suivantes, les forces de volume étant nulles :

- Une portion S_{T}^+ de S^+ subit une répartition donnée $\boldsymbol{t}^D$ d'efforts de contact.
- Les surfaces $S_0^+ = S^+ - S_{\mathrm{T}}^+$ et S^- sont libres de contraintes.
- La surface latérale S_L est bloquée : $\boldsymbol{u}^D = \mathbf{0}$.

L'utilisation de solutions élémentaires adaptées à la géométrie et aux conditions aux limites permet de réduire les supports des intégrales dans l'équation intégrale (4.31). Envisageant successivement plusieurs possibilités de solutions élémentaires et compte tenu des conditions aux limites, l'équation intégrale (4.31) devient :

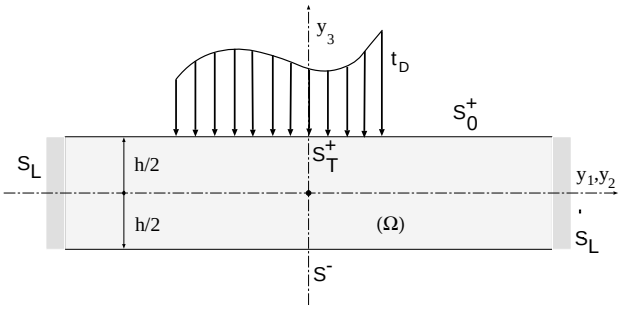

Figure 4.3: Plaque épaisse élastique : géométrie et chargement.

1. Solution de Kelvin :

$$\int_{S^-\cup S_0^+\cup S_{\mathrm{T}}^+}[u_i(\boldsymbol{y})-u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - u_i(\boldsymbol{x})\int_{S_L} T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{S_L\cup S_{\mathrm{T}}^+} t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = 0$$

2. Solution de Mindlin (translatée verticalement, de sorte que la surface libre soit $y_3 = h/2$) :

$$\int_{S^-}[u_i(\boldsymbol{y})-u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - u_i(\boldsymbol{x})\int_{S_L} T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{S_L\cup S_{\mathrm{T}}^+} t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = 0$$

3. Solution de Benitez et Rosakis [2] :

$$-u_i(\boldsymbol{x})\int_{S_L} T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{S_L\cup S_{\mathrm{T}}^+} t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = 0$$

Interaction sol-structure. Dans de nombreux problèmes posés par la géotechnique, un ouvrage (fondation, structure, tunnel,...) est réalisé dans un sol modélisé en première approximation comme un demi-espace élastique à surface libre. L'usage (en statique) de la solution de Mindlin est alors tout indiqué. Par exemple, supposons que Ω est un domaine élastique semi-infini constitué par le demi-espace $y_3 \leq 0$ dans lequel une cavité souterraine (frontière S_C et une fondation (frontière S_F) ont été creusées ; le reliquat de surface libre est noté S_0 (voir figure 4.4). La surface S_F est chargée par des efforts imposés, simulant l'effet de la structure supportée par la fondation. Le problème pratique est le calcul des contraintes en surface et au voisinage de la cavité créées par la présence de la fondation chargée. Pour ce problème :

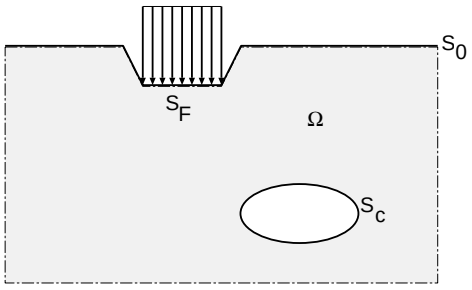

Figure 4.4: Exemple d'utilisation de la solution de Mindlin.

- L'usage de la solution de Kelvin conduit à écrire (4.31) en termes d'intégrales sur S_C, S_F *et* S_0. La surface S_0 allant à l'infini, on doit choisir entre tronquer S_0, à une

distance suffisamment grande de la fondation et de la cavité, lors de la discrétisation, ou utiliser la connaissance du comportement asymptotique à l'infini des champs élastiques, par exemple par l'intermédiaire d'éléments de surface infinis (Bettess [3], Dangla [8]).

- L'usage de la solution de Mindlin permet d'éliminer complètement de la représentation intégrale les intégrales sur S_0, et il ne reste que des intégrales sur les surfaces *bornées* S_C, S_F, qui de plus concentrent l'essentiel des causes et des effets qui intéressent l'ingénieur (la solution élastique loin de la fondation et de la cavité présente peu d'intérêt pratique). Ceci peut représenter un gain important, du point de vue du temps de calcul et de la facilité de maillage.

4.6 Equations intégrales pour les problèmes extérieurs

On considère maintenant un massif élastique infini occupant le domaine $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$, Ω étant un domaine borné. On suppose momentanément $\rho \boldsymbol{F} = 0$. On va montrer que l'équation intégrale (4.31) et les représentations (4.20), (4.22) s'étendent aux domaines infinis, à conditions que $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}$ vérifient certaines conditions de décroissance à l'infini.

On peut pour cela procéder à un passage à la limite pour un domaine borné arbitrairement grand. Pour un point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, on considère une surface fermée régulière S_R choisie de façon à enfermer la boule de centre $\boldsymbol{x}$ et de rayon R fixé et à entourer la frontière $\partial\bar{\Omega}$. L'équation intégrale (4.31) est alors écrite pour le domaine élastique *borné* $\Omega_R \subset \Omega$ limité extérieurement par S_R (figure 4.5) :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\bar{\Omega}} \left\{[u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \mathrm{d}S_y \\ = \int_{S_R} \left\{t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - [u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

où, puisqu'on se propose de faire $R \to \infty$, la solution élémentaire utilisée est nécessairement celle de Kelvin. Le point $\boldsymbol{x}$ étant par construction intérieur à S_R, l'identité

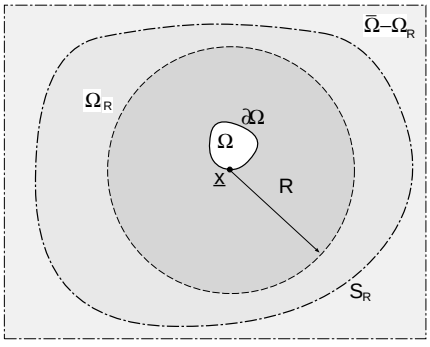

Figure 4.5: Domaine Ω_R pour le passage à la limite $r \to \infty$.

(4.7) pour S_R permet de transformer l'équation ci-dessus en :

$$\int_{\partial\bar{\Omega}} \left\{[u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \mathrm{d}S_y$$
$$= -u_k(\boldsymbol{x}) + \int_{S_R} \left\{t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{y})T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \mathrm{d}S_y \tag{4.33}$$

La solution de Kelvin et l'élément différentiel de surface sur S_R vérifient :

$$U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = O(1/R) \qquad T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = O(1/R^2) \qquad \mathrm{d}S_y = O(R^2)d\omega \qquad (\boldsymbol{y} \in S_R)$$

(ω : angle solide orienté vu de $\boldsymbol{x}$). On voit ainsi qu'il suffit que les champs $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}$ vérifient :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = o(1) \qquad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y}) = o(R^{-1}) \qquad (\boldsymbol{y} \in S_R) \tag{4.34}$$

pour obtenir :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \left\{u_i(\boldsymbol{y})T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \mathrm{d}S_y = 0$$

et ceci ne dépend pas de la forme précise de la surface S_R, qui peut changer avec R.

Equation intégrale pour les problèmes extérieurs. Le passage à la limite $R \to \infty$ dans (4.33) a donc pour résultat l'*équation intégrale régularisée en déplacement pour un domaine $\bar{\Omega}$ non borné* :

$$u_k(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\bar{\Omega}} \left\{[u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})]T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \mathrm{d}S_y = 0 \tag{4.35}$$

qui gouverne tout état élastostatique sur $\bar{\Omega}$ vérifiant les conditions de décroissance (4.34). Cette équation intégrale diffère de son homologue (4.31) pour un solide borné par l'apparition d'un "terme libre" $u_k(\boldsymbol{x})$ hors signe intégral et par l'orientation de la normale unitaire $\boldsymbol{n}$, extérieure au solide borné $\bar{\Omega}$ donc intérieure à $\partial\bar{\Omega}$.

Formules de représentation intégrale. L'équation (4.35) peut être prise pour tout point source $\boldsymbol{x}$. Pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$, l'identité (4.7) appliquée à la surface fermée $\partial\bar{\Omega}$ devient, compte tenu du fait que $\boldsymbol{n}$ est ici *intérieure* à $\partial\bar{\Omega}$:

$$(1-\kappa)\delta_{ik} - \int_{\partial\bar{\Omega}} T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = 0 \qquad \text{avec} \begin{cases} \kappa = 1 & \boldsymbol{x} \in \bar{\Omega} \\ \kappa = 0 & \boldsymbol{x} \notin \bar{\Omega} \end{cases} \tag{4.36}$$

L'identité ci-dessus, appliquée à l'équation (4.35) pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\bar{\Omega}$ donne la formule de représentation :

$$\kappa u_k(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\bar{\Omega}} \left\{t_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{y})T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \mathrm{d}S_y$$

Ce résultat est identique à (4.20). La même formule de représentation est donc applicable aux domaines bornés ou non bornés (la normale, toujours extérieure au domaine considéré, change d'orientation), et il en est donc de même pour la représentation intégrale (4.22) du tenseur des contraintes.

Comportement à l'infini des champs donnés par représentations intégrales. On montre facilement que le comportement en $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-1}$ et $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-2}$ des déplacements et contraintes de Kelvin entraîne la satisfaction, par tout état élastostatique donné par les représentationss (4.20), (4.22), des conditions de décroissance (4.34).

Forces de volume non nulles. Le passage à la limite $R \to +\infty$ et les formules (4.20), (4.22) restent valables en présence de forces de volume sous la condition :

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\Omega_R} \rho F_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y \right| < +\infty$$

Sinon, il faut procéder par superposition, en supposant connue une solution particulière $\boldsymbol{u}^P$ de l'équation de Navier avec second membre (1.16) : on pose $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0 + \boldsymbol{u}^P$ et prend $\boldsymbol{u}^0$, solution de l'équation de Navier *homogène*, comme inconnue. Il faut aussi utiliser une solution particulière et procéder par superposition en cas de chargement à l'infini (exemple : milieux infinis fissurés, voir chapitre 13).

Remarques. On montre facilement à partir de (4.20), (4.22) que si les forces de volume s'exercent sur une partie *bornée* de Ω et s'il n'y a pas de chargement à l'infini, les champs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ se comportent à l'infini, d'après le principe de SaintVenant, comme les déplacements et contraintes de Kelvin associés à la force concentrée égale à la résultante du chargement réel, et décroissent donc comme R^{-1} et R^{-2} respectivement, satisfaisant ainsi les conditions de décroissance (4.34).

Les résultats établis dans cette section montrent que la résolution d'un problème extérieur peut être ramenée à une équation intégrale sur une frontière bornée. Cela dispense en particulier de devoir considérer un domaine tronqué à une distance finie ou introduire des "éléments infinis" (Bettess [3]) qui tiennent compte de la forme asymptotique de la décroissance à l'infini. Les méthodes d'équations intégrales sont donc très attractives pour les problèmes extérieurs.

4.7 Méthode des éléments de frontière

La résolution numérique par éléments de frontière de l'équation intégrale (4.31) suit les principes exposés au chapitre 3, et la plupart des considérations y développées restent valables en élasticité. L'interpolation des inconnues, ici les valeurs de $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})$ sur la frontière, par :

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} M_k(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{u}^k \qquad \tilde{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} M_k(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{t}^k \qquad \boldsymbol{\xi} \in \Delta_e \tag{4.37}$$

utilise des valeurs nodales $\boldsymbol{u}^k = \tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{z}^k)$ et $\boldsymbol{t}^k = \tilde{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{z}^k)$ aux nœuds d'interpolation $\boldsymbol{z}^k$, dont le caractère *vectoriel* est la seule différence notable par rapport aux problèmes de potentiel. La forme discrétisée de l'équation intégrale (4.31) s'écrit comme suit,

séparant intégrations singulières et régulières :

$$0 = \sum_{e\in I(\boldsymbol{x})}\sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} \left\{ AS_i^k(e,p)u_i^{m(e,p)} - B_i^k(e,p)t_i^{m(e,p)} \right\} + \sum_{e\in \bar{I}(\boldsymbol{x})}\sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} \left\{ AR_i^k(e,p)u_i^{m(e,p)} - B_i^k(e,p)t_i^{m(e,p)} \right\} - u_i(\boldsymbol{x}) \sum_{e\in \bar{I}(\boldsymbol{x})} \widehat{AR}_i^k(e)$$

avec les matrices élémentaires :

$$\begin{aligned} AS_i^k(e,p) &= \int_{E^{(e)}} [M_p(\boldsymbol{\xi}) - M_p(\boldsymbol{\eta}_e)] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi \\ B_i^k(e,p) &= \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi \\ AR_i^k(e,p) &= \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi \\ \widehat{AR}_i^k(e) &= \int_{E^{(e)}} T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Elle porte au total sur les $6N_{\mathrm{I}}$ scalaires (u_i^m, t_i^m), $1 \le i \le 3$, $1 \le m \le N_{\mathrm{I}}$, pour lesquelles $3N_{\mathrm{I}}$ relations additionnelles sont fournies par les conditions aux limites. Choisissant par exemple les nœuds d'interpolation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}^k$, $(1 \le k \le N_{\mathrm{I}})$ pour points de collocation, les $3N_{\mathrm{I}}$ équations scalaires (3.11) prennent la forme matricielle :

$$[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{u}\} + [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{t}\} = \boldsymbol{0} \qquad \{\boldsymbol{u}\} = \{u_i^m\}\ \ \{\boldsymbol{t}\} = \{t_i^m\} \quad (1 \le i \le 3, 1 \le m \le N_{\mathrm{I}}) \quad (4.38)$$

où les matrices $[\boldsymbol{A}]$ et $[\boldsymbol{B}]$, de dimensions $3N_c \times 3N_{\mathrm{I}}$, sont pleines. Une permutation de colonnes dans les matrices $[\boldsymbol{A}], [\boldsymbol{B}]$ permet d'isoler les valeurs nodales inconnues dans le premier membre de (4.38), qui prend la forme d'un système linéaire carré :

$$\boldsymbol{K}\{\boldsymbol{X}\} = \{\boldsymbol{Y}\} \quad (4.39)$$

dans lequel $\{\boldsymbol{X}\}$ désigne le vecteur formé des composantes de $\{\boldsymbol{u}\}, \{\boldsymbol{t}\}$ restées inconnues, $\boldsymbol{K}$ est formée des colonnes de $[\boldsymbol{A}], [\boldsymbol{B}]$ associées aux composantes de $\{\boldsymbol{X}\}$ et $\{\boldsymbol{Y}\}$ est le second membre formé par la somme (changée de signe) des colonnes de $[\boldsymbol{A}], [\boldsymbol{B}]$ associées aux composantes connues de $\{\boldsymbol{u}\}, \{\boldsymbol{t}\}$ multipliées par la valeur de ces dernières. La matrice $\boldsymbol{K}$ dans (4.39) est pleine et non symétrique.

Interpolation du vecteur contrainte. Le vecteur contrainte $\boldsymbol{t}$, fonction linéaire de la normale unitaire $\boldsymbol{n}$, est a priori discontinu au passage de singularités géométriques (arêtes, coins) ou de lignes avec changement de type de conditions aux limites.

Si $\boldsymbol{t}$ n'est inconnu que d'un côté de la ligne de discontinuité, il suffit de considérer que la valeur nodale pour tout nœud situé sur une telle jonction est une inconnue, attachée à la portion de surface adjacente sur laquelle $\boldsymbol{t}$ n'est pas donné par les conditions aux limites. Parallèlement, les intégrales élémentaires contenant $\boldsymbol{t}^D$ doivent être calculées à l'aide d'une expression analytique de $\boldsymbol{t}^D$. Si cette manœuvre n'est pas permise par les conditions aux limites, il est souhaitable de modifier la représentation (4.37) afin d'y incorporer les discontinuités de $\boldsymbol{t}$ attendues ; plusieurs techniques permettent d'atteindre ce but.

Nœud double (ou triple). Un nœud d'interpolation situé sur une arête (resp. un coin) supporte deux (resp. trois) valeurs nodales vectorielles $\boldsymbol{t}^{1,2,3}$, chacune attachée à la portion de surface régulière adjacente à la singularité géométrique. Dans ce cas, on ajoute généralement au système d'équations final les relations :

$$\boldsymbol{t}^i.\boldsymbol{n}^j = \boldsymbol{t}^j.\boldsymbol{n}^i$$

qui résultent de la continuité du *tenseur* des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ au voisinage du coin.

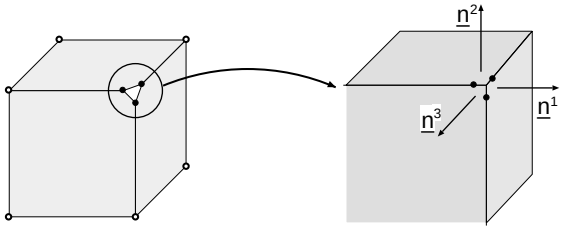

Figure 4.6: Nœud triple pour un coin.

Non-conformité totale. C'est la solution la plus brutale. *Tous* les nœuds d'interpolation de $\boldsymbol{t}$ sont pris intérieurs à l'élément, et ce sur tout le maillage ; l'interpolation (4.37) est ainsi discontinue à travers *toute* frontière d'élément. Par exemple, pour l'élément de référence carré, on choisit les nœuds d'interpolation sur des lignes $\xi_1 = \xi_1^{\pm}, \xi_2 = \xi_2^{\pm}$ intérieures à l'élément $(-1 < \xi_i^- < 0 < \xi_i^+ < 1)$[8] et on utilise les fonctions d'interpolation $\tilde{M}_p(\boldsymbol{\xi})$ définies par :

$$\tilde{M}_p(\boldsymbol{\xi}) = M_p(\tilde{\boldsymbol{\xi}}) \qquad \text{avec} \quad \tilde{\xi}_i = \frac{1-\xi_i}{2}\xi_i^- + \frac{1+\xi_i}{2}\xi_i^+ \tag{4.40}$$

Cette méthode augmente fortement le nombre de valeurs nodales $\boldsymbol{t}^m$ inconnues (les nœuds n'étant plus partagés entre éléments voisins), et présente l'inconvénient d'introduire des discontinuités indésirables dans l'interpolation de $\boldsymbol{t}$; elle est par contre de mise en œuvre assez facile.

Non-conformité partielle. Une amélioration de l'approche précédente (Patterson et Sheikh [12]) consiste à placer les nœuds d'interpolation de $\boldsymbol{t}$ en retrait des frontières d'éléments situées sur des lignes de discontinuité, les autres nœuds étant maintenus sur les frontières, comme schématisé sur la figure 4.8. Les fonctions de forme modifiées (4.40) sont encore utilisées, cette fois avec $\xi_i^{\pm} = \pm 1$ si $\boldsymbol{t}$ est continu à travers l'arête $\xi_i = \pm 1$.

POST-TRAITEMENT : CALCUL DES CHAMPS ÉLASTIQUES AUX POINTS INTÉRIEURS. Après résolution de (4.39), les valeurs nodales $\boldsymbol{u}^m, \boldsymbol{t}^m$ $(1 \le m \le N_{\mathrm{I}})$ sont connues. Les valeurs approchées de $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ en un point $\boldsymbol{x}$ intérieur sont alors calculables par les

[8] Pour $\xi_i^{\pm} = \pm 1$, on retrouve l'interpolation conforme habituelle.

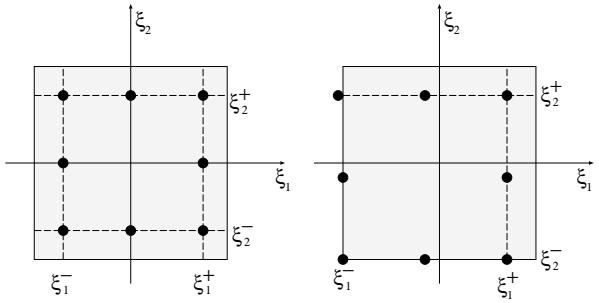

Figure 4.7: Non-conformité totale (à gauche) ou partielle (à droite) d'une interpolation.

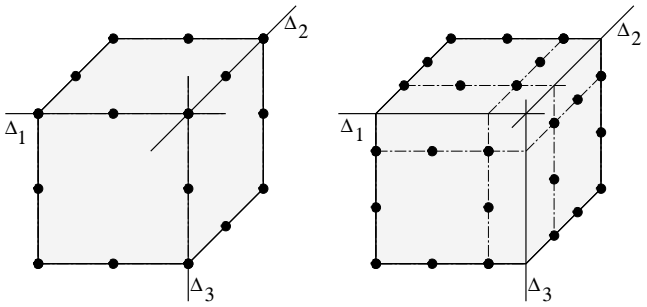

Figure 4.8: Interpolation continue (à gauche) et discontinue (à droite) au passage des arêtes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

formules (4.20), (4.22) de représentation, sous forme discrétisée :

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} \left\{ t_i^{m(e,p)} \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi - u_i^{m(e,p)} \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi \right\} \tag{4.41}$$

$$u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) = \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} \left\{ t_a^{m(e,p)} \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) U_{a,\bar{\ell}}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi - u_a^{m(e,p)} \int_{E^{(e)}} M_p(\boldsymbol{\xi}) n_b(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ab,\bar{\ell}}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi \right\} \tag{4.42}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijk\ell} u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) \tag{4.43}$$

La présence de termes variant en $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-1}$, $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-2}$ dans (4.41) et en $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-2}$, $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-3}$ dans (4.42) pose le problème, déjà évoqué en section 3.4, du calcul d'intégrales quasi-singulières quand le point d'observation $\boldsymbol{x}$ est proche de $\partial\Omega$.

Post-traitement : calcul du tenseur des contraintes à la frontière. Le calcul du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ complet en des points d'observation $\boldsymbol{x}$ de $\partial\Omega$ est parfois nécessaire. Cependant, la résolution de l'équation intégrale (3.11) ne donne que les valeurs du vecteur contrainte $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}$, tandis que la formule de représentation (4.22) n'est pas valable sur la frontière en raison de son caractère très singulier. Il est possible d'établir des formules de représentation intégrale de $\boldsymbol{\nabla u}(\boldsymbol{x})$ ou $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$, ce sujet est abordé au chapitre 5.

Une méthode plus classique repose sur l'idée suivante. Le vecteur contrainte connu sur $\partial\Omega$, dépend linéairement du gradient de déplacement $\boldsymbol{\nabla u}$. Décomposant ce dernier en gradient tangentiel et dérivée normale, on obtient :

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{n}.\boldsymbol{C} : (\boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_n \otimes \boldsymbol{n})$$

Cette relation linéaire peut alors être inversée afin d'exprimer la dérivée normale $\boldsymbol{u}_{,n}(\boldsymbol{x})$ en fonction de $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, qui sont connues une fois l'équation intégrale (4.31) résolue. On peut ainsi reconstituer le gradient complet $\boldsymbol{\nabla u}(\boldsymbol{x})$ et calculer le tenseur des contraintes en $\boldsymbol{x}$ par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C} : (\boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}_n \otimes \boldsymbol{n})(\boldsymbol{x})$$

Le calcul pratique du gradient tangentiel $\boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{u}$ issu de l'interpolation (3.10) est fait à l'aide de l'équation (A.13) :

$$\boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} \left[M_{k,\alpha}(\boldsymbol{\eta}) g^{\alpha\beta} \boldsymbol{u}^k\right] \otimes \boldsymbol{a}_\beta(\boldsymbol{\eta})$$

où les $g^{\alpha\beta}$ sont les composantes contravariantes du tenseur métrique associé au paramétrage de l'élément, de composantes covariantes $g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{a_\alpha}.\boldsymbol{a_\beta}$ (les matrices $[g^{\alpha\beta}]$ et $[g_{\alpha\beta}]$ sont inverses l'une de l'autre), et $\boldsymbol{\eta}$ est l'antécédent de $\boldsymbol{x}$ sur l'élément de référence.

Cette méthode suppose la continuité du gradient tangentiel $\boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{x}$, et ne peut donc pas être appliquée aux points situés à la jonction de deux éléments, sauf à utiliser des interpolations C_1 des inconnues *et* de la surface. On ne sait donc en particulier pas a priori évaluer correctement $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ aux nœuds du maillage qui ne sont pas intérieurs à un élément (la majorité ou la totalité des nœuds, suivant le type des fonctions de forme utilisées).

Cas de l'élasticité isotrope. On peut donner des expressions explicites dans le cas de l'élasticité isotrope. En effet, d'après (1.17) :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{t} &= \mu \left[\frac{2\nu}{1-2\nu}(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} + \boldsymbol{u}_{,n} + \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\nabla u}\right] \\ &= \mu \left[\frac{2\nu}{1-2\nu}(\operatorname{div}_S\boldsymbol{u})\boldsymbol{n} + \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{u} + \frac{1}{1-2\nu}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n} + \boldsymbol{I}\right].\boldsymbol{u}_n\end{aligned}$$

qui s'inverse en :

$$\boldsymbol{u}_{,n} = \frac{1}{\mu}\left[\boldsymbol{T} - \frac{1}{2(1-\nu)}\boldsymbol{n}\otimes\boldsymbol{n}\right].\boldsymbol{t} - \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{u} - \frac{\nu}{1-\nu}(\operatorname{div}_S\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}$$

CALCUL DES INTÉGRALES DE DOMAINE. En présence de forces de volume non nulles, l'équation intégrale (4.31) comporte au second membre le terme :

$$\int_\Omega \rho F_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y \tag{4.44}$$

Sa conversion en intégrales de frontière est souhaitable, afin de restreindre le support géométrique de l'ensemble des calculs d'intégrales au maillage de la frontière $\partial\Omega$; cette possibilité existe dans quelques cas, décrits ci-après. Il faut sinon recourir à des intégrations de domaine, qui utilisent habituellement des *cellules d'intégration* sur lesquelles la méthode des points de Gauss est utilisée.

Elasticité isotrope et forces dérivant d'un potentiel. Dans le cas de l'élasticité isotrope, la solution élémentaire $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ admet la représentation (1.20) en termes du *tenseur de Galerkin* $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$:

$$U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 2(1-\nu)G_{i,jj}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - G_{j,ji}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{4.45}$$

qui, pour la solution de Kelvin tridimensionnelle, est donné (annexe 4.1) par :

$$G_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu} r\delta_{ik}$$

Supposons d'autre part qu'il existe un potentiel Φ et une constante b tels que :

$$\rho\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}\Phi \qquad \text{avec} \quad \Delta\Phi = b$$

On procède alors à une intégration par parties. Remarquant que :

$$U_{i,i}^k = (1-2\nu)G_{i,ijj}^k$$

on a :

$$\begin{aligned}\int_\Omega U_i^k.\Phi_{,i}\,\mathrm{d}V_y &= \int_{\partial\Omega} \Phi U_i^k \boldsymbol{n}_i\,\mathrm{d}S_y - (1-2\nu)\int_\Omega \Phi G_{i,ijj}^k\,\mathrm{d}V_y \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\{\Phi[U_j^k - (1-2\nu)G_{i,ij}^k]n_j + \Phi_{,j}n_j G_{i,i}^k\right\}\,\mathrm{d}S_y \\ &\quad - (1-2\nu)\int_\Omega \Phi_{,jj}G_{i,i}^k\,\mathrm{d}V_y\end{aligned}$$

puis :

$$\int_\Omega \Phi_{,jj}G_{i,i}^k\,\mathrm{d}V_y = b\int_\Omega G_{i,i}^k\,\mathrm{d}V_y = b\int_{\partial\Omega} G_i^k n_i\,\mathrm{d}S_y$$

Ce calcul permet de transformer l'intégrale de domaine (4.44) en somme d'intégrales de frontière :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \rho F_i U_i^k\,\mathrm{d}V_y &= \int_{\partial\Omega} \left\{2(1-\nu)\Phi[G_{j,ii}^k - G_{i,ij}^k]n_j + \Phi_{,j}n_j G_{i,i}^k\right\}\,\mathrm{d}S_y \\ &\quad - (1-2\nu)b\int_{\partial\Omega} G_i^k n_i\,\mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

Ce résultat s'applique en particulier aux situations suivantes :

- Au poids propre, avec $\Phi = -\rho g y_3$ et $b = 0$.
- A l'inertie centrifuge, avec $\Phi(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2(\boldsymbol{y})$ et $b = 2\rho\omega^2$ ($\omega/2\pi$: fréquence de rotation du solide, $R(\boldsymbol{y})$: distance de $\boldsymbol{y}$ à l'axe de rotation).
- A la prise en compte de déformations thermiques (coefficient de dilatation thermique α) créées par un champ d'écart de température stationnaire T vérifiant $\Delta T = r$ (généralement $r = 0$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\nabla u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \boldsymbol{I} \quad \text{dans } \Omega$$

ce qui conduit à prendre $\Phi = (3\lambda+2\mu)\alpha T$, $b = (3\lambda+2\mu)\alpha r$. Dans ce cas, le vecteur $\boldsymbol{t}$ dans l'équation intégrale (4.31) fait référence à $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u})$, et n'est pas égal au vecteur-contrainte complet $\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}$.

Méthode de réciprocité multiple[9]. Elle s'applique aussi à l'élasticité, à condition de disposer d'une suite $\boldsymbol{U}^{(N)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), N \geq 0$ de solutions élémentaires telle que :

$$\boldsymbol{U}^{(N)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{m}\Delta\boldsymbol{U}^{(N+1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

avec $\boldsymbol{U}^{(0)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Ceci peut être réalisé pour la solution de Kelvin. Posant :

$$G_i^{k(N)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\delta_{ik}\frac{r^{2N+1}}{(2N+2)!}$$

la représentation de Galerkin (4.45) permet de construire la suite $\boldsymbol{U}^{(N)}$ désirée. On procède alors comme en section 3.6 par application itérée de la troisième formule de Green (2.4), pour obtenir :

$$\int_\Omega \boldsymbol{F}.\boldsymbol{U}^k \,\mathrm{d}V_y = \int_\Omega \boldsymbol{\Delta}^N \boldsymbol{F}.\boldsymbol{U}^{k(N)} \,\mathrm{d}V_y + \sum_{p=0}^{N-1} \int_{\partial\Omega} \left(\boldsymbol{U}^{k(p+1)}_{,n}.\boldsymbol{\Delta}^p \boldsymbol{F} - \boldsymbol{U}^{k(p+1)}.(\boldsymbol{\Delta}^p \boldsymbol{F})_{,n} \right) \mathrm{d}S_y$$

pour un entier quelconque N, et où $\boldsymbol{\Delta}^p$ désigne le laplacien vectoriel itéré p fois.

UTILISATION DE CELLULES D'INTÉGRATION. Elles sont utilisées quand les efforts de volume ne sont donnés que par des valeurs numériques. Cela recouvre des situations d'importance pratique : problèmes couplés thermoélastiques pour lesquels la distribution de température ne vérifie pas $\Delta T = b$, prise en compte de déformations initiales pour la résolution incrémentale de problèmes élastoplastiques (chapitre 14).

SOUS-STRUCTURATION. Appliquée aux problèmes élastiques, elle permet, outre une réduction des besoins en temps de calcul et en espace mémoire, de considérer des solides homogènes par morceaux. Elle est même nécessaire dans ce dernier cas, car les solutions élémentaires connues sont limitées aux milieux homogènes ou, au mieux, à des hétérogénéités très simples (stratification parallèle,...).

[9] Voir section 3.6.

4.8 Elasticité en déformations planes

Considérons l'hypothèse des *déformations planes* : domaine élastique Ω invariant par translation le long de $\boldsymbol{e}_3$, soit $\Omega = D \times \mathbb{R}$, où D est un ouvert du plan $y_1 y_2$; champ de déplacement de la forme :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = u_1(y_1, y_2)\boldsymbol{e}_1 + u_2(y_1, y_2)\boldsymbol{e}_2$$

La méthode d'intégration du problème tridimensionnel exposée en section 2.5, appliquée à l'équation intégrale (4.31) pour le domaine *tridimensionnel* Ω de frontière $\partial D \times \mathbb{R}$, donne :

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} [u_\alpha(\tilde{y}) - u_\alpha(\tilde{x})] \int_{\mathbb{R}} T^\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}, \tilde{y})\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}s_y \\
&- \int_{\partial D} t_\alpha(\tilde{y}) \int_{\mathbb{R}} [U^\gamma_\alpha(\boldsymbol{x}, \tilde{y}) - U^\gamma_\alpha(\boldsymbol{x}, \tilde{z})]\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}s_y \\
&= \int_D \rho F_\alpha(\tilde{y}) \int_{\mathbb{R}} [U^\gamma_\alpha(\boldsymbol{x}, \tilde{y}) - U^\gamma_\alpha(\boldsymbol{x}, \tilde{z})]\, \mathrm{d}x_3\, \mathrm{d}D_y
\end{aligned} \tag{4.46}$$

où $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$, $\tilde{x} = (x_1, x_2), \ldots$ désignent des points de D ; les indices grecs prennent par convention les valeurs $1, 2$. L'identité :

$$\int_{\partial D} t_\alpha(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}s_y + \int_D \rho F_\alpha(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}D_y = 0$$

traduisant l'équilibre global (en résultante) de D a été utilisée. La solution élémentaire en déformations planes est définie par :

$$[U^\gamma_\alpha(\tilde{x}, \tilde{y})]_{2D} = \int_{\mathbb{R}} [U^\gamma_\alpha(\boldsymbol{x}, \tilde{y}) - U^\gamma_\alpha(\boldsymbol{x}, \tilde{z})]\, \mathrm{d}x_3 \tag{4.47}$$

$$[T^\gamma_\alpha(\tilde{x}, \tilde{y})]_{2D} = \int_{\mathbb{R}} T^\gamma_\alpha(\boldsymbol{x}, \tilde{y})\, \mathrm{d}x_3 \tag{4.48}$$

où $r = |\tilde{y} - \tilde{x}|$ est la distance euclidienne dans le plan ; $\tilde{z} \in D$ est un point fixé $\neq \tilde{x}$, arbitraire, et $r' = |\tilde{z} - \tilde{x}|$.

Solution élémentaire de Kelvin en déformations planes. L'explicitation de (4.47–4.48) pour la solution de Kelvin tridimensionnelle (4.8–4.9) donne, tous calculs faits :

$$[U^\gamma_\alpha(\tilde{x}, \tilde{y})]_{2D} = \frac{1}{8\pi\mu} \left[r_{,\alpha} r_{,\gamma} - (3 - 4\nu)\delta_{\alpha\gamma} \log \frac{r}{r'} \right] \tag{4.49}$$

$$[\Sigma^\gamma_{\alpha\beta}(\tilde{x}, \tilde{y})]_{2D} = -\frac{1}{4\pi r} \left[2 r_{,\alpha} r_{,\gamma} r_{,\beta} + (1 - 2\nu)(\delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} - \delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma}) \right] \tag{4.50}$$

La solution $[\boldsymbol{U}^\gamma]_{2D}$ obtenue est définie à une translation près, via le choix arbitraire de $\boldsymbol{z}$ (et donc de ρ'). Elle est singulière comme $\log r$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Son comportement à l'infini, $[\boldsymbol{U}^\gamma]_{2D} \to \infty$ pour $\rho \to \infty$, s'explique par le fait que ce déplacement représente la

réponse d'un massif élastique tridimensionnel infini à un système de forces *de résultante infinie*.

Le calcul de (4.49–4.50) repose sur un choix particulier de $\tilde{z}$ tel que $z_\gamma = x_\gamma$, la coordonnée $z_{3-\gamma}$ étant arbitraire, et utilise les intégrales :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + x_3^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + x_3^2}} \right) \mathrm{d}x_3 = -2 \log \frac{\rho}{\rho'}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x_3}{(\rho^2 + x_3^2)^{n+1/2}} = \frac{2n}{2n-1} \frac{1}{\rho^{2n}} \qquad (n = 1, 2)$$

avec $\rho^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$ et $\rho'^2 = (z_{3-\gamma} - x_{3-\gamma})^2$. La recherche directe d'une solution élémentaire des équations de l'élasticité plane aurait également conduit au résultat (4.49–4.50).

EQUATION INTÉGRALE EN DÉFORMATIONS PLANES. L'équation intégrale en déplacements vérifiée par tout état élastostatique en déformations planes découle directement de (4.46) et s'écrit :

$$\int_{\partial D} \{[u_\alpha(\tilde{y}) - u_\alpha(\tilde{x})] T_\alpha^\gamma(\tilde{x}, \tilde{y}) - t_\alpha(\tilde{y}) U_\alpha^\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})\} \, \mathrm{d}s_y = \int_D \rho F_\alpha(\tilde{y}) U_\alpha^\gamma(\tilde{x}, \tilde{y}) \, \mathrm{d}D_y \quad (4.51)$$

en termes de la solution élémentaire en déformations planes $[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{\Sigma}]_{2D}$. Elle se transforme, comme dans le cas tridimensionnel, en représentation intégrale de $\boldsymbol{u}(\tilde{x})$ pour $\tilde{x} \notin \partial D$. L'application de la loi de Hooke donne ensuite la représentation du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\tilde{x})$.

PROBLÈMES EXTÉRIEURS. Le passage aux domaines non bornés (avec $\boldsymbol{F} = 0$) se fait comme pour le cas tridimensionnel. Le comportement à l'infini de la solution de Kelvin bidimensionnelle est :

$$\boldsymbol{U}(\tilde{x}, \tilde{y}) = O(\mathrm{Log} r) \qquad \boldsymbol{\Sigma}(\tilde{x}, \tilde{y}) = O(1/r) \qquad r = |\tilde{y} - \tilde{x}| \to +\infty$$

Un raisonnement similaire à celui fait en section 4.6 montre que tout état élastostatique avec forces de volume nulles vérifiant les conditions suffisantes de décroissance :

$$\boldsymbol{u}(\tilde{y}) = O(R^{-\alpha}) \qquad \boldsymbol{\sigma}(\tilde{y}) = O(R^{-1-\alpha}) \qquad \tilde{y} \in S_R, R \to +\infty \quad (4.52)$$

est gouverné par l'équation intégrale :

$$u_\gamma(\tilde{x}) + \int_{\partial D} \{[u_\alpha(\tilde{y}) - u_\alpha(\tilde{x})] T_\alpha^\gamma(\tilde{x}, \tilde{y}) - t_\alpha(\tilde{y}) U_\alpha^\gamma(\tilde{x}, \tilde{y})\} \, \mathrm{d}s_y = 0$$

Comme en trois dimensions, pour $\tilde{x} \notin \partial D$, la représentation intégrale de $\boldsymbol{u}(\tilde{x})$ a une forme identique que le domaine D soit borné ou non (seul le signe de la normale à ∂D change).

AUTRES SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES. La méthode présentée pour la solution de Kelvin permet de calculer d'autres solutions élémentaires bidimensionnelles à partir de leur contrepartie tridimensionnelle et s'applique aux contraintes planes, aux problèmes antiplans, au passage $3D \to 2D$ en dynamique,... Elle s'applique également à toute solution élémentaire tridimensionnelle définie pour un domaine E invariant par translation le long de $\boldsymbol{e}_3$ et des conditions aux limites (ou à l'infini) invariantes par translation également. On cherche encore la solution élémentaire bidimensionnelle à partir de (4.46) ; le problème d'intégrabilité dans (4.47) reste présent. Par exemple, la solution élémentaire pour le demi-plan avec surface libre (annexe 4.3, formule (4.67)) est obtenue par intégration suivant x_3 de la solution de Mindlin tridimensionnelle (condition de surface libre sur le plan $y_1 = 0$).

4.9 Exemples numériques

Nous reproduisons dans un but d'illustration quelques exemples numériques publiés, qui concernent des problèmes d'élastostatique bi- ou tridimensionnelle, résolus au moyen d'équations intégrales en déplacement du type (4.31).

CALCULS ÉLASTIQUES TRIDIMENSIONNELS (CETIM [6]). Les éléments de frontière sont utilisés pour des calculs de structures industrielles. La figure 4.9 montre le maillage d'un corps de pompe (234 éléments, 631 nœuds, 6 sous-régions) chargé par une pression interne très forte, un effort $\boldsymbol{F}$ très intense au niveau du congé d'appui du rotor et des effets de fond et moments de flexion $\boldsymbol{T}, \boldsymbol{M}$ sur les tuyauteries.

Les auteurs ont notamment comparé les valeurs du seuil de Von Misès dans une zone critique de la structure, fournies par le calcul tridimensionnel décrit ici et un calcul par éléments finis bidimensionnel (faisant l'approximation d'un solide de révolution), et trouvent un rapport de 1.15.

DÉFORMATIONS PLANES ET MAILLAGE ADAPTATIF (GUIGGIANI [9]). Cet exemple concerne une méthode de maillage adaptatif pour les problèmes élastostatiques en déformations planes. Par "maillage adaptatif", on entend un algorithme qui, pour un maillage (ici par éléments de frontière) donné et un chargement donné, calcule des indicateurs *a posteriori* d'erreur entre la solution obtenue par méthode numérique et la solution exacte, puis modifie le maillage par déplacement ou ajout de nœuds ("maillage h-adaptatif"), augmentation du degré des fonctions de forme (maillage "p-adaptatif") ou déplacement de nœuds (maillage "r-adaptatif"). Il s'agit en l'occurrence d'un algorithme de type "h-adaptatif" qui procède itérativement à la subdivision en deux nouveaux éléments ceux des éléments du maillage original en lesquels un critère d'erreur, fixé par l'utilisateur, est dépassé.

L'exemple classique de la plaque plane rectangulaire contenant un trou circulaire centré en extension uniforme (figure 4.10) y est traité. A partir d'un maillage initial de 20 nœuds (10 éléments à 3 nœuds), l'algorithme adaptatif a fourni un maillage final de 56 nœuds (figure 4.10). Les valeurs calculées des tractions normales à la frontière aux points A et E pour les 5 maillages successifs (figure 4.11) mettent en évidence le gain de précision apporté par le raffinement adaptatif (les résultats pour un raffinement uniforme apparaissent également, pour comparaison).

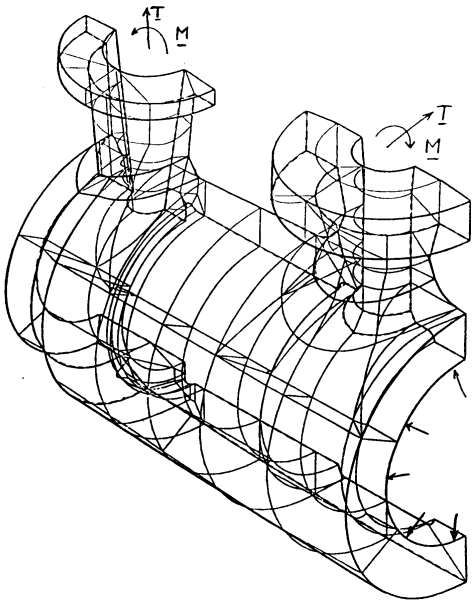

Figure 4.9: Corps de pompe : maillage par éléments de frontière et sollicitations (d'après [6]).

Flexion de plaques élastiques (Castro et coll. [7]). Les problèmes de flexion de plaques peuvent également être traités par éléments de frontière (Bezine [4], Stern [16]). Dans l'exemple présenté, une plaque en forme de L (figure 4.12), encastrée sur toute sa frontière, est soumise à un chargement p uniforme. Le maillage est constitué de 10 éléments de frontière (de type Hermite, garantissant la continuité C^1) par côté.

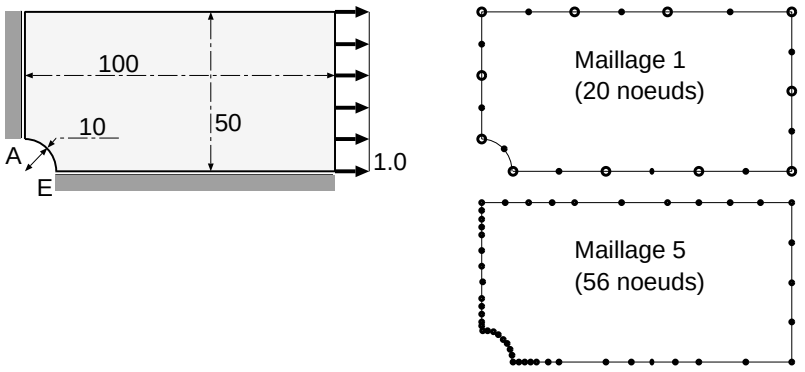

Figure 4.10: Plaque plane rectangulaire, contenant un trou circulaire centré en extension uniforme : description (à gauche), maillages initial (en haut à droite) et final (en bas à droite), d'après [9].

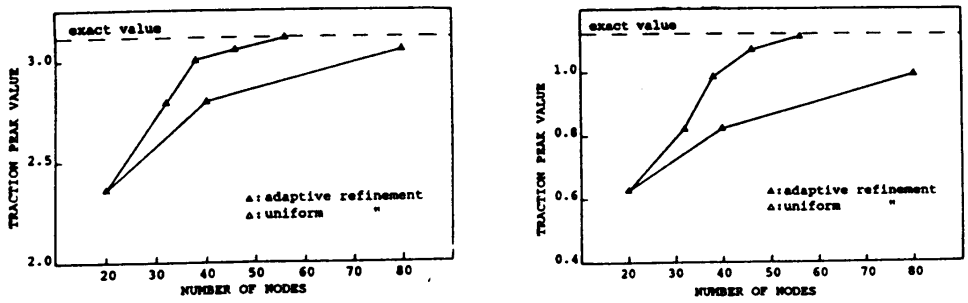

Figure 4.11: Plaque plane rectangulaire, contenant un trou circulaire centré en extension uniforme : traction normale aux points A et E (d'après [9]).

Les résultats obtenus pour le moment de flexion ainsi que la flèche, le long de la ligne 1-2 (figures 4.12) sont comparés avec ceux obtenus par éléments finis (48 éléments).

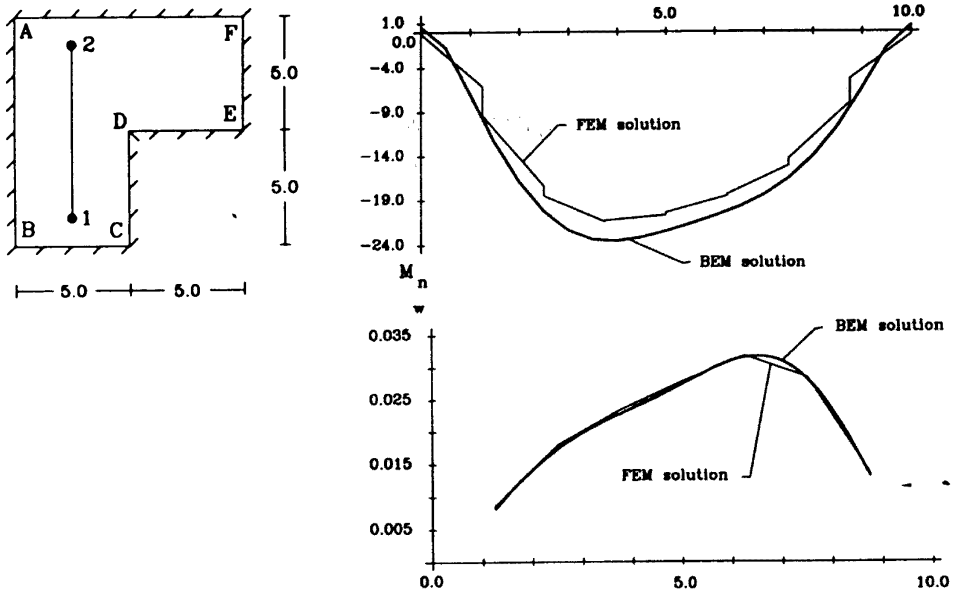

Figure 4.12: Plaque en forme de L : géométrie (à gauche), moment de flexion (en haut à droite) et déplacement vertical (en bas à droite) le long de 1-2 (d'après [7]).

Annexe 4.1 – Calcul de la solution de Kelvin tridimensionnelle

Une fois le déplacement de Kelvin $U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ calculé, le calcul des $\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ découle de l'application de la loi de Hooke isotrope (1.17). Plusieurs méthodes permettent de calculer le déplacement de Kelvin :

Passage à la limite. L'espace $E=\mathbb{R}^3$ est privé d'une cavité sphérique de rayon ε et de centre $\boldsymbol{x}$. Une distribution d'efforts de contact, de résultante $\boldsymbol{e}_k$, est appliquée sur cette dernière. Les champs de déplacement et de contraintes dans le massif infini sont calculés à partir de la solution générale en coordonnées sphériques (développements sur les harmoniques sphériques). Enfin, la limite $\varepsilon\to 0$, prise en maintenant la valeur $\boldsymbol{e}_k$ de la résultante, donne la solution de Kelvin (4.8), (4.9).

Représentation de Galerkin. En élasticité isotrope, le déplacement $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ peut être cherché sous la forme :

$$U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 2(1-\nu)G_{i,jj}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - G_{j,ji}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{4.53}$$

où les composantes du *tenseur de Galerkin* vérifient :

$$\Delta\Delta G_i^k = -\frac{1}{2\mu(1-\nu)}\delta_{ik}\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$$

et est donc proportionnel à la solution élémentaire $r/8\pi$ de l'opérateur bilaplacien, soit :

$$G_i^k = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} r\delta_{ik} \tag{4.54}$$

La représentation (4.53) conduit, tous calculs faits, à l'expression (4.8). Cette méthode ne se généralise pas à l'élasticité anisotrope.

Transformée de Fourier en espace. Cette méthode permet de traiter le cas de l'élasticité anisotrope générale, c'est pourquoi nous la reprenons en détail ci-après.

CALCUL DE LA SOLUTION DE KELVIN ANISOTROPE. On reprend la démarche et les notations de la section précédente. Un comportement élastique anisotrope quelconque est considéré, les coefficients $C_{ijk\ell}$ du tenseur de Hooke étant seulement astreints à vérifier les propriétés de symétrie (1.15) et de positivité

$$\forall \boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0} \qquad A_{ij}C_{ijk\ell}A_{k\ell}>0$$

imposées par la thermodynamique. La solution élémentaire en espace tridimensionnel infini vérifie :

$$C_{ijab}U_{a,bj}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\delta_{ik} = 0 \qquad \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3-\{\boldsymbol{x}\} \tag{4.55}$$

soit, après transformation de Fourier :

$$C_{ijab}\xi_b\xi_j\hat{U}_a^k = \frac{1}{(2\pi)^3}e^{-i\boldsymbol{\xi}.\boldsymbol{x}}$$

La matrice $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\eta})$, de coefficients $K_{ia}(\boldsymbol{\eta}) = C_{ijab}\eta_b\eta_j$, ainsi que son inverse $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$, sont symétriques. On a donc, puisque $C_{ijab}\xi_b\xi_j = \xi^2 K_{ia}(\boldsymbol{\eta})$:

$$\hat{U}_a^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i\xi_j x_j} \frac{1}{\xi^2} N_{ka}(\boldsymbol{\eta})$$

et la solution $U_a^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ est obtenue par transformée de Fourier inverse :

$$U_a^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \int_S e^{i\xi\eta_j(y_j-x_j)} N_{ka}(\boldsymbol{\eta}) d\omega d\xi$$

Remarquant que $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{K}(-\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{N}(-\boldsymbol{\eta})$ et que le changement de variable $\boldsymbol{\eta} \to -\boldsymbol{\eta}$ laisse S invariante, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&U_a^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\
&= \frac{1}{16\pi^3} \int_S \left\{ \int_0^{+\infty} e^{i\xi\eta_j(y_j-x_j)} N_{ka}(\boldsymbol{\eta}) d\omega d\xi + \int_0^{+\infty} e^{-i\xi\eta_j(y_j-x_j)} N_{ka}(-\boldsymbol{\eta}) d\omega \right\} d\xi \\
&= \frac{1}{16\pi^3} \int_S \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi\eta_j(y_j-x_j)} N_{ka}(\boldsymbol{\eta}) d\omega d\xi \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \int_S \delta(\eta_j(y_j-x_j)) e^{i\xi\eta_j(y_j-x_j)} N_{ka}(\boldsymbol{\eta}) d\omega d\xi \\
&= \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \delta(r\cos\varphi) N_{ka}(r\sin\varphi(\cos\boldsymbol{a}\theta_1 + \sin\boldsymbol{a}\theta_2) + r\cos\varphi\boldsymbol{a}_3)\sin\varphi d\phi \\
&= \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-r}^{r} \delta(u) N_{ka}(\sqrt{1-u^2}(\cos\boldsymbol{a}\theta_1 + \sin\boldsymbol{a}\theta_2) + u\boldsymbol{a}_3) du
\end{aligned}$$

L'expression du déplacement élémentaire de Kelvin pour un comportement élastique anisotrope quelconque est donc :

$$U_a^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} N_{ka}(\cos\boldsymbol{a}\theta_1 + \sin\boldsymbol{a}\theta_2) d\theta \tag{4.56}$$

L'explicitation de la formule ci-dessus, c'est-à-dire le calcul analytique de l'intégrale, n'est pas possible pour toute forme d'anisotropie.

Elasticité isotrope. Dans ce cas, on a, tous calculs faits :

$$K_{ka}(\boldsymbol{\eta}) = \mu\left[\delta_{ka} + \frac{1}{1-2\nu}\eta_a\eta_k\right] \qquad N_{ka}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\mu}\left[\delta_{ka} - \frac{1}{2(1-\nu)}\eta_a\eta_k\right]$$

et le déplacement de Kelvin est donné par :

$$U_a^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{8\pi^2\mu r}\left[2\pi\delta_{ka} - \frac{\pi}{2(1-\nu)}[(\boldsymbol{a}_1.\boldsymbol{e}_a)(\boldsymbol{a}_1.\boldsymbol{e}_k) + (\boldsymbol{a}_2.\boldsymbol{e}_a)(\boldsymbol{a}_2.\boldsymbol{e}_k)\right] \tag{4.57}$$

Remarquant enfin que $\boldsymbol{e_a}.\boldsymbol{e_k} = \delta_{ak} = (\boldsymbol{a_i}.\boldsymbol{e_a})(\boldsymbol{a_i}.\boldsymbol{e_k})$, on a, compte tenu de la définition de $\boldsymbol{a}_3$:

$$(\boldsymbol{a_1}.\boldsymbol{e_a})(\boldsymbol{a_1}.\boldsymbol{e_k}) + (\boldsymbol{a_2}.\boldsymbol{e_a})(\boldsymbol{a_2}.\boldsymbol{e_k}) = \delta_{ak} - \frac{(y_a-x_a)}{|y-x|}\frac{(y_k-x_k)}{|y-x|} = \delta_{ak} - r_{,a}r_{,k}$$

ce qui, reporté dans (4.57), conduit bien à l'expression (4.8) de la solution de Kelvin isotrope.

Anisotropie transverse. Willis [17] a traité ce cas, pour lequel tous les $C_{ijk\ell}$ sont nuls sauf :

$$\begin{aligned} &C_{1111} = C_{2222} = \alpha \quad C_{3333} = \beta \quad C_{2323} = C_{3131} = \gamma \\ &C_{1133} = C_{2233} = \gamma' - \gamma \quad C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2 = \alpha' \end{aligned}$$

$\boldsymbol{e}_3$ étant choisi comme axe de symétrie de l'anisotropie transverse (cinq coefficients indépendants $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma', \beta$). Les composantes du déplacement élémentaire de Kelvin pour l'élasticité anisotrope transverse sont données par :

$$U_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{C}{\pi r} \frac{(\alpha_3^2 - \alpha_2^2) h_{ki}(\alpha_1^2) + (\alpha_1^2 - \alpha_3^2) h_{ki}(\alpha_2^2) + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) h_{ki}(\alpha_3^2)}{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)(\alpha_3^2 - \alpha_1^2)} \tag{4.58}$$

avec

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \beta\gamma^2 \sin^6\theta (1 - A_1)(1 - A_2)(1 - A_3) \right\}^{-1} \\ h_{ik}(z) &= \frac{1}{D} N_{ik}((z-1)\cos, \theta - i(z-1), -(z+1)\sin)\theta \\ D &= (\alpha_1^2 - \alpha_1^{-2})(\alpha_2^2 - \alpha_2^{-2})(\alpha_3^2 - \alpha_3^{-2}) \\ N_{11}(\boldsymbol{\xi}) &= (\alpha'\xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \gamma\xi_3^2)(\gamma(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \beta\xi_3^2) - \gamma'^2 \xi_2^2 \xi_3^2 \\ N_{12}(\boldsymbol{\xi}) &= \gamma'^2 \xi_1 \xi_2 \xi_3^2 - (\alpha - \alpha')\xi_1\xi_2(\gamma(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \beta\xi_3^2) \\ N_{13}(\boldsymbol{\xi}) &= (\alpha - \alpha')\gamma'\xi_1\xi_2^2\xi_3 - \gamma'\xi_1\xi_3(\alpha'\xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \gamma\xi_3^2) \\ N_{22}(\boldsymbol{\xi}) &= (\alpha\xi_1^2 + \alpha'\xi_2^2 + \gamma\xi_3^2)(\gamma(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \beta\xi_3^2) - \gamma'^2 \xi_1^2 \xi_3^2 \\ N_{23}(\boldsymbol{\xi}) &= (\alpha - \alpha')\gamma'\xi_1^2\xi_2\xi_3 - \gamma'\xi_2\xi_3(\alpha\xi_1^2 + \alpha'\xi_2^2 + \gamma\xi_3^2) \\ N_{33}(\boldsymbol{\xi}) &= (\alpha'\xi_1^2 + \alpha\xi_2^2 + \gamma\xi_3^2)(\alpha\xi_1^2 + \alpha'\xi_2^2 + \gamma\xi_3^2) - (\alpha - \alpha')\xi_1^2\xi_2^2 \end{aligned}$$

où $\theta \in [0, \pi]$ désigne l'angle entre $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{e}_3$ et z_i est le zéro de valeur absolue < 1 du trinôme :

$$z^2 + 2B_i z + 1$$

avec

$$A_1 = \frac{\alpha'}{\gamma} \qquad A_2 = \frac{1}{2}\left[\chi + \left(\chi^2 - 4\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2}\right] \qquad A_3 = \frac{1}{2}\left[\chi - \left(\chi^2 - 4\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2}\right]$$

et

$$\chi = \frac{\gamma^2 + \alpha\beta - \gamma'^2}{\beta\gamma}$$

D'autres résultats sont mentionnés dans Mura [11].

Annexe 4.2 – Intégrale du vecteur contrainte de Kelvin

Intégrale du vecteur contrainte de Kelvin. On se propose de reformuler la résultante sur S du vecteur-contrainte de Kelvin, donnée par :

$$\begin{aligned} K_i^k(\boldsymbol{x}, S) &= \int_S T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \\ &= \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \int_S \left[(1-2\nu)(\delta_{ik} r_{,n} + n_k r_{,i} - n_i r_{,k}) + 3 r_{,i} r_{,k} r_{,n}\right] \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \end{aligned} \tag{4.59}$$

à l'aide d'intégrations par parties. En effet, l'identité (A.7) permet d'écrire :

$$\int_S (n_k r_i - n_i r_k)\, \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} = \int_S D_{ik} \frac{1}{r}\, \mathrm{d}S_y = e_{ikp} \int_{\partial j} \tau_p \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \tag{4.60}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \int_S r_{,i} r_{,k} r_{,n} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} &= \int_S r_{,i} r_{,p} D_{kp} \frac{1}{r}\, \mathrm{d}S_y + \int_S n_k r_{,i} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \\ &= e_{kpj} \int_{\partial S} r_{,i} r_{,p} \tau_j \frac{\mathrm{d}s_y}{r} + \int_S \frac{1}{r} D_{pk}(r_{,i} r_{,p})\, \mathrm{d}S_y + \int_S n_k r_{,i} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \end{aligned}$$

Compte tenu de :

$$\begin{aligned} D_{pk}(r_{,i} r_{,p}) &= n_p(r_{,ik} r_{,p} + r_{,i} r_{,pk}) - n_k(r_{,ip} r_{,p} + r_{,i} r_{,pp}) \\ &= \frac{1}{r}\left\{[\delta_{ik} - r_{,i} r_{,k}] r_{,n} + r_{,i} n_k - r_{,i} r_{,k} r_{,n} - 2 n_k r_{,i}\right\} \\ &= \frac{1}{r}\left\{[\delta_{ik} - 2 r_{,i} r_{,k}] r_{,n} - n_k r_{,i}\right\} \end{aligned}$$

on obtient :

$$3 \int_S r_{,i} r_{,k} r_{,n} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} = e_{kpj} \int_{\partial S} r_{,i} r_{,p} \tau_j \frac{\mathrm{d}s_y}{r} + \int_S r_{,n} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \tag{4.61}$$

Le report de (4.60), (4.61) dans (4.59) conduit à reformuler $K_i^k(\boldsymbol{x}, S)$ comme :

$$\boxed{K_i^k(\boldsymbol{x}, S) = \frac{e_{ijp}}{8\pi(1-\nu)} \int_{\partial S} \left[r_{,j} r_{,k} - (1-2\nu)\delta_{jk}\right] \tau_p \frac{\mathrm{d}s_y}{r} - \delta_{ik} \frac{\omega(\boldsymbol{x}, S)}{4\pi}} \tag{4.62}$$

Si S est fermée et $\boldsymbol{x} \notin S$, les intégrales de contour disparaissent tandis que $\omega(\boldsymbol{x}, S) = 4\pi$ ($\boldsymbol{x}$ à l'intérieur de S, $\boldsymbol{n}$ étant la normale extérieure) ou $\omega(\boldsymbol{x}, S) = 0$ ($\boldsymbol{x}$ à l'extérieur de S). On retrouve donc l'identité (4.7).

Divergence de l'intégrale quand $\boldsymbol{x} \in S$. Les intégrales de contour, invariantes par homothétie de centre $\boldsymbol{x}$ sur le contour ∂S, dépendent cependant de la *forme* de ∂S. Ceci signifie notamment que, si $\boldsymbol{x} \in S$, $K_i^k(\boldsymbol{x}, S)$ ne peut pas être définie comme limite de $K_i^k(\boldsymbol{x}, S - s_\varepsilon(\boldsymbol{x}))$ pour un voisinage évanouissant $s_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ de forme quelconque, et donc que la reformulation (4.62) ne donne pas $K_i^k(\boldsymbol{x}, S)$ comme une intégrale convergente, malgré le caractère convergent de l'intégrale de surface (angle solide).

Cas particulier : S s'appuie sur une courbe plane. Si la courbe ∂S est plane et $\boldsymbol{x}$ est situé dans le plan de ∂S, elle admet un paramétrage à l'aide des coordonnées polaires (r, θ) de centre $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + r(\theta)\boldsymbol{e}_r$$

et on peut remarquer que :

$$\boldsymbol{m}\tau \, \mathrm{d}s_y = [r'(\theta)\boldsymbol{e}_r + r(\theta)\boldsymbol{e}_\theta]d\theta$$
$$e_{ijp} r_{,j} \tau_{,p} \frac{\mathrm{d}s_y}{r} = (\boldsymbol{e_r} \wedge \boldsymbol{e_\theta}).\boldsymbol{e}_i d\theta = n_i(\boldsymbol{x})$$

en notant $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ la normale unitaire au plan de ∂S. Par conséquent :

$$e_{ijp} \int_{\partial S} r_{,j} r_{,k} \tau_p \frac{\mathrm{d}s_y}{r} = n_i(\boldsymbol{x}) \int_0^{2\pi} r_{,k} d\theta = n_i(\boldsymbol{x}) \int_0^{2\pi} (\boldsymbol{e}_r)_k d\theta = 0 \tag{4.63}$$

Finalement, pour ce cas particulier, l'expression (4.62) devient :

$$K_i^k(\boldsymbol{x}, S) = -\delta_{ik} \frac{\omega(\boldsymbol{x}, S)}{4\pi} - \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} e_{ikp} \int_{\partial S} \tau_p \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \tag{4.64}$$

La valeur de l'intégrale curviligne qui subsiste dépend de la *forme* de la courbe plane ∂S. En effet :

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{\tau} \frac{\mathrm{d}s_y}{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r'}{r} \boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_\theta \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r'}{r} \boldsymbol{e}_r d\theta$$

Si ∂S est un cercle de centre $\boldsymbol{x}$, on a $r'(\theta) = 0$ et l'intégrale ci-dessus est nulle. Cela permet de montrer la formule classique :

$$\int_S^\star T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = -\frac{\omega(\boldsymbol{x}, S)}{4\pi} \delta_{ik} \tag{4.65}$$

où $\int_S^\star$ désigne l'intégrale prise au sens des valeurs principales de Cauchy. D'autre part, si ∂S est un cercle de rayon ε et $\boldsymbol{x}$ est situé à une distance $k\varepsilon$, $0 < k < 1$, du centre dans la direction $\boldsymbol{a}$ unitaire, on trouve tous calculs faits :

$$\int_{\partial S} \boldsymbol{\tau} \frac{\mathrm{d}s_y}{r} = \frac{4}{k}[K(k) - E(k)](\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{a})$$

où $K(k), E(k)$ sont les intégrales elliptiques de première et deuxième espèce [1]. Cet exemple illustre le fait que les termes de contour dans (4.62) dépendent de la forme de ∂S ; en particulier, $K(k) - E(k) = \pi k^2 + o(k^2)$.

Annexe 4.3 – Solution élémentaire pour le demi-espace

Due initialement à Mindlin, elle est donnée par exemple dans Mura [11]. On considère le demi-espace $E = \{(y_1, y_2, y_3) \mid y_3 \geq 0\}$, de frontière $\partial E = \{y_3 = 0\}$. On pose

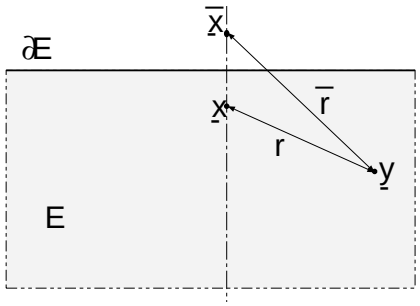

Figure 4.13: Demi-espace : notations géométriques.

$\tilde{x} = (x_1, x_2, -x_3)$ ($\tilde{x}$ symétrique du point-source $\boldsymbol{x}$ par rapport à ∂E) et $\bar{r} = |\boldsymbol{y} - \tilde{x}|$. On a donc :

$$r_{,\alpha} = \frac{y_\alpha - x_\alpha}{r} \qquad \bar{r}_{,\alpha} = \frac{y_\alpha - x_\alpha}{\bar{r}} \qquad r_{,3} = \frac{y_3 - x_3}{r} \qquad \bar{r}_{,3} = \frac{y_3 + x_3}{\bar{r}}$$

La solution élémentaire $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ vérifiant (4.2) ainsi qu'une condition de surface libre :

$$T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \qquad (y_3 = 0,\ i = 1, 2, 3)$$

est donnée par les expressions suivantes, dans lesquelles les indices i, k ne prennent que les valeurs $1, 2$:

$$\begin{aligned}
U_i^k &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{\kappa}{r}\delta_{ik} + \frac{1}{\bar{r}}\delta_{ik} + \frac{r_{,i}r_{,k}}{r} + \kappa\frac{\bar{r}_{,i}\bar{r}_{,k}}{\bar{r}} + \frac{2x_3x_3'}{\bar{r}^3}\left[\delta_{ik} - 3\bar{r}_{,i}\bar{r}_{,k}\right] \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\chi}{\bar{r}(1+\bar{r}_{,3})}\left[\delta_{ik} - \frac{\bar{r}_{,i}\bar{r}_{,k}}{1+\bar{r}_{,3})}\right] \right\} \\
U_3^k &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{r_{,3}r_{,k}}{r} + \kappa\frac{\bar{r}_{,3}\bar{r}_{,k}}{\bar{r}} - \frac{6x_3x_3'}{\bar{r}^3}\bar{r}_{,3}\bar{r}_{,k} + \chi\frac{\bar{r}_{,k}}{\bar{r}(1+\bar{r}_{,3})} \right\} \\
U_i^3 &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{r_{,i}r_{,3}}{r} + \kappa\frac{\bar{r}_{,i}\bar{r}_{,3}}{\bar{r}} + \frac{6x_3x_3'}{\bar{r}^3}\bar{r}_{,i}\bar{r}_{,3} - \chi\frac{\bar{r}_{,i}}{\bar{r}(1+\bar{r}_{,3}} \right\} \\
U_3^3 &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left\{ \frac{\kappa}{r} + \frac{1+\chi}{\bar{r}} + \frac{r_{,3}^2}{r} + \kappa\frac{\bar{r}_3\bar{r}_3}{\bar{r}} - \frac{2x_3x_3'}{\bar{r}^3}\left[1 - 3\bar{r}_{,3}\bar{r}_{,3}\right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

avec $\kappa = 3 - 4\nu$, $\chi = 4(1-\nu)(1-2\nu)$. Commentaires :

- Dans le cas particulier $x_3 = 0$ (force ponctuelle exercée à la surface du demi-espace), $U_i^3(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ donné par (4.66) redonne la solution de Boussinesq ($k = 3$: force ponctuelle normale à la surface du demi-espace) et la solution de Cerruti ($k = 1, 2$: force ponctuelle normale à la surface du demi-espace).

- La superposition des solutions de Kelvin pour les points source $\boldsymbol{x}$ et $\tilde{x}$ n'est pas égale à la solution de Mindlin (4.66) : elle ne résulte pas, comme la solution élémentaire du laplacien pour le demi-espace, de l'application de la méthode des images.
- L'invariance par translation a lieu seulement suivant les directions (y_1, y_2), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= U_k^i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad (i,k=1,2) \\ U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= U_i^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \qquad (i,k=1,2,3 \quad x_3=y_3) \end{aligned}$$

- Le déplacement élémentaire (4.66) est singulier comme $|y-x|^{-1}$ pour $\boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{x}$, et conduit donc à un tenseur des contraintes élémentaires singulier comme $|y-x|^{-2}$.
- Pour tout point-source intérieur $\boldsymbol{x} \notin \partial E$, les parties singulières de la solution (4.66) et de la solution de Kelvin (4.8) sont égales.

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE POUR LE DEMI-PLAN $E = \{(y_1, y_3), y_3 \geq 0\}$. Elle peut être obtenue par intégration de la solution tridimensionnelle (4.66) entre $x_2 = -\infty$ et $x_2 = +\infty$ selon le principe exposé en section 4.8 pour la solution de Kelvin. Son expression pour les déformations planes (cf. par exemple Brebbia, Telles, Wrobel [5]) est :

$$\begin{aligned} U_1^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left\{-\kappa \mathrm{Log} r - [1+\chi]\mathrm{Log}\bar{r} + r_{,1}^2 + \kappa\bar{r}_{,1}^2 + \frac{2x_3x_3'}{\bar{r}^2}\left[1-2\bar{r}_{,1}^2\right]\right\} \\ U_3^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left\{r_{,3}r_{,1} + \kappa\bar{r}_{,3}\bar{r}_{,1} - \frac{4x_3x_3'}{\bar{r}^2}\bar{r}_{,3}\bar{r}_{,1} + \chi\theta\right\} \\ U_1^3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left\{r_{,3}r_{,1} + \kappa\bar{r}_{,3}\bar{r}_{,1} + \frac{4x_3x_3'}{\bar{r}^2}\bar{r}_{,3}\bar{r}_{,1} - \chi\theta\right\} \\ U_3^3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left\{-\kappa \mathrm{Log} r - [1+\chi]\mathrm{Log}\bar{r} + r_{,3}^2 + \kappa\bar{r}_3^2 - \frac{2x_3x_3'}{\bar{r}^2}\left[1-2\bar{r}_{,3}^2\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.67}$$

avec $\kappa = 3-4\nu$, $\chi = 4(1-\nu)(1-2\nu)$, les définitions pour $r, \bar{r}$ et leurs dérivées étant les mêmes que pour le cas tridimensionnel, en prenant $x_2 = x_2' = y_2 = 0$; $\theta = \tan^{-1}(\bar{r}_{,1}/\bar{r}_{,3})$.

Annexe 4.4 – Solution élémentaire pour deux demi-espaces joints

On considère un massif élastique infini E formé de deux demi-espaces isotropes E_1, E_2 (constantes élastiques $\mu_{1,2}, \nu_{1,2}$), limités par le plan $y_3 = 0$ (le domaine 1 occupe $y_3 \leq 0$) et joints (continuité de $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}$ au passage de l'interface). Supposons la force ponctuelle appliquée en $\boldsymbol{x} \in E_1$. On introduit, comme en annexe 4.3, le symétrique $\tilde{x}$ de $\boldsymbol{x}$ par rapport au plan $y_3 = 0$ et les notations $r, \bar{r}, \ldots$. La solution élémentaire $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ pour cette situation, due à Rongved [14], est donnée en termes des potentiels

de Neuber-Papkovich $\boldsymbol{m}\phi, \boldsymbol{m}\psi$:

$$U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2\mu}\left[(\kappa+1)\Phi_{ik} - (y_j\Phi_{jk}+\psi_k)_{,i}\right]$$

avec $\kappa = 3-4\nu$. Pour $\boldsymbol{y} \in E_1$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= \Phi_{22} = \frac{1}{2\pi(\kappa_1+1)}\left(\frac{1}{r}+\frac{S}{\bar{r}}\right)\\
\Phi_{21} &= \Phi_{12} = \Phi_{13} = \Phi_{23} = 0\\
\Phi_{3k} &= \frac{1}{2\pi(\kappa_1+1)}\left(\frac{(A\kappa_1-S)\bar{r}_{,k}}{\bar{r}(1+\bar{r}_{,3})} - \frac{2Ax_3\bar{r}_{,k}}{\bar{r}^2}\right)\\
\Phi_{33} &= \frac{1}{2\pi(\kappa_1+1)}\left(\frac{1}{r}+\frac{A\kappa_1}{\bar{r}} - \frac{2Ax_3\bar{r}_{,3}}{\bar{r}^2}\right)\\
\psi_k &= \frac{1}{2\pi(\kappa_1+1)}\left(-\frac{(A\kappa_1^2+B2S\kappa_1)r_{,k}}{2\bar{r}(1+\bar{r}_{,3})} + \frac{(A\kappa_1-S)x_3\bar{r}_{,k}}{\bar{r}(1+\bar{r}_{,3})}\right)\\
\psi_3 &= \frac{1}{2\pi(\kappa_1+1)}\left(-\frac{x_3}{r} - \frac{A\kappa_1 x_3}{\bar{r}} + \frac{1}{2}(A\kappa_1^2-B)\mathrm{Log}(\bar{r}(1+\bar{r}_{,3})\right)
\end{aligned}$$

et pour $\boldsymbol{y} \in E_2$:

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= \Phi_{22} = \frac{1}{2\pi(\kappa_1+1)}\frac{T}{r}\\
\Phi_{21} &= \Phi_{12} = \Phi_{13} = \Phi_{23} = 0\\
\Phi_{3k} &= -\frac{1-B-T}{2\pi(\kappa_1+1)}\frac{r_{,k}}{r(1-r_{,3})}\\
\Phi_{33} &= \frac{1}{2\pi(\kappa_1+1)}\frac{1-B}{r}\\
\psi_k &= \frac{1}{2\pi(\kappa_1+1)}\left(-\frac{((A-1)\kappa_1+(2T+B-1)\kappa_2)r_{,k}}{2r(1-r_{,3})} + \frac{(1-A-T)x_3r_{,k}}{r(1-r_{,3})}\right)\\
\psi_3 &= \frac{1}{2\pi(\kappa_1+1)}\left(\frac{(A-1)x_3}{r} + \frac{1}{2}\left[(1-A)\kappa_1+(1-B)\kappa_2\right]\mathrm{Log}(r(1-r_{,3})\right)
\end{aligned}$$

avec $k = 1, 2$ et en posant :

$$A = \frac{1-\Gamma}{1+\kappa_1\Gamma} \qquad B = \frac{\kappa_2-\kappa_1\Gamma}{\kappa_2+\Gamma} \qquad S = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \qquad T = \frac{2(\kappa_1+1)\Gamma}{(\kappa_2+1)(1+\Gamma)} \qquad \Gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

Références bibliographiques

[1] Abramowitz, M., Stegun, I. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York (1972).

[2] Benitez, F. G., Rosakis, A. J. Three-dimensional elastostatics of a layer and a layered medium. *J. Elast.*, **18**, 3–50 (1987).

[3] BETTESS, P. *Infinite elements*. Penshaw Press (1992).

[4] BEZINE, G. Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mech. Res. Commun.*, **5**, 197–206 (1978).

[5] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L. C. *Boundary element techniques*. Springer-Verlag (1984).

[6] C. E. T. I. M. , (CENTRE TECHNIQUE DES INDUSTRIES MÉCANIQUES). Application de la méthode des équations intégrales à la mécanique. Rapport interne, CETIM, Senlis, France (1976).

[7] CASTRO, L. M., PINHO, J., PARREIRA, P. Solving plate problems using boundary element method. In C.A. Brebbia (ed.), *Boundary Elements technology VI*, pp. 215–225. Comp. Mech. Publ., Southampton (1991).

[8] DANGLA, P. *Couplage éléments finis – équations intégrales en élastodynamique et interaction sol-structure*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France (1989).

[9] GUIGGIANI, M. Non-residual type accuracy estimates and adaptive refinement in Boundary Element analysis. In C.A. Brebbia and N. G. Zamani (ed.), *Boundary element techniques : applications in engineering.*, pp. 323–340. Comp. Mech. Publ., Southampton (1989).

[10] GUIGGIANI, M., KRISHNASAMY, G., RUDOLPHI, T. J., RIZZO, F. J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *ASME J. Appl. Mech.*, **59**, 604–614 (1992).

[11] MURA, T. *Micromechanics of Defects in Solids*. Martinus Nijhoff (1982).

[12] PATTERSON, C., SHEIKH, M. A. Interelement continuity in the boundary element method. In C.A. Brebbia (ed.), *Topics in boundary element research.*, vol. 1. Springer-Verlag (1984).

[13] PHAM, T. L. *Tenseurs de Green et de Neumann*. Thèse de Doctorat, (1966).

[14] RONGVED, L. Force interior to one of two joined semi-infinite solids. In *Proc. 2nd. Midwestern Conf. Solid Mechanics.*, pp. 1–13 (1955).

[15] SALENCON, J. *Mécanique des milieux continus (vols. 1,2,3)*. Presses de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (2004).

[16] STERN, M. A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *Int. J. Solids Struct.*, **15**, 769–782 (1979).

[17] WILLIS, J. R. The elastic interaction energy of dislocation loops in anisotropic media. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **17**, 157–174 (1965).

5

Représentations de gradients ou contraintes à la frontière

Les chapitres précédents ont montré que les équations intégrales en potentiel (2.20) ou en déplacement (4.31), associées aux formules de représentation intérieure appropriées, permettent la résolution numérique de problèmes aux limites. Toutefois, quand le point d'observation $\boldsymbol{x}$ est situé sur la frontière du domaine, ces équations ne permettent pas directement le calcul du gradient complet de potentiel ou de déplacement, les formules de représentation intérieure du gradient ne pouvant pas être évaluées pour $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ en raison de l'apparition de singularités non intégrables ; seuls le flux ou le vecteur contrainte sont facilement accessibles. Or la résolution de certains types de problèmes, dont un aperçu est donné ci-après, nécessite de disposer d'équations intégrales donnant la valeur du gradient complet de la variable primaire (potentiel ou déplacement) aux points de la frontière du domaine d'étude. C'est l'objet de ce chapitre.

Evaluation de contraintes tangentielles sur la frontière. Une méthode d'évaluation du gradient de potentiel ou du tenseur des contraintes complets reposant sur la dérivation tangentielle de (u, q) ou $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$ a été présentée en section 4.7. Toutefois, des travaux récents (Guiggiani [2]) mettent en évidence la mauvaise précision et les limitations de cette technique et montrent clairement la supériorité de l'utilisation d'une formule de représentation du tenseur des contraintes à la frontière. Le calcul numérique de cette dernière doit bien sûr être fait avec le plus grand soin.

Ecrans, fissures. Un domaine Ω thermiquement conducteur contient un écran isolant, c'est-à-dire une surface Γ à bord, intérieure à Ω, sur chacune des faces de laquelle le flux thermique q est nul : $q^{\pm} = 0$ sur $\Gamma^{\pm}$, la température u pouvant présenter un saut $\psi = u^{+} - u^{-}$ à travers Γ. Supposant pour fixer les idées un flux externe imposé : $q = q^{D}$ sur la frontière extérieure $\partial\Omega$, l'équation intégrale (2.20) s'écrit :

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - q^{D}(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y + \int_{\Gamma} \psi(\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = 0$$

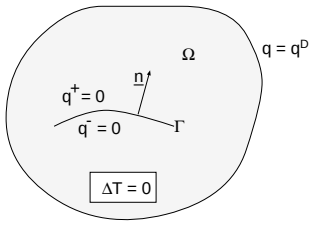

Figure 5.1: Milieu conducteur et écran isolant.

où on a choisi sur Γ la normale unitaire dirigée du côté de Γ^+. En l'absence d'écran et pour la même donnée q^D, la température u_0, continue à travers Γ, vérifierait l'équation :

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ [u_0(\boldsymbol{y}) - u_0(\boldsymbol{x})] H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q^D(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y + \int_\Gamma \psi(\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = 0$$

de sorte que la différence $\Delta u = u - u_0$ vérifie (pour $\boldsymbol{x}$ non situé sur Γ) :

$$\int_{\partial\Omega} [\Delta u(\boldsymbol{y}) - \Delta u(\boldsymbol{x})] H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y + \int_\Gamma [\Delta u^+ - \Delta u^-](\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = 0$$

On constate que cette dernière équation d'inconnue Δu est homogène (second membre nul) et admet de ce fait une infinité de solutions. L'équation intégrale (2.20) ne permet donc pas la résolution pratique du problème thermique avec écran ; elle *dégénère* en présence de surfaces de discontinuité de u. Les mêmes équations, et donc les mêmes conclusions, s'appliquent par exemple aux écoulements potentiels dans un domaine fluide Ω contenant un écran rigide imperméable infiniment mince Γ.

L'étude d'un massif élastique infini contenant une fissure Γ de lèvres $\Gamma^\pm$, problème très classique, conduit à une situation de même nature. On suppose par exemple que des efforts de contact $\pm\boldsymbol{t}^D$ sont appliqués sur les lèvres. La formule de représentation (4.20) du déplacement $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ en un point d'observation non situé sur la fissure donne :

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \left\{ \psi_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \phi_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y$$

avec $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-$ et $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{t}^+ + \boldsymbol{t}^-$. Cette formule peut également être écrite, sous forme régularisée, pour $\boldsymbol{x} \in \Gamma$:

$$\frac{1}{2}[u_k^+ + u_k^-](\boldsymbol{x}) = \psi_i(\boldsymbol{x}) K_i^k(\boldsymbol{x},\Gamma) + \int_\Gamma \left\{ [\psi_i(\boldsymbol{y}) - \psi_i(\boldsymbol{x})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \phi_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y$$

L'équation intégrale ci-dessus n'est pas modifiée si on change $\boldsymbol{t}^\pm$ en $\boldsymbol{t}^\pm \pm \boldsymbol{t}^0$; en particulier dans le cas pratique important du *chargement symétrique* on a $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{0}$. On observe donc un phénomène de dégénérescence de l'équation intégrale similaire à celui présenté par l'écran thermique.

EQUATIONS INTÉGRALES INDIRECTES. L'écriture des équations indirectes pour le problème de Neumann nécessite le calcul du gradient d'un potentiel de simple ou double couche en un point de la frontière.

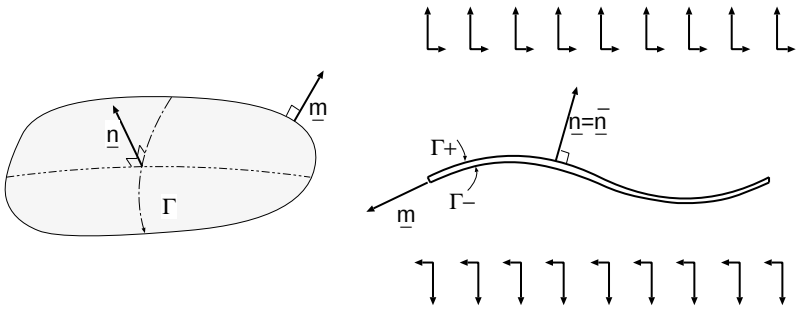

Figure 5.2: Fissure dans un massif infini chargé symétriquement.

INDICATEURS D'ERREUR. Considérons le problème de Neumann intérieur (flux donné $q = q^D$ sur $\partial\Omega$) pour l'équation de Laplace. Une fois l'équation intégrale (2.20) résolue numériquement, on peut se poser le problème du calcul d'un *indicateur d'erreur* a posteriori sur la solution $u\ |_{\partial\Omega}$ obtenue. On peut par exemple souhaiter comparer, comme Ingber et Mitra [6], les flux q^D donné et $q(\boldsymbol{x})$ calculé à partir de la solution u, idéalement (pour une résolution numérique en u du problème de Neumann parfaite) égaux en tout point $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. Une fonctionnelle d'écart J :

$$J = \int_{\partial\Omega} \left|q - q^D\right|^2 \,\mathrm{d}S = \sum_e \int_{E^{(e)}} \left|q - q^D\right|^2 \,\mathrm{d}S = \sum_e J_e$$

décomposable en termes J_e associés aux éléments de frontière, qui jouent le rôle d'indicateurs locaux d'erreur, est ainsi définie. Son calcul pratique nécessite donc celui des valeurs de q sur $\partial\Omega$ par une formule de représentation.

5.1 Définition par passage à la limite

On considère un champ u solution de l'équation de Laplace : $\Delta u = 0$ dans un domaine Ω. La représentation intégrale de $u_{,i}(\boldsymbol{x})$ ($\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$) est obtenue par dérivation de la formule (2.14), soit[1] :

$$\kappa u_{,i}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \{q(\boldsymbol{y})G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{y})G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})\} \,\mathrm{d}S_y \tag{5.1}$$

G étant une solution élémentaire quelconque compatible avec Ω. Les termes $G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ et $G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ étant singuliers comme $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-2}$ et $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-3}$ respectivement, donner un sens à la formule ci-dessus quand $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ nécessite une technique de régularisation plus complexe que celle utilisée pour l'équation intégrale (2.20).

On reprend la méthode de passage à la limite de la section 4.4 et les notations correspondantes : voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = v_\varepsilon$ de $\boldsymbol{x}$ de diamètre $\leq \varepsilon$, domaine $\Omega_\varepsilon = \Omega - v_\varepsilon$ de frontière $\partial\Omega_\varepsilon = (\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon$ (avec $s_\varepsilon = \Omega \cap \partial v_\varepsilon$, $e_\varepsilon = \partial\Omega \cap v_\varepsilon$). La

[1] On rappelle que, par convention, $()_{,i}$ et $()_{,\bar{\imath}}$ désignent les dérivées par rapport à y_i et x_i respectivement de fonctions $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$

représentation intégrale du gradient de u est cherchée comme limite pour $\varepsilon \to 0$ de la formule ci-dessus prise pour le domaine Ω_ε, soit :

$$0 = \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} \{q(\boldsymbol{y}) G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{y}) G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y \tag{5.2}$$

Deux variantes seront examinées : régularisation au second ordre (section 5.2) ou intégration par parties suivie par une régularisation au premier ordre (section 5.3).

5.2 Régularisation au second ordre

Elle repose sur une reformulation de (5.2) au moyen d'une identité auxiliaire. En effet, tout potentiel $u^\star$ affine :

$$u^\star = u_0 + a_i(y_i - x_i) \qquad (u_0, \boldsymbol{a}) : \text{constantes arbitraires} \tag{5.3}$$

est harmonique : $\Delta u^\star = 0$, et vérifie donc (5.2), soit :

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} a_a n_a(\boldsymbol{y}) G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ & - \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} [u_0 + a_a(y_a - x_a)] G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{5.4}$$

Prendre les valeurs particulières $\{u_0, \boldsymbol{a}\} = \{u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})\}$ dans (5.4) et retrancher membre à membre l'équation obtenue de (5.2) donne la relation :

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} [q(\boldsymbol{y}) - u_{,a}(\boldsymbol{x}) n_a(\boldsymbol{y})] G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ & - \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x}) - u_{,a}(\boldsymbol{x})(y_a - x_a)] G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{5.5}$$

dans laquelle on étudie la limite $\varepsilon \to 0$. Faisons sur u l'hypothèse de régularité $u \in C^{1,\alpha}$ en $\boldsymbol{x}$. Celle-ci entraîne :

$$\exists (C > 0, \alpha > 0) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} |u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x}) - u_{,a}(\boldsymbol{x})(y_a - x_a)| & \leq & C \, |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{1+\alpha} \\ |q(\boldsymbol{y}) - u_{,a}(\boldsymbol{x}) n_a(\boldsymbol{y})| & \leq & C \, |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{1+\alpha} \end{array} \right. \tag{5.6}$$

Examinons alors séparément les intégrales sur s_ε et sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$ dans (5.5).

Intégrales sur s_ε. Puisque $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \sim \varepsilon$, $\mathrm{d}S_y \sim \varepsilon^2 d\omega$ (ω : angle solide vu depuis $\boldsymbol{x}$), l'hypothèse (5.6) entraîne :

$$\begin{aligned} & \int_{s_\varepsilon} [q(\boldsymbol{y}) - u_{,a}(\boldsymbol{x}) n_a(\boldsymbol{y})] G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = O(\varepsilon^\alpha) \\ & \int_{s_\varepsilon} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x}) - u_{,a}(\boldsymbol{x})(y_a - x_a)] G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = O(\varepsilon^\alpha) \end{aligned}$$

et les intégrales sur s_ε tendent vers 0 avec ε.

Intégrales sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$. Les deux intégrands de (5.5) se comportent en vertu de (5.6) comme $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{\alpha-2}$ pour $\boldsymbol{y}$ proche de $\boldsymbol{x}$, et sont donc intégrables sur $\partial\Omega$. Les deux intégrales sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$ sont convergentes pour $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon}[q(\boldsymbol{y})-u_{,a}(\boldsymbol{x})n_a(\boldsymbol{y})]G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\
&\qquad=\int_{\partial\Omega}[q(\boldsymbol{y})-u_{,a}(\boldsymbol{x})n_a(\boldsymbol{y})]G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon}[u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})-u_{,a}(\boldsymbol{x})(y_a-x_a)]G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\
&\qquad=\int_{\partial\Omega}[u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})-u_{,a}(\boldsymbol{x})(y_a-x_a)]G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}$$

Représentation intégrale du gradient. L'analyse ci-dessus montre que le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ dans (5.5) mène à la relation :

$$\begin{aligned}
0=&\int_{\partial\Omega}[q(\boldsymbol{y})-u_{,a}(\boldsymbol{x})n_a(\boldsymbol{y})]G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\
&-\int_{\partial\Omega}[u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})-u_{,a}(\boldsymbol{x})(y_a-x_a)]G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}\tag{5.7}$$

où n'interviennent que des intégrales faiblement singulières, convergentes. On préfère toutefois reformuler l'équation ci-dessus en procédant aux réarrangements suivants :

$$\begin{aligned}
&u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})-u_{,a}(\boldsymbol{x})(y_a-x_a)\\
&=[u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})-D_au(\boldsymbol{x})(y_a-x_a)]-q(\boldsymbol{x})n_a(\boldsymbol{x})(y_a-x_a)\\
&q(\boldsymbol{y})-u_{,a}(\boldsymbol{x})n_a(\boldsymbol{y})\\
&=[q(\boldsymbol{y})-q(\boldsymbol{x})]-u_{,a}[n_a(\boldsymbol{y})-n_a(\boldsymbol{x})]
\end{aligned}$$

où $D_au = u_{,a} - n_aq$ est la partie tangentielle de la dérivée partielle $u_{,a}$ (annexe A). L'équation (5.7) devient ainsi :

$$\begin{aligned}
A_{ia}(\boldsymbol{x})u_{,a}(\boldsymbol{x})=&\int_{\partial\Omega}[q(\boldsymbol{y})-q(\boldsymbol{y})]G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\
&-\int_{\partial\Omega}[u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})-D_au(\boldsymbol{x})(y_a-x_a)]G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}\tag{5.8}$$

le terme libre $A_{ia}(\boldsymbol{x})$, qui ne dépend que du domaine Ω, étant donné par :

$$\begin{aligned}
A_{ia}(\boldsymbol{x})=&\int_{\partial\Omega}[n_a(\boldsymbol{y})-n_a(\boldsymbol{x})]G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\
&-n_a(\boldsymbol{x})n_b(\boldsymbol{x})\int_{\partial\Omega}(y_b-x_b)G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}\tag{5.9}$$

Ces équations donnent donc une représentation intégrale du gradient $\boldsymbol{\nabla}u(\boldsymbol{x})$ en un point $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ en fonction des quantités :

$$u(\boldsymbol{y})-u(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\nabla}_S u(\boldsymbol{x}).(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \qquad\qquad q(\boldsymbol{y})-q(\boldsymbol{x})$$

qui ne dépendent que des valeurs prises par (u, q) sur $\partial\Omega$ (seule la partie tangentielle $\boldsymbol{\nabla}_S u$ de $\boldsymbol{\nabla} u$ intervient sous le signe intégral). Leur validité demande une régularité $C^{1,\alpha}$ au moins de u en $\boldsymbol{x}$. De plus, les intégrales définissant le terme libre A_{ia} ne sont convergentes que si $\partial\Omega$ est régulière en $\boldsymbol{x}$, et plus précisément sous réserve d'une régularité $C^{0,\alpha}$ au moins de la normale en $\boldsymbol{x}$:

$$\exists(C,\alpha) \qquad |\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})| \leq |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{\alpha} \tag{5.10}$$

Enfin, le calcul effectif de $\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})$ par la formule (5.8) se présente comme un système linéaire carré sur les 3 inconnues scalaires $u_{,a}$ et suppose donc l'inversibilité de la matrice $A_{ia}(\boldsymbol{x})$.

Le résultat (5.8–5.9) est applicable quelle que soit la solution élémentaire $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ considérée. Il permet le calcul du gradient complet $\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})$ en $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ connaissant les valeurs prises sur $\partial\Omega$ par (u, q). Ces dernières résultent par exemple de la résolution de l'équation intégrale (2.20).

5.3 Intégration par parties et régularisation au premier ordre

Si la solution élémentaire pour le milieu infini, $G = 1/4\pi r$, est utilisée, on peut mettre à profit la propriété (2.9) d'échange des dérivées par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$:

$$G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

pour reformuler (5.2) comme :

$$0 = \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} \{q(\boldsymbol{y}) G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{y}) G_{,ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y \tag{5.11}$$

On procède ensuite à une intégration par parties, valable pour toute surface *fermée* S ne contenant pas $\boldsymbol{x}$. En effet :

$$\int_S u(\boldsymbol{y}) G_{,ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = \int_S u(\boldsymbol{y}) [D_{ji} G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + G_{,jj}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) n_i(\boldsymbol{y})] \, \mathrm{d}S_y$$

utilisant l'opérateur différentiel tangentiel $D_{ij}() = n_i()_{,j} - n_j()_{,i}$ défini en annexe A. D'autre part, G vérifie $G_{,jj}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ $(\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x})$. Enfin, l'application de l'identité (A.7) d'intégration par parties donne :

$$\int_S u(\boldsymbol{y}) D_{ji} G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = \int_S D_{ij} u(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y$$

Ce schéma d'intégration par parties apparaît dans Kupradze [8], Sladek et Sladek [10]. Comme résultat de ce calcul, l'identité (5.2) prend la forme :

$$0 = \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} \{q(\boldsymbol{y}) G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - D_{ij} u(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y \tag{5.12}$$

dont on considère maintenant la limite quand $\varepsilon \to 0$.

RÉGULARISATION AU PREMIER ORDRE. La solution particulière affine $u^\star$ (5.3) vérifie également (5.12). De plus, pour $\{u_0, \boldsymbol{a}\} = \{u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})\}$:

$$\begin{aligned} D_{ij}u^\star(\boldsymbol{y}) &= n_i(\boldsymbol{y})u_{,j}(\boldsymbol{x}) - n_j(\boldsymbol{y})u_{,i}(\boldsymbol{x}) \\ &= D_{ij}u(\boldsymbol{x}) + [n_i(\boldsymbol{y}) - n_i(\boldsymbol{x})]u_{,j}(\boldsymbol{x}) - [n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})]u_{,i}(\boldsymbol{x}) \\ q^\star(\boldsymbol{y}) &= n_j(\boldsymbol{y})u_{,j}(\boldsymbol{x}) \\ &= q(\boldsymbol{x}) + u_{,j}(\boldsymbol{x})[n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})] \end{aligned}$$

Ces relations sont reportées dans (5.12) écrite pour $(u^\star, q^\star)$. L'égalité ainsi obtenue, soit :

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \{q(\boldsymbol{x})G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - D_{ij}u(\boldsymbol{x})G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})\}\, \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} u_{,j}(\boldsymbol{x})[n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})]G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \\ &- \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \{[n_i(\boldsymbol{y}) - n_i(\boldsymbol{x})]u_{,j}(\boldsymbol{x}) - [n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})]u_{,i}(\boldsymbol{x})\}\, G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{s_\varepsilon} \{n_j(\boldsymbol{y})u_{,j}(\boldsymbol{x})G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - [n_i(\boldsymbol{y})u_{,j}(\boldsymbol{x}) - n_j(\boldsymbol{y})u_{,i}(\boldsymbol{x})]G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\, \mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

est ensuite retranchée membre à membre de (5.12) écrite pour (u, q). On obtient, après avoir regroupé les termes de manière adéquate :

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_{ia}(\boldsymbol{x},\varepsilon)u_{,a}(\boldsymbol{x}) \\ &= \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \{[D_{ij}u(\boldsymbol{y}) - D_{ij}u(\boldsymbol{x})]\, G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - [q(\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{x})]G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\, \mathrm{d}S_y \\ &\quad + \int_{s_\varepsilon} \{n_i(\boldsymbol{y})[u_{,j}(\boldsymbol{y}) - u_{,j}(\boldsymbol{x})] - n_j(\boldsymbol{y})[u_i(\boldsymbol{y}) - u_{,i}(\boldsymbol{x})]\}\, G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \\ &\quad - \int_{s_\varepsilon} n_j(\boldsymbol{y})[u_{,j}(\boldsymbol{y}) - u_{,j}(\boldsymbol{x})]\, \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{5.13}$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ij}(\boldsymbol{x},\varepsilon) = &\int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} [n_i(\boldsymbol{y}) - n_i(\boldsymbol{x})]G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \\ &- \delta_{ij} \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} [n_a(\boldsymbol{y}) - n_a(\boldsymbol{x})]G_{,a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \\ &- \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} [n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})]G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{5.14}$$

Sous l'hypothèse de régularité $u_i \in C^{1,\alpha}$ au point $\boldsymbol{x}$, la propriété (5.6) est applicable et permet de montrer que, à la limite $\varepsilon \to 0$, l'intégrale sur $\partial\Omega - e_\varepsilon$ dans (5.13) donne une intégrale impropre convergente sur $\partial\Omega$ tandis que les intégrales sur s_ε s'annulent. De plus, supposant encore que $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ est un point régulier vérifiant (5.10), le terme

$\tilde{A}_{ij}(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ est écrit en termes d'intégrales convergentes, et sa limite $\tilde{A}_{ij}(\boldsymbol{x})$ pour $\varepsilon \to 0$ est donc :

$$\tilde{A}_{ij}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \{[(n_i(\boldsymbol{y}) - n_i(\boldsymbol{x}))G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \delta_{ij}(n_a(\boldsymbol{y}) - n_a(\boldsymbol{x}))G_{,a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\, \mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} [n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})]G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \tag{5.15}$$

En fait, on montre en annexe 5.2 que le terme libre $\tilde{A}_{ij}(\boldsymbol{x})$ admet l'expression :

$$\tilde{A}_{ij}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\delta_{ij} + \frac{1}{4\pi}\left[n_i(\boldsymbol{x})I_j(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - n_j I_i(\boldsymbol{x}) - \delta_{ij} n_a(\boldsymbol{x})I_a(\boldsymbol{x})\right] \tag{5.16}$$

avec (annexe 5.1, équation (5.56) :

$$I_a(\boldsymbol{x},S) = \int_S \left(\frac{1}{r}r_{,n} - K\right) n_a \frac{\mathrm{d}S_y}{r} - \int_{\partial S} \nu_a \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \tag{5.17}$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DU GRADIENT DE POTENTIEL. Comme résultat de l'analyse qui précède, la représentation intégrale de $\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})$ en tout $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ régulier vérifiant (5.10) est donnée, sous forme régularisée, par :

$$\frac{1}{2}u_{,i}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \{[D_{ij}u(\boldsymbol{y}) - D_{ij}u(\boldsymbol{x})]\, G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - [q(\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{x})]G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\, \mathrm{d}S_y + D_{ij}u(\boldsymbol{x})I_j(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - q(\boldsymbol{x})I_i(\boldsymbol{x},\partial\Omega) \tag{5.18}$$

La solution élémentaire est $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1/4\pi r$. Toutes les intégrales sont faiblement singulières. Ce résultat ne vaut que pour $u \in C^{1,\alpha}$ et $\boldsymbol{n} \in C^{0,\alpha}$ au point $\boldsymbol{x}$.

Commentaires. Cette formule donne le gradient complet $\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})$ en $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ connaissant les valeurs prises sur $\partial\Omega$ par (u,q). Toutes les intégrales étant convergentes, l'évaluation numérique de cette expression ne soulève pas de difficulté essentielle.

5.4 Extension à l'élastostatique

La démarche précédente peut être étendue à l'élastostatique, de manière à obtenir des expressions régularisées de la représentation du gradient de déplacement ou du tenseur des contraintes en un point d'observation $\boldsymbol{x}$ situé sur la frontière. On a vu (section 4.3) que le gradient du déplacement admet, pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$, la représentation intégrale :

$$\kappa u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{ t_a(\boldsymbol{y})U^k_{a,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_a(\boldsymbol{y})n_b(\boldsymbol{y})\Sigma^k_{ab,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y$$

Ainsi, reprenant encore la méthode de passage à la limite fondée sur l'introduction du voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$, la représentation intégrale du gradient de déplacement est

cherchée comme limite pour $\varepsilon \to 0$ de la formule précédente prise pour le domaine Ω_ε, soit :

$$0 = \int_{\partial\Omega} \Big\{ t_a(\boldsymbol{y}) U^k_{a,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_a(\boldsymbol{y}) n_b(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ab,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Big\} \, \mathrm{d}S_y \tag{5.19}$$

On reprend les deux variantes : régularisation au second ordre ou intégration par parties suivie d'une régularisation au premier ordre.

RÉGULARISATION AU SECOND ORDRE. La considération d'un état élastostatique affine $\boldsymbol{u}_\star$, superposition d'une translation rigide et d'un état de déformation uniforme, défini par :

$$u^\star_a(\boldsymbol{y}) = u^0_a + a_{ac}(y_c - x_c) \qquad t_i(\boldsymbol{y}) = C_{ijab} n_j(\boldsymbol{y}) a_{ab} \tag{5.20}$$

(u^0_i, a_{ij} : constantes arbitraires) conduit à l'identité auxiliaire :

$$0 = \int_{\partial\Omega} \Big\{ C_{ijab} n_j(\boldsymbol{y}) a_{ab} U^k_{i,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - [u^0_a + a_{ac}(y_c - x_c)] n_j(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{aj,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Big\} \, \mathrm{d}S_y \tag{5.21}$$

Cette dernière, écrite pour le choix particulier $\{\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{a}\} = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\nabla u}(\boldsymbol{x})\}$, valeurs des inconnues au point $\boldsymbol{x}$, et retranchée membre à membre de (5.19), donne :

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} [u_a(\boldsymbol{y}) - u_a(\boldsymbol{x}) - u_{a,c}(\boldsymbol{x})(y_c - x_c)] \, n_b(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ab,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ &- \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} [t_i(\boldsymbol{y}) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) n_j(\boldsymbol{y})] U^k_{i,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = 0 \end{aligned}$$

Moyennant l'hypothèse de régularité $\boldsymbol{u} \in C^{1,\alpha}$ en $\boldsymbol{x}$, l'étude du passage à la limite pour $\varepsilon \to 0$ dans la relation ci-dessus est similaire à celle menée en section 5.3 et donne :

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{\partial\Omega} [u_a(\boldsymbol{y}) - u_a(\boldsymbol{x}) - u_{a,c}(\boldsymbol{x})(y_c - x_c)] \, n_b(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ab,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ &- \int_{\partial\Omega} [t_i(\boldsymbol{y}) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) n_j(\boldsymbol{y})] U^k_{i,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{5.22}$$

où n'interviennent que des intégrales faiblement singulières. Ensuite, la formule ci-dessus est réarrangée au moyen des relations :

$$\begin{aligned} &u_a(\boldsymbol{y}) - u_a(\boldsymbol{x}) - u_{a,c}(\boldsymbol{x})(y_c - x_c) \\ &\quad = [u_a(\boldsymbol{y}) - u_a(\boldsymbol{x}) - D_c u_a(\boldsymbol{x})(y_c - x_c)] - u_{a,n}(\boldsymbol{x})(y_c - x_c) n_c(\boldsymbol{x}) \\ &t_i(\boldsymbol{y}) - \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) n_j(\boldsymbol{y}) \\ &\quad = [t_i(\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{x})] - \sigma_{ij}(\boldsymbol{x})[n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})] \end{aligned}$$

ce qui conduit à la forme suivante, régularisée, de la représentation intégrale du gradient de déplacement en un point $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$:

$$A_{abk\ell}(\boldsymbol{x})u_{a,b}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} [u_a(\boldsymbol{y}) - u_a(\boldsymbol{x}) - D_c u_a(\boldsymbol{x})(y_c - x_c)] n_b(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ab,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y$$
$$- \int_{\partial\Omega} [t_a(\boldsymbol{y}) - t_a(\boldsymbol{x})] U^k_{a,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \tag{5.23}$$
$$A_{abk\ell}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} n_b(\boldsymbol{x}) n_c(\boldsymbol{x})(y_c - x_c) n_j(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{aj,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y$$
$$- C_{ijab} \int_{\partial\Omega} [n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})] U^k_{i,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \tag{5.24}$$

Les quantités $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\nabla}_S \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}).(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ ne dépendent que des valeurs prises sur $\partial\Omega$ par les variables élastiques $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$ (si $\boldsymbol{u}$ est connu sur $\partial\Omega$, son gradient tangentiel $\boldsymbol{\nabla}_S \boldsymbol{u}$ l'est également).

Ce résultat nécessite la régularité $C^{1,\alpha}$ de $\boldsymbol{u}$ en $\boldsymbol{x}$ et suppose que le tenseur d'ordre 4 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ (5.24) est inversible. De plus, les intégrales définissant le terme libre $A_{abk\ell}$ ne sont convergentes que si l'hypothèse (5.10) de régularité de $\partial\Omega$ en $\boldsymbol{x}$ est vérifiée. La représentation (5.23), utilisable avec toute solution élémentaire élastostatique compatible avec le domaine Ω considéré, relie le gradient complet $\boldsymbol{\nabla u}(\boldsymbol{x})$ en $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ aux valeurs prises sur $\partial\Omega$ par le gradient tangentiel de $\boldsymbol{u}$ et le vecteur contrainte $\boldsymbol{t}$; elle se présente comme un système linéaire de 9 équations ($k, \ell = 1, 2, 3$) sur les 9 composantes $u_{a,b}(\boldsymbol{x})$.

INTÉGRATION PAR PARTIES ET RÉGULARISATION AU PREMIER ORDRE. Si la solution élémentaire de Kelvin (isotrope ou anisotrope) est utilisée, la variante (4.23), intégrée par parties, de la représentation du gradient de déplacement peut être prise comme point de départ. On étudie alors la limite pour $\varepsilon \to 0$ de la relation :

$$0 \;=\; \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon} \left\{ D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_a(\boldsymbol{y}) U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \tag{5.25}$$

L'équation ci-dessus vaut en particulier pour la solution auxiliaire (5.20), ce qui donne pour le choix particulier $\{\boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{a}\} = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\nabla u}(\boldsymbol{x})\}$, l'identité :

$$0 = \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \{[n_\ell(\boldsymbol{y}) - n_\ell(\boldsymbol{x})] u_{a,b}(\boldsymbol{x}) - [n_b(\boldsymbol{y}) - n_b(\boldsymbol{x})] u_{a,\ell}(\boldsymbol{x})\} \, \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y$$
$$- \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \sigma_{ab}(\boldsymbol{x}) [n_b(\boldsymbol{y}) - n_b(\boldsymbol{x})] U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y$$
$$+ \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \left\{ D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{x}) \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_a(\boldsymbol{x}) U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y$$
$$+ \int_{s_\varepsilon} \{n_\ell(\boldsymbol{y}) u_{a,b}(\boldsymbol{x}) - n_b(\boldsymbol{y}) u_{a,\ell}(\boldsymbol{x})\} \, \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y$$
$$- \int_{s_\varepsilon} \sigma_{ab}(\boldsymbol{x}) n_b(\boldsymbol{y}) U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y$$

Cette dernière, retranchée membre à membre de (5.19), conduit alors à :

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon)u_{a,b}(\boldsymbol{x}) \\
&= \int_{\partial\Omega-e_\varepsilon} \left\{ [D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{y}) - D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{x})]\,\Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - [t_a(\boldsymbol{y}) - t_a(\boldsymbol{x})]U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\
&\quad + \int_{s_\varepsilon} \{ n_\ell(\boldsymbol{y})[u_{a,b}(\boldsymbol{y}) - u_{a,b}(\boldsymbol{x})] - n_b(\boldsymbol{y})[u_{a,\ell}(\boldsymbol{y}) - u_{a,\ell}(\boldsymbol{x})] \}\,\Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&\quad - \int_{s_\varepsilon} [t_a(\boldsymbol{y}) - C_{abcd}n_d(\boldsymbol{y})u_{c,d}(\boldsymbol{x})]U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Sous les hypothèses de régularité $\boldsymbol{u} \in C^{1,\alpha}$ et $\boldsymbol{n} \in C^{0,\alpha}$ au point $\boldsymbol{x}$, le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ est accompli comme en section 5.3 : les intégrales sur $(\partial\Omega - e_\varepsilon)$ et sur s_ε de (5.26) convergent vers les intégrales impropres sur $\partial\Omega$ correspondantes et vers zéro, respectivement. Le terme libre :

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon) = &\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon} [n_\ell(\boldsymbol{y}) - n_\ell(\boldsymbol{x})]\Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&- \int_{\partial\Omega-e_\varepsilon} [n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})]\delta_{b\ell}\Sigma^k_{aj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&- C_{ijab}\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon} [n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})]U^k_{i,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

converge pour $\varepsilon \to 0$ vers l'intégrale impropre sur $\partial\Omega$ correspondante. Un calcul (annexe 5.3) permet en fait de montrer que :

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon)u_{a,b}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) - D_{\ell j}u_i(\boldsymbol{x})A^k_{ij}(\boldsymbol{x},\partial\Omega) + t_i(\boldsymbol{x})B^k_{i\ell}(\boldsymbol{x},\partial\Omega) \tag{5.28}
$$

où $A^k_{ij}(\boldsymbol{x},\partial\Omega)$ et $B^k_{i\ell}(\boldsymbol{x},\partial\Omega)$ sont données en termes d'intégrales impropres ordinaires (annexe 5.1, eqs (5.51) et (5.52)) par :

$$
A^k_{ij}(\boldsymbol{x},S) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)}[(1-2\nu)(\delta_{ik}I_j + \delta_{sk}I_i - \delta_{ij}I_k) + 3J_{ijk}] \tag{5.29}
$$

$$
B^k_{i\ell}(\boldsymbol{x},S) = \frac{-1}{16\pi\mu(1-\nu)}[(3-4\nu)\delta_{ik}I_\ell + 3J_{ik\ell} - \delta_{\ell k}I_i - \delta_{i\ell}I_k] \tag{5.30}
$$

avec :

$$I_a(\boldsymbol{x},S) = \int_S \left(\frac{1}{r}r_{,n} - K\right) n_a \frac{\mathrm{d}S_y}{r} - \int_{\partial S} \nu_a \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned} 3J_{abc}(\boldsymbol{x},S) &= \delta_{ac} I_b(\boldsymbol{x},S) + \delta_{bc} I_a(\boldsymbol{x},S) \\ &+ \int_S (r_{,b} r_{,p} D_{pa} n_c - D_a(n_b n_c) - D_b(n_a n_c)) \frac{\mathrm{d}S_y}{r} \\ &+ \int_S (2n_a n_b - r_{,a} r_{,b}) n_{,c} K \frac{\mathrm{d}S_y}{r} + \delta_{ab} \int_S n_c r_{,n} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \\ &- 2\int_S n_a n_c n_b r_{,n} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} + \int_{\partial S} (\nu_a n_c n_b + \nu_b n_c n_a - r_{,a} r_{,b} \nu_c) \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \\ &+ \int_{\partial S} (\nu_p n_a - \nu_a n_p) r_{,p} r_{,b} n_c \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \end{aligned} \tag{5.32}$$

Cette analyse permet finalement d'établir le résultat suivant : la représentation intégrale du gradient de déplacement en un point-frontière admet la forme explicite et régularisée :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} [D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{y}) - D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{x})] \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \\ &- \int_{\partial\Omega} [t_a(\boldsymbol{y}) - t_a(\boldsymbol{x})] U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \\ &+ D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{x}) A^k_{ab}(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - t_a(\boldsymbol{x}) B^k_{a\ell}(\boldsymbol{x},\partial\Omega) \end{aligned} \tag{5.33}$$

dans laquelle toutes les intégrales sont convergentes. Les termes résiduels $A^k_{ab}, B^k_{a\ell}$ sont donnés par (5.29), (5.30). L'application de la loi de Hooke $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\nabla u}(\boldsymbol{x})$ fournit ensuite facilement la représentation intégrale du tenseur des contraintes élastiques en un point-frontière sous forme explicite et régularisée :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijk\ell} &\int_{\partial\Omega} [D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{y}) - D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{x})] \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \\ &- \int_{\partial\Omega} [t_a(\boldsymbol{y}) - t_a(\boldsymbol{x})] \Sigma^i_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \\ &+ D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{x}) C_{ijk\ell} A^k_{ab}(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - t_a(\boldsymbol{x}) A^a_{ij}(\boldsymbol{x},\partial\Omega) \end{aligned} \tag{5.34}$$

La formulation de ce résultat utilise la propriété de symétrie (4.12) de la solution de Kelvin isotrope, à travers les relations :

$$C_{ijk\ell} U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Sigma^a_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \;\Rightarrow\; C_{ijk\ell} B^k_{a\ell}(\boldsymbol{x},\partial\Omega) = A^a_{ij}(\boldsymbol{x},\partial\Omega)$$

5.5 Equations intégrales indirectes

La notion de représentation intégrale indirecte a été introduite en section 2.4 pour les problèmes de potentiel ; la présentation était restreinte aux points d'observation $\boldsymbol{x}$ situés hors de la frontière $\partial\Omega$. Nous montrons maintenant comment les équations intégrales régularisées permettent d'écrire diverses formes d'équations intégrales indirectes, en prenant $\boldsymbol{x}$ sur $\partial\Omega$.

Problèmes scalaires. Considérons simultanément un domaine borné Ω et le domaine non borné complémentaire $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$, et soient $u, \bar{u}$ des solutions de l'équation de Laplace sur Ω et $\bar{\Omega}$ respectivement (problèmes *intérieur* et *extérieur*, avec $b = \bar{b} = 0$). L'équation intégrale (2.20) appliquée successivement aux problèmes intérieur et extérieur donne, après addition membre à membre des relations obtenues :

$$\bar{u}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \{\phi(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + [\psi(\boldsymbol{y}) - \psi(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y$$

et la même opération sur l'équation intégrale (5.18) donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\bar{u}_{,i} + u_{,i})(\boldsymbol{x}) = &-D_{ij}\psi(\boldsymbol{x})I_j(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - \phi(\boldsymbol{x})I_i(\boldsymbol{x},\partial\Omega)\\ &- \int_{\partial\Omega} [D_{ij}\psi(\boldsymbol{y}) - D_{ij}\psi(\boldsymbol{x})]\, G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\ &- \int_{\partial\Omega} [\phi(\boldsymbol{y}) - \phi(\boldsymbol{x})]G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

avec les notations de la section 2.4, c'est-à-dire en posant $\phi = \bar{q} + q$ (saut de flux à travers $\partial\Omega$), $\psi = \bar{u} - u$ (saut de potentiel à travers $\partial\Omega$) ; $\boldsymbol{n}$ est la normale à $\partial\Omega$ extérieure à Ω. On déduit alors facilement les représentations intégrales en un point d'observation $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, exprimées en termes des densités ϕ, ψ des potentiels de simple ou double couche :

$$\bar{u}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \quad = \quad u(\boldsymbol{x}) \tag{5.35}$$

$$\bar{u}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} [\psi(\boldsymbol{y}) - \psi(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \quad = \quad u(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{x}) \tag{5.36}$$

pour la solution u de l'équation de Laplace. Le gradient de u vérifie alors :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(u_{,i} + \bar{u}_{,i})(\boldsymbol{x})\\ &= -\phi(\boldsymbol{x})I_i(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - \int_{\partial\Omega} [\phi(\boldsymbol{y}) - \phi(\boldsymbol{x})]G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y &(5.37)\\ &= D_{ji}\psi(\boldsymbol{x})I_j(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - \int_{\partial\Omega} [D_{ij}\psi(\boldsymbol{y}) - D_{ij}\psi(\boldsymbol{x})]\, G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y &(5.38)\end{aligned}$$

Ces représentations indirectes aux points-frontière permettent d'écrire des équations intégrales indirectes, d'inconnue ϕ ou ψ, sous forme régularisée.

Problème de Dirichlet intérieur. La valeur du potentiel u est imposée sur la frontière : $u = u^D$ sur $\partial\Omega$. Ce problème aux limites admet, comme conséquence directe de (5.35) et (5.36), les formulations intégrales suivantes, d'inconnues respectives ϕ et ψ :

$$u^D(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$
$$u^D(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} [\psi(\boldsymbol{y}) - \psi(\boldsymbol{x})] G_{,n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \psi(\boldsymbol{x})$$

Problème de Neumann intérieur. La valeur du flux q est imposée sur la frontière : $q = q^D$ sur $\partial\Omega$. Ce problème aux limites admet, comme conséquence directe de (5.37) et (5.38), les formulations intégrales suivantes, d'inconnues respectives ϕ et ψ :

$$q^D(\boldsymbol{x}) = \phi(\boldsymbol{x}) \left(\frac{1}{2} - n_j(\boldsymbol{x}) I_j(\boldsymbol{x},\partial\Omega) \right) - n_j(\boldsymbol{x}) \int_{\partial\Omega} [\phi(\boldsymbol{y}) - \phi(\boldsymbol{x})] G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$
$$q^D(\boldsymbol{x}) = -D_j\psi(\boldsymbol{x}) I_j(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - n_i(\boldsymbol{x}) \int_{\partial\Omega} \left[D_{ij}\psi(\boldsymbol{y}) - D_{ij}\psi(\boldsymbol{x}) \right] G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$

ELASTOSTATIQUE. Considérons simultanément deux problèmes d'équilibre élastique, posés respectivement sur un domaine borné Ω et son complémentaire non borné $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$, de solutions respectives $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma})$ et $(\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{\sigma}})$, les forces de volume étant supposées nulles. On ne considère, pour simplifier, que l'élasticité isotrope.

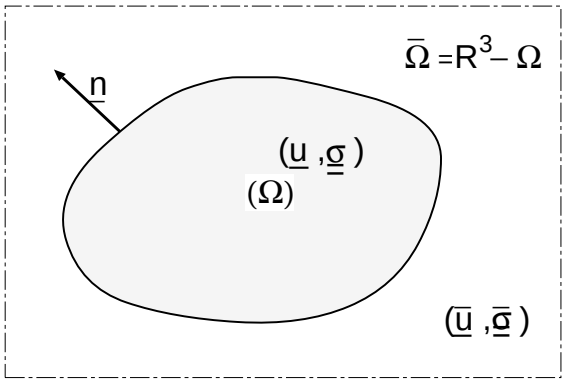

Figure 5.3: Problèmes intérieur et extérieur : notations géométriques.

Soit $\boldsymbol{x}$ un point situé sur la frontière $\partial\Omega$. L'équation intégrale en déplacement (4.31) appliquée successivement aux problèmes intérieur et extérieur donne, après addition membre à membre des relations obtenues :

$$\bar{u}_k(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \phi_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + [\psi_i(\boldsymbol{y}) - \psi_i(\boldsymbol{x})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y$$

et la même opération sur l'équation intégrale en gradient (5.33) conduit à :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[u_{k,\ell}(\boldsymbol{x})+\bar{u}_{k,\ell}(\boldsymbol{x})] = &-D_{\ell b}\psi_a(\boldsymbol{x})A^k_{ab}(\boldsymbol{x},\partial\Omega)-\phi_a(\boldsymbol{x})B^k_{a\ell}(\boldsymbol{x},\partial\Omega)\\ &-\int_{\partial\Omega}[D_{\ell b}\psi_a(\boldsymbol{y})-D_{\ell b}\psi_a(\boldsymbol{x})]\Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\ &-\int_{\partial\Omega}[\phi_a(\boldsymbol{y})-\phi_a(\boldsymbol{x})]U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

où on a posé $\boldsymbol{\phi}=\bar{\boldsymbol{b}}+\boldsymbol{t}$ (saut de vecteur contrainte à travers $\partial\Omega$) et $\boldsymbol{\psi}=\bar{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u}$ (saut de déplacement à travers $\partial\Omega$) ; $\boldsymbol{n}$ est la normale à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.

On déduit alors facilement les représentations intégrales en un point d'observation $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$, exprimées en termes des densités $\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}$ des potentiels de simple ou double couche :

$$\bar{u}_k(\boldsymbol{x})=\int_{\partial\Omega}\phi_i(\boldsymbol{y})U^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \;=\; u_k(\boldsymbol{x}) \tag{5.39}$$

$$\bar{u}_k(\boldsymbol{x})=\int_{\partial\Omega}[\psi_i(\boldsymbol{y})-\psi_i(\boldsymbol{x})]T^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \;=\; u_k(\boldsymbol{x})+\psi_k(\boldsymbol{x}) \tag{5.40}$$

pour le déplacement $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, et :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(u_{k,\ell}+\bar{u}_{k,\ell})(\boldsymbol{x})\\ &=-\phi_a(\boldsymbol{x})B^k_{a\ell}(\boldsymbol{x},\partial\Omega)-\int_{\partial\Omega}[\phi_a(\boldsymbol{y})-\phi_a(\boldsymbol{x})]U^k_{a,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y &(5.41)\\ &=-D_{\ell b}\psi_a(\boldsymbol{x})A^k_{ab}(\boldsymbol{x},\partial\Omega)-\int_{\partial\Omega}[D_{\ell b}\psi_a(\boldsymbol{y})-D_{\ell b}\psi_a(\boldsymbol{x})]\Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y &(5.42)\end{aligned}$$

pour le gradient de déplacement. Prises en des points de la frontière, elles permettent d'écrire des équations intégrales indirectes, d'inconnue $\boldsymbol{\phi}$ ou $\boldsymbol{\psi}$, sous forme régularisée, pour les problèmes aux limites fondamentaux de l'élasticité.

Des simplifications apparaissent quand ces représentations indirectes sont écrites pour un point $\boldsymbol{x}$ intérieur, la régularisation n'étant plus nécessaire.

Problème de Dirichlet intérieur. Le déplacement $\boldsymbol{u}$ est imposé sur la frontière : $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^D$ sur $\partial\Omega$. Ce problème aux limites admet, comme conséquence directe de (5.39) et (5.40), les formulations intégrales suivantes, d'inconnues respectives $\boldsymbol{\phi}$ et $\boldsymbol{\psi}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^D_k(\boldsymbol{x})&=\int_{\partial\Omega}\phi_i(\boldsymbol{y})U^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\ \boldsymbol{u}^D_k(\boldsymbol{x})&=\int_{\partial\Omega}[\psi_i(\boldsymbol{y})-\psi_i(\boldsymbol{x})]T^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y-\psi_k(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

Problème de Neumann intérieur. Les efforts de contact $\boldsymbol{t}$ ont une valeur imposée sur la frontière : $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}^D$ sur $\partial\Omega$. Ce problème aux limites admet, comme conséquence

directe de (5.41) et (5.42), les formulations intégrales suivantes, d'inconnues respectives $\boldsymbol{\phi}$ et $\boldsymbol{\psi}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{t}_i^D(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}\phi_i(\boldsymbol{x}) - \phi_a(\boldsymbol{x}) n_j(\boldsymbol{x}) A_{ij}^a(\boldsymbol{x}, \partial\Omega) \\
&\quad - C_{ijk\ell} n_j(\boldsymbol{x}) \int_{\partial\Omega} [\phi_a(\boldsymbol{y}) - \phi_a(\boldsymbol{x})] U_{a,\ell}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\
\boldsymbol{t}_i^D(\boldsymbol{x}) &= -C_{ijk\ell} n_j(\boldsymbol{x}) D_{\ell b}\psi_a(\boldsymbol{x}) A_{ab}^k(\boldsymbol{x}, \partial\Omega) \\
&\quad - C_{ijk\ell} n_j(\boldsymbol{x}) \int_{\partial\Omega} [D_{\ell b}\psi_a(\boldsymbol{y}) - D_{\ell b}\psi_a(\boldsymbol{x})] \Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y
\end{aligned}$$

Les équations intégrales pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann extérieurs sont obtenues de manière similaire.

LIEN AVEC LA THÉORIE CLASSIQUE DU POTENTIEL. Mentionnons aussi que l'application de notre approche aux équations intégrales indirectes a permis, par une voie différente, de retrouver les résultats connus de saut des potentiels élastiques et de leurs dérivées, sujet classique (voir Kupradze et coll. [8] pour un traitement extensif).

5.6 Commentaires sur les équations intégrales

DÉFINITION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES. Les équations intégrales de frontière ont été définies à l'aide de passages à la limite de représentations extérieures quand la taille ε d'un voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ tend vers 0. La forme de $v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ est arbitraire et peut varier quand $\varepsilon \to 0$. Durant ce passage à la limite, le point de collocation $\boldsymbol{x}$ reste situé sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω. Sur ces aspects, la présentation choisie ici de l'établissement des équations intégrales et de leur régularisation s'écarte d'autres travaux publiés (Bonnet [1], Krishnasamy et coll. [7]).

Les équations intégrales en traction sont classiquement définies comme la limite de représentations pour un point intérieur $\boldsymbol{z}$ quand $\boldsymbol{z} \in \Omega \to \boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ et formulées en termes d'intégrales en partie finie de Hadamard (PFH) en l'absence de régularisation ou en valeur principale de Cauchy (VPC) quand une intégration par parties produit une première régularisation (Sladek et Sladek [10]).

Les approches classiques conduisent donc à des formulations intégrales qui sont en apparence liées à un type particulier, et restrictif, de convergence d'intégrales contenant des singularités non intégrables. Les équations intégrales (2.20), (4.31), (5.18), (5.33) qui résultent de notre présentation, équivalentes à celles de la littérature, ne reposent que sur la notion classique de convergence d'intégrale impropre[2] et sont finalement exprimées uniquement à l'aide de singularités intégrables. Cela tient essentiellement au fait que les contributions des termes très singuliers s'annulent réciproquement : par exemple, la somme du terme libre et de la valeur principale présents dans l'identité

[2]En effet, le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ est considéré pour des voisinages d'exclusion v_ε de forme quelconque alors que les convergences en valeur principale de Cauchy ou en partie finie reposent spécifiquement sur des voisinages v_ε sphériques.

de Somigliana (4.32) est connue, exactement et sans calcul, à l'aide de l'identité de corps rigide (4.27). Ainsi, sur un plan fondamental, les résultats obtenus sont en fait indépendants du type de convergence des intégrales, et semblent ainsi moins arbitraires ; le caractère fortement singulier (en VPC) ou hypersingulier (en PFH) des équations intégrales en déplacement ou en traction est apparent plus que réel. Sur le plan pratique, la mise en œuvre numérique est facilitée par le fait que toutes les singularités sont intégrables.

La régularisation exposée ici est *indirecte* : elle repose sur la connaissance d'identités auxiliaires sur des intégrales de solutions élémentaires, telle que l'identité généralisée de solide rigide. Il existe également une approche *directe*, (Guiggiani et coll. [3]) pour laquelle l'équation intégrale est discrétisée sous la forme (4.29) ou (5.19). Le passage à la limite est ensuite traité au niveau du calcul des intégrales élémentaires. Cela impose de tenir soigneusement compte de la forme du voisinage d'exclusion lors du changement de variable (passage sur l'élément de référence).

Hypothèses de régularité. Un autre point important est le caractère nécessaire de la régularité $C_{1,\alpha}$ au point d'observation $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ pour l'inconnue primaire et le vecteur normal, sans laquelle les équations intégrales (5.18), (5.33) ne sont pas régularisées. En fait, ces conditions de régularité, qui apparaissent naturellement lors de la régularisation, sont exactement celles nécessaires à l'existence des intégrales en valeur principale ou en partie finie des formulations non régularisées :

- Suivant le théorème de Lyapounov-Tauber en théorie des potentiels scalaires (Gunther [4]) ou élastiques (Kupradze et coll. [8]), le gradient du potentiel de double couche :
$$\int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \qquad \text{ou} \qquad \int_{\partial\Omega} \phi_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$
en $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ n'est défini que si la densité ϕ ou $\boldsymbol{\phi}$ a une régularité $C^{1,\alpha}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$.
- L'approche directe permettant le calcul des intégrales singulières en valeur principale ou en partie finie (Guiggiani et coll. [3]) met en évidence les mêmes conditions.

5.7 Discrétisation par éléments de frontière

Pour fixer les idées, on examine la discrétisation de l'équation intégrale (5.18). Cette dernière n'est effectivement régularisée que pour $u \in C^{1,\alpha}$ et $\boldsymbol{n} \in C^{0,\alpha}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$; ces conditions entraînent $q \in C^{0,\alpha}$. Il est facile de définir une approximation (3.10) de q de régularité $C^{0,\alpha}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ (toutes les interpolations classiques satisfont cette condition, à condition d'être conforme quand $\boldsymbol{x}$ est pris en des nœuds communs à plusieurs éléments). Le développement d'approximations de u de régularité $C^{1,\alpha}$ conformes est assez facile pour les problèmes plans (éléments curvilignes) mais très délicat pour les géométries tridimensionnelles (éléments de surface). D'autre part, négliger d'assurer la régularité $C^{1,\alpha}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ de la représentation de u conduit à des erreurs importantes (Krishnasamy et coll. [7]).

Si une représentation du type (3.10) est utilisée pour u, les points de collocation $\boldsymbol{x}$ doivent *impérativement* être choisis intérieurs aux éléments de frontière, puisque, dans

ce cas, n'importe quelle interpolation classique est $C^{1,\alpha}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Cette restriction impose de choisir entre :

- La conservation d'interpolations conformes classiques, mais l'utilisation de points de collocation intérieurs aux éléments. Cela conduit généralement à un système linéaire surdéterminé, à résoudre au sens des moindres carrés.
- L'utilisation d'interpolations non-conformes pour u, définies à l'aide de nœuds tous intérieurs à l'élément (section 4.7). On peut alors prendre comme points de collocation les nœuds d'interpolation de u tout en ayant une interpolation de régularité $C^{1,\alpha}$ en ces points.

Ces deux méthodes rendent difficile l'obtention d'un nombre d'équations égal au nombre d'inconnues en cas de conditions aux limites mixtes, et conduit souvent à résoudre un système linéaire surdéterminé au sens des moindres carrés.

- L'utilisation simultanée d'une interpolation $C^{0,\alpha}$ pour u et une autre interpolation $C^{0,\alpha}$ pour les dérivées tangentielles $D_{ij}u$.

EXPRESSION DE L'OPÉRATEUR D_{ij} EN FONCTION DU PARAMÉTRAGE DE L'ÉLÉMENT. L'expression de D_{ij} en fonction du paramètre $\boldsymbol{\xi}$ sur l'élément de référence est, pour un élément de surface, donnée par la formule (A.17) :

$$D_{ij} f \, \mathrm{d}S_y = e_{aij} \left[f_{,1} (\boldsymbol{a_2}.\boldsymbol{e_a}) - f_{,2} (\boldsymbol{a_1}.\boldsymbol{e_a}) \right]$$

Appliquée à l'interpolation (3.10) de u, celle-ci donne :

$$J(\boldsymbol{\xi}) D_{ij} u_i(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})) = e_{aij} \sum_{q=1}^{N_e} \left[(\boldsymbol{a_2}.\boldsymbol{e_a}) M_{q,1}(\boldsymbol{\xi}) - (\boldsymbol{a_1}.\boldsymbol{e_a}) M_{q,2}(\boldsymbol{\xi}) \right] u^q \tag{5.43}$$

CALCUL NUMÉRIQUE DES INTÉGRALES. Les intégrations régulières sont faites selon les techniques habituelles (points de Gauss, cf. section 3.4). L'équation intégrale (5.18) fait d'autre part intervenir, pour $\boldsymbol{x} \in E$, des intégrales singulières du type :

$$I = \int_E [q(\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{x})] G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \tag{5.44}$$

$$J = \int_E \left[D_{ij} u(\boldsymbol{y}) - D_{ij} u(\boldsymbol{x}) \right] H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \tag{5.45}$$

Notons $\boldsymbol{\eta}$ l'antécédent de $\boldsymbol{x}$ par le paramétrage de E. L'intégrale I est calculée selon la procédure développée dans la section 3.5 de passage en coordonnées polaires sur l'élément de référence, posant $(\xi_1, \xi_2) = (\eta_1 + \rho \cos\alpha, \eta_2 + \rho \sin\alpha)$ et introduisant les fonctions de forme réduites $\hat{M}(\rho, \alpha : \boldsymbol{\eta})$ dans l'interpolation de q.

L'intégrale J est d'un type nouveau. Pour les fonctions de forme habituelles, elle n'est définie que si $\boldsymbol{x}$ est intérieur à l'élément. Reprenant la méthode de passage en polaires sur l'élément de référence, il reste à reformuler l'expression :

$$J(\boldsymbol{\xi}) \left[D_{ij} u_a(\boldsymbol{y}) - D_{ij} u_a(\boldsymbol{x}) \right]$$

en termes de ρ, α et de manière à mettre explicitement ρ en facteur. Pour ce faire, on reprend l'argument selon lequel, pour toute fonction $N(\boldsymbol{\xi})$ polynômiale, la formule de Taylor montre qu'il existe des polynômes $N^I_\alpha(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\eta})$, fonctions de $\boldsymbol{\xi}$, tels que :

$$N(\boldsymbol{\xi}) - N(\boldsymbol{\eta}) = (\xi_\alpha - \eta_\alpha) N^I_\alpha(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\eta}) = \rho \hat{N}(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) \tag{5.46}$$

Celui-ci peut être appliqué aux quantités polynômiales en $\boldsymbol{\xi}$ suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{a}_\alpha(\boldsymbol{\eta}) &= (\xi_\beta - \eta_\beta)(N_{k,\alpha})^I_\beta(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{y}^k = \rho \hat{\boldsymbol{a}}_\alpha(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) \\ M_{q,\alpha}(\boldsymbol{\xi}) - M_{q,\alpha}(\boldsymbol{\eta}) &= (\xi_\beta - \eta_\beta)(M_{q,\alpha})^I_\beta(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{\eta}) = \rho \hat{M}_{q,\alpha}(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) \end{aligned}$$

De même, le jacobien J de l'élément est donné par :

$$g = J^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \qquad g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{a}_\alpha.\boldsymbol{a}_\beta$$

et on trouve :

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{\xi}) - g(\boldsymbol{\eta}) &= \rho\left[g_{11}(\boldsymbol{\xi})\hat{g}_{22} + \hat{g}_{11}g_{22}(\boldsymbol{\eta}) - \hat{g}_{12}[g_{12}(\boldsymbol{\xi}) + g_{12}(\boldsymbol{\eta})]\right] \\ \hat{g}_{\beta\gamma} &= \boldsymbol{a}_\beta(\boldsymbol{\xi})\hat{\boldsymbol{a}}_\gamma + \hat{\boldsymbol{a}}_\beta\hat{\boldsymbol{a}}_\gamma(\boldsymbol{\eta}) \end{aligned}$$

On obtient alors, après quelques manipulations :

$$\begin{aligned} &M_{q,1}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{\xi}) - \frac{J(\boldsymbol{\xi})}{J(\boldsymbol{\eta})} M_{q,1}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{\eta}) \\ &= \rho\left\{ M_{q,1}(\boldsymbol{\xi})\hat{\boldsymbol{a}}_2 + \hat{M}_{q,1}\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{\eta}) - \frac{\hat{g}}{J(\boldsymbol{\eta}))[J(\boldsymbol{\eta}) + J(\boldsymbol{\xi})]} M_{q,1}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{\eta}) \right\} \\ &M_{q,2}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{\xi}) - \frac{J(\boldsymbol{\xi})}{J(\boldsymbol{\eta})} M_{q,2}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{\eta}) \\ &= \rho\left\{ M_{q,2}(\boldsymbol{\xi})\hat{\boldsymbol{a}}_1 + \hat{M}_{q,2}\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{\eta}) - \frac{\hat{g}}{J(\boldsymbol{\eta}))[J(\boldsymbol{\eta}) + J(\boldsymbol{\xi})]} M_{q,2}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{\eta}) \right\} \end{aligned}$$

Les expressions ci-dessus permettent, en identifiant les termes, d'écrire :

$$J[D_{ij}u(\boldsymbol{y}) - D_{ij}u(\boldsymbol{x})] = \sum_{q=1}^{N_e} \rho \widehat{D_{ij}M_q}(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) u^q$$

et l'intégrale singulière (5.45) se met finalement sous la forme :

$$J = \sum_{q=1}^{N_e} u \int_E \widehat{D_{ij}M_q}(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) \hat{\Sigma}^k_{is}(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) d\rho d\alpha \tag{5.47}$$

Collocation aux nœuds géométriques. Cruse, Polch et Huang [9] proposent une autre technique, qui utilise une interpolation conforme de $D_{ij}u$ et rétablit la possibilité de travailler avec une interpolation isoparamétrique de $\partial\Omega$ et u. Celle-ci consiste à considérer parallèlement l'interpolation de $D_{ij}u$ obtenue par dérivation de

(3.10), donnée par l'expression (5.43), et une interpolation directe associée à des valeurs nodales $(D_{ij}u)^p$ et des fonctions d'interpolation $\tilde{M}(\boldsymbol{\xi})$, soit :

$$D_{ij}u(\boldsymbol{y}) = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} M_p(\boldsymbol{\xi}) u^p \qquad \text{et} \quad D_{ij}u(\boldsymbol{y}) = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)} \tilde{M}_p(\boldsymbol{\xi}) (D_{ij}u)^p \tag{5.48}$$

Il reste à déterminer la relation entre les valeurs nodales u^p et $(D_{ij}u)^p$, en minimisant l'écart quadratique $\mathcal{J}$ entre les deux interpolations :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{p=1}^{N_e} \int_{E^{(e)}} \left\{ u^p [D_{ij} M_p(\boldsymbol{\xi})] - (D_{ij}u_i)^p \tilde{M}_p(\boldsymbol{\xi}) \right\}^2 J(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\xi \tag{5.49}$$

L'annulation des dérivées partielles de $\mathcal{J}$ par rapport aux $(D_{ij}u)^p$ conduit à la relation matricielle :

$$[MM]_{pk} \{ (D_{ij}u)^k \} = [M\tilde{M}_{ij}]_{pk} \{ u^k \} \tag{5.50}$$

avec :

$$[MM]_{pk} = \int_{\Gamma_{pk}} M_p(\boldsymbol{\xi}) M_k(\boldsymbol{\xi}) J(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\xi$$

$$\left[M\tilde{M}_{ij} \right]_{pk} = \int_{\Gamma_{pk}} M_p(\boldsymbol{\xi}) D_{ij} \tilde{M}_k(\boldsymbol{\xi}) J(\boldsymbol{\xi}) \, \mathrm{d}\xi$$

qui donne les valeurs nodales $(D_{ij}u)^p$ en fonction (linéaire) des valeurs nodales u^p, considérées comme primaires (Γ_{pk} désigne l'intersection des supports des fonctions d'interpolation M_p et M_k). Les matrices $[MM]$ et $[M\tilde{M}]$ sont de taille $N_N \times N_N$. D'autre part, $[MM]$ est symétrique bande ; sa construction et la résolution du système (5.50) à l'aide de la factorisation de Choleski est donc rapide devant l'évaluation numérique de la représentation (5.18) de $\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})$. Cette technique présente l'avantage de pouvoir prendre les nœuds géométriques ou de déplacement, généralement situés sur des frontières d'éléments, comme points de collocation, ce qui conduit à un système linéaire carré.

ELASTICITÉ. Les considérations développées ci-dessus sont applicables aux problèmes élastiques, la seule modification étant le caractère vectoriel des valeurs nodales inconnues. Elles sont notamment appliquées à la résolution numérique des équations intégrales pour les solides élastiques fissurés (chapitre 13).

Annexe 5.1 – Identités intégrales sur les tenseurs de Kelvin

Les intégrales :

$$A_{ij}^k(\boldsymbol{x}, S) = \int_S \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \qquad B_{i\ell}^k(\boldsymbol{x}, S) = \int_S U_{i,\ell}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y$$

formées avec la solution de Kelvin (4.8) et (4.9), s'écrivent également :

$$A_{ij}^k(\boldsymbol{x},S) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)}\left[(1-2\nu)(\delta_{ik}I_j+\delta_{jk}I_i-\delta_{ij}I_k)+3J_{ijk}\right] \tag{5.51}$$

$$B_{i\ell}^k(\boldsymbol{x},S) = -\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\delta_{ik}I_\ell+3J_{ik\ell}-\delta_{\ell k}I_i-\delta_{i\ell}I_k\right] \tag{5.52}$$

en termes des intégrales auxiliaires I_a, J_{abc} :

$$I_a(\boldsymbol{x},S) = \int_S r_{,a}\frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \qquad J_{abc}(\boldsymbol{x},S) = \int_S r_{,a}r_{,b}r_{,c}\frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \tag{5.53}$$

De même, pour la solution élémentaire $G = 1/(4\pi r)$ de l'équation de Laplace :

$$\int_S G_{,a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = -\frac{1}{4\pi}I_a(\boldsymbol{x},S) \tag{5.54}$$

Les intégrales I_a, J_{abc} contiennent une singularité non intégrable sur une surface et ne sont donc pas définies pour $\boldsymbol{x}\in S$. Pour $\boldsymbol{x}\notin S$, elles peuvent être reformulées, à l'aide d'intégrations par parties, en termes d'intégrales de contour sur ∂S et d'intégrales *convergentes* sur S, ainsi qu'on va le montrer.

Reformulation de l'intégrale I_a. Elle repose simplement, par définition de la dérivée partielle tangentielle D_a, sur :

$$\frac{r_{,a}}{r^2} = -(\frac{1}{r})_{,a} = -D_a\frac{1}{r}+n_a\frac{1}{r^2}r_{,n} \tag{5.55}$$

On applique alors l'identité (A.10) à $f = 1/r$, ce qui conduit au résultat :

$$\boxed{I_a(\boldsymbol{x},S) = \int_S\left(\frac{1}{r}r_{,n}-K\right)n_a\frac{\mathrm{d}S_y}{r}-\int_{\partial S}\nu_a\frac{\mathrm{d}s_y}{r}} \tag{5.56}$$

avec $r_{,n} = n_p r_{,p}$, $K = D_r n_r$.

Reformulation de l'intégrale J_{abc}. D'après (2.37), on peut écrire :

$$3J_{abc}(\boldsymbol{x},S) = -\delta_{ab}I_c(\boldsymbol{x},S)-\delta_{ac}I_b(\boldsymbol{x},S)-\delta_{bc}I_a(\boldsymbol{x},S)+\int_S r_{,abc}\,\mathrm{d}S_y \tag{5.57}$$

On remarque ensuite que $r_{,abc} = D_c r_{,ab}+n_c n_p r_{,abp}$. L'identité (A.10) pour $f = r_{,ab}$ conduit à :

$$\begin{aligned}\int_S r_{,abc}\frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} &= \int_S Kn_c r_{,ab}\,\mathrm{d}S_y+\int_{\partial S}r_{,ab}\nu_c\,\mathrm{d}s_y+\int_S n_c n_p r_{,abp}\,\mathrm{d}S_y\\ &= \delta_{ab}\int_S r_{,n}\frac{\mathrm{d}S_y}{r^2}-\delta_{ab}I_c(\boldsymbol{x},S)-\int_S Kn_c r_{,a}r_{,b}\frac{\mathrm{d}S_y}{r}-\int_{\partial S}r_{,a}r_{,b}\nu_c\frac{\mathrm{d}s_y}{r}\\ &\quad+\int_S n_c\left(D_{pa}r_{,bp}+n_a r_{,bpp}\right)\mathrm{d}S_y+\int_{\partial S}r_{,ab}\nu_c\,\mathrm{d}s_y\end{aligned} \tag{5.58}$$

Compte tenu de :

$$r_{,ba} = \frac{\delta_{ba} - r_{,b}r_{,a}}{r} \qquad r_{,bpp} = (\frac{2}{r})_{,b}$$

on a alors :

$$\begin{aligned}\int_S n_c \left[D_{pa}r_{,bp} + n_a r_{,bpp}\right] \mathrm{d}S_y &= \int_S n_c \left[D_{ba}\frac{1}{r} + n_a(\frac{2}{r})_{,b} - D_{pa}(r_{,b}r_{,p})\right] \mathrm{d}S_y \\ &= \int_S n_c \left[n_a(\frac{1}{r})_{,b} + n_b(\frac{1}{r})_{,a} - D_{pa}(\frac{r_{,b}r_{,p}}{r})\right] \mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

On applique alors la formule (A.5) aux intégrands $n_a n_c(1/r)$ et $n_b n_c(1/r)$ et la formule (A.7) à l'intégrand $D_{pa}(r_{,b}r_{,p})$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}&\int_S n_c \left(D_{pa}r_{,bp} + n_a r_{,bpp}\right) \mathrm{d}S_y \\ &= \int_S 2n_c n_a n_b (K - \frac{1}{r}r_{,n})\frac{\mathrm{d}S_y}{r} - \int_S [D_b(n_c n_a) + D_a(n_c n_b)]\frac{\mathrm{d}s_y}{r^2} \\ &\quad + \int_S r_{,b}r_{,p}D_{pa}n_c\frac{\mathrm{d}S_y}{r} + \int_{\partial S}[\nu_b n_c n_a + \nu_a n_c n_b]\frac{\mathrm{d}s_y}{r} - e_{paq}\int_{\partial S} n_c r_{,b}r_{,p}\tau_q\frac{\mathrm{d}s_y}{r}\end{aligned}$$

Enfin, on reporte l'expression ci-dessus dans (5.58) en remarquant que :

$$e_{paq}\tau_q = n_p\nu_a - n_a\nu_p$$

puis le résultat dans (5.57). Cela conduit après quelques manipulations au résultat :

$$\begin{aligned}3J_{abc}(\boldsymbol{x}, S) &= \delta_{ac}I_b(\boldsymbol{x}, S) + \delta_{bc}I_a(\boldsymbol{x}, S) \\ &\quad + \int_S [r_{,b}r_{,p}D_{pa}n_c - D_a(n_b n_c) - D_b(n_a n_c)]\,\frac{\mathrm{d}S_y}{r} \\ &\quad + \delta_{ab}\int_S n_c r_{,n}\frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} + \int_S (2n_a n_b - r_{,a}r_{,b})n_{,c}K\frac{\mathrm{d}S_y}{r} \\ &\quad - 2\int_S n_a n_c n_b r_{,n}\frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} + \int_{\partial S}(\nu_a n_c n_b + \nu_b n_c n_a - r_{,a}r_{,b}\nu_c)\frac{\mathrm{d}s_y}{r} \\ &\quad + \int_{\partial S}(\nu_p n_a - \nu_a n_p)r_{,p}r_{,b}n_c\frac{\mathrm{d}s_y}{r} \qquad (5.59)\end{aligned}$$

COMMENTAIRES. Cette reformulation présente l'intérêt de faire apparaître des intégrales sur S convergentes quand $\boldsymbol{x} \in S, \boldsymbol{x} \notin \partial S$ (les intégrands se comportant en $O(r^{-1})$ et $O(r^{-2}r_{,n})$).

Si S est fermée, les intégrales de contour dans (5.56), (5.59) disparaissent. Si S est régulière par morceaux, les formules (5.56–5.59) doivent être appliquées à chaque composante régulière de S et les résultats obtenus additionnés.

En raison de la symétrie de $J_{abc}(\boldsymbol{x}, S)$ définie par (5.53) par rapport aux indices a, b, c, la valeur de J_{abc} donnée par la formule (5.59) est invariante par permutation de a, b, c. En revanche, cette symétrie n'a pas lieu pour les intégrales de surface et de contour considérées séparément.

CAS PARTICULIER D'UNE SURFACE PLANE. Si S est plane (dans le plan y_1, y_2 pour fixer les idées), on remarque que, pour tout $\boldsymbol{y} \in S$:

$$K = 0 \qquad n_a = \delta_{a3} \qquad D_a n_b = 0 \qquad \nu_3 = 0 \qquad D_{3\beta} f = f_{,\beta} \qquad D_{\alpha\beta} f = 0$$

et les expressions (5.56), (5.59) se réduisent à :

$$I_a(\boldsymbol{x}, S) = \delta_{a3} \int_S r_{,3} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} + (\delta_{a3} - 1) \int_{\partial S} \nu_a \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \tag{5.60}$$

$$3J_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{x}, S) = \delta_{\alpha\beta} I_\gamma(\boldsymbol{x}, S) + \delta_{\beta\gamma} I_\alpha(\boldsymbol{x}, S) - \int_{\partial S} r_{,\alpha} r_{,\beta} \nu_{,\gamma} \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \tag{5.61}$$

$$3J_{\alpha\beta 3}(\boldsymbol{x}, S) = \delta_{\alpha\beta} I_\gamma(\boldsymbol{x}, S) - \int_{\partial S} \nu_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,3} \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \tag{5.62}$$

$$J_{\alpha 33}(\boldsymbol{x}, S) = - \int_{\partial S} \nu_{,\alpha} r_{,3}^2 \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \tag{5.63}$$

$$J_{333}(\boldsymbol{x}, S) = I_3(\boldsymbol{x}, S) \tag{5.64}$$

Si, de plus, $\boldsymbol{x} \in S$, on a $r_{,3} = 0$, et les seules intégrales non nulles sont $I_\alpha(\boldsymbol{x}, S)$ et $J_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{x}, S)$, les expressions ci-dessus restant valables.

Annexe 5.2 – Preuve de l'expression (5.16) du terme libre

On cherche à reformuler la limite pour $\varepsilon \to 0$ du terme libre :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ia}(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = & \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} [n_i(\boldsymbol{y}) - n_i(\boldsymbol{x})] G_{,a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ & - \delta_{ia} \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} [n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})] G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ & - \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} [n_a(\boldsymbol{y}) - n_a(\boldsymbol{x})] G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

introduit en section 5.3. Un réarrangement des termes donne :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ia}(\boldsymbol{x}, \varepsilon) = & \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \{ D_{ia} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \delta_{ia} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \} \, \mathrm{d}S_y \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega - e_\varepsilon} \{ n_i(\boldsymbol{x}) r_{,a} - \delta_{ia} n_j(\boldsymbol{x}) r_{,j} - n_a(\boldsymbol{x}) r_{,i} \} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \end{aligned}$$

La formule d'intégration par parties (A.7) et le résultat (5.56) appliqués à l'équation ci-dessus montrent que $\tilde{A}_{ia}(\boldsymbol{x}, \varepsilon)$ est exprimable comme somme d'intégrales de surface convergentes quand $\varepsilon \to 0$ et d'intégrales de contour sur le bord e_ε de $(\partial\Omega - e_\varepsilon)$. Seul ce dernier type pose problème pour le passage à la limite $\varepsilon \to 0$. On obtient ainsi,

compte tenu de (2.47) :

$$\tilde{A}_{ia}(\boldsymbol{x},\varepsilon) = \frac{1}{2}\delta_{ia} + \frac{1}{4\pi}\left[n_i(\boldsymbol{x})I_a(\partial\Omega,\boldsymbol{x}) - \delta_{ia}n_j(\boldsymbol{x})I_j(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - n_a(\boldsymbol{x})I_i(\boldsymbol{x},\partial\Omega)\right] + \frac{1}{4\pi}\int_{e_\varepsilon}\left\{e_{iac}\tau_c - n_i(\boldsymbol{x})\nu_a + \delta_{ia}n_j(\boldsymbol{x})\nu_j + n_a(\boldsymbol{x})\nu_i\right\}\frac{\mathrm{d}s_y}{r} \tag{5.65}$$

enfin, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{\nu}$ entraîne :

$$e_{iac}\tau_c = e_{iac}e_{bcd}n_d\nu_b = n_i\nu_a - n_a\nu_i$$

de sorte que l'intégrale de contour sur e_ε dans (5.65) devient :

$$\frac{1}{4\pi}\int_{s_\varepsilon}\left\{\delta_{ia}n_j(\boldsymbol{x})\nu_j + [n_a(\boldsymbol{x}) - n_a\nu_i] - [n_i(\boldsymbol{x}) - n_i]\nu_a\right\}\frac{\mathrm{d}s_y}{r}$$

De plus, le point $\boldsymbol{x}$ étant supposé régulier sur $\partial\Omega$, la courbe e_ε devient plane et située dans le plan tangent à $\partial\Omega$ en $\boldsymbol{x}$ quand $\varepsilon \to 0$, et on a :

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = O(\varepsilon) \qquad \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y}) = O(\varepsilon) \qquad \frac{\mathrm{d}s_y}{r} = O(1)d\theta \tag{5.66}$$

θ désignant l'angle polaire pour l'origine $\boldsymbol{x}$ dans le plan tangent à $\partial\Omega$ en $\boldsymbol{x}$. L'intégrale sur le contour évanouissant s'annule donc à la limite $\varepsilon \to 0$.

Annexe 5.3 – Preuve de l'expression (5.28) du terme libre élastique

On cherche la limite pour $\varepsilon \to 0$ du terme libre $\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ introduit dans l'équation (5.26) :

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon) = &-\delta_{b\ell}\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon}[n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})]\Sigma^k_{aj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{\partial\Omega-e_\varepsilon}[n_\ell(\boldsymbol{y}) - n_\ell(\boldsymbol{x})]\Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\ &- C_{ijab}\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon}[n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})]U^k_{i,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\end{aligned} \tag{5.67}$$

Un regroupement différent des termes et l'utilisation de la symétrie $C_{ijab} = C_{abij}$ du tenseur de Hooke permet de réécrire la formule ci-dessus comme :

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon) = &-\delta_{b\ell}\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon}T^k_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - n_\ell(\boldsymbol{x})C_{ijab}\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon}U^k_{i,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\ &+ n_j(\boldsymbol{x})\delta_{b\ell}\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon}\Sigma^k_{aj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y + n_j(\boldsymbol{x})C_{ijab}\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon}U^k_{i,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\ &+ C_{ijab}\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon}\left[n_\ell(\boldsymbol{y})U^k_{i,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{y})U^k_{i,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]\,\mathrm{d}S_y\end{aligned} \tag{5.68}$$

La dernière intégrale de la formule ci-dessus est intégrée par parties au moyen de l'identité (A.7), ce qui la réduit à une intégrale de contour :

$$\int_{\partial\Omega-e_\varepsilon} \left[n_\ell(\boldsymbol{y})U^k_{i,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{y})U^k_{i,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]\,\mathrm{d}S_y = \int_{e_\varepsilon} U^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})e_{\ell jm}\tau_m(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_y \quad (5.69)$$

L'équation ci-dessus et les résultats (5.51–5.52), (5.56–5.59) montrent que $\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ est exprimable comme somme d'intégrales de surface convergentes quand $\varepsilon \to 0$, d'intégrales de contour sur ∂S et d'intégrales de contour sur e_ε. Seul ce dernier type pose problème pour le passage à la limite $\varepsilon \to 0$.

Etude de la limite pour $\varepsilon \to 0$ des intégrales de contour. Notons symboliquement par $\partial\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ la somme des intégrales decontour sur e_ε qui apparaissent dans (5.68). L'équation (5.68), compte tenu de (5.69), (5.56), (5.59), donne :

$$\begin{aligned}\partial\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon) = &-\delta_{b\ell}\left[\partial K^k_i(\boldsymbol{x},\varepsilon) - n_j(\boldsymbol{x})\partial A^k_{aj}(\boldsymbol{x},\varepsilon)\right]\\ &- C_{ijab}\left[n_\ell(\boldsymbol{x})\partial B^k_{ij}(\boldsymbol{x},\varepsilon) - n_j(\boldsymbol{x})\partial B^k_{ir}(\boldsymbol{x},\varepsilon)\right]\\ &+ C_{ijab}\int_{e_\varepsilon} U^k_{i,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})e_{\ell jm}\tau_m(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}s_y \end{aligned} \quad (5.70)$$

en désignant symboliquement par $\partial A^k_{ij}(\boldsymbol{x},\varepsilon)$, $\partial B^k_{ij}(\boldsymbol{x},\varepsilon)$, $\partial K^k_i(\boldsymbol{x},\varepsilon)$ la somme des intégrales de contour sur e_ε issues des expressions de $A^k_{ij}(\boldsymbol{x},\partial\Omega - e_\varepsilon)$, $B^k_{ij}(\boldsymbol{x},\partial\Omega - e_\varepsilon)$, $K^k_i(\boldsymbol{x},\partial\Omega - e_\varepsilon)$ respectivement. D'après (5.52), (5.56) et (5.59), on a, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}&n_\ell(\boldsymbol{x})\partial B^k_{ij}(\boldsymbol{x},\varepsilon) - n_j(\boldsymbol{x})\partial B^k_{i\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon)\\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\int_{e_\varepsilon}[n_j(\boldsymbol{x})n_\ell - n_\ell(\boldsymbol{x})n_j][\nu_i n_k + \nu_k n_i + (\nu_p n_i - \nu_i n_p)r_{,p}r_{,k}]\frac{\mathrm{d}s_y}{r}\\ &\quad + \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}\int_{e_\varepsilon}[(3-4\nu)\delta_{ik} + r_{,i}r_{,k}][n_\ell(\boldsymbol{x})\nu_j - n_j(\boldsymbol{x})\nu_\ell]\frac{\mathrm{d}s_y}{r}\end{aligned} \quad (5.71)$$

Les relations (5.66) et $n_\ell(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{x})n_\ell(\boldsymbol{y}) = O(\varepsilon)$ permettent de montrer que :

$$\int_{e_\varepsilon}[n_\ell(\boldsymbol{x})n_j - n_j(\boldsymbol{x})n_\ell][\nu_i n_k + \nu_k n_i + (\nu_p n_i - \nu_i n_p)r_{,p}r_{,k}]\frac{\mathrm{d}s_y}{r} = O(\varepsilon)$$

D'autre part, on reconnaît dans le deuxième terme de (5.71) l'expression (4.8) du déplacement de Kelvin, de sorte que :

$$\begin{aligned}n_\ell(\boldsymbol{x})\partial B^k_{ij}(\boldsymbol{x},\varepsilon) - n_j(\boldsymbol{x})\partial B^k_{i\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon) &= \int_{e_\varepsilon} U^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})[n_\ell(\boldsymbol{x})\nu_j - n_j(\boldsymbol{x})\nu_\ell]\frac{\mathrm{d}s_y}{r} + O(\varepsilon)\\ &= e_{\ell jm}\int_{e_\varepsilon}\tau_m U^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\mathrm{d}s_y}{r} + O(\varepsilon)\end{aligned} \quad (5.72)$$

en remarquant que :

$$n_\ell(\boldsymbol{x})\nu_j - n_j(\boldsymbol{x})\nu_\ell = n_\ell\nu_j - n_j\nu_\ell + O(\varepsilon) = e_{\ell jm}\tau_m + O(\varepsilon)$$

D'autre part, on a également, d'après (5.51), (5.56), (5.59) :

$$\begin{aligned} n_j(\boldsymbol{x})\partial A^k_{aj}(\boldsymbol{x},\varepsilon) = -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}\Big\{ &\int_{e_\varepsilon}[n_a(\boldsymbol{x})\nu_k - n_k(\boldsymbol{x})\nu_a - \delta_{ak}n_j(\boldsymbol{x})\nu_j]\frac{\mathrm{d}s_y}{r} \\ &+ \int_{e_\varepsilon}[n_k\nu_a(n_j(\boldsymbol{x})n_j - 1) + (n_an_k - \delta_{ak})n_j(\boldsymbol{x})\nu_j]\frac{\mathrm{d}s_y}{r} \\ &+ \int_{e_\varepsilon} n_j(\boldsymbol{x})r_{,j}[(n_a\nu_p - n_p\nu_a)n_kr_{,p} - r_{,a}\nu_k]\frac{\mathrm{d}s_y}{r}\Big\} \end{aligned}$$

En remarquant que $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y}) = O(\varepsilon)$, $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}) - 1 = O(\varepsilon)$ et $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\nabla}r = O(\varepsilon)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} n_j(\boldsymbol{x})\partial A^k_{aj}(\boldsymbol{x},\varepsilon) + O(\varepsilon) &= -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}e_{akm}\int_{e_\varepsilon}\tau_m\frac{\mathrm{d}s_y}{r} \\ &= \partial K^k_i(\boldsymbol{x},\varepsilon) + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{5.73}$$

d'après (4.64), compte tenu du fait que la courbe e_ε tend vers une courbe plane quand $\varepsilon \to 0$. Finalement, en reportant les résultats (5.72) et (5.73) dans (5.70), on obtient le résultat :

$$\partial\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon) = O(\varepsilon) \qquad \text{soit} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\partial\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x},\varepsilon) = 0 \tag{5.74}$$

La contribution cumulée des intégrales sur le contour évanouissant e_ε dans (5.68) tend vers 0 pour $\varepsilon \to 0$. Ceci établit donc le résultat :

$$\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\delta_{ak}\delta_{b\ell} - n_\ell(\boldsymbol{x})A^k_{ab}(\boldsymbol{x},\partial\Omega) + n_j(\boldsymbol{x})\delta_{b\ell}A^k_{aj}(\boldsymbol{x},\partial\Omega) + C_{ijab}n_j(\boldsymbol{x})B^k_{i\ell}(\boldsymbol{x},\partial\Omega)$$

et donc :

$$\boxed{\tilde{A}_{abk\ell}(\boldsymbol{x})u_{a,b}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) - D_{\ell j}u_i(\boldsymbol{x})A^k_{ij}(\boldsymbol{x},\partial\Omega) + t_i(\boldsymbol{x})B^k_{i\ell}(\boldsymbol{x},\partial\Omega)} \tag{5.75}$$

Références bibliographiques

[1] BONNET, M. Regularized boundary integral equations for three-dimensional bounded or unbounded elastic bodies containing curved cracks of arbitrary shape under dynamic loading. In N. G. Zamani C.A. Brebbia (ed.), *Boundary element techniques: applications in engineering*, pp. 171–189. Comp. Mech. Publ., Southampton, Southampton (1989).

[2] GUIGGIANI, M. Hypersingular formulation for boundary stress evaluation. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **14**, 169–179 (1994).

[3] GUIGGIANI, M., KRISHNASAMY, G., RUDOLPHI, T. J., RIZZO, F. J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *ASME J. Appl. Mech.*, **59**, 604–614 (1992).

[4] Gunther, N. M. *La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique*. Gauthier-Villars, Paris (1934).

[5] Hildenbrand, J., Kuhn, G. Numerical computation of hypersingular integrals and application to the boundary integral equation for the stress tensor. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **10**, 209–218 (1992).

[6] Ingber, M. S., Mitra, A. K. Grid redistribution based on measurable error indicators for the direct boundary element method. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **9**, 13–19 (1992).

[7] Krishnasamy, G., Rizzo, F. J., Rudolphi, T. J. Hypersingular boundary integral equations: their occurrence, interpretation, regularization and computation. In P. K. Banerjee, S. Kobayashi (eds.), *Developments in Boundary Element Methods*, vol. 7: Advanced Dynamic Analysis, pp. 207–252. Elsevier (1992).

[8] Kupradze, V. D. (ed.). *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North Holland (1979).

[9] Polch, E. Z., Cruse, T. A., Huang, C. J. Traction BIE solutions for flat cracks. *Comp. Mech.*, **2**, 253–267 (1987).

[10] Sladek, J., Sladek, V. Three-dimensional curved crack in an elastic body. *Int. J. Solids Struct.*, **19**, 425–436 (1983).

6

Quelques résultats mathématiques classiques

6.1 Problèmes fondamentaux de la théorie du potentiel

Les équations intégrales indirectes associées aux problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'équation de Laplace, obtenues respectivement à partir de potentiels de double couche et de simple couche, s'écrivent (sections 2.4 et 5.5) :

$$-\frac{1}{2}\psi(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \psi(\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = u^D(\boldsymbol{x})$$
$$\frac{1}{2}\phi(\boldsymbol{x}) - n_j(\boldsymbol{x}) \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = q^D(\boldsymbol{x})$$

où les dérivées normales $n_j(\boldsymbol{y})G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ et $n_j(\boldsymbol{x})G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ sont intégrables si la frontière $\partial\Omega$ est régulière en $\boldsymbol{x}$. Ces deux équations intégrales présentent donc la structure d'équations de Fredholm (faiblement singulières) de deuxième espèce (Tricomi [4]), pour lesquelles l'*alternative de Fredholm* est applicable. Cette dernière, pour une équation intégrale de la forme :

$$\phi(\boldsymbol{x}) - \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y}) K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = f(\boldsymbol{x}) \tag{6.1}$$

d'inconnue ϕ et de donnée f, stipule que

1. Soit (6.1) admet une solution unique ϕ pour tout f, et dans ce cas, l'*équation adjointe* :
$$\phi(\boldsymbol{x}) - \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y}) K(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_y = f(\boldsymbol{x}) \tag{6.2}$$
admet également une solution unique pour tout f.
2. Soit l'équation homogène ($f = 0$) associée admet au moins une solution non nulle. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution à (6.1) pour une donnée f particulière est que, pour toute solution de l'équation adjointe (6.2) :
$$\int_{\partial\Omega} f(\boldsymbol{y})\bar{u}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = 0$$

Ce théorème permet de discuter les questions d'existence et d'unicité des solutions aux problèmes de Dirichlet et de Neumann.

Les représentations de simple couche pour le problème de Dirichlet, et de double couche pour le problème de Neumann, conduisent à des équations de Fredholm de *première espèce*, de la forme :

$$\int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y}) K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = f(\boldsymbol{x})$$

pour lesquelles il n'y a pas de théorème général analogue à l'alternative de Fredholm et qui sont connues pour être mal conditionnées ; leur emploi doit être évité.

6.2 Equations intégrales singulières de l'élasticité

Les équations intégrales indirectes ont notamment permis de traiter le problème de l'existence d'une solution aux problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'élasticité. Kupradze ([1], [2]) a notamment considéré les équations intégrales indirectes obtenues à partir d'une représentation de $\boldsymbol{u}$ par potentiels de double couche (pour le problème de Dirichlet) ou de simple couche (pour le problème de Neumann) et sous forme singulière en valeur principale de Cauchy. Celles-ci s'écrivent respectivement :

$$u_k^D(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\psi_k(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega}^{*} \psi_i(\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$

$$t_l^D(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\phi_k(\boldsymbol{x}) + n_p(\boldsymbol{x}) \int_{\partial\Omega}^{*} \phi_i(\boldsymbol{y}) C_{lpkr} U_{i,r}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$

et ont la structure d'équations intégrales de deuxième espèce, notée symboliquement :

$$(\frac{1}{2}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{f}$$

(inconnue $\boldsymbol{\varphi}$, donnée $\boldsymbol{f}$, noyau $\boldsymbol{K}$). La preuve de l'existence d'une solution à ces équations intégrales revient à prouver que l'alternative de Fredholm est encore valable pour les équations intégrales fortement singulières. Une démarche (Kupradze [1], [2]) consiste à trouver un noyau $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ singulier en $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ et tel que l'équation intégrale :

$$(\frac{1}{2}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H})(\frac{1}{2}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{\varphi} = (\frac{1}{2}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})\boldsymbol{f}$$

ait son noyau $\frac{1}{2}\boldsymbol{K} - \frac{1}{2}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{K}$ régulier. $\boldsymbol{H}$ est appelé *opérateur intégral régularisant* pour l'équation intégrale singulière considérée. Cela permet de transformer l'équation intégrale singulière en une équation intégrale de deuxième espèce régulière qui lui est équivalente et à laquelle l'alternative de Fredholm s'applique. L'existence de la solution aux problèmes de Dirichlet et de Neumann est ainsi prouvée.

Nous n'entrons pas dans les détails de la construction de $\boldsymbol{H}$, qui est complexe, car cette approche de régularisation, très intéressante sur le plan fondamental, est de peu d'utilité pratique, le calcul numérique d'intégrales portant sur le noyau itéré $\boldsymbol{H}.\boldsymbol{K}$:

$$((\boldsymbol{H}.\boldsymbol{K}).\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{x}) \equiv \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}).\boldsymbol{K}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}).\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_z$$

ferait intervenir des doubles intégrations de surface et s'avérerait lourd.

6.3 Tenseur de Green pour un domaine borné

Pham [3] a étudié la solution élémentaire $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ pour un domaine élastique E quelconque, un déplacement nul étant imposé sur la frontière ∂E (tenseur de Green de E). Introduisant l'opérateur intégral $\mathcal{K}$:

$$\boldsymbol{\varphi} \to \mathcal{K}\boldsymbol{\varphi} = \int_{\partial E} B_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}))\phi_i \,\mathrm{d}S_y$$

où $B_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}))$ est le *tenseur de Kupradze-Bashelishvili* [1] :

$$B_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})) = -\frac{1}{2\pi r^2}\left[\frac{2-4\nu}{3-4\nu}\delta_{ik} + \frac{3}{3-4\nu}r_{,i}r_{,k}\right] r_{,j}n_j(\boldsymbol{y}) \tag{6.3}$$

il établit l'expression du tenseur de Green $\boldsymbol{G}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ sous la forme d'une série qui fait intervenir les itérés de l'opérateur $\mathcal{K}$:

$$\boldsymbol{G}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{U}_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\mathcal{K}(\mathcal{I}+\mathcal{K})^n\boldsymbol{U}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

et prouve la convergence absolue de cette série.

6.4 Problèmes fondamentaux de la théorie de l'élasticité

Pham [3] a établi les solutions exactes des problèmes fondamentaux de l'élasticité linéaire, pour des domaines Ω et des données sur la frontière $\partial\Omega$ en effort $\boldsymbol{t}^D$ (problème de Neumann) ou en déplacement $\boldsymbol{u}^D$ (problème de Dirichlet) réguliers.

Problème de Neumann. La solution est cherchée sous la forme d'un potentiel de simple couche :

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \psi_i(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$

de sorte que le problème de Neumann admette la formulation intégrale indirecte :

$$\frac{1}{2}\psi_i(\boldsymbol{x}) - n_j(\boldsymbol{x})\int_{\partial\Omega}^{\star} \psi_a(\boldsymbol{y})\Sigma_{ij}^a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \;= t_i^D(\boldsymbol{x}) \tag{6.4}$$

où l'intégrale de frontière est à prendre au sens des valeurs principales de Cauchy. Il a été prouvé dans [3] que la solution de (6.4) est donnée par la série infinie de fonctions :

$$\psi_k(\boldsymbol{y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_k^n(\boldsymbol{y}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g_k^0(\boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{2}t_k^D(\boldsymbol{y}) \\ g_k^{n+1}(\boldsymbol{y}) = -n_j(\boldsymbol{y})\displaystyle\int_{\partial\Omega}^{\star} g_a^n(\boldsymbol{z})\Sigma_{ij}^a(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_z \end{cases}$$

De plus, cette série est uniformément et absolument convergente dans l'espace $C(\partial\Omega)$ des fonctions vectorielles continues sur $\partial\Omega$, à la seule condition que la donnée $\boldsymbol{t}^D$ soit auto-équilibrée, soit :

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{t}^D \,\mathrm{d}S = \mathbf{0}$$

PROBLÈME DE DIRICHLET. La solution est cherchée sous la forme d'un potentiel de type particulier :

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \phi_i(\boldsymbol{y}) B_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})) \,\mathrm{d}S_y$$

où $B_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}))$ est encore le tenseur de Kupradze-Bashelishvili (6.3), de sorte que le problème de Dirichlet admette la formulation intégrale indirecte :

$$-\phi_k(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega}^{\star} \phi_i(\boldsymbol{y}) B_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})) \,\mathrm{d}S_y = u_k^D(\boldsymbol{x}) \tag{6.5}$$

Il a été prouvé [3] que la solution de (6.5) est donnée par la série infinie de fonctions :

$$\phi_k(\boldsymbol{y}) = \sum_{n=0}^{+\infty} h_k^n(\boldsymbol{y}) \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} h_k^0(\boldsymbol{y}) = -\dfrac{1}{2} u_k^D(\boldsymbol{y}) \\ h_k^{n+1}(\boldsymbol{y}) = \dfrac{1}{2} \left\{ h_k^n(\boldsymbol{y}) + \displaystyle\int_{\partial\Omega}^{\star} h_i^n(\boldsymbol{z}) B_i^k(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{z})) \,\mathrm{d}S_z \right\} \end{array} \right.$$

qui est également convergente dans l'espace $C(\partial\Omega)$.

Références bibliographiques

[1] KUPRADZE, V. D. *Dynamical problems in elasticity*, vol. 3 of *Progress in solids mechanics*. North Holland (1963).

[2] KUPRADZE, V. D. (ed.). *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*. North Holland (1979).

[3] PHAM, T. L. *Tenseurs de Green et de Neumann*. Thèse de Doctorat, (1966).

[4] TRICOMI, F. G. *Integral equations*. Interscience Publishers, New York (1957).

Partie II

Ondes et problèmes d'évolution

7

Ondes et élastodynamique en domaine temporel

Ce chapitre traite de formulations intégrales pour l'équation des ondes scalaires ou élastiques en régime transitoire et traitées en variable temporelle. Les formulations établies aux chapitres 2 et 4 pour les problèmes d'équilibre jouent un rôle important, car elles permettent l'établissement d'équations intégrales régularisées en dynamique.

7.1 Equations des ondes et solutions élémentaires

On s'intéresse à la résolution de l'équation scalaire des ondes, d'inconnue $u = u(\boldsymbol{y}, t)$:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\ddot{u} + F = 0 \qquad \forall(\boldsymbol{y}, t) \in \Omega \times [0, T] \tag{7.1}$$

c étant la célérité des ondes, caractéristique connue et homogène du milieu physique siège de la propagation. Un problème bien posé comprend en outre des conditions initiales (prises par convention à $t = 0$) :

$$u(\boldsymbol{y}, 0) = u_0(\boldsymbol{y}) \qquad \dot{u}(\boldsymbol{y}, t) = v_0(\boldsymbol{y})$$

ainsi que des conditions aux limites (donnée de u, de $q = \boldsymbol{\nabla} u.\boldsymbol{n}$ ou d'une relation entre u et q en chaque point de la frontière $\partial\Omega$) ; des conditions à l'infini doivent également être imposées si Ω n'est pas borné.

Identité de réciprocité. La formule de Green (2.4) appliquée à deux couples (u^1, F^1) et (u^2, F^2) liés par l'équation des ondes (7.1) donne :

$$\int_{\partial\Omega} (u^2 q^1 - u^1 q^2)\, \mathrm{d}S = \int_\Omega \left\{ u^2 \left(\frac{1}{c^2}\ddot{u}^1 - F^1 \right) - u^1 \left(\frac{1}{c^2}\ddot{u}^2 - F^2 \right) \right\} \mathrm{d}V$$

Elle reste valable si les états 1 et 2 sont considérés à des instants différents $t_1 = \tau$ et $t_2 = t - \tau$, avec $t \geq \tau \geq 0$. La relation obtenue, intégrée entre $\tau = 0$ et $\tau = t$, conduit à une identité de réciprocité vérifiée par toute paire d'états et pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \left[(q^1 \star u^2)(\boldsymbol{y},t) - (q^2 \star u^1)(\boldsymbol{y},t)\right] \mathrm{d}S_y \\
&= \int_\Omega \left[(F^2 \star u^1)(\boldsymbol{y},t) - (F^1 \star u^2)(\boldsymbol{y},t)\right] \mathrm{d}V_y \\
&\quad + \int_\Omega \frac{1}{c^2}\left[v_0^2(\boldsymbol{y})u^1(\boldsymbol{y},t) - v_0^1(\boldsymbol{y})u^2(\boldsymbol{y},t)\right] \mathrm{d}V_y \\
&\quad + \int_\Omega \frac{1}{c^2}\left[u_0^2(\boldsymbol{y})\dot{u}^1(\boldsymbol{y},t) - u_0^1(\boldsymbol{y})\dot{u}^2(\boldsymbol{y},t)\right] \mathrm{d}V_y
\end{aligned} \tag{7.2}$$

où le symbole $\star$ désigne le *produit de convolution temporelle* défini pour $t \geq 0$ par :

$$(a \star b)(t) = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t a(\tau)b(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{7.3}$$

L'apparition des conditions initiales dans (7.2) résulte d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
(u^2 \star \ddot{u}^1)(\cdot,t) &= [u^2(\cdot,\tau)\dot{u}^1(\cdot,t-\tau)]_0^t - (\dot{u}^2 \star \dot{u}^1)(\cdot,t) \\
&= u^2(\cdot,t)v_0^1(\cdot) - u^1(\cdot,t)v_0^2(\cdot) - (\dot{u}^2 \star \dot{u}^1)(\cdot,t)
\end{aligned}$$

et de l'égalité $\dot{u}^2 \star \dot{u}^1 = \dot{u}^1 \star \dot{u}^2$.

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES. Pour un domaine $E \subseteq \mathbb{R}^3$ et un point fixé $\boldsymbol{x} \in E$, on appelle solution élémentaire la réponse $G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|f]$ dans E à une source ponctuelle exercée en $\boldsymbol{x}$, d'intensité variable dans le temps $f(t)$ et pour des conditions initiales nulles (repos initial). On doit donc avoir :

$$\Delta G - \frac{1}{c^2}\ddot{G} + \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})f(t) = 0 \tag{7.4}$$

La fonction $f(t)$ est supposée deux fois continûment differentiable et nulle pour $t < 0$ (ce qui implique $f(0) = \dot{f}(0) = 0$).

La solution élémentaire pour l'espace infini ($E = \mathbb{R}^3$) est donnée par :

$$G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|f] = \frac{f(t-r/c)}{4\pi r} \qquad G_{,j}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|f] = \frac{-r_{,j}}{4\pi r^2}\left[f(t-r/c) + \frac{r}{c}\dot{f}(t-r/c)\right] \tag{7.5}$$

Elle dépend de t à travers le *temps retardé* $t - r/c$: effet de causalité, dû à la célérité finie de la propagation des signaux. Elle vérifie également la propriété de symétrie :

$$G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|f] = G[\boldsymbol{y},t,\boldsymbol{x}|f] \tag{7.6}$$

La singularité de G en r^{-1} est apparente. La source statique $f(t) = 1$ redonne la solution élémentaire de l'équation de Laplace[1]. Un développement limité à l'ordre 2 en

[1] A condition de renvoyer le temps initial à $t = -\infty$

r autour de $r = 0$ de $f(t - r/c)$ permet de montrer que :

$$G[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = f(t)G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \frac{\dot{f}(t)}{4\pi c} + \frac{\ddot{f}(t)}{8\pi c^2} r + o(r) \tag{7.7}$$

$$G_{,j}[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = f(t)G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \frac{r_{,j}}{8\pi c^2}\ddot{f}(t) + o(1) \tag{7.8}$$

où $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1/(4\pi r)$ est la solution élémentaire de l'équation de Laplace. Ce résultat met en évidence l'égalité des singularités des solutions dynamique et statique.

La notation $G[\cdot|f]$ (Eringen et Suhubi [4]) présente G comme un *opérateur* sur la source f, ce qui se révélera commode.

Autres solutions élémentaires. On peut définir, comme dans le cas statique, une infinité de solutions élémentaires, caractérisées par la donnée de E, f et de conditions aux limites sur ∂E. Par exemple, si E est un demi-espace (et donc ∂E un plan), la méthode des images (section 2.1) est encore applicable : désignant par $\bar{\boldsymbol{x}}$ le symétrique de $\boldsymbol{x}$ par rapport à ∂E, les solutions élémentaires G^D et G^N associées à des conditions de Dirichlet et de Neumann homogènes sur ∂E sont données par :

$$G^D[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = G[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] - G[\bar{\boldsymbol{x}}, t, \boldsymbol{y}|f] \qquad (G^D\ |_{\partial E} = 0)$$
$$G^N[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = G[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] + G[\bar{\boldsymbol{x}}, t, \boldsymbol{y}|f] \qquad (H^N\ |_{\partial E} = 0)$$

Solution élémentaire impulsionnelle. Correspondant par définition à une force ponctuelle *impulsionnelle* exercée au point $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ et à l'instant $t = 0$:

$$f(t) = \delta(t)$$

elle est notée :

$$G[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|\delta] \equiv G(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$$

et vérifie en tout $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ les conditions initiales $G(\boldsymbol{x}, 0, \boldsymbol{y}) = \dot{G}(\boldsymbol{x}, 0, \boldsymbol{y}) = 0$. Remarquant que :

$$f(t) = \int_0^t f(t - \tau)\delta(\tau)d\tau = (f \star \delta)(t)$$

où $\star$ désigne le produit de convolution temporelle (7.3), on peut montrer que la solution élémentaire associée à $f(t)$ est reliée à la solution impulsionnelle par :

$$G[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = G(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \star f \tag{7.9}$$

En particulier, l'expression (7.5) avec $f(t) = \delta(t)$ redonne la solution impulsionnelle.

7.2 Représentation intégrale des solutions de l'équation des ondes

Considérons un domaine Ω supposé pour l'instant borné et soit $\boldsymbol{x}$ un point arbitraire *non situé sur* $\partial\Omega$. L'identité de réciprocité (7.2) appliquée à l'état réel (état 1) et à la

solution élémentaire impulsionnelle (état 2) conduit à :

$$u(\boldsymbol{x},t) + \int_{\partial\Omega} \{H(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \star u(\boldsymbol{y},t) - G(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \star q(\boldsymbol{y},t)\} \, \mathrm{d}S_y$$
$$= \int_\Omega G(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \star F(\boldsymbol{y},t) \, \mathrm{d}V_y + \frac{1}{c^2} \int_\Omega \Big\{ v_0(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) + u_0(\boldsymbol{y}) \dot{G}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \Big\} \, \mathrm{d}V_y$$

en notant $H = G_{,j} n_j$ la dérivée normale de la solution élémentaire. L'équation ci-dessus, réarrangée compte tenu de (7.9), conduit à la représentation intégrale de u :

$$\begin{aligned} \kappa u(\boldsymbol{x},t) = & \int_{\partial\Omega} \{G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)] - H[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)]\} \, \mathrm{d}S_y \\ & + \int_\Omega G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|F(\boldsymbol{y},t)] \, \mathrm{d}V_y \\ & + \frac{1}{c^2} \int_\Omega \Big\{ v_0(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) + u_0(\boldsymbol{y}) \dot{G}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \Big\} \, \mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{7.10}$$

avec $\kappa = 1$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega$), $\kappa = 0$ ($\boldsymbol{x} \notin \Omega$). Cette formule donne $u(\boldsymbol{x},t)$ en fonction des variables à la frontière et des données en sources volumiques et conditions initiales. Les intégrales étant indéfiniment différentiables par rapport à $\boldsymbol{x}$ pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$, on en déduit la formule de représentation du gradient de u :

$$\begin{aligned} \kappa u_{,i}(\boldsymbol{x},t) = & \int_{\partial\Omega} \{G_{,\bar{\imath}}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)] - G_{,\bar{\imath}j}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] n_j(\boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y \\ & + \int_\Omega G_{,\bar{\imath}}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|F(\boldsymbol{y},t)] \, \mathrm{d}V_y \\ & + \frac{1}{c^2} \int_\Omega \Big\{ v_0(\boldsymbol{y}) G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) + u_0(\boldsymbol{y}) \dot{G}_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \Big\} \, \mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{7.11}$$

avec $\kappa = 1$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega$), $\kappa = 0$ ($\boldsymbol{x} \notin \Omega$). Les formules (7.10), (7.11) sont applicables à tout instant $t \geq 0$ et en tout point $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$. Toute solution élémentaire compatible avec le domaine d'étude Ω peut être utilisée. En pratique, on fait le plus souvent appel à la solution élémentaire (7.5) pour l'espace infini, qui vérifie en particulier :

$$G_{,\bar{\imath}}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|f] = -G_{,i}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|f]$$

de sorte que la représentation de $u_{,i}(\boldsymbol{x},t)$ s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} \kappa u_{,i}(\boldsymbol{x},t) = & \int_{\partial\Omega} \{G_{,ij}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] n_j(\boldsymbol{y}) - G_{,i}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)]\} \, \mathrm{d}S_y \\ & - \int_\Omega G_{,i}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|F(\boldsymbol{y},t)] \, \mathrm{d}V_y \\ & - \frac{1}{c^2} \int_\Omega \Big\{ v_0(\boldsymbol{y}) G_{,i}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) - u_0(\boldsymbol{y}) \dot{G}_{,i}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \Big\} \, \mathrm{d}V_y \end{aligned}$$

Une intégration par parties au moyen de l'identité (A.7) permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} G_{,ij}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)]n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&= \int_{\partial\Omega} D_{ji}G_{,j}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)]\,\mathrm{d}S_y + \int_{\partial\Omega} n_i(\boldsymbol{y})G_{,jj}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u_k(\boldsymbol{y},t)]\,\mathrm{d}S_y \\
&= \int_{\partial\Omega} \left\{ G_{,j}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|D_{ij}u(\boldsymbol{y},t)] + \frac{1}{c^2}n_j(\boldsymbol{y})G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\ddot{u}(\boldsymbol{y},t)] \right\} \mathrm{d}S_y
\end{aligned}$$

compte tenu de l'équation de la dynamique (7.4). On obtient alors la représentation de $u_{,i}(\boldsymbol{x},t)$ sous une forme intégrée par parties

$$\begin{aligned}
\kappa u_{,i}(\boldsymbol{x},t) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ G_{,j}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|D_{ij}u(\boldsymbol{y},t)] + \frac{1}{c^2}G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\ddot{u}(\boldsymbol{y},t)]n_j(\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\
&- \int_{\partial\Omega} G_{,i}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)]\,\mathrm{d}S_y - \int_{\Omega} G_{,i}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|F(\boldsymbol{y},t)]\,\mathrm{d}V_y \\
&- \frac{1}{c^2}\int_{\Omega} \left\{ v_0(\boldsymbol{y})G_{,i}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) - u_0(\boldsymbol{y})\dot{G}_{,i}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}V_y \qquad (7.12)
\end{aligned}$$

qui est le pendant de la formule (2.16) en statique.

7.3 Equations intégrales de frontière

En raison de la présence de singularités en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ quand $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, les équations intégrales sont obtenues par la méthode de passage à la limite déjà utilisée en statique (section 2.2) : un domaine $\Omega_\varepsilon = \Omega - v_\varepsilon$ est construit par prélèvement d'un voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = v_\varepsilon$ de $\boldsymbol{x}$ de diamètre $\leq \varepsilon$, et on pose $\partial\Omega_\varepsilon = (\partial\Omega - e_\varepsilon) + s_\varepsilon$ (avec $s_\varepsilon = \Omega \cap \partial v_\varepsilon$), $e_\varepsilon = \partial\Omega \cap v_\varepsilon$. La propriété de report des singularités en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ de la solution élémentaire dynamique dans sa contrepartie statique joue un rôle essentiel, et permet d'exploiter les résultats de régularisation en statique obtenus au chapitre 2. On suppose pour simplifier l'absence de forces de volume et le repos initial ($F = 0, u_0 = v_0 = 0$).

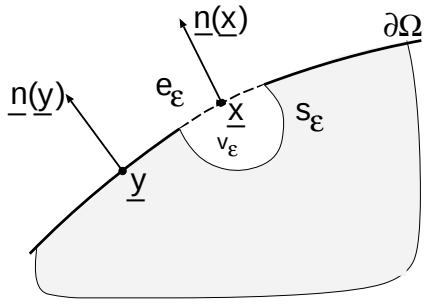

Figure 7.1: Voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(x)$ et autres notations utilisées pour le passage à la limite.

Une équation intégrale de frontière est cherchée comme limite pour $\varepsilon \to 0$ de l'identité (7.10) prise pour le domaine Ω_ε :

$$\int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \{H[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] - G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)]\}\, \mathrm{d}S_y = 0 \tag{7.13}$$

Remarquer que l'identité *statique* (2.7) entraîne :

$$u(\boldsymbol{x},t) \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y = 0$$

permet de reformuler (7.13) comme :

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \{H[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] - u(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\, \mathrm{d}S_y \\ &- \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)]\, \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{7.14}$$

De plus, on note que :

$$\begin{aligned} &H[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] - u(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= \{H[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] - u(\boldsymbol{y},t)H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\} + [u(\boldsymbol{y},t) - u(\boldsymbol{x},t)]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

La différence des solutions élémentaires dynamique et statique étant régulière (section 7.1), l'égalité ci-dessus ramène la régularisation de l'équation intégrale dynamique à celle de l'équation statique, déjà résolue. On sait en fait (chapitre 2) que la quantité $[u(\boldsymbol{y},t) - u(\boldsymbol{x},t)]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ est faiblement singulière dès que u présente une régularité $C^{0,\alpha}$ en $\boldsymbol{x}$. Sous cette dernière condition, les intégrales de (7.14) sont donc convergentes, et le passage à la limite $\varepsilon \to 0$ conduit à des intégrales impropres ordinaires. Ainsi, toute solution de l'équation des ondes (7.1) avec source volumique et conditions initiales nulles vérifie l'équation intégrale régularisée :

$$\int_{\partial\Omega} \{H[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] - u(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\, \mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)]\, \mathrm{d}S_y = 0 \tag{7.15}$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE RÉGULARISÉE DU GRADIENT. On considère uniquement l'utilisation de la solution élémentaire (7.5) pour l'espace infini et la méthode d'intégration par parties suivie de régularisation au premier ordre. La représentation intégrale de $u_{,i}(\boldsymbol{x},t)$ est cherchée comme la limite pour $\varepsilon \to 0$ de l'identité :

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \left\{ G_{,j}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|D_{ij}u(\boldsymbol{y},t)] + \frac{1}{c^2} G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\ddot{u}(\boldsymbol{y},t)] n_i(\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &- \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} G_{,i}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)]\, \mathrm{d}S_y = 0 \end{aligned} \tag{7.16}$$

que l'on réécrit de manière à faire apparaître la solution statique :

$$\begin{aligned}0 = &\int_{(\partial\Omega-e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \{G_{,j}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|D_{ij}u(\boldsymbol{y},t)] - D_{ij}u(\boldsymbol{y},t)G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y \\ &+ \frac{1}{c^2}\int_{(\partial\Omega-e_\varepsilon)+s_\varepsilon} G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\ddot{u}(\boldsymbol{y},t)]n_i(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\ &- \int_{(\partial\Omega-e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \{G_{,i}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)] - q(\boldsymbol{y},t)G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{(\partial\Omega-e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \left\{D_{ij}u(\boldsymbol{y},t)G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y},t)U^k_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\}\,\mathrm{d}S_y = 0\end{aligned}$$

Les trois premières intégrales ci-dessus, à la limite $\varepsilon \to 0$, sont des intégrales impropres sur $\partial\Omega$, faiblement singulières : la première et la troisième en raison de la propriété (7.8) d'égalité des parties singulières des solutions dynamique et statique, la seconde car G a une singularité intégrable. Enfin, reprenant le résultat de régularisation (5.33) obtenu en statique, on a :

$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(\partial\Omega-e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \{D_{ij}u(\boldsymbol{y},t)G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - q(\boldsymbol{y},t)G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y \\ &= -\frac{1}{2}u_{,i}(\boldsymbol{x},t) + D_{ij}u(\boldsymbol{x},t)I_j(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - q(\boldsymbol{x},t)I_i(\boldsymbol{x},\partial\Omega) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \{[D_{ij}u(\boldsymbol{y},t) - D_{ij}u(\boldsymbol{x},t)]G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - [q(\boldsymbol{y},t) - q(\boldsymbol{x},t)]G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

où le terme $I_i(\boldsymbol{x},\partial\Omega)$ est donné par (5.31). Le résultat de cette analyse est la représentation intégrale du gradient à la frontière : pour tout point $\boldsymbol{x}$ situé sur $\partial\Omega$ auquel u et la normale $\boldsymbol{n}$ sont de régularités $C^{1,\alpha}$ et $C^{0,\alpha}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u_{,i}(\boldsymbol{x},t) = &D_{ij}u(\boldsymbol{x},t)I_j(\boldsymbol{x},\partial\Omega) - q(\boldsymbol{x},t)I_i(\boldsymbol{x},\partial\Omega) \\ &+ \int_{\partial\Omega} [G_{,j}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|D_{ij}u(\boldsymbol{y},t)] - D_{ij}u(\boldsymbol{x},t)G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\,\mathrm{d}S_y \\ &- \int_{\partial\Omega} [G_{,i}[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)] - q(\boldsymbol{x},t)G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\,\mathrm{d}S_y \\ &+ \frac{1}{c^2}\int_{\partial\Omega} G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\ddot{u}(\boldsymbol{y},t)]n_i(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \qquad (7.17)\end{aligned}$$

où le terme $I_i(\boldsymbol{x},\partial\Omega)$ est donné par (5.31).

Commentaires. La propriété (7.7)–(7.8) de report de la singularité dynamique dans la solution statique homologue joue un rôle important car elle permet d'étendre à la dynamique les formulations intégrales obtenues pour la statique. Cette idée sera reprise pour l'élastodynamique.

L'équation intégrale (7.15) est établie pour toute solution élémentaire, tandis que celle en gradient (7.57) ne vaut sous cette forme que pour la solution élémentaire de

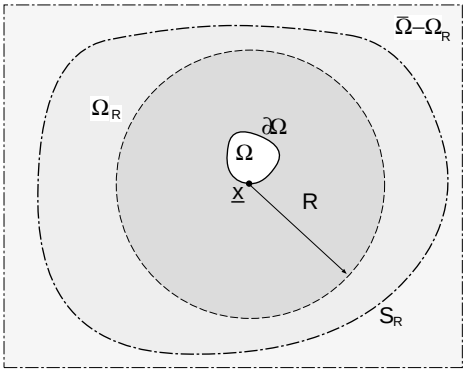

Figure 7.2: Domaine Ω_R pour le passage à la limite $R \to \infty$.

l'espace infini. Les hypothèses de régularité que doivent satisfaire (u, q) pour que les intégrales de (7.15), (7.17) soient faiblement singulières sont les mêmes qu'en statique.

PROBLÈMES PLANS. Une discussion analogue à celle faite pour la statique en section 2.5 permet de montrer que les équations intégrales associées à l'équation des ondes pour deux dimensions d'espace ont la même écriture qu'en trois dimensions. Par exemple, l'équation intégrale (7.15) est transposée aux problèmes plans en prenant $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2)$ et en faisant porter les intégrations sur la *courbe* $\partial\Omega$ frontière du domaine d'étude $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. La solution élémentaire pour le plan infini est :

$$G[\tilde{x}, t, \tilde{y}|f] = \frac{1}{2\pi} \int_r^{ct} \frac{f(t - \eta/c)}{\sqrt{\eta^2 - r^2}} d\eta \qquad (r = |\tilde{y} - \tilde{x}|) \tag{7.18}$$

On remarque qu'elle fait intervenir tous les temps retardés $t - r/v$ pour $r/t \leq v \leq c$, contrairement à la solution élémentaire tridimensionnelle (7.5) qui ne fait intervenir que le temps retardé $t - r/c$ correspondant à la célérité physique c. Cet effet de "traînée" reflète le fait que la solution bidimensionnelle provient de l'intégration de la solution tridimensionnelle sur $-\infty \leq x_3 \leq +\infty$ et est donc la réponse à une *ligne infinie* de sources ponctuelles.

PRÉSENCE DE SOURCES OU CONDITIONS INITIALES. La présence de sources ou conditions initiales n'affecte pas la méthode de régularisation ; le second membre de l'équation intégrale (7.15) devient non nul et égal à :

$$\int_\Omega G[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|F(\boldsymbol{y}, t)]\, \mathrm{d}V_y + \frac{1}{c^2} \int_\Omega \Big\{ v_0(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) + u_0(\boldsymbol{y}) \dot{G}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \Big\}\, \mathrm{d}V_y$$

7.4 Problèmes extérieurs et conditions à l'infini

CONDITION DE RADIATION. L'extension de l'équation intégrale (7.15) à un domaine non borné $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$ (avec Ω borné) va faire apparaître certaines restrictions sur le

comportement de la solution u. Pour le voir, on définit un domaine borné Ω_R limité intérieurement par $\partial\Omega$ et extérieurement par la sphère S_R de centre $\boldsymbol{x}$ et de (grand) rayon R, afin de considérer le passage à la limite $R \to +\infty$ (figure 7.2). L'équation intégrale (7.15), appliquée au domaine Ω_R et pour $\boldsymbol{x}$ intérieur à S_R, s'écrit :

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x},t) + \int_{\partial\bar{\Omega}} [H[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] - u(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] \, \mathrm{d}S_y \\ + \int_{S_R} \{H[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] - G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)]\} \, \mathrm{d}S_y = 0 \end{aligned} \tag{7.19}$$

où on a tenu compte de l'identité (2.7) sur la solution élémentaire statique, qui donne ici :

$$\int_{S_R} H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y = -1$$

La normale $\boldsymbol{n}$ est dirigée vers l'extérieur de Ω_R, donc en particulier vers l'intérieur de $\bar{\Omega}$. On cherche des conditions suffisantes permettant d'avoir :

$$\lim_{R\to\infty} I_k = 0 \qquad I_k = \int_{S_R} \{H[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] - G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)]\} \, \mathrm{d}S_y$$

On remarque que l'expression $(7.5)_2$ permet d'écrire :

$$H[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|f] = -\frac{1}{c}G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\dot{f}] - \frac{1}{r}G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|f] \qquad (\boldsymbol{y} \in S_R)$$

car $r_{,i}n_{,i} = 1$ sur S_R. On peut alors réécrire I_k comme :

$$I_k = -\int_{S_R} \left\{ G\left[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y} \mid \left(q + \frac{1}{c}\dot{u}\right)(\boldsymbol{y},t)\right] + \frac{1}{R}G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] \right\} R^2 d\omega$$

ayant posé $\mathrm{d}S_y = R^2 d\omega$, où ω est l'angle solide vu depuis $\boldsymbol{x}$. Compte tenu du fait que $G = O(1/R)$, les conditions à l'infini :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} u & = & o(1) & \text{(décroissance)} \\ q + \dfrac{1}{c}\dot{u} & = & o(R^{-1}) & \text{(radiation)} \end{array} \right. \qquad (R \to \infty) \tag{7.20}$$

suffisent à annuler I_k à la limite $R \to \infty$. Elles assurent l'unicité de la solution d'un problème extérieur (Eringen et Suhubi [4]). La condition $(7.20)_2$, dite de Sommerfeld, exprime l'absence supposée de sources à l'infini.

Equation intégrale. L'analyse ci-dessus montre que toute solution u de l'équation des ondes (7.1) pour le domaine non borné $\bar{\Omega}$ et satisfaisant aux les conditions à l'infini (7.20) vérifie l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} u_k(\boldsymbol{x},t) + \int_{\partial\bar{\Omega}} [H[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u(\boldsymbol{y},t)] - u(\boldsymbol{x},t)H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] \, \mathrm{d}S_y \\ - \int_{\partial\bar{\Omega}} G[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|q(\boldsymbol{y},t)] \, \mathrm{d}S_y = 0 \end{aligned} \tag{7.21}$$

Celle-ci ne diffère de (7.55) que par l'apparition d'un terme libre $u_k(\boldsymbol{x}, t)$ ainsi que l'orientation de la normale $\boldsymbol{n}$, extérieure au domaine $\bar{\Omega}$.

Le passage à la limite $R \to \infty$ ainsi que les conditions à l'infini (7.20) restent valables en présence de données (F, u_0, v_0) non nulles telles que :

$$\int_{\bar{\Omega}} \left\{ G[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y} | F(\boldsymbol{y}, t)] + \frac{1}{c^2} \left[v_0(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) + u_0(\boldsymbol{y}) \dot{G}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \right] \right\} \, \mathrm{d}V_y < \infty \qquad (7.22)$$

Le second membre de l'équation intégrale (7.21) devient alors non nul et égal à la limite ci-dessus (c'est-à-dire l'intégrale sur $\bar{\Omega}$ supposée convergente).

REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES. L'équation (7.21) prise pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$ redonne, à l'aide de l'identité (2.7), la formule de représentation (7.10). Cette dernière est donc applicable aux domaines bornés aussi bien que non bornés, à condition de toujours prendre la normale extérieure au domaine d'étude. Tout champ u donné dans $\bar{\Omega}$ par (7.21) vérifie les conditions à l'infini (7.20).

SOURCES NON NULLES. Toute solution u de (7.1) sur un domaine non borné n'est pas représentable par (7.10). En particulier, une *onde plane* :

$$u^I(\boldsymbol{y}, t) = A g(t - \boldsymbol{y}.\boldsymbol{p}/c) \qquad (7.23)$$

où $\boldsymbol{p}$ est un vecteur unitaire définissant la direction de propagation, ne vérifie pas les conditions à l'infini (7.20). On peut alors procéder par superposition. Par exemple, si un obstacle rigide occupant le domaine Ω est attaqué par une onde plane incidente (7.23), le champ total u est mis sous la forme $u = u^I + u^S$. Le champ $\boldsymbol{u}^S$ "diffracté"[2] par la cavité vérifie $q^S = -q^I$ sur $\partial\Omega$ ainsi que les conditions à l'infini (7.20) ; il est donc représentable par (7.10). De même, on cherchera à recourir à une superposition quand les sources volumiques et les conditions initiales violent la condition (7.22).

7.5 Méthode des éléments de frontière en dynamique

La méthode des éléments de frontière en dynamique reprend bien entendu les notions développées au chapitre 3, pour la représentation et l'approximation de la frontière et des variables qu'elle supporte. La différence essentielle est l'apparition de la variable temps, qui implique l'introduction de discrétisations temporelles et de méthodes "pas à pas" (*time-marching schemes*). Seuls des problèmes avec conditions initiales et sources volumiques nulles, et traités par discrétisation en espace de type isoparamétrique, sont considérés dans cette section.

INTERPOLATION DES CHAMPS INCONNUS. On suppose $\partial\Omega$ maillée avec N_N nœuds $\boldsymbol{y}^1, \ldots, \boldsymbol{y}^{N_N}$ et N_E éléments de frontière $E_1, \ldots, E_{N_E}$. Les variables (u, q) ou $\partial\Omega$ sont

[2] Il n'y a pas de terme adéquat en français pour cette notion ; la littérature anglophone utilise *scattered*.

interpolées selon (3.10), par fonctions d'interpolation et valeurs nodales, à cela près que ces dernières dépendent du temps :

$$u(\boldsymbol{y},t)=\sum_{k=1}^{N_i} M_k(\boldsymbol{\xi})u^k(t) \qquad q(\boldsymbol{y},t)=\sum_{k=1}^{N_i} M_k(\boldsymbol{\xi})q^k(t) \qquad (\boldsymbol{\xi}\in\Delta_e) \tag{7.24}$$

L'intervalle de temps considéré $[0,T]$ est subdivisé en N intervalles temporels :

$$I_\beta=[t_{\beta-1},t_\beta] \qquad (1\le\beta\le N)$$

le pas de temps $\Delta t=t_\beta-t_{\beta-1}$ étant, pour simplifier la présentation, supposé constant (c'est-à-dire $t_\beta=\beta\Delta t$). Des fonctions d'interpolation $\phi^\beta(t)$ sont introduites, de sorte que :

$$u^k(t)=\sum_{\beta=1}^{N}\phi^\beta(t)u^k_\beta \qquad q^k(t)=\sum_{\beta=1}^{N}\phi^\beta(t)q^k_\beta$$

et la résolution numérique est ramenée à la détermination des valeurs nodales inconnues $u^k_\beta=u(\boldsymbol{y}^k,t_\beta)$ et $q^k_\beta=q(\boldsymbol{y}^k,t_\beta)$. Par analogie avec les fonctions de forme utilisées pour l'interpolation spatiale, on peut définir les $\phi^\beta(t)$ à l'aide d'une fonction de forme temporelle $S(u),\ u\in[-1,1]$, de sorte que :

$$\phi^\beta(t)=S(\frac{t-t_\beta}{\Delta t})=S(\frac{t}{\Delta t}-\beta) \tag{7.25}$$

Par exemple, une interpolation temporelle linéaire par morceaux utilisera la "fonction-chapeau" :

$$S(u)=\begin{cases}1+u & -1\le u\le 0\\ 1-u & 0\le u\le 1\end{cases} \tag{7.26}$$

Equation intégrale discrétisée. Avec la solution élémentaire (7.5) du milieu infini, elle s'écrit, avec des notations similaires à celles de la formule (3.11) du chapitre 3 :

$$\begin{aligned}0=&\sum_{e\in I(\boldsymbol{x})}\sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)}\Big\{[AS_1(e,p,b)+AS_2(e,p,b)]u_b^{m(e,p)}-B(e,p,b)q^{m(e,p)_b}\Big\}\\ &+\sum_{e\in\bar I(\boldsymbol{x})}\sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)}\Big\{AR(e,p,b)u_b^{m(e,p)}-B(e,p,b)q_b^{m(e,p)}\Big\}\\ &+u(\boldsymbol{x})\left\{1-\sum_{e\in\bar I(\boldsymbol{x})}\widehat{AR}(e)\right\}\\ &+\sum_{\beta=0}^{b-1}\sum_{e\in\bar I(\boldsymbol{x})}\sum_{p=1}^{N_{\mathrm{I}}(e)}\Big\{AR(e,p,\beta)u_\beta^{m(e,p)}-B(e,p,\beta)q_\beta^{m(e,p)}\Big\}\end{aligned} \tag{7.27}$$

avec les intégrales élémentaires

$$
\begin{aligned}
AS_1(e,p,\beta) &= \int_{E^{(e)}} \Big[[S(b-\beta-\frac{r}{c\Delta t})-1]+\frac{r}{c\Delta t}S'(b-\beta-\frac{r}{c\Delta t})\Big]\, r_{,n}\frac{\mathrm{d}S_y}{4\pi r^2}\\
AS_2(e,p,\beta) &= -\int_{E^{(e)}} [M_p(\boldsymbol{\xi})-M_p(\boldsymbol{\eta}_e)] r_{,n}\frac{\mathrm{d}S_y}{4\pi r^2}\\
AR(e,p,\beta) &= -\int_{E^{(e)}} \Big[S(b-\beta-\frac{r}{c\Delta t})+\frac{r}{c\Delta t}S'(b-\beta-\frac{r}{c\Delta t})\Big]\, M_p(\boldsymbol{\xi}) r_{,n}\frac{\mathrm{d}S_y}{4\pi r^2}\\
B(e,p,\beta) &= \int_{E^{(e)}} S(b-\beta-\frac{r}{c\Delta t}) M_p(\boldsymbol{\xi})\frac{\mathrm{d}S_y}{4\pi r}\\
\widehat{AR}(e) &= -\int_{E^{(e)}} r_{,n}\frac{\mathrm{d}S_y}{4\pi r^2}
\end{aligned}
$$

L'instant t de collocation a été choisi égal à un multiple entier $b\Delta t$ du pas de temps. Les intégrales singulières apparaissent quand $r \sim 0$. Dans ce cas, on a aussi $(t - r/c) \sim t$, ce qui explique qu'elles soient uniquement présentes en facteur des valeurs nodales à l'instant de collocation, c'est-à-dire pour $\beta = b$. Les intégrales élémentaires contenant la fonction de forme temporelle ϕ_β pour $\beta < b$ sont toutes régulières.

L'écriture (7.27) met également en évidence le fait que les intégrales élémentaires ne dépendent de β, b que par l'intermédiaire de $b - \beta$. Cette propriété est liée au choix d'un pas de temps constant et reflète une propriété générale des solutions élémentaires de l'équation des ondes : l'invariance par translation temporelle :

$$G[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f(t)] = G[\boldsymbol{x}, t+t', \boldsymbol{y}|t(t+t')]$$

On remarque que, si l'interpolation temporelle est linéaire par morceaux, on utilise la fonction S donnée par (7.26) et celle-ci vérifie :

$$S(b-\beta-\frac{r}{c\Delta t})+\frac{r}{c\Delta t}S'(b-\beta-\frac{r}{c\Delta t}) = 1$$

ce qui permet notamment d'éviter complètement le calcul de l'intégrale singulière $AS_1(e,p)$.

STRUCTURE DU PROBLÈME DISCRET EN TEMPS. L'équation intégrale discrétisée (7.27), écrite pour les points de collocation[3] $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^1, \ldots \boldsymbol{y}^{N_N}$ et l'instant $t = b\Delta t$, présente la forme matricielle :

$$[\boldsymbol{A}^0]\{\boldsymbol{U}_b\} + [\boldsymbol{B}^0]\{\boldsymbol{Q}_b\} + \sum_{\beta=1}^{b-1}\Big([\boldsymbol{A}^{b-\beta}]\{\boldsymbol{U}_\beta\} + [\boldsymbol{B}^{b-\beta}]\{\boldsymbol{Q}_\beta\}\Big) = 0 \tag{7.28}$$

$\{\boldsymbol{U}_\beta\}$ et $\{\boldsymbol{Q}_\beta\}$ sont les vecteurs constitués des valeurs nodales u^k_β et q^k_β à l'instant $\beta\Delta t$. L'écriture ci-dessus, qui tient compte de la propriété d'invariance par translation temporelle, a la structure d'une *convolution discrète*. L'équation intégrale discrétisée à $t = t_b$ fait *a priori* apparaître les valeurs nodales à tous les instants $t_\beta, \beta \le b$. L'écriture

[3] D'autres choix de points de collocation sont bien sûr possibles.

(7.28) souligne le fait qu'on cherche à avancer dans le temps, c'est-à-dire calculer les inconnues à $t = t_\beta$ en supposant résolus tous les instants antérieurs, les conditions initiales à $t_0 = 0$ permettant de démarrer ce processus. Les variables à $t = t_b$ sont pour moitié inconnues et pour moitié données par les conditions aux limites du problème, et il faut procéder comme en statique (chapitre 3) à une permutation de colonnes de manière à isoler les valeurs nodales restées inconnues après prise en compte des conditions aux limites, de sorte que (7.28) prend la forme :

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{X}_b\} = \{\boldsymbol{F}_b\} - \sum_{\beta=1}^{b-1} \Big([\boldsymbol{A}^{b-\beta}]\{\boldsymbol{U}_\beta\} + [\boldsymbol{B}^{b-\beta}]\{\boldsymbol{T}_\beta\} \Big) \tag{7.29}$$

où $\{\boldsymbol{X}_b\}$ désigne le vecteur des valeurs nodales pour $t = t_b$ inconnues et $\{\boldsymbol{F}_b\}$ regroupe les contributions des conditions aux limites à $t = t_b$. Le second membre de (7.29) met en évidence le fait que les inconnues à l'instant $t = t_b$ dépendent non seulement des conditions aux limites mais aussi de l'histoire (valeurs $(u, q)_\beta, \beta < b$) ; ceci provient de la présence du temps retardé $t - r/c$ dans la solution élémentaire (7.5). La "matrice résolvante" $[\boldsymbol{K}]$, construite à partir de $[\boldsymbol{A}^0], [\boldsymbol{B}^0]$ après isolation des valeurs nodales restant inconnues après prise en compte des conditions aux limites, ne devra donc être construite et factorisée qu'une fois. Comme en statique, $[\boldsymbol{K}]$ est pleine, non symétrique et ne présente pas de structure particulière.

De plus, les matrices $[\boldsymbol{A}^{b-\beta}], [\boldsymbol{B}^{b-\beta}]$ sont nulles si $b-\beta$ dépasse une certaine valeur $N(\partial\Omega, \Delta t)$, qui dépend de la surface $\partial\Omega$ et du pas de temps Δt. En effet, le temps n'intervient dans la solution élémentaire qu'à travers le temps retardé $t - r/c$. Or, r ne peut prendre de valeurs supérieures au diamètre de $\partial\Omega$: $r \leq \max_{x,y\in\partial\Omega} |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$, et donc :

$$b - \beta \leq N(\partial\Omega, \Delta t) \qquad N(\partial\Omega, \Delta t) = 1 + (\text{partie entière de})\frac{1}{c\Delta t}\text{diam}(\partial\Omega)$$

L'intégration de l'histoire antérieure dans (7.29) est ainsi limitée dans le passé (la sommation sur β commence à $\beta = \max(0, b - N(\partial\Omega, \Delta t))$. Toutefois, cette remarque ne s'applique qu'aux problèmes tridimensionnels ; elle est fausse, en raison du phénomène de "traînée" présenté par les solutions élémentaires, pour les problèmes plans.

Etapes de la résolution du problème discrétisé. Celles-ci consistent en :

1. Assemblage des matrices $([\boldsymbol{A}^0], [\boldsymbol{B}^0]), \ldots, ([\boldsymbol{A}^{N(\partial\Omega,\Delta t)}], [\boldsymbol{B}^{N(\partial\Omega,\Delta t)}])$.
2. Prise en compte des conditions aux limites ; construction puis factorisation de la "matrice résolvante" $[\boldsymbol{K}]$ à partir de $[\boldsymbol{A}^0], [\boldsymbol{B}^0]$.
3. Résolution de (7.29) à chaque pas de temps $t = b\Delta t$, $b = 0, \ldots, N$.
4. Post-traitement (si nécessaire) : calcul de valeurs de u et $\boldsymbol{\nabla} u$ en des points intérieurs à l'aide des représentations (7.10), (7.12).

On note que les matrices créées par l'étape (1) doivent toutes être stockées en mémoire car, à l'étape (3), elles sont multipliées lors du calcul de la convolution discrète par un vecteur-colonne différent à chaque pas de temps b. Toutefois, un examen plus fin du problème discret montre que chacune de ces matrices contient un grand nombre de

termes nuls. En effet, pour un point $\boldsymbol{x}$ fixé de $\partial\Omega$, la portion de $\partial\Omega$ qui contribue à $[\boldsymbol{A}^b]$ et $[\boldsymbol{B}^b]$ est définie par :

$$\{\boldsymbol{y} \in \partial\Omega \mid (b-1)\Delta t \leq r/c \leq (b+1)\Delta t\}$$

Cela permet de réduire la quantité effective de termes à stocker.

La solution élémentaire possède des propriétés de causalité (présence du temps retardé), mais le choix d'une interpolation espace-temps de type produit (7.24) détruit, en toute rigueur, cette propriété au niveau du problème discret : en effet, deux nœuds appartenant au même élément "communiquent" de manière instantanée. Toutefois, le schéma peut être considéré comme "globalement causal" si (a) le "pas d'espace" h (c.à.d. par exemple le plus grand côté d'élément du maillage) est raisonnablement petit devant les dimensions caractéristiques de $\partial\Omega$, et (b) le pas de temps Δt est au maximum égal à h/c.

QUELQUES QUESTIONS OUVERTES RELATIVES AU PROBLÈME DISCRET. Ce qui précède constitue l'approche "standard" de la discrétisation des équations intégrales en potentiels retardés, telle qu'elle apparaît dans la majorité des travaux publiés récents. Des difficultés relatives au problème discret en temps subsistent, non résolues à notre connaissance.

Stabilité et convergence du schéma temporel. Cet aspect très important est loin d'être maîtrisé. La dépendance du problème discret par rapport au pas de temps est très complexe, du fait de l'imbrication du temps et de l'espace par l'intermédiaire des temps retardés. Certains auteurs considèrent que le schéma temporel est de nature implicite en raison précisément de cette dépendance et y voient un argument de stabilité inconditionnelle.

Calcul des intégrales élémentaires . Ici encore, la présence du temps retardé crée des difficultés spécifiques, n'apparaissant ni en statique ni en variable fréquentielle. Les intégrales élémentaires de (7.27) ont la forme générale :

$$\int_E K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) M_p(\boldsymbol{\xi}) S(b-\beta-\frac{r}{c\Delta t}) J(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi \tag{7.30}$$

où le support de la fonction d'interpolation temporelle S est l'intervalle $[-1,1]$; de plus $S(\eta)$ a une dérivée discontinue en $\eta = \pm 1$ et en $\eta = 0$.

Notant $S^\beta(\boldsymbol{x})$ le volume de l'espace compris entre les sphères centrées en $\boldsymbol{x}$ et de rayons $(\beta-1)c\Delta t$ et $(\beta+1)c\Delta t$, on voit que le support de l'intégrale (7.30) est en fait la surface $E^\beta(\boldsymbol{x}) = E \cap S^\beta(\boldsymbol{x})$, intersection de cette couronne sphérique et de l'élément E, et que l'intégrand est non-dérivable sur le bord de $E^\beta(\boldsymbol{x})$ pour toutes les fonctions d'interpolation usuelles ϕ^β. Le calcul numérique de cette intégrale par points de Gauss sur l'élément E entier risque d'être entaché d'erreurs importantes. Pour se convaincre du problème, il suffit de calculer par points de Gauss l'intégrale sur $[-1,1]$ de la fonction ψ_a : $\psi_a(z) = 0$ si $z \leq a$ et $\psi_a(z) = z - a$ si $z \geq a$, pour toutes les valeurs de a comprises entre -1 et 1 et de constater que les écarts relatifs entre la valeur calculée et la valeur exacte fluctuent fortement avec a, ce qui met en évidence le manque de fiabilité de l'intégration gaussienne dans ce cas. De façon générale, l'erreur

commise en intégrant une fonction par points de Gauss a un majorant proportionnel à ses dérivées partielles d'un certain ordre (fonction du nombre de points employés), qui, dans les conditions présentes, n'est pas défini.

L'intégration par points de Gauss sur l'élément complet n'étant pas satisfaisante, la meilleure solution serait de déterminer analytiquement les sous-ensembles $E^\beta(\boldsymbol{x})$ puis procéder à une intégration par points de Gauss sur chaque $E^\beta(\boldsymbol{x})$, ce qui garantirait alors l'efficacité de l'intégration numérique. Pour les problèmes bidimensionnels avec discrétisation simple (éléments rectilignes), cette opération, quoique fastidieuse, est faisable. Par contre, ce problème de géométrie devient inextricable en trois dimensions.

L'autre possibilité est le recours à la "force brutale" (très grand nombre de points de Gauss), ce qui rend le calcul des intégrales élémentaires notablement plus coûteux qu'en statique ou dynamique stationnaire. La littérature fait peu mention de ce problème, qui peut pourtant se révéler dommageable en pratique (voir cependant Karabalis [7], qui propose une méthode de subdivision de l'élément en un grand nombre de petits carrés, avec intégration numérique gaussienne sur chaque subdivision).

Autres méthodes d'interpolation temporelle. Pour l'instant, on n'a considéré que la résolution "pas à pas" en temps, qui est la plus classique. Elle repose sur des fonctions d'interpolation à support borné et différentiables par morceaux seulement. Plusieurs arguments pourraient militer en faveur d'autres choix de bases de fonctions, de support $\mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{R}$) et différentiables :

- La méthode "pas à pas" relève, à certains points de vue, de la "force brutale" : elle fournit l'évolution temporelle détaillée mais ne permet pas de définir au départ des informations partielles ou globales qu'on pourrait souhaiter obtenir à moindres frais à l'aide de fonctions de base bien choisies.
- Les difficultés d'intégration spatiale précédemment mentionnées s'atténuent si la représentation temporelle des variables (u, q) utilise des fonctions (plusieurs fois) differentiables.
- Une analyse de stabilité et de convergence serait peut-être plus facile à faire.

Dans cet ordre d'idées, deux directions nous paraissent pouvoir être examinées :

Approche de type "méthodes spectrales". La représentation temporelle des variables (u, q) utilise des polynômes de la variable t, de degré n arbitrairement élevé, définis sur l'intervalle d'étude $[0, T]$ entier qu'il est donc inutile de subdiviser. Les méthodes spectrales sont connues en mécanique des fluides (Métivet [10]) ; en particulier, on sait que, dans ce contexte, la vitesse de convergence en fonction du degré n est d'autant plus grande que la régularité par rapport à t des fonctions inconnues est élevée.

Utilisation de l'analyse par ondelettes. Les ondelettes (Daubechies [3]) sont des fonctions analysatrices de signaux dont l'intérêt repose sur le constat suivant : un signal réel est à la fois bien localisé en temps et en fréquence (par exemple, une note de musique possède à la fois une hauteur et une durée bien définies). Or la transformée de Fourier d'un signal instantané est complètement délocalisée ; réciproquement un signal sinusoïdal possède une transformée de Fourier parfaitement localisée. D'où l'idée d'autres fonctions analysatrices qui soient (du moins numériquement) localisées à la fois en temps et en fréquence. La courbe de Gauss en est un exemple, mais doit être

écartée pour d'autres raisons. L'analyse par ondelettes utilise une fonction analysatrice ψ localisée (en temps et en fréquence) et régulière ; le signal est alors analysé par translation et dilatation de l'ondelette de base ψ le long de $\mathbb{R}$. L'ondelette ψ est en particulier construite de façon à avoir une moyenne nulle ; cette propriété lui permet de bien "voir" les discontinuités du signal analysé. Enfin, certaines de ces ondelettes permettent, par translation et dilatation, de définir une base hilbertienne de fonctions de t. Ceci entraîne l'existence de formules de décomposition/synthèse d'une fonction en ondelettes et, grâce à la propriété d'orthogonalité des éléments de la base, permet de décomposer le calcul temporel en une série de calculs indépendants.

7.6 Equations de l'élastodynamique linéaire

L'extension des notions précédentes à l'élastodynamique en régime transitoire est maintenant abordée ; seule l'élasticité isotrope est considérée. Pour commencer, il est nécessaire de rappeler brièvement les équations fondamentales de l'élastodynamique, sujet traité dans des ouvrages classiques, par exemple Eringen et Suhubi [4]. Pour une distribution donnée $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y},t)$ d'efforts massiques exercée sur le solide Ω considéré, on appelle *état élastodynamique* tout triplet $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{F})$ vérifiant la loi de comportement élastique isotrope et l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \lambda(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\mathbf{1} + \mu(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}^T\boldsymbol{u}) \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho(\boldsymbol{F} - \ddot{\boldsymbol{u}}) = 0 \end{array}\right. \qquad \forall(\boldsymbol{y},t) \in \Omega \times [0,T] \tag{7.31}$$

Tout problème élastodynamique bien posé comporte en outre des conditions aux limites sur la frontière $\partial\Omega$: par exemple, efforts de contact $\boldsymbol{t}^D$ appliqués sur une portion S_{T} de $\partial\Omega$:

$$\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{y},t) = \boldsymbol{t}^D(\boldsymbol{y},t) \qquad \forall(\boldsymbol{y},t) \in S_{\mathrm{T}} \times [0,T]$$

et déplacements imposés sur la portion complémentaire $S_u = \partial\Omega - S_{\mathrm{T}}$:

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},t) = \boldsymbol{u}^D(\boldsymbol{y},t) \qquad \forall(\boldsymbol{y},t) \in S_u \times [0,T]$$

ainsi que des conditions initiales :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y},0) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{y}) \qquad \dot{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y},t) = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{y})$$

De plus, des conditions à l'infini doivent être imposées si Ω n'est pas borné ; ce point est abordé en section 7.10.

DÉCOMPOSITION DE LAMÉ. Rappelons [4] que tout champ de vecteurs suffisamment régulier $\boldsymbol{u}$ admet la décomposition en parties irrotationnelle et incompressible :

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\phi + \mathbf{rot}\boldsymbol{m}\psi \tag{7.32}$$

où ϕ et $\boldsymbol{\psi}$ sont donnés par :

$$\begin{array}{rcl} \phi(\boldsymbol{y},t) & = & -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|}\operatorname{div}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z},t)\,\mathrm{d}V_z \\ \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{y},t) & = & \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|}\mathbf{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{z},t)\,\mathrm{d}V_z \end{array} \tag{7.33}$$

Si $\boldsymbol{u}$ est un champ de déplacement élastodynamique, les *potentiels de Lamé* ϕ (scalaire) et $\boldsymbol{m}\psi$ (vecteur) vérifient les équations des ondes scalaire et vectorielle :

$$c_L^2\Delta\phi - \ddot{\phi} + f_L = 0 \qquad c_T^2\boldsymbol{\Delta\psi} - \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{f}_T = 0$$

les seconds membres $f_L, \boldsymbol{f}_T$ étant obtenus par décomposition (7.33) de $\boldsymbol{F}$ et les célérités c_L, c_T étant égales à :

$$c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \qquad c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

La représentation (7.32) de $\boldsymbol{u}$ est ainsi la somme d'une *onde de compression* $\boldsymbol{u}^L = \boldsymbol{\nabla}\phi$ irrotationnelle ($\mathbf{rot}\boldsymbol{u}^L = \mathbf{0}$, célérité c_L), et d'une *onde de cisaillement* $\boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{y},t) = \mathbf{rot}\boldsymbol{\psi}$ incompressible ($\operatorname{div}\boldsymbol{u}^T = 0$, célérité c_T).

Identité de réciprocité. Considérons deux états élastodynamiques $(\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{F}^1)$ et $(\boldsymbol{u}^2, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{F}^2)$ sur Ω, associés aux conditions initiales $(\boldsymbol{u}_0^1, \boldsymbol{v}_0^1)$ et $(\boldsymbol{u}_0^2, \boldsymbol{v}_0^2)$. L'identité de réciprocité (4.3), soit :

$$\int_{\partial\Omega} \left[\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u^1}).\boldsymbol{u}^2 - \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u^2}).\boldsymbol{u}^1\right] \mathrm{d}S = \int_\Omega \left[\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}^1.\boldsymbol{u}^2 - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}^2.\boldsymbol{u}^1\right] \mathrm{d}V$$

donne, compte tenu de l'équation fondamentale de la dynamique $(7.31)_2$:

$$\int_{\partial\Omega} \left[\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u^1}).\boldsymbol{u}^2 - \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u^2}).\boldsymbol{u}^1\right] \mathrm{d}S = \int_\Omega \rho\left[(\ddot{\boldsymbol{u}}^1 - \boldsymbol{F}^1).\boldsymbol{u}^2 - (\ddot{\boldsymbol{u}}^1 - \boldsymbol{F}^1).\boldsymbol{u}^1\right] \mathrm{d}V$$

Elle reste valable si les deux états élastodynamiques sont considérés à des instants différents. Suivant le procédé utilisé en section 7.1, prendre les états 1 et 2 en des instants $t_1 = \tau$ et $t_2 = t - \tau$, avec $t \geq \tau \geq 0$, et intégrer l'équation obtenue de $\tau = 0$ à $\tau = t$ conduit à une identité de réciprocité vérifiée par toute paire d'états élastodynamiques et à tout instant $t \geq 0$ (Eringen et Suhubi [4]) :

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega} \left[(\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u^1}) \star \boldsymbol{u}^2)(\boldsymbol{y},t) - (\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u^2}) \star \boldsymbol{u}^1)(\boldsymbol{y},t)\right] \mathrm{d}S_y \\
&= \int_\Omega \rho\left[(\boldsymbol{F}^2 \star \boldsymbol{u}^1)(\boldsymbol{y},t) - (\boldsymbol{F}^1 \star \boldsymbol{u}^2)(\boldsymbol{y},t)\right] \mathrm{d}V_y \\
&\quad + \int_\Omega \rho\left[\boldsymbol{v}_0^2(\boldsymbol{y}).\boldsymbol{u}^1(\boldsymbol{y},t) - \boldsymbol{v}_0^1(\boldsymbol{y}).\boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{y},t)\right] \mathrm{d}V_y \\
&\quad + \int_\Omega \rho\left[\boldsymbol{u}_0^2(\boldsymbol{y}).\dot{\boldsymbol{u}}^1(\boldsymbol{y},t) - \boldsymbol{u}_0^1(\boldsymbol{y}).\dot{\boldsymbol{u}}^2(\boldsymbol{y},t)\right] \mathrm{d}V_y
\end{aligned} \tag{7.34}$$

le symbole $\star$ désignant le produit de convolution temporelle de deux champs de vecteurs :

$$(\boldsymbol{a} \star \boldsymbol{b})(t) = \int_0^t \boldsymbol{a}(t-\tau).\boldsymbol{b}(\tau) = \int_0^t \boldsymbol{a}(\tau).\boldsymbol{b}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{7.35}$$

7.7 Solutions élémentaires élastodynamiques

DÉFINITION. On considère un point fixé $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ et un domaine $E \subseteq \mathbb{R}^3$. On appelle solution élémentaire élastodynamique le déplacement $\boldsymbol{U}^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f]$ et le tenseur des contraintes élastiques $\boldsymbol{\Sigma}^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f]$ créés dans E par une force ponctuelle exercée en $\boldsymbol{x}$, d'intensité variable dans le temps $f(t)$, suivant la direction $\boldsymbol{e}_k$, qui vérifient donc :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\Sigma}^k - \rho \ddot{\boldsymbol{U}}^k + \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) f(t) \boldsymbol{e}_k = 0 \tag{7.36}$$

et avec des conditions initiales nulles. La fonction $f(t)$ est supposée deux fois continûment différentiable et nulle pour $t < 0$ (ce qui implique les conditions initiales $f(0) = \dot{f}(0) = 0$).

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DE STOKES. C'est celle associée à l'espace infini: $E = \mathbb{R}^3$. Son calcul (Eringen et Suhubi [4]) repose sur la décomposition (7.32) par potentiels de Lamé. Remarquant que $1/4\pi r$, $r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ est solution élémentaire de l'équation de Laplace, donc que :

$$\delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_k = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{r} \boldsymbol{e}_k = \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{rot}\, \mathbf{rot} - \boldsymbol{\nabla} \operatorname{div} \right) \left\{ \frac{1}{r} \boldsymbol{e}_k \right\}$$

la force ponctuelle (7.36) peut être écrite sous la forme (7.33) comme :

$$\rho \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}, t) = \boldsymbol{\nabla} \operatorname{div} \left\{ -\frac{f(t)}{4\pi r} \boldsymbol{e}_k \right\} + \mathbf{rot}\, \mathbf{rot} \left\{ \frac{f(t)}{4\pi r} \boldsymbol{e}_k \right\} \tag{7.37}$$

La solution de Stokes est alors cherchée à l'aide de la décomposition en potentiels de Lamé :

$$\boldsymbol{U}^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = \boldsymbol{\nabla} \operatorname{div} (A_L \boldsymbol{e}_k) - \mathbf{rot}\, \mathbf{rot} (A_T \boldsymbol{e}_k) \tag{7.38}$$

Les fonctions scalaires A_α ($\alpha = L, T$) vérifient, compte tenu de (7.32) et (7.37) une équation des ondes avec second membre :

$$c_\alpha^2 \Delta A_\alpha - \ddot{A}_\alpha = \frac{f(t)}{4\pi r} \qquad (\alpha = L, T) \tag{7.39}$$

et sont données, tous calculs faits, par :

$$A_\alpha(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = -\frac{r}{4\pi\rho c_\alpha^2} \left[\int_0^1 a f(t - ar/c_\alpha) da + \int_1^{+\infty} f(t - ar/c_\alpha) da \right] \qquad (\alpha = L, T)$$

Ce résultat, reporté dans la décomposition (7.38), donne alors les parties longitudinales et transversales de $\boldsymbol{U}[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f]$:

$$U_i^{(L)k}[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = \frac{\beta^2}{4\pi\mu r} \left[(\delta_{ik} - 3 r_{,i} r_{,k}) I_L + r_{,i} r_{,k} f(t - r/c_L) \right] \tag{7.40}$$

$$U_i^{(T)k}[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = \frac{1}{4\pi\mu r} \left[(3 r_{,i} r_{,k} - \delta_{ik}) I_T + (\delta_{ik} - r_{,i} r_{,k}) f(t - r/c_T) \right] \tag{7.41}$$

où $I_{L,T}$ et le rapport β des célérités sont donnés par :

$$I_{L,T} = \int_0^1 a f(t - ar/c_{L,T}) da \qquad \beta^2 = \frac{c_T^2}{c_L^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \tag{7.42}$$

Finalement, on obtient les expressions suivantes pour la solution élémentaire de Stokes :

$$U_i^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = \frac{1}{4\pi\mu r}\left[B r_{,i} r_{,k} + (A + f(t - r/c_T))\delta_{ik}\right] \tag{7.43}$$

$$\Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = \frac{1}{4\pi r^2}\left[2C r_{,i} r_{,k} r_{,j} + \delta_{ij} r_{,k} F_L + (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) F_T\right] \tag{7.44}$$

avec :

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^\beta a f(t - ar/c_T) da \\
B &= -3A - \left(f(t - r/c_T) - \beta^2 f(t - r/c_L)\right) \\
C &= -5B + \left(f(t - r/c_T) + c_T \dot{f}(t - r/c_T)\right) \\
&\qquad - \beta^2 \left(f(t - r/c_L) + c_L \dot{f}(t - r/c_L)\right) \\
F_T &= 2B - \left(f(t - r/c_T) + c_T \dot{f}(t - r/c_T)\right) \\
F_L &= 2B - (1 - 2\beta^2)\left(f(t - r/c_L) + c_L \dot{f}(t - r/c_L)\right)
\end{aligned} \tag{7.45}$$

La solution de Stokes dépend de t à travers les *temps retardés* $t - r/c, c_T \leq c \leq c_L$: effet de causalité, dû à la célérité finie de la propagation des signaux. Elle vérifie également les propriétés de symétrie :

$$\begin{gathered}
U_i^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = U_k^i[\boldsymbol{y}, t, \boldsymbol{x}|f] = U_k^i[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] \\
U_{i,j}^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = -U_{i,j}^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f]
\end{gathered} \tag{7.46}$$

La solution de Stokes (7.43), (7.44) présente une certaine ressemblance avec la solution de Kelvin (4.8), (4.9) ; ces deux solutions sont égales pour le chargement statique $f(t) = 1$ (en supposant l'instant initial renvoyé à $t = -\infty$).

Partie singulière de la solution de Stokes. Au vu des expressions (7.43), (7.44), la solution de Stokes présente les singularités suivantes pour r arbitrairement petit :

$$U_i^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = O(1/r) \qquad \Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = O(1/r^2) \tag{7.47}$$

En fait, un développement limité à l'ordre 2 en r autour de $r = 0$ des expressions (7.45) donne (en posant $x_T = r/c_T$) :

$$\begin{aligned} A + f(t - r/c_T) &= \frac{1+\beta^2}{2} f(t) - \frac{2+\beta^3}{3} \dot{f}(t) x_T + \frac{3+\beta^4}{8} \ddot{f}(t) x_T^2 + o(r^2) \\ B &= \frac{1-\beta^2}{2} f(t) - \frac{1-\beta^4}{8} \ddot{f}(t) x_T^2 + o(r^2) \\ C &= -\frac{3(1-\beta^2)}{2} f(t) + \frac{1-\beta^4}{8} \ddot{f}(t) x_T^2 + o(r^2) \\ F_T &= -\beta^2 f(t) + \frac{1+\beta^4}{4} \ddot{f}(t) x_T^2 + o(r^2) \\ F_L &= \beta^2 f(t) - \frac{1-2\beta^2+3\beta^4}{4} \ddot{f}(t) x_T^2 + o(r^2) \end{aligned} \tag{7.48}$$

Les termes d'ordre 0 en r des expressions ci-dessus reportés dans (7.43), (7.44) redonnent, compte tenu de $(7.42)_2$, la solution de Kelvin multipliée par $f(t)$. Ceci permet de préciser (7.47) : les parties singulières des solutions de Stokes et de Kelvin sont égales, soit :

$$U_i^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = f(t) U_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + O(1) \qquad \Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] = f(t) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + O(1) \tag{7.49}$$

où (U_i^k, Σ_{ij}^k) sont les composantes de la solution statique de Kelvin. Ce résultat peut également être mis en évidence sans recourir aux développements limités (7.48) en posant $U_i^k[f] = f(t) U_i^k + \bar{U}_i^k[f]$ dans l'équation de Navier (7.31) avec la force ponctuelle (7.36), ce qui donne, compte tenu de la définition de la solution de Kelvin :

$$\bar{\Sigma}_{ij,j}^k - \rho \ddot{\bar{U}}_i^k = \ddot{f} U_i^k$$

Le second membre de l'équation ci-dessus est moins singulier que (7.36), donc $\bar{U}_i^k[f]$ est lui-même plus régulier que $U_i^k[f]$.

AUTRES SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES. On peut définir, comme dans le cas statique, une variété de solutions élémentaires, caractérisées par la donnée de E, f et de conditions aux limites sur ∂E. Citons par exemple la solution bidimensionnelle de Lamb (E est un demi-plan soumis à une force ponctuelle sur sa frontière par ailleurs libre de contraintes, voir Eringen et Suhubi [4]) ou celle de Kennett [8] (E est un demi-espace stratifié ou homogène avec surface libre).

Elles présentent en $r = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| = 0$ une singularité du type (7.47), égale à celle de solution élémentaire statique associée aux mêmes domaine E et conditions aux limites, et vérifient la propriété de symétrie :

$$\begin{aligned} C_{ijab} U_{k,\bar{b}}^a[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] &= \Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{y}, t, \boldsymbol{x}|f] \\ C_{ijpq} \Sigma_{kl,\bar{q}}^p[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f] &= C_{klab} \Sigma_{ij,b}^a[\boldsymbol{y}, t, \boldsymbol{x}|f] \end{aligned} \tag{7.50}$$

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE IMPULSIONNELLE. Elle correspond par définition à une force ponctuelle *impulsionnelle* exercée au point $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ et à l'instant $t = 0$:

$$f(t) = \delta(t)$$

et est notée :

$$U_i^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\delta] \equiv U_i^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \qquad \Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\delta] \equiv \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$$

Elle vérifie en tout $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$ les conditions initiales $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},0,\boldsymbol{y}) = \dot{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{x},0,\boldsymbol{y}) = 0$. On montre facilement que :

$$U_i^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|f] = U_i^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \star f \qquad \Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|f] = \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \star f \tag{7.51}$$

En particulier, la solution impulsionnelle de Stokes est donnée par les expressions (7.43), (7.44) avec $f(t) = \delta(t)$.

7.8 Représentations intégrales des états élastodynamiques

Considérons un domaine élastique Ω supposé pour l'instant borné et soit $\boldsymbol{x}$ un point arbitraire *non situé sur* $\partial\Omega$. L'identité de réciprocité (7.34) appliquée à l'état élastodynamique réel (état 1) et à la solution élémentaire impulsionnelle (état 2) entraîne :

$$\begin{aligned} &u_k(\boldsymbol{x},t) + \int_{\partial\Omega} \left\{ T_i^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \star u_i(\boldsymbol{y},t) - U_i^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \star t_i(\boldsymbol{y},t) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &= \int_\Omega \rho \left\{ U_i^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \star F_i(\boldsymbol{y},t) + v_{0i}(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) + u_{0i}(\boldsymbol{y}) \dot{U}_i^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}V_y \end{aligned}$$

en notant $T_i^k = \Sigma_{ij}^k n_j$ les composantes du vecteur contrainte de la solution élémentaire. L'équation ci-dessus, réarrangée compte tenu des relations (7.51), conduit à la représentation intégrale du déplacement $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$:

$$\begin{aligned} \kappa u_k(\boldsymbol{x},t) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ U_i^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|t_i(\boldsymbol{y},t)] - T_i^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u_i(\boldsymbol{y},t)] \right\} \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_\Omega \rho U_i^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|F_i(\boldsymbol{y},t)] \, \mathrm{d}V_y \\ &+ \int_\Omega \rho \left\{ v_{0i}(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) + u_{0i}(\boldsymbol{y}) \dot{U}_i^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{7.52}$$

avec $\kappa = 1$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega$), $\kappa = 0$ ($\boldsymbol{x} \notin \Omega$). Cette formule donne $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ en fonction des variables à la frontière et des données en efforts de volume et conditions initiales. Les intégrales étant indéfiniment différentiables par rapport à $\boldsymbol{x}$ pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$, la représentation intégrale des contraintes élastiques découle directement de l'application de la loi de Hooke $\sigma_{ij} = C_{ijk\ell} u_{k,\ell}$:

$$\begin{aligned}\kappa\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t) = &\int_{\partial\Omega}\left\{\Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{y},t,\boldsymbol{x}|t_k(\boldsymbol{y},t)] - C_{abk\ell}\Sigma_{ij,\ell}^k[\boldsymbol{y},t,\boldsymbol{x}|u_a(\boldsymbol{y},t)]n_b(\boldsymbol{y})\right\}\,\mathrm{d}S_y\\ &+\int_\Omega \rho\Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{y},t,\boldsymbol{x}|F_k(\boldsymbol{y},t)]\,\mathrm{d}V_y\\ &+\int_\Omega \rho\left\{v_{0k}(\boldsymbol{y})\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{y},t,\boldsymbol{x}) + u_{0k}(\boldsymbol{y})\dot\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{y},t,\boldsymbol{x})\right\}\,\mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{7.53}$$

pour laquelle on a utilisé la propriété (7.50). Les formules (7.52), (7.53) sont applicables à tout instant $t \geq 0$ et en tout point $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$. Toute solution élémentaire compatible avec le domaine d'étude Ω peut être utilisée. En pratique, on fait le plus souvent appel à la solution élémentaire de Stokes. Compte tenu de la possibilité d'échanger les dérivées par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$, éq. (7.46), la représentation du tenseur de contraintes s'écrit dans ce dernier cas :

$$\begin{aligned}\kappa\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t) = &\int_{\partial\Omega}\left\{C_{abk\ell}\Sigma_{ij,\ell}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u_a(\boldsymbol{y},t)]n_b(\boldsymbol{y}) - \Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|t_k(\boldsymbol{y},t)]\right\}\,\mathrm{d}S_y\\ &-\int_\Omega \rho\Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|F_k(\boldsymbol{y},t)]\,\mathrm{d}V_y\\ &-\int_\Omega \rho\left\{v_{0k}(\boldsymbol{y})\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) + u_{0k}(\boldsymbol{y})\dot\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\right\}\,\mathrm{d}V_y \end{aligned}$$

Une intégration par parties au moyen de l'identité (A.7) permet alors d'écrire :

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega}\Sigma_{ab,\ell}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u_a(\boldsymbol{y},t)]n_b(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\ &=\int_{\partial\Omega} D_{b\ell}\Sigma_{ab,\ell}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u_a(\boldsymbol{y},t)] + \int_{\partial\Omega}\Sigma_{ab,b}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u_a(\boldsymbol{y},t)]n_\ell(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\ &=\int_{\partial\Omega}\left\{\Sigma_{ab}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{y},t)] + \rho n_\ell(\boldsymbol{y})U_a^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\ddot u_a(\boldsymbol{y},t)]\right\}\,\mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

compte tenu de l'équation de la dynamique (7.36). On obtient alors la représentation de $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)$ sous une forme intégrée par parties qui est le pendant de la formule (4.24) obtenue pour le cas statique :

$$\begin{aligned}\kappa\sigma_{ij}(\boldsymbol{x},t) = &\int_{\partial\Omega}\left\{C_{ijk\ell}\Sigma_{ab}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{y},t)] - \Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|t_k(\boldsymbol{y},t)]\right\}\,\mathrm{d}S_y\\ &+\rho C_{ijk\ell}\int_{\partial\Omega} U_a^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\ddot u_a(\boldsymbol{y},t)]n_\ell(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\ &-\int_\Omega \rho\Sigma_{ij}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|F_k(\boldsymbol{y},t)]\,\mathrm{d}V_y\\ &-\int_\Omega \rho\left\{v_{0k}(\boldsymbol{y})\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) + u_{0k}(\boldsymbol{y})\dot\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\right\}\,\mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{7.54}$$

7.9 Equations intégrales de frontière en élastodynamique transitoire

En raison de la présence de singularités en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ quand $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$, les équations intégrales sont obtenues à l'aide de la méthode de passage à la limite développée pour l'élastostatique (section 4.4). La propriété de report des singularités en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ de la solution élémentaire dynamique dans sa contrepartie statique joue un rôle essentiel, et permet l'extension des résultats de régularisation en élastostatique établis au chapitre 4. On suppose pour simplifier l'absence de forces de volume et le repos initial.

Cette démarche conduit d'abord à un résultat similaire à l'équation intégrale (7.15) pour les solutions de l'équation des ondes scalaires : tout état élastodynamique sur Ω avec forces de volume et conditions initiales nulles vérifie l'équation intégrale régularisée en déplacements :

$$\int_{\partial\Omega} \left[T_i^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u_i(\boldsymbol{y},t)] - u_i(\boldsymbol{x},t)T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] \,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} U_i^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|t_i(\boldsymbol{y},t)] \,\mathrm{d}S_y = 0 \tag{7.55}$$

Equation intégrale régularisée en gradient de déplacement. On considère uniquement l'utilisation de la solution de Stokes et la méthode d'intégration par parties suivie de régularisation au premier ordre. L'équation intégrale en gradient de déplacement est cherchée comme la limite pour $\varepsilon \to 0$ de l'identité :

$$0 = \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \left\{\Sigma_{ab}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{y},t)] + \rho n_\ell(\boldsymbol{y})U_a^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\ddot{u}_a(\boldsymbol{y},t)]\right\} \,\mathrm{d}S_y - \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} U_{a,\ell}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|t_a(\boldsymbol{y},t)] \,\mathrm{d}S_y \tag{7.56}$$

que l'on réécrit de manière à faire apparaître la solution statique de Kelvin :

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \left\{\Sigma_{ab}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{y},t)] - D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{y},t)\Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \,\mathrm{d}S_y \\ &+ \rho \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} n_\ell(\boldsymbol{y})U_a^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\ddot{u}_a(\boldsymbol{y},t)] \,\mathrm{d}S_y \\ &- \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \left[U_{a,\ell}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|t_a(\boldsymbol{y},t)] - t_a(\boldsymbol{y},t)U_{a,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] \,\mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{(\partial\Omega - e_\varepsilon)+s_\varepsilon} \left\{D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{y},t)\Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_a(\boldsymbol{y},t)U_{a,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} \,\mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

Les trois premières intégrales ci-dessus, à la limite $\varepsilon \to 0$, sont des intégrales impropres sur $\partial\Omega$, faiblement singulières : la première et la troisième en raison de la propriété (7.49) d'égalité des parties singulières des solutions dynamique et statique,

la seconde car $U_a^k[t_a(\boldsymbol{y},t)]$ a une singularité intégrable. Enfin, reprenant le résultat de régularisation (5.33) obtenu pour l'élastostatique, on a :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(\partial\Omega-e_\varepsilon)+s_\varepsilon}&\left\{D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{y},t)\Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-t_a(\boldsymbol{y},t)U_{a,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\}\,\mathrm{d}S_y\\ &=-\frac{1}{2}u_{k,\ell}(\boldsymbol{x},t)+D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{x},t)A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\partial\Omega)-t_a(\boldsymbol{x},t)B_{a\ell}^k(\boldsymbol{x},\partial\Omega)\\ &\quad+\int_{\partial\Omega}\left[D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{y},t)-D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{x},t)\right]\Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\ &\quad-\int_{\partial\Omega}\left[t_a(\boldsymbol{y},t)-t_a(\boldsymbol{x},t)\right]U_{a,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

où les termes $A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\partial\Omega)$, $B_{a\ell}^k(\boldsymbol{x},\partial\Omega)$ sont donnés par (5.29), (5.30). Le résultat de cette analyse est la représentation intégrale du gradient de déplacement à la frontière : pour tout point $\boldsymbol{x}$ situé sur $\partial\Omega$ auquel u et la normale $\boldsymbol{n}$ sont de régularités $C^{1,\alpha}$ et $C^{0,\alpha}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u_{k,\ell}(\boldsymbol{x},t)&=D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{x},t)A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\partial\Omega)-t_a(\boldsymbol{x},t)B_{a\ell}^k(\boldsymbol{x},\partial\Omega)\\ &\quad+\int_{\partial\Omega}\left[\Sigma_{ab}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{y},t)]-D_{\ell b}u_a(\boldsymbol{x},t)\Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]\,\mathrm{d}S_y\\ &\quad-\int_{\partial\Omega}\left[U_{a,\ell}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|t_a(\boldsymbol{y},t)]-t_a(\boldsymbol{x},t)U_{a,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]\,\mathrm{d}S_y\\ &\quad+\rho\int_{\partial\Omega}U_a^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\ddot{u}_a(\boldsymbol{y},t)]n_\ell(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\end{aligned}\tag{7.57}$$

COMMENTAIRES. La propriété (7.49) de report de la singularité dynamique dans la solution statique homologue joue, comme pour la résolution de l'équation des ondes, un rôle important car elle permet d'étendre à la dynamique les formulations intégrales obtenues pour la statique.

L'équation intégrale en déplacement (7.55) est établie pour toute solution élémentaire, tandis que celle en gradient (7.57) ne l'est sous cette forme que pour la solution de Stokes. Les hypothèses de régularité que doivent satisfaire $\boldsymbol{u},\boldsymbol{t}$ pour que les intégrales de (7.55), (7.57) soient faiblement singulières sont les mêmes qu'en statique.

7.10 Problèmes extérieurs et conditions à l'infini

COMPORTEMENT À L'INFINI DE LA SOLUTION DE STOKES. Le déplacement de Stokes se comporte, pour $r=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\to\infty$, comme :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^{(L)k}.\boldsymbol{n}&=\frac{\beta^2}{4\pi\mu r}f(t-r/c_L)n_k+o(r^{-2}) &\qquad \boldsymbol{U}^{(L)k}.\boldsymbol{\tau}&=o(r^{-2})\\ \boldsymbol{U}^{(T)k}.\boldsymbol{\tau}&=\frac{1}{4\pi\mu r}f(t-r/c_T)\tau_k+o(r^{-2}) &\qquad \boldsymbol{U}^{(T)k}.\boldsymbol{n}&=o(r^{-2})\end{aligned}\tag{7.58}$$

où $\boldsymbol{n}$ définit la direction radiale pour l'origine $\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_r = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})/\left|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\right| = r_{,i}\boldsymbol{e}_i$$

et $\boldsymbol{\tau}$ est tout vecteur unitaire orthogonal à $\boldsymbol{n}$. En d'autres termes, loin du point-source $\boldsymbol{x}$, les termes dominants des parties longitudinales et transversales de $\boldsymbol{U}^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|f]$ représentent des ondes sphériques de compression et de cisaillement respectivement. Ces propriétés sont établies à partir des expressions (7.40), (7.41) et en remarquant que, pour $r > ct$:

$$\int_0^1 af(t - ar/c)da = \int_0^{ct/r} af(t - ar/c)da = \frac{c^2t^2}{r^2}\int_0^1 bf((1-b)t)db$$

conséquence de l'hypothèse $f(t) = 0$ pour $t \leq 0$, ce qui donne, en supposant f bornée :

$$\int_0^1 af(t - ar/c)da = o(r^{-1}) \qquad (r \to +\infty)$$

De plus, le déplacement et le vecteur contrainte de Stokes vérifient la *condition de radiation* :

$$\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{U}^{(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{k}}) + \rho c_\alpha \dot{\boldsymbol{U}}^{(\alpha)k} = O(r^{-2}) \qquad (\alpha = L, T) \tag{7.59}$$

Conditions de radiation en élastodynamique. L'extension de la représentation intégrale (7.52) à un domaine non borné $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$ (avec Ω borné) va faire apparaître, comme dans le cas de l'équation des ondes scalaire, certaines restrictions sur le comportement de la solution $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}$. On considère donc à nouveau le passage à la limite $R \to +\infty$ sur le domaine borné Ω_R limité intérieurement par $\partial\bar{\Omega}$ et extérieurement par la sphère S_R de centre $\boldsymbol{x}$ et de (grand) rayon R. L'équation intégrale en déplacement (7.55), appliquée au domaine Ω_R et pour $\boldsymbol{x}$ intérieur à S_R, s'écrit :

$$\begin{aligned} u_k(\boldsymbol{x}, t) &+ \int_{\partial\bar{\Omega}} \left[T_i^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|u_i(\boldsymbol{y}, t)] - T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})u_i(\boldsymbol{y}, t)\right] \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{\partial\bar{\Omega}} \left\{[u_i(\boldsymbol{y}, t) - u_i(\boldsymbol{x}, t)]T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - U_i^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|t_i(\boldsymbol{y}, t)]\right\} \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{S_R} \left\{T_i^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|u_i(\boldsymbol{y}, t)] - U_i^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|t_i(\boldsymbol{y}, t)]\right\} \mathrm{d}S_y = 0 \end{aligned} \tag{7.60}$$

où on a utilisé l'identité (4.7) sur la solution élémentaire statique, sous la forme :

$$\int_{S_R} T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = -\delta_{ik}$$

la normale $\boldsymbol{n}$ étant dirigée vers l'extérieur de Ω_R, donc en particulier vers l'intérieur de Ω. On cherche des conditions suffisantes permettant d'avoir :

$$\lim_{R\to\infty} I_k = 0 \qquad I_k = \int_{S_R} \left\{U_i^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|t_i(\boldsymbol{y}, t)] - T_i^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}|u_i(\boldsymbol{y}, t)]\right\} \mathrm{d}S_y$$

Les relations asymptotiques (7.58) et (7.59) et les propriétés :

$$U_i^k[f+g] = U_i^k[f] + U_i^k[g] \qquad \dot{U}_i^k[f] = U_i^k[\dot{f}]$$

vérifiées par la solution de Stokes permettent de réécrire I_k comme :

$$I_k = \int_{S_R} \left\{ U_i^{(L)k}[t_i + \rho c_L \dot{u}_i] + U_i^{(T)k}[t_i + \rho c_T \dot{u}_i] \right\} R^2 d\omega + o(R^{-1})$$

(ayant posé $\mathrm{d}S_y = R^2 d\omega$, où ω est l'angle solide vu depuis $\boldsymbol{x}$) sous réserve que :

$$\boldsymbol{u} = o(1) \qquad (R \to +\infty)$$

On peut ensuite arranger I_k pour obtenir :

$$\begin{aligned} I_k = &\int_{S_R} \left[U_i^{(L)k} + U_i^{(T)k} \right] \left\{ (t_i^L + \rho c_L \dot{u}_i^L) + (t_i^T + \rho c_T \dot{u}_i^T) \right\} R^2 d\omega \\ &+ \rho(c_L - c_T) \int_{S_R} \left\{ U_i^{(L)k}[\dot{u}_i^T] - U_i^{(T)k}[\dot{u}_i^L] \right\} R^2 d\omega \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que $\boldsymbol{U}^k = O(1/R)$ et des relations (7.58) et (7.59), les conditions de décroissance :

$$\dot{\boldsymbol{u}}^L.\boldsymbol{n} = o(1) \qquad \dot{\boldsymbol{u}}^L.\boldsymbol{\tau} = o(R^{-1}) \tag{7.61}$$

$$\dot{\boldsymbol{u}}^T.\boldsymbol{n} = o(R^{-1}) \qquad \dot{\boldsymbol{u}}^T.\boldsymbol{\tau} = o(1) \tag{7.62}$$

et de radiation :

$$\boldsymbol{t}^L + \rho c_L \dot{\boldsymbol{u}}^L = o(R^{-1}) \qquad \boldsymbol{t}^T + \rho c_T \dot{\boldsymbol{u}}^T = o(R^{-1}) \tag{7.63}$$

suffisent à annuler I_k à la limite $R \to \infty$. Elles assurent l'unicité de la solution d'un problème élastodynamique extérieur (Eringen et Suhubi [4]). La condition (7.63), équivalent élastodynamique de la condition de Sommerfeld (7.20) pour l'équation des ondes, exprime que le flux d'énergie à l'infini est sortant et revient à supposer l'absence de sources à l'infini.

EQUATION INTÉGRALE EN DÉPLACEMENT POUR UN DOMAINE NON BORNÉ. L'analyse ci-dessus montre que tout état élastodynamique satisfaisant aux conditions à l'infini (7.61), (7.62), (7.63) vérifie l'équation intégrale

$$\begin{aligned} u_k(\boldsymbol{x},t) + &\int_{\partial\Omega} \left[T_i^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|u_i(\boldsymbol{y},t)] - u_i(\boldsymbol{x},t) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right] \mathrm{d}S_y \\ &- \int_{\partial\Omega} U_i^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|t_i(\boldsymbol{y},t)] \, \mathrm{d}S_y = 0 \end{aligned} \tag{7.64}$$

Celle-ci ne diffère de (7.55) que par l'apparition d'un terme libre $u_k(\boldsymbol{x},t)$ ainsi que l'orientation de la normale $\boldsymbol{n}$, extérieure au domaine matériel et donc intérieure à $\partial\Omega$.

Le passage à la limite $R \to \infty$ ainsi que les conditions à l'infini (7.20) restent valables en présence de données $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0$ non nulles et telles que :

$$\int_{\bar{\Omega}} \rho \left\{ U_i^k[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y} | F_i(\boldsymbol{y}, t)] + v_{0i}(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) + u_{0i}(\boldsymbol{y}) \dot{U}_i^k(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}V_y < \infty \quad (7.65)$$

Le second membre de l'équation intégrale (7.64) devient alors non nul et égal à la limite ci-dessus (c'est-à-dire l'intégrale sur $\bar{\Omega}$ supposée convergente).

Représentations intégrales. L'équation (7.64) prise pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$ redonne, à l'aide de l'identité (4.7), la formule de représentation (7.52). Cette dernière est donc applicable aux domaines bornés aussi bien que non bornés, à condition que la normale soit toujours choisie extérieure au domaine élastique.

Tout déplacement donné dans l'espace par (7.64) vérifie les conditions à l'infini (7.61), (7.63) ; ceci découle des propriétés asymptotiques (7.58) à (7.59) de la solution de Stokes. Corollairement, tout état élastodynamique sur un domaine non borné n'est pas représentable par (7.52–7.53). En particulier, une *onde plane* :

$$\boldsymbol{u}^I(\boldsymbol{y}, t) = A g(t - \boldsymbol{y}.\boldsymbol{p}/c) \boldsymbol{d} \quad (7.66)$$

où $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{p}$ sont deux vecteurs unitaires définissant respectivement la direction de déplacement et de propagation, avec soit $\boldsymbol{d}.\boldsymbol{p} = 1$ et $c = c_L$ (onde de compression) soit $\boldsymbol{d}.\boldsymbol{p} = 0$ et $c = c_T$ (onde de cisaillement), est une solution de (7.31) qui ne vérifie pas les conditions à l'infini. Dans ce cas, ou quand la condition (7.65) est violée, il faut procéder par superposition.

7.11 Exemples numériques en élastodynamique transitoire

En pratique, les codes actuels sont développés suivant des principes analogues à ceux exposés ici, à cela près que l'utilisation de la régularisation n'est pas encore systématiquement pratiquée. La majeure partie des travaux traitent de problèmes linéaires (ondes ou élasticité), mais l'élastoplasticité dynamique commence à être abordée (voir Israil et Banerjee [6], dont un exemple est reproduit au chapitre 14). Les problèmes posés en milieu infini ou semi-infini sont un champ d'application privilégié des méthodes d'équations intégrales. C'est sans doute pourquoi, pour l'instant, les applications, en-dehors de tests de validation ou de comparaison, concernent surtout la géotechnique (calculs sismiques de bâtiments, tunnels, fondations) et la simulation du contrôle non-destructif (diffraction d'ondes par des fissures). On reproduit ici quelques exemples présentés dans la littérature.

Explosion dans une cavité sphérique (Ahmad et Banerjee [1], Manolis et Beskos [9]). Une cavité sphérique de rayon $5.38m$ est située dans un massif infini de granit (masse volumique $2.6710^3 kg/m^3$, coefficient de Poisson $\nu = 0.25$). Les temps caractéristiques correspondant à un parcours d'un rayon sont $\tau_L = 1.02ms$ et $\tau_T = 1.77ms$ pour les ondes L et T respectivement. Une pression radiale de 6.90

MPa est appliquée brutalement à $t = 0$ et maintenue. Compte tenu de la symétrie du problème, un octant de surface sphérique est maillé. La figure 7.3 représente le déplacement radial u_r (normalisé par rapport à la solution statique) et la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ à la surface de la cavité, en fonction du temps normalisé $t^\star = t/\tau_L$, obtenus par équations intégrales en domaine temporel ou fréquentiel. Dans les deux cas, la solution analytique correspondante est également représentée. Les diverses approches sont en bon accord entre elles aussi bien qu'avec la solution exacte et utilisent des temps de calcul comparables [9].

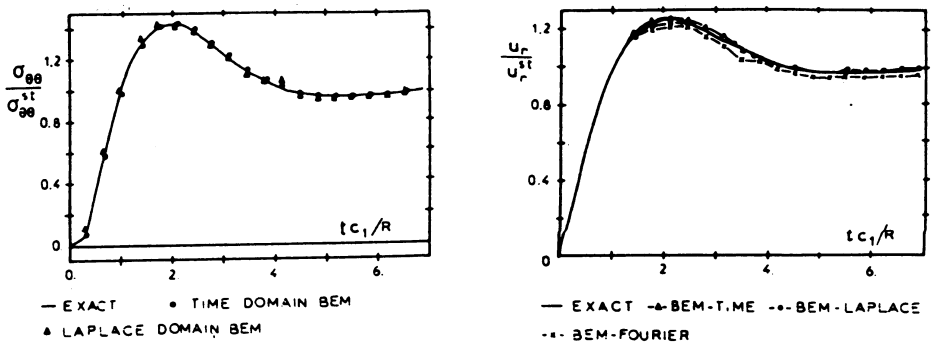

Figure 7.3: Explosion dans une cavité sphérique : déplacement radial (à gauche) et contrainte circonférentielle (à droite) (d'après [9]).

BARRE SOUMISE À UN ÉCHELON DE COMPRESSION À SON EXTRÉMITÉ (Ahmad et Banerjee [1]). La figure 7.4 présente l'histoire de la contrainte σ_{zz} à mi-longueur d'une barre élastique (solution analytique et valeurs obtenues par méthodes intégrales en temps, avec deux valeurs de pas de temps $\Delta t = 0.1\tau$ et $\Delta t = 0.125\tau$, $\tau = 3.56ms$ étant le temps nécessaire à l'onde de compression pour parcourir la longueur de la barre). La solution exacte est constante par paliers, chacun d'eux correspondant au parcours de l'onde de compression entre deux réflexions d'extrémité. On voit que, si les valeurs calculées sont assez proches de la solution exacte, la méthode numérique ne parvient pas à reproduire correctement les discontinuités de $\sigma_{zz}(t)$.

INTERACTION ENTRE UNE ONDE ÉLASTIQUE ET UNE FISSURE (HIROSE ET ACHENBACH [5]). Les auteurs ont développé une méthode d'équations intégrales en traction, similaire à (7.57) mais sans régularisation, servant à modéliser la diffraction d'une onde élastique sur une fissure plane située dans un massif élastique infini. Le calcul numérique présenté considère l'incidence d'une onde de compression donnée par :

$$\boldsymbol{u}^{in}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{u_0}{a}(y_3 + c_L t)H(y_3 + c_L t)\boldsymbol{e}_3$$

sur une fissure circulaire de rayon a située dans le plan $(y_1 y_2)$. Des résultats numériques sont donnés pour l'ouverture de la fissure, l'amplitude rayonnée, ainsi que le facteur d'intensité dynamique de contraintes normalisé $K_I(t)/K_I^{statique}$; ces derniers sont reproduits en figure 7.5, sur laquelle ils sont comparés à ceux (Sladek et Sladek [11], Chen et Sih [2]) obtenus en résolvant le problème en variable de Laplace.

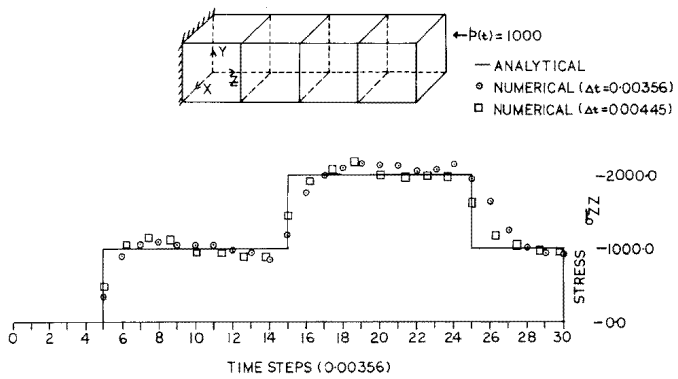

Figure 7.4: Barre soumise à un échelon de compression (d'après [1]).

Références bibliographiques

[1] Ahmad, S., Banerjee, P. K. Time-domain Transient elastodynamic analysis of 3-D solids by BEM. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **26**, 1709–1728 (1988).

[2] Chen, E. P., Sih, G. C. Transient response of cracks to impact loads. In G. C. Sih (ed.), *Mechanics of Fracture 4: Elastodynamic crack problems*, pp. 1–58. Noordhoff Intl. Publ. , Leyden, The Netherlands (1977).

[3] Daubechies, I. *Ten lectures on wavelets*. SIAM Publications, Philadelphia, USA (1992).

[4] Eringen, A. C., Suhubi, E. S. *Elastodynamics (vol II - linear theory)*. Academic Press (1975).

[5] Hirose, S., Achenbach, J. D. Time-domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **28**, 629–644 (1989).

[6] Israil, A. S. M., Banerjee, P. K. Advanced development of boundary element method for two-dimensional dynamic elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.*, **29**, 1433–1451 (1992).

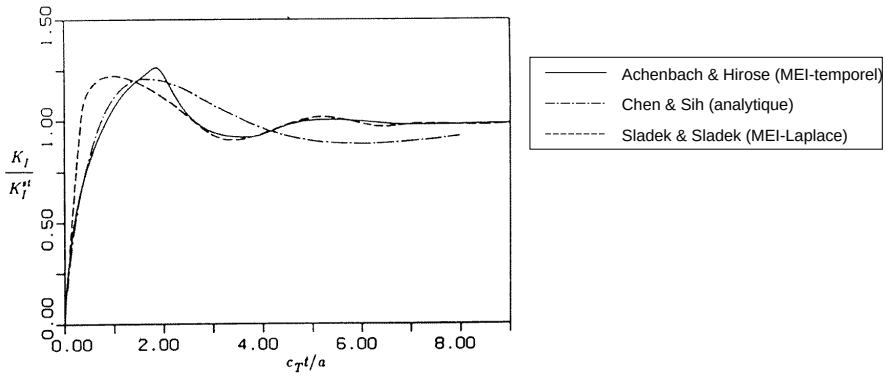

Figure 7.5: Fissure circulaire : variation du facteur dynamique d'intensité de contraintes (d'après [5]).

[7] KARABALIS, D. L. A simplified 3D time-domain BEM for dynamic soil-structure interaction problems. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **8**, 139–145 (1991).

[8] KENNETT, B. L. N. Seismic wave propagation in stratified media. In *Advances in Applied Mechanics*, vol. 21. Academic Press (1981).

[9] MANOLIS, G., BESKOS, D. E. *Boundary element methods in elastodynamics*. Umwin Hyman, London (1988).

[10] METIVET, B. *Résolution spectrale des équations de Navier-Stokes par une méthode de sous-domaines courbes*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI, Paris, France (1987).

[11] SLADEK, J., SLADEK, V. Dynamic stress-intensity factors studied by boundary integro-differential equations. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **23**, 919–928 (1986).

8

Ondes et élastodynamique en domaine fréquentiel

Considérons maintenant les problèmes dynamiques pour lesquels toutes les variables varient sinusoïdalement en fonction du temps, avec une pulsation ω fixée. La description mathématique des variables classiquement adoptée est alors :

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \Re[\hat{u}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}] \tag{8.1}$$

La recherche de $u(\boldsymbol{x}, t)$ se ramène donc à celle de la fonction du point $\hat{u}(\boldsymbol{x})$, à valeurs complexes. Ces situations peuvent avoir plusieurs interprétations possibles :

- Réponse forcée à des sollicitations entretenues $F(\boldsymbol{y})e^{-i\omega t}$, $\boldsymbol{t}^D(\boldsymbol{y})e^{-i\omega t}\ldots$ une fois un régime permanent atteint et l'influence des conditions initiales (renvoyées à $t = -\infty$) négligeable.
- Résolution d'un problème par transformation de Fourier en temps, ω étant alors la variable conjuguée du temps t :

  $$u(\boldsymbol{y}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\boldsymbol{y}, \omega)e^{-i\omega t} d\omega$$

  Pour chaque valeur de ω, l'inconnue transformée $\hat{u}(\boldsymbol{y}, \omega)$ est solution d'un problème à fréquence imposée.
- Résolution d'un problème par transformation de Laplace en temps, $p = -i\omega$ étant alors la variable conjuguée du temps t.

Dans la suite, le facteur $e^{i\omega t}$ est systématiquement omis et les notations u et $\hat{u}$ sont confondues.

8.1 Equation de Helmholtz et solutions élémentaires

L'équation des ondes (7.1) prend pour le régime stationnaire (8.1) la forme :

$$\Delta u + k^2 u + F = 0 \tag{8.2}$$

où $F(\boldsymbol{y})$ est la distribution volumique de sources et $k = \omega/c$ le nombre d'onde. Un problème bien posé doit comporter des conditions aux limites sur $\partial\Omega$ ainsi que des conditions à l'infini ; il n'y a par contre plus lieu d'imposer des conditions initiales.

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES. Les solutions élémentaires $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega)$ dans le domaine fréquentiel sont associées à une source ponctuelle d'amplitude unité exercée au point $\boldsymbol{x}$ fixé et vérifient donc :

$$\Delta G + k^2 G + \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) = 0 \tag{8.3}$$

Elles peuvent être considérées comme solutions transitoires (7.4) pour une variation temporelle particulière $f(t) = e^{-i\omega t}$ de la source :

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) = G[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y} | e^{-i\omega t}] \tag{8.4}$$

et en rejetant les conditions initiales à $t = -\infty$. La transposition des propriétés générales (singularité (7.47) et son report dans le terme statique (7.49), symétrie (7.50)...) aux solutions élémentaires stationnaires est ainsi immédiate. Effectuée sur la solution transitoire $G[f]$ donnée par (7.5), cette opération donne la solution élémentaire de (8.2)) pour l'espace infini tridimensionnel :

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \qquad G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) = -\frac{r_{,i}}{4\pi r^2}(1 - ikr)e^{ikr} \tag{8.5}$$

Le développement en série, absolument convergent pour toute valeur de x :

$$e^{ix} = \sum_{p \geq 0} \frac{(ix)^p}{p!} \tag{8.6}$$

permet par ailleurs de montrer que :

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+1)!}(ikr)^p \tag{8.7}$$

$$G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -\frac{k^2}{4\pi} r_{,i} \sum_{p \geq 0} \frac{p+1}{(p+2)!}(ikr)^p \tag{8.8}$$

$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1/(4\pi r)$ étant la solution élémentaire statique correspondante. Ce résultat permet de prouver directement l'égalité des termes singuliers dans les solutions élémentaires dynamique et statique :

$$(r \to 0) \qquad (\forall \omega > 0) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & = & O(1) \\ \boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - \boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & = & O(1) \end{array} \right. \tag{8.9}$$

$$(\omega \to 0) \qquad (\forall r > 0) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & = & O(\omega) \\ \boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - \boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & = & O(\omega^2) \end{array} \right. \tag{8.10}$$

Solution élémentaire pour le plan infini. L'intégration de la solution tridimensionnelle (8.5) sur $-\infty \leq x_3 \leq +\infty$ conduit à la solution élémentaire pour le plan infini :

$$G(\tilde{x},\tilde{y};\omega) = \frac{i}{4}H_0^1(kr) \qquad G_{,i}(\tilde{x},\tilde{y};\omega) = -\frac{ik}{4}r_{,i}H_1^1(kr) \tag{8.11}$$

avec $\tilde{x} = (x_1, x_2), \tilde{y} = (y_1, y_2)$ et $r = |\tilde{y} - \tilde{x}|$; $H_{0,1}^1$ sont les fonctions de Hankel de première espèce et d'ordre 0 et 1 (Abramowitz et Stegun [1], Gradshteyn et Ryzhik [6]). Ces dernières admettent les développements en série suivants :

$$\begin{aligned} H_0^1(z) &= 1 + \frac{2i}{\pi}\left(\gamma + \mathrm{Log}\frac{z}{2}\right) + z^2 S_0(z) \\ H_1^1(z) &= -\frac{2i}{\pi z} + \frac{iz}{\pi}\left(\gamma - \frac{1}{2} + \mathrm{Log}\frac{z}{2}\right) + \frac{z}{2}\left(1 + z^2 S_1(z)\right) \end{aligned} \tag{8.12}$$

avec :

$$\begin{aligned} S_0(z) &= \sum_{p\geq 0} \frac{1}{4}\left[1 + \frac{2i}{\pi}\left(\gamma + \mathrm{Log}\frac{z}{2} - a_{p+1}\right)\right] \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \\ S_1(z) &= \sum_{p\geq 0} \frac{1}{4}\left[1 + \frac{2i}{\pi}\left(\gamma + \mathrm{Log}\frac{z}{2} - a_{p+1} - \frac{1}{2(p+2)}\right)\right] \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!(p+2)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \end{aligned}$$

et

$$\gamma = 0.57721\ldots \text{ (constante d'Euler)} \qquad\qquad a_p = \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m}$$

qui permettent de montrer que :

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= 1 - \frac{1}{2\pi}\left(\gamma + \mathrm{Log}\frac{k}{2}\right) + \frac{i}{4}(kr)^2 S_0(kr) \\ G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= -\frac{kr}{4\pi}\left(\gamma - 1 + \mathrm{Log}\frac{z}{2}\right) + \frac{ikr}{8}\left(1 + (kr)^2 S_0(kr)\right) \end{aligned}$$

$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -1/(2\pi)\mathrm{Log}r$ étant la solution élémentaire statique correspondante. La solution élémentaire bidimensionnelle présente donc les comportements asymptotiques :

$$(r \to 0) \qquad \forall \omega > 0 \begin{cases} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= O(1) \\ \boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= O(1) \end{cases} \tag{8.13}$$

$$(\omega \to 0) \qquad \forall r > 0 \begin{cases} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= O(\mathrm{Log}\omega) \\ \boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \boldsymbol{\nabla} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= O(\omega \mathrm{Log}\omega) \end{cases} \tag{8.14}$$

8.2 Représentations et équations intégrales

Il suffit, dans les formulations intégrales en variable temporelle établies en section 8.2, de faire les substitutions :

$$u(\boldsymbol{y},t) \to u(\boldsymbol{y})e^{-i\omega t} \qquad q(\boldsymbol{y},t) \to u(\boldsymbol{y})e^{-i\omega t}$$

et de reporter les conditions initiales à $t = -\infty$.

REPRÉSENTATION INTÉGRALE. Toute solution $u(\boldsymbol{x})$ de l'équation de Helmholtz en un point $\boldsymbol{x}$ *non situé sur* $\partial\Omega$ admet la représentation intégrale :

$$\kappa u_k(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \{q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\}\,\mathrm{d}S_y + \int_\Omega F(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}V_y \tag{8.15}$$

$$\kappa u_{,i}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \{q(\boldsymbol{y})G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega) - u(\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})G_{,\bar{\imath}\bar{\jmath}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega)\}\,\mathrm{d}S_y + \int_\Omega F(\boldsymbol{y})G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega)\,\mathrm{d}V_y \tag{8.16}$$

avec $\kappa = 1$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega$) ou $\kappa = 0$ ($\boldsymbol{x} \notin \Omega$). Ces formules sont valables quelle que soit la solution élémentaire employée compatible avec le domaine d'étude Ω. Si la solution (8.5) est utilisée, une intégration par parties permet d'obtenir la variante :

$$\kappa u_{,i}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{D_{ij}u(\boldsymbol{y})G_{,j}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega) - k^2 u(\boldsymbol{y})n_i(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\right\}\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})G_{,i}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega)\,\mathrm{d}S_y - \int_\Omega F(\boldsymbol{y})G_{,i}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega)\,\mathrm{d}V_y \tag{8.17}$$

EQUATIONS INTÉGRALES RÉGULARISÉES. Toute solution de l'équation de Helmholtz sur un domaine Ω borné vérifie l'équation intégrale régularisée :

$$\int_{\partial\Omega} \{u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - u(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}S_y = \int_\Omega F(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega)\,\mathrm{d}V_y \tag{8.18}$$

et ce pour tout choix de la solution élémentaire. Le gradient de u en $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ est donné par la représentation intégrale :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}u_{,i}(\boldsymbol{x}) = {} & D_{ij}u(\boldsymbol{x})I_j(\boldsymbol{x},\Gamma) - q(\boldsymbol{x})I_i(\boldsymbol{x},\Gamma) \\ & + \int_{\partial\Omega} \{D_{ij}u(\boldsymbol{y})G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - D_{ij}u(\boldsymbol{x})G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y \\ & - \int_{\partial\Omega} \{q(\boldsymbol{y})G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - q(\boldsymbol{x})G_{,i}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y \\ & - k^2 \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{y})n_i(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}S_y - \int_\Omega F(\boldsymbol{y})G_{,i}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega)\,\mathrm{d}V_y\end{aligned} \tag{8.19}$$

les termes $I_i(\boldsymbol{x},\Gamma)$ étant donnés par (5.31).

Conditions à l'infini et problèmes extérieurs. L'analyse de la validité des représentations et équations intégrales pour un domaine non borné $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$ (Ω borné), présentée en section 8.3 pour le régime transitoire, est directement transposable au régime stationnaire. Les conditions à l'infini :

$$u = o(1) \qquad q - iku = o(R^{-1}) \qquad (R \to \infty) \tag{8.20}$$

de décroissance et de radiation respectivement assurent l'unicité de la solution d'un problème extérieur. Toute solution u de l'équation des ondes (8.2) pour le domaine non borné $\bar{\Omega}$ et satisfaisant aux conditions à l'infini (8.20) vérifie l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \{u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - u(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\, \mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\, \mathrm{d}S_y \\ = \int_{\bar{\Omega}} F(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega)\, \mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{8.21}$$

qui redonne la représentation intégrale (8.15) pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$, à condition que l'intégrale de domaine soit convergente.

Réciproquement, tout u donné dans l'espace par une représentation intégrale (8.15) vérifie les conditions à l'infini (8.20). Les équations et représentations intégrales posées sur $\partial\Omega$ intègrent ainsi exactement le comportement à l'infini de la solution.

Commentaires. La possibilité de pouvoir ramener la résolution d'un problème extérieur sur un support géométrique borné (la frontière $\partial\Omega$) a une grande importance pratique. La prise en compte des conditions à l'infini est exacte et ne nécessite aucun des artifices auxquels les méthodes d'éléments finis ou de différences finies, qui manipulent des domaines bornés, sont contraintes de faire appel : domaine d'étude artificiellement borné, simulation des conditions de radiation par des "frontières absorbantes" (Halpern [7]). Les limitations et difficultés techniques que ces artifices entraînent sont absentes des méthodes intégrales.

Ces considérations s'appliquent à tous les problèmes extérieurs mais prennent la plus grande importance en dynamique stationnaire. D'une part, tronquer le domaine d'étude est plus dommageable en dynamique qu'en statique : les ondes se réfléchissent sur la frontière artificielle et sont piégées dans la zone d'étude, et le flux d'énergie est emprisonné. En régime transitoire (avec conditions initiales nulles), les ondes n'atteignent la frontière artificielle qu'après un temps fini en deçà duquel la troncature n'a pas d'effet. Il est donc toujours possible de tronquer le domaine à une distance finie suffisamment grande de manière à éviter les réflexions parasites. En revanche, la totalité du domaine d'étude est affectée en régime stationnaire.

Les représentations et équations intégrales sont donc particulièrement bien adaptées à la résolution numérique de problèmes de propagation d'ondes en milieu ouvert.

8.3 Equations intégrales indirectes et problème des valeurs propres fictives

Comme en section 2.4, considérons simultanément un domaine borné Ω et son complémentaire non borné $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$, et soient $u, \bar{u}$ des solutions de l'équation de Helmholtz

sur Ω et $\bar{\Omega}$ respectivement (problèmes *intérieur* et *extérieur*, avec $F = \bar{F} = 0$).

- *Représentation de u et ses dérivées par potentiel régularisé de simple couche.* Supposons u continu à la traversée de $\partial\Omega$: $u = \bar{u}$ sur $\partial\Omega$, et introduisons le saut $\phi = \bar{q} + q$ du flux à travers $\partial\Omega$. Alors u et ses dérivées $u_{,i}$ admettent respectivement la représentation :

$$\bar{u}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) \, \mathrm{d}S_y \quad = \quad u(\boldsymbol{x}) \tag{8.22}$$

$$\frac{1}{2}(u_{,i} + \bar{u}_{,i})(\boldsymbol{x}) = -\phi(\boldsymbol{x}) I_i(\boldsymbol{x}, \partial\Omega) - \int_{\partial\Omega} \{\phi(\boldsymbol{y}) G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - \phi(\boldsymbol{x}) G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y \tag{8.23}$$

- *Représentation de u et ses dérivées par potentiel de double couche.* Supposons $u_{,n}$ continu à la traversée de $\partial\Omega$: $q + \bar{q} = 0$ sur $\partial\Omega$, et introduisons le saut $\psi = \bar{u} - u$ du flux à travers $\partial\Omega$. Alors u et ses dérivées $u_{,i}$ admettent respectivement la représentation :

$$\begin{aligned} \bar{u}(\boldsymbol{x}) &= \int_{\partial\Omega} \{\psi(\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - \psi(\boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y \\ &= u(\boldsymbol{x}) + \psi(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{8.24}$$

$$\frac{1}{2}(\bar{u}_{,i} + u_{,i})(\boldsymbol{x}) = -D_{ij}\psi(\boldsymbol{x}) I_j(\boldsymbol{x}, \partial\Omega) - \int_{\partial\Omega} \{D_{ij}\psi(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - D_{ij}\psi(\boldsymbol{x}) G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y \tag{8.25}$$

Ces représentations indirectes aux points-frontière permettent d'écrire des équations intégrales indirectes pour les problèmes aux limites fondamentaux.

Problème de Dirichlet. La valeur de u est imposée sur la frontière : $u = u^D$ sur $\partial\Omega$. Le problème admet les formulations intégrales suivantes, d'inconnue ϕ, conséquences directes de (8.22) et (8.24) :

$$u^D = \int_{\partial\Omega} \phi(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) \, \mathrm{d}S_y \tag{8.26}$$

$$u^D(\boldsymbol{x}) = (\kappa - 1)\psi(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \{\psi(\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - \psi(\boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y \tag{8.27}$$

(κ vaut 1 et 0 respectivement pour les problèmes extérieur et intérieur).

Problème de Neumann. La valeur de q est imposée sur la frontière : $q = u^D$ sur $\partial\Omega$. Le problème admet les formulations intégrales suivantes, d'inconnue ϕ, conséquences

directes de (8.23) et (8.25) :

$$q^D(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{2} - I_i(\boldsymbol{x}, \partial\Omega) n_i(\boldsymbol{x})\right) \phi(\boldsymbol{x}) - n_i(\boldsymbol{x}) \int_{\partial\Omega} \{\phi(\boldsymbol{y}) G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - \phi(\boldsymbol{x}) G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y \tag{8.28}$$

$$q^D(\boldsymbol{x}) = -D_i\psi(\boldsymbol{x}) I_i(\boldsymbol{x}, \partial\Omega) - n_i(\boldsymbol{x}) \int_{\partial\Omega} \{D_{ij}\psi(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - D_{ij}\psi(\boldsymbol{x}) G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y \tag{8.29}$$

Valeurs propres fictives. En ce qui concerne l'unicité de la solution u d'un problème aux limites posé sur un domaine borné Ω ou son complémentaire $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$ pour l'équation de Helmholtz (8.2), on sait que :

- le problème extérieur admet une solution unique vérifiant les conditions à l'infini (7.20), quel que soit ω ;
- le problème intérieur n'admet une solution unique que si ω n'est pas égal à une pulsation propre : il existe en effet une suite dénombrable croissante $\omega_n, n \geq 1$ de *pulsations propres* pour lesquelles l'équation (8.2) admet des *modes propres* u_n, solutions non identiquement nulles vérifiant des conditions aux limites homogènes ; chaque ω_n est de *multiplicité finie* k, c'est-à-dire correspond à k modes propres linéairement indépendants.

On va mettre en évidence l'existence de *valeurs propres fictives* : les équations intégrales associées aux problèmes extérieurs ont une solution non unique quand ω est pulsation propre d'un certain problème intérieur, alors même que le problème aux limites avec conditions à l'infini admet une solution unique pour tout ω.

Perte d'unicité de la solution des équations intégrales : problème de Dirichlet extérieur. Les équations intégrales régularisées directes (8.18) pour le problème de Dirichlet extérieur (DE) et intérieur (DI) homogène, d'inconnue q, s'écrivent :

$$\int_{\partial\bar{\Omega}} q(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) \, \mathrm{d}S_y = u^D(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\bar{\Omega}} \left\{u^D(\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) - u^D(\boldsymbol{x}) H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right\} \, \mathrm{d}S_y$$

$$\int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) \, \mathrm{d}S_y = 0$$

Le même opérateur intégral apparaît au premier membre des équations intégrales (DE) et (DI). Sachant par ailleurs que le problème (DI) admet des modes propres pour certaines valeurs $\omega_n^D, n \geq 1$ de ω, on en conclut que l'équation intégrale (8.18) appliquée au problème (DE) admet une infinité de solutions pour tout $\omega = \omega_n^D$ pulsation propre du problème (DI).

De même, la formulation du problème (DE) par l'équation intégrale indirecte (8.27) d'inconnue ψ et du problème de Neumann intérieur (NI) homogène par l'équation

intégrale directe (8.18) d'inconnue u donnent :

$$\int_{\partial\bar{\Omega}} \{\psi(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \psi(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y = u^D(\boldsymbol{x})$$
$$\int_{\partial\Omega} \{u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - u(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y = 0$$

Le même opérateur intégral, agissant ici sur des variables différentes, apparaît au premier membre des deux équations intégrales ; l'argument n'est pas altéré par le fait que la normale $\boldsymbol{n}$ change de sens d'une équation à l'autre. Sachant par ailleurs que le problème NI admet des modes propres pour certaines valeurs $\omega_n^N, n \geq 1$ de ω, on en conclut que l'équation intégrale indirecte (8.27) appliquée au problème (DE) admet une infinité de solutions si ω est une pulsation propre du problème (DI).

Perte d'unicité de la solution des équations intégrales : problème de Neumann extérieur. La formulation du problème de Neumann extérieur (NE) par l'équation intégrale directe (8.18) d'inconnue u et du problème de Dirichlet intérieur (DI) par l'équation intégrale indirecte (8.27) d'inconnue ψ donnent :

$$u(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\bar{\Omega}} \{u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - u(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y = \int_{\partial\bar{\Omega}} q^D(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}S_y$$
$$-\psi(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \{\psi(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \psi(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y = 0$$

Le même opérateur intégral, agissant sur des variables différentes, apparaît au premier membre des deux équations intégrales, compte tenu de l'opposition des normales à $\partial\Omega$ et $\partial\bar{\Omega}$. L'équation intégrale (8.18) appliquée au problème (NE) admet donc une infinité de solutions pour tout $\omega = \omega_n^D$ pulsation propre du problème (DI).

Enfin, si on considère la formulation du problème (NE) à l'aide des équations intégrales (8.19), il est facile de montrer, dans le même esprit, que le problème (NI) homogène est gouverné par le même opérateur intégral. On en conclut que l'équation intégrale indirecte (8.19) appliquée au problème (NE) admet une infinité de solutions si ω est une pulsation propre du problème (NI).

8.4 Méthode des éléments de frontière en régime fréquentiel

La discrétisation des équations intégrales procède comme en statique (chapitre 3), à ceci près que la représentation des inconnues (u, q) utilise des valeurs nodales complexes. De même, les matrices du système linéaire résultant de la discrétisation sont à coefficients complexes, ce qui n'introduit pas de changement notable par rapport au cas statique ; en particulier la méthode de factorisation de Gauss reste applicable [4].

Influence de la longueur d'onde. En statique, la finesse de discrétisation, comme pour toute méthode numérique, est gouvernée par la nécessité de représenter correctement la géométrie ainsi que par les variations spatiales attendues des champs. En dynamique, il s'ajoute l'influence de la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$, qui définit une échelle

pour les variations spatiales de u. De même, en élastodynamique, pour une pulsation donnée ω, les ondes de compression et de cisaillement ont des longueurs respectives :

$$\lambda_L = \omega\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho} \qquad \lambda_T = \omega\sqrt{\mu/\rho}$$

et la plus courte des deux, λ_T, définit un ordre de grandeur pour les variations spatiales. L'interpolation spatiale doit pouvoir représenter convenablement des variations spatiales sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde, et le pas spatial du maillage doit ainsi être égal au maximum à une fraction de longueur d'onde. A titre indicatif, nous avons observé par exemple [2] que, dans le cas d'utilisation d'éléments quadrilatéraux quadratiques à 8 nœuds, nos résultats numériques se dégradent assez brutalement si une ligne de longueur λ_T contient moins de 3 côtés consécutifs d'éléments (soit un minimum d'environ 7 nœuds par longueur d'onde de cisaillement) ; cette constatation semble assez représentative de ce qui est usuellement observé.

D'autre part, la présence de quantités spatialement oscillantes (variant comme $\exp(ikr)$) dans les champs élastiques induit (Rezayat et coll. [9]) des contraintes sur le choix optimal du nombre de Points de Gauss pour les intégrations élémentaires. Ces auteurs ont défini, en sus de l'"indicateur de sévérité" IS mentionnée au chapitre 3, un paramètre ISD ("sévérité dynamique") par :

$$\mathrm{ISD} = \omega\Delta r/(2\pi c_T)$$

dans lequel $\Delta r = r_{max} - r_{min}$, r_{max} et r_{min} désignant les distances entre $\boldsymbol{x}$ et le nœud de l'élément considéré respectivement le plus proche et le plus éloigné de $\boldsymbol{x}$. Ils proposent de moduler le nombre de points de Gauss en fonction de la valeur de ISD : Les intégrations singulières sont supposées faites au moyen de la procédure de passage en coordonnées polaires (ρ, α) sur l'élément de référence (section 3.5), l'élément de référence, triangulaire ou quadrilatéral, étant subdivisé en triangles dont l'antécédent $\boldsymbol{\eta}$ de $\boldsymbol{x}$ est un des sommets. Le tableau 8.1 donne le nombre de points de Gauss pour chaque subdivision, sous la forme $N_\rho \times N_\alpha$.

Report de la singularité dans la solution élémentaire statique. Les équations intégrales contiennent des intégrales du type :

$$\int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{y})[H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\,\mathrm{d}S_y$$

On sait que la différence $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ est régulière. Il est utile de concrétiser ce fait en levant analytiquement l'indétermination avant de procéder aux intégrations numériques, par exemple à l'aide des développements en série (8.6) pour les problèmes scalaires ou (8.36) pour l'élastodynamique. De plus, il vaut mieux circonscrire cette opération à une petite portion $S(\boldsymbol{x})$ de $\partial\Omega$ contenant $\boldsymbol{x}$ comme point intérieur, réécrivant par exemple l'équation (8.18) sous la forme équivalente :

$$\begin{aligned}\kappa u(\boldsymbol{x}) + \int_{\Gamma - S(x)} [u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - u(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}S_y \\ + \int_{S(x)} u(\boldsymbol{y})[H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]\,\mathrm{d}S_y + \int_{S(x)} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \;=\; 0\end{aligned}$$

	Nombre de points de Gauss par élément	
ISD	quadrilatères ($N_e = 8$)	triangles ($N_e = 6$)
$0.0 \leq ISD < 0.5$	3×3=9	=7
$0.5 \leq ISD < 1.0$	4×4=16	=16
$1.0 \leq ISD < 1.5$	5×5=25	=19
$1.5 \leq ISD < 2.0$	6×6=36	=28
$2.0 \leq ISD < 2.5$	$4 \times (4 \times 4)$=64	4×16=64
$2.5 \leq ISD < 3.0$	$4 \times (5 \times 5)$=64	4×19=76
$3.0 \leq ISD < 3.5$	$4 \times (6 \times 6)$=100	4×28=112

	Nombre de points de Gauss par subdivision			
	quadrilatères ($N_e = 8$)		triangles ($N_e = 6$)	
	coin	milieu	coin	milieu
$0.0 \leq ISD < 1.0$	4×3	3×3	4×3	3×4
$1.0 \leq ISD < 1.5$	5×4	4×4	5×3	4×5
$1.5 \leq ISD < 2.0$	6×4	5×5	6×4	5×6
$2.0 \leq ISD < 2.5$	(2×4)×5	6×6	(2×4)×5	6×(2×4)
$2.5 \leq ISD < 3.0$	(2×5)×6	(2×4)×(2×4)	(2×5)×6	(2×4)×(2×4)
$3.0 \leq ISD < 3.5$	(2×6)×6	(2×5)×(2×5)	(2×6)×(2×4)	(2×5)×(2×6)

Tableau 8.1 : Sévérité dynamique et nombre de points de Gauss : intégrations régulières (en haut) et singulières (en bas) (d'après [9]).

(en pratique, on prend pour $S(\boldsymbol{x})$ l'union des éléments de frontière contenant $\boldsymbol{x}$). Cela permet de circonscrire l'utilisation des développements en série à un voisinage du point singulier, et donc de limiter le nombre de termes nécessaire.

8.5 Elastodynamique en variable fréquentielle

Seule l'élasticité isotrope est considérée. L'équation fondamentale de la dynamique (7.31), vérifiée par tout état élastodynamique $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{F})$, prend pour le régime stationnaire la forme :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho\omega^2 \boldsymbol{u} + \rho \boldsymbol{F} = 0 \qquad \text{dans } \Omega \tag{8.30}$$

($\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})$ est la distribution massique d'efforts). Un problème bien posé doit comporter des conditions aux limites sur $\partial\Omega$ ainsi que des conditions à l'infini ; il n'y a par contre plus lieu d'imposer des conditions initiales.

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES EN ÉLASTODYNAMIQUE STATIONNAIRE. Il s'agit de solutions de (8.30) (déplacement $U_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega)$ et contrainte $\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega)$) associées à une force ponctuelle d'amplitude unité exercée au point $\boldsymbol{x}$ fixé :

$$\rho \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_k \tag{8.31}$$

Il en existe autant que de domaines E et de conditions aux limites sur ∂E. Celle associée à un demi-espace avec surface libre, homogène ou stratifié, a été calculée par Kennett

[8] ; elle n'admet pas d'expression analytique fermée, contrairement à la solution de Mindlin pour le demi-espace en statique.

Les solutions élémentaires pour l'élastodynamique stationnaire peuvent être considérées comme solutions transitoires (7.36) pour le choix particulier $f(t) = e^{-i\omega t}$ de la fonction de force :

$$\left\{U_i^k, \Sigma_{ij}^k\right\}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) = \left\{U_i^k, \Sigma_{ij}^k\right\}[\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y} | e^{-i\omega t}] \tag{8.32}$$

et en rejetant les conditions initiales à $t = -\infty$. La transposition des propriétés générales (singularité (7.47) et son report dans le terme statique (7.49), symétrie (7.50)...) aux solutions élémentaires stationnaires est ainsi immédiate.

Solution élémentaire de Helmholtz. La plus fréquemment utilisée et la plus simple, elle est associée à l'espace infini ($E = \mathbb{R}^3$). Son expression est obtenue en faisant $f(t) = e^{-i\omega t}$ dans la solution élémentaire de Stokes (7.43), (7.44) :

$$U_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) = \frac{1}{4\pi\mu r}\left[A\delta_{ik} + B r_{,i} r_{,k}\right] \tag{8.33}$$

$$\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}; \omega) = \frac{1}{4\pi r^2}\left[2C r_{,i} r_{,k} r_{,j} + (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i})D + \delta_{ij} r_{,k} E\right] \tag{8.34}$$

avec :

$$\begin{aligned}
A &= \left(1 + \frac{i}{x_T} - \frac{1}{x_T^2}\right) e^{ix_T} - \beta^2 \left(\frac{i}{x_L} - \frac{1}{x_L^2}\right) e^{ix_L} \\
B &= \left(\frac{3}{x_T^2} - \frac{3i}{x_T} - 1\right) e^{ix_T} - \beta^2 \left(\frac{3}{x_L^2} - \frac{3i}{x_L} - 1\right) e^{ix_L} \\
C &= \left(-\frac{15}{x_T^2} + \frac{15i}{x_T} + 6 - ix_T\right) e^{ix_T} - \beta^2 \left(-\frac{15}{x_L^2} + \frac{15i}{x_L} + 6 - ix_L\right) e^{ix_L} \\
D &= (ix_T - 1)e^{ix_T} + 2B \\
E &= (1 - 2\beta^2)(ix_L - 1)e^{ix_L} + 2B
\end{aligned} \tag{8.35}$$

ayant posé $k_L r = x_L$, $k_T r = x_T$; le rapport $\beta = c_T/c_L$ étant donné par (7.42). Les termes en facteur de $\exp(ik_L r)$ et $\exp(ik_T r)$ donnent respectivement les parties longitudinale et transversale de la solution de Helmholtz.

Partie singulière de la solution de Helmholtz tridimensionnelle. L'utilisation de (8.6) conduit pour les expressions (8.35) aux développements en série suivants :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1+\beta^2}{2} + \sum_{p\geq 1} \frac{1+p+\beta^{p+2}}{p!(p+2)} (ix_T)^p \\
B &= \frac{1-\beta^2}{2} + \sum_{p\geq 1} \frac{1-\beta^{p+2}(1-p)}{p!(p+2)} (ix_T)^p \\
C &= -\frac{3(1-\beta^2)}{2} + x_T^2 \sum_{p\geq 0} \frac{1-\beta^{p+4}(p-1)}{p!(p+2)(p+4)} (ix_T)^p \\
D &= -\beta^2 - x_T^2 \sum_{p\geq 0} \frac{p+2+2\beta^{p+4}}{p!(p+2)(p+4)} (ix_T)^p \\
E &= \beta^2 + x_T^2 \sum_{p\geq 0} \frac{2-(p+4)\beta^{p+2}+2(p+3)\beta^{p+4}}{p!(p+2)(p+4)} (ix_T)^p
\end{aligned} \tag{8.36}$$

absolument convergents pour tout x_T, comme le montre une comparaison terme à terme des coefficients qui y apparaissent avec ceux de (8.6), puisque $\beta^2 \leq 1/2 < 1$. Le caractère non-singulier des termes $A, B, \ldots$, qui n'est pas apparent dans les expressions (8.35), est ainsi directement établi. Les termes d'ordre 0 en x_T dans les formules (8.36), compte tenu de l'expression (7.42) de β, redonnant la solution de Kelvin, la différence entre solutions de Helmholtz et de Kelvin est régulière :

$$(r \to 0) \qquad (\forall \omega > 0) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &=& O(1) \\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &=& O(1) \end{array} \right. \tag{8.37}$$

$$(\omega \to 0) \qquad (\forall r > 0) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &=& O(\omega) \\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &=& O(\omega^2) \end{array} \right. \tag{8.38}$$

SOLUTION DE HELMHOLTZ EN DÉFORMATIONS PLANES. L'intégration de la solution tridimensionnelle (8.33) sur $-\infty \leq x_3 \leq +\infty$ conduit à la solution élémentaire pour le plan infini en déformations planes :

$$U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) = \frac{i}{4\mu} \left[A\delta_{ik} + B r_{,i} r_{,k} \right] \tag{8.39}$$

$$\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) = \frac{i}{4r} \left[2C r_{,i} r_{,k} r_{,j} + (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) D + \delta_{ij} r_{,k} E \right] \tag{8.40}$$

avec :

$$\begin{aligned}
A &= H_0^1(k_T r) - \left[H_1^1(k_T r) - \beta H_1^1(k_L r) \right] \\
B &= -2A - \left[H_0^1(k_T r) - \beta H_0^1(k_L r) \right] \\
C &= -4B + k_T r \left[H_1^1(k_T r) - \beta^3 H_1^1(k_L r) \right] \\
D &= k_T r H_1^1(k_T r) + 2B \\
E &= -(1-2\beta^2) k_L r H_1^1(k_L r) + 2B
\end{aligned} \tag{8.41}$$

les indices i, j, k prenant les valeurs $1, 2$.

Partie singulière de la solution de Helmholtz bidimensionnelle. Les expressions (8.41) peuvent être développées en séries absolument convergentes pour tout $r > 0$:

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{i}{\pi}(1-\beta^2)\mathrm{Log}r - \frac{1+\beta^2}{2}\left(1+\frac{2i}{\pi}\gamma\right) - \frac{i}{\pi}(1-\beta^2)\left(1+\mathrm{Log}\frac{k_T}{2}\right) \\
&\quad + \frac{i}{\pi}\beta^2\mathrm{Log}\beta - \frac{1}{2}x_T^2\left[S_1(x_T) - \beta^4 S_1(x_L)\right] \\
B &= -\frac{i}{\pi}(1-\beta^2) + x_T^2\left[S_1(x_T) - \beta^4 S_1(x_L) - S_0(x_T) - \beta^4 S_0(x_L)\right] \\
C &= \frac{2i}{\pi}(1-\beta^2) + x_T^2\left[\frac{1}{2}(1-\beta^4)\left(1+\frac{2i}{\pi}(\delta-1)\right)\right. \\
&\quad + 4(S_0(x_T) - \beta^4 S_0(x_L)) - S_1(x_T) - \beta^4 S_1(x_L) \\
&\quad \left. + x_T^2(S_1(x_T) - \beta^6 S_1(x_L)) + \frac{2i}{\pi}(1-\beta^2)\mathrm{Log}\frac{x_T}{2} - \frac{2i}{\pi}\beta^2\mathrm{Log}\beta\right] \qquad (8.42) \\
D &= \frac{2i}{\pi}\beta^2 - x_T^2\left[2(S_1(x_T) - \beta^4 S_1(x_L)) - S_0(x_T) - \beta^4 S_0(x_L)\right. \\
&\quad \left. + \frac{2i}{\pi}\left(\gamma - 1 + \mathrm{Log}\frac{x_T}{2}\right) + \frac{1}{2}\beta^2\left(1 + x_T^2 S_1(x_T)\right)\right] \\
E &= \frac{2i}{\pi}\beta^2 - x_T^2\left[2(S_1(x_T) - \beta^4 S_1(x_L)) - S_0(x_T) - \beta^4 S_0(x_L)\right. \\
&\quad \left. + \frac{2i}{\pi}\left(\gamma - 1 + \mathrm{Log}\frac{x_L}{2}\right) - \beta^2\frac{1-2\beta^2}{2}\left(1 + x_T^2 S_1(x_T)\right)\right]
\end{aligned}
$$

Ces formules sont obtenues à partir des développements en série (8.12) des fonctions de Hankel, et utilisent les mêmes notations. Les expressions ci-dessus permettent de prouver les relations asymptotiques suivantes entre les solutions de Helmholtz et de Kelvin bidimensionnelles :

$$
\begin{array}{lll}
(r \to 0) & (\forall \omega > 0) & \left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & = & O(1) \\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & = & O(r\mathrm{Log}r) \end{array} \right. \\
(\omega \to 0) & (\forall r > 0) & \left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & = & O(\mathrm{Log}\omega) \\ \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & = & O(\omega^2\mathrm{Log}\omega) \end{array} \right.
\end{array}
$$

On constate en particulier que, contrairement au cas tridimensionnel, le déplacement de Helmholtz ne tend pas vers celui de Kelvin pour $\omega \to 0$.

8.6 Représentations et équations intégrales en élastodynamique stationnaire

Compte tenu de ce qui précède, les formulations intégrales obtenues en section 7.9 pour l'élastodynamique transitoire sont immédiatement transposables.

REPRÉSENTATIONS INTÉGRALES. Le déplacement $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ et le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ en un point $\boldsymbol{x} \in E$ *non situé sur* $\partial\Omega$ admettent les représentations intégrales :

$$\begin{aligned}\kappa u_k(\boldsymbol{x}) &= \int_{\partial\Omega} \left\{ t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - u_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &\quad + \int_\Omega \rho F_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}V_y \qquad (8.43) \\ \kappa\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) &= \int_{\partial\Omega} \left\{ u_a(\boldsymbol{y}) n_b(\boldsymbol{y}) C_{abk\ell} \Sigma_{ij,\ell}^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega) - t_k(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &\quad - \int_\Omega \rho F_k(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x};\omega)\,\mathrm{d}V_y \qquad (8.44)\end{aligned}$$

avec $\kappa = 1$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega$) ou $\kappa = 0$ ($\boldsymbol{x} \notin \Omega$). Ces formules sont valables quelle que soit la solution élémentaire employée, à la seule condition que $\Omega \subseteq E$. Dans le cas particulier de la solution de Helmholtz, une intégration par parties permet d'obtenir la variante :

$$\begin{aligned}\kappa\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijab} &\int_{\partial\Omega} \left\{ D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ab,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - \rho\omega^2 u_a(\boldsymbol{y}) n_\ell(\boldsymbol{y}) U_a^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &- \int_{\partial\Omega} t_k(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}S_y - \int_\Omega \rho F_k(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}V_y \qquad (8.45)\end{aligned}$$

EQUATIONS INTÉGRALES RÉGULARISÉES. Tout état élastodynamique sur un domaine Ω borné et avec forces de volume nulles vérifie l'équation intégrale en déplacements :

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ u_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - u_i(\boldsymbol{x}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}S_y = 0 \quad (8.46)$$

et ce pour tout choix de la solution élémentaire.

Le gradient du déplacement admet en $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ la représentation intégrale :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} u_{k,\ell}(\boldsymbol{x},t) &= D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{x},t) A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\Gamma) - t_a(\boldsymbol{x},t) B_{a\ell}^k(\boldsymbol{x},\Gamma) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \left\{ D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{x}) \Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \left\{ t_a(\boldsymbol{y}) U_{a,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - t_a(\boldsymbol{x}) U_{a,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &\quad - \rho\omega^2 \int_{\partial\Omega} u_a(\boldsymbol{y}) n_\ell(\boldsymbol{y}) U_a^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}S_y \qquad (8.47)\end{aligned}$$

les termes $A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\Gamma)$, $B_{a,\ell}^k(\boldsymbol{x},\Gamma)$ étant donnés par (5.29), (5.30).

Conditions à l'infini et problèmes extérieurs. L'analyse de la validité des représentations et équations intégrales pour un domaine non borné $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$ (Ω borné), présentée en section 8.3 pour le régime transitoire, est directement transposable au régime stationnaire. Les conditions à l'infini de décroissance $R \to \infty$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^L.\boldsymbol{n} &= o(1) & \boldsymbol{u}^T.\boldsymbol{\tau} &= o(R^{-1}) \\ \boldsymbol{u}^T.\boldsymbol{n} &= o(R^{-1}) & \boldsymbol{u}^T.\boldsymbol{\tau} &= o(1) \end{aligned} \tag{8.48}$$

et de radiation (absence de source à l'infini) :

$$\boldsymbol{t}^L - i\omega\rho c_L \boldsymbol{u}^L = o(R^{-1}) \qquad \boldsymbol{t}^T - i\omega\rho c_T \boldsymbol{u}^T = o(R^{-1}) \tag{8.49}$$

assurent l'unicité de la solution d'un problème élastodynamique extérieur. Tout état élastodynamique pour le domaine non borné $\bar{\Omega}$ satisfaisant aux conditions à l'infini (8.48) et (8.49) vérifie l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} u_k(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \left\{ u_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - u_i(\boldsymbol{x}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ - \int_{\partial\Omega} t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\, \mathrm{d}S_y = 0 \end{aligned} \tag{8.50}$$

qui redonne la représentation intégrale (8.43) pour $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$. L'unicité de la solution d'un problème aux limites extérieur vérifiant (8.48), (8.49) est établie (Eringen et Suhubi [5]).

Réciproquement, les propriétés asymptotiques de la solution de Helmholtz impliquent que tout couple $(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$ donné par les représentations intégrales (8.43), (8.45) vérifie les conditions à l'infini (8.48), (8.49). Cette propriété rend très intéressante l'utilisation de formulations intégrales pour les problèmes extérieurs.

Equations intégrales indirectes et valeurs propres fictives. La construction de représentations intégrales indirectes procède exactement comme en section 8.3. La démarche permettant de mettre en évidence l'existence de fréquences propres fictives est transposable à l'identique et conduit à des conclusions de même nature.

8.7 Exemples numériques en élastodynamique stationnaire

Diffraction d'une onde plane élastique par une cavité sphérique (Bonnet [2]). Un domaine infini Ω contient une cavité sphérique de rayon R, centrée à l'origine, à surface libre ($\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$ sur $\partial\Omega$). Celle-ci est soumise à une onde plane longitudinale incidente $\boldsymbol{u}^I$ se propageant selon $\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{u}^I(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}_0 e^{ik_L y_3} \boldsymbol{e}_3$$

Le champ $\boldsymbol{u}^I$ ne satisfait pas les conditions de radiation (8.49), (8.48). Pour calculer l'effet de la présence de la cavité, on décompose le déplacement total $\boldsymbol{u}^{total}$ en :

$$\boldsymbol{u}^{total} = \boldsymbol{u}^I + \boldsymbol{u}$$

et on utilise $\boldsymbol{u}$ comme inconnue. Celle-ci satisfait sur $\partial\Omega$ la condition :

$$\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{I}})$$

qui exprime que la surface est libre de contraintes : on est en présence d'un problème de Neumann extérieur. Ce problème, qui a une solution analytique connue (Eringen et Suhubi [5]), est un test classique de programme d'éléments de frontière en élastodynamique (Rizzo et coll. [10], par exemple) qui a été utilisé pour la discrétisation de l'équation intégrale en déplacements directe (8.46). Les résultats présentés ci-après donnent les valeurs prises par deux types d'écart relatif entre solutions $\boldsymbol{u}$ analytique et numérique : l'écart maximal :

$$\Delta u_{max} = \max_{\boldsymbol{y}\in\partial\Omega} \frac{|u - u_{exact}|}{|u_{exact}|}$$

et l'écart quadratique moyen :

$$\Delta u^2_{moy} = \frac{\int_{\partial\Omega} |u - u_{exact}|^2 \, \mathrm{d}S_y}{\int_{\partial\Omega} |u_{exact}|^2 \, \mathrm{d}S_y}$$

Grâce à la symétrie du domaine par rapport aux trois plans de coordonnées, le maillage par éléments de frontière ne concerne qu'un octant de sphère. Deux maillages, employant l'élément quadrilatéral à 8 nœuds (voir l'annexe B) sont utilisés ici :

- Maillage M_1 : 3 éléments, 16 nœuds.
- Maillage M_2 : 12 éléments, 49 nœuds.

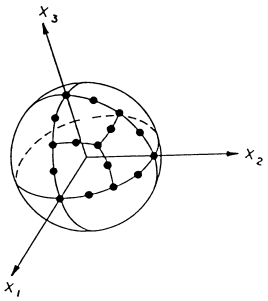

Figure 8.1: Maillage M_1.

Calcul de $\boldsymbol{u}$ sur la frontière $\partial\Omega$. Le tableau ci-dessous présente les écarts relevés, pour quelques valeurs du nombre d'onde adimensionnel $k_L r = \omega R/c_L$:

Calcul de $\boldsymbol{u}$ en champ lointain. La figure 8.2 ci-après représente les valeurs obtenues pour le module des composantes u_r, u_θ de $\boldsymbol{u}$ sur la surface de la cavité $(r/R = 1)$ et en champ lointain $(r/R = 100)$, (r, θ, ϕ) désignant des coordonnées sphériques centrées à l'origine et d'axe de symétrie $\boldsymbol{e}_3$ et avec le maillage M_2 ; le bon accord entre solutions analytique (traits pleins) et numérique (symboles) est apparent.

$k_L R$	Δu_{max}	Δu_{moy}
1.	3.5 (M_1)	2.0 (M_1)
	0.43 (M_2)	0.19 (M_2)
2.	1.5 (M_2)	0.68 (M_2)
2.8	5.4 (M_2)	2.2 (M_2)
3.	7.7 (M_2)	3.5 (M_2)

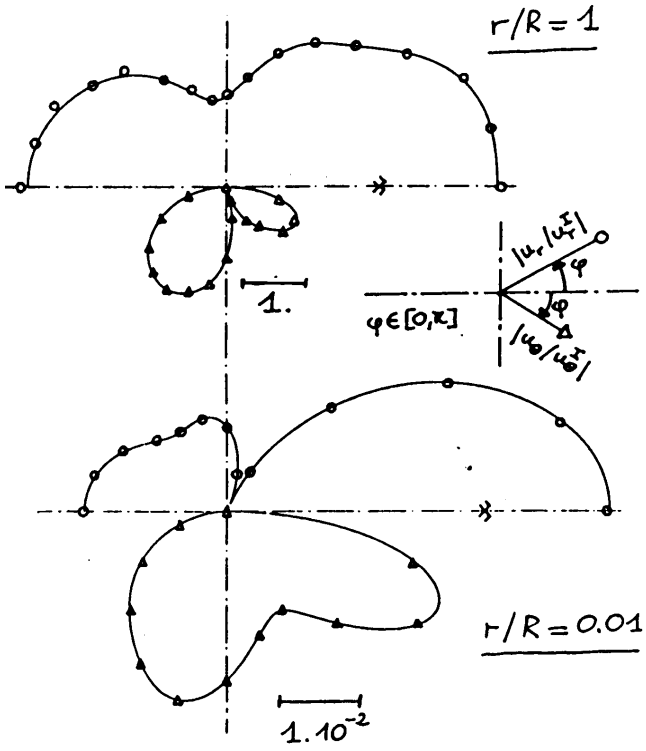

Figure 8.2: Diffraction d'une onde plane élastique L par une cavité sphérique (d'après [2]).

Valeurs propres fictives. Nous présentons un résultat numérique afin d'illustrer l'effet de la méthode de Schenck pour la prise en compte des valeurs propres fictives. La solution de l'équation intégrale (8.46) pour le problème de Neumann extérieur cesse d'être unique si ω est une pulsation propre du problème de Dirichlet intérieur (section 8.3). Dans le cas de la sphère, la première valeur propre est [5] $k_L R \approx 4.493$. La figure 8.3 représente l'erreur Δu_{moy} obtenue (au moyen du maillage M_4 : 48 éléments, 169 nœuds) pour plusieurs nombres d'onde $k_L R$ voisins de cette valeur critique, avec et sans utilisation de la méthode de Schenck. On voit clairement la divergence importante des résultats au voisinage de la valeur propre fictive si rien n'est utilisé pour parer à ce phénomène.

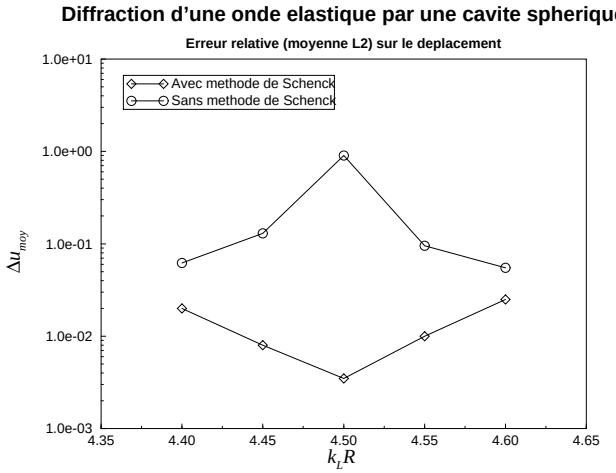

Figure 8.3: Effet de la méthode de Schenck autour du nombre d'onde critique $k_L R \approx 4.493$ (d'après [2]).

Relation entre finesse de maillage et longueur d'onde. Le tableau 8.2 montre l'influence de ω (ou de la longueur d'onde) sur les résultats numériques. Plus précisément, si n désigne le nombre de côtés d'éléments (mesurés le long du diamètre de la sphère) par longueur d'onde T, ce tableau met en évidence un seuil sur n en-dessous duquel la précision des résultats numériques se dégrade assez rapidement ; ce seuil est d'environ $n = 3$. Cela signifie que, pour notre choix d'élément de frontière (quadrangle à 8 nœuds), il faut prévoir au minimum 3 côtés d'éléments, ou 7 nœuds, par longueur d'onde. Ces résultats numériques correspondent à $k_T R \approx 8/3$ (maillage M_1) et $k_T R \approx 4/3$ (maillage M_2).

	Maillage M_1			Maillage M_2		
n	Δu_{max}	Δu_{moy}	$[\mathrm{Cond}K]^{-1}$	Δu_{max}	Δu_{moy}	$[\mathrm{Cond}K]^{-1}$
3.34	2.1	1.8	0.11	1.4	0.79	0.032
3.	2.1	1.49	0.10	2.7	1.59	0.025
2.73	2.4	1.72	0.094	6.2	3.02	0.003
2.5	5.7	3.42	0.10	10.2	5.64	0.014
2.31	11.9	6.98	0.10	19.	10.4	0.004

Tableau 8.2 : Relation entre finesse de maillage et longueur d'onde (d'après [2]).

PROBLÈMES DE DIRICHLET ET DE NEUMANN : COMPARAISON DES PERFORMANCES (BONNET [2]). On considère maintenant, sur un exemple numérique similaire (cavité sphérique pressurisée), la comparaison des performances relatives de la résolution numérique de l'équation intégrale en déplacements (8.46) pour les problèmes de Dirichlet ou

de Neumann.

La cavité sphérique est soumise à une pression interne p. Les composantes non nulles de $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}$ sont données, en coordonnées sphériques, par [5] :

$$u_r = -\frac{pR^3}{4\pi r^2}\frac{4\beta^2(ix_L-1)}{4\beta^2(1-ik_LR)-(k_LR)^2}e^{ik_L(r-R)}$$
$$\sigma_{rr} = -\frac{pR^3}{r^3}\frac{4\beta^2(1-ix_L)-x_L^2}{4\beta^2(1-ik_LR)-(k_LR)^2}e^{ik_L(r-R)}$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{pR^3}{r^3}\frac{4\beta^2(1-ix_L)+(2-4\beta^2)x_L^2}{4\beta^2(1-ik_LR)-(k_LR)^2}e^{ik_L(r-R)} = \sigma_{\phi\phi}$$

On peut alors considérer la résolution numérique du problème de Neumann (inconnue $\boldsymbol{u}$ sur Ω, avec $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}^D = -p\boldsymbol{n}$ donné) et du problème de Dirichlet (inconnue $\boldsymbol{t}$ sur Ω, avec $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^D$ donné). Les données $\boldsymbol{u}^D$, $\boldsymbol{t}^D$ homologues (conduisant au même état élastodynamique) sont :

$$\boldsymbol{t}^D = p\boldsymbol{e}_r \qquad \boldsymbol{u}^D = -\frac{pR}{4\pi}\frac{4\beta^2(ik_LR-1)}{4\beta^2(1-ik_LR)-(k_LR)^2}$$

Le tableau 8.3 présente les résultats obtenus dans les deux cas. On voit que, pour le même état élastodynamique, l'équation intégrale en déplacements (8.46) donne des résultats bien meilleurs sur le problème de Neumann que sur celui de Dirichlet. Cela pourrait tenir au fait que ces deux problèmes sont régis respectivement par les équations intégrales singulières suivantes :

$$\frac{1}{2}u_k(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega}^{\star} u_i(\boldsymbol{y})T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}S_y = \int_{\partial\Omega} t_i^D(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}S_y$$
$$\int_{\partial\Omega} t_i^D(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}S_y = \frac{1}{2}u_k^D(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega}^{\star} u_i^D(\boldsymbol{y})T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\,\mathrm{d}S_y$$

qui ont respectivement la structure d'équations intégrales de Fredholm (singulières) de deuxième et première espèce[1]. Or on sait que les équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce ont de meilleures propriétés numériques que celles de première espèce, tout au moins quand elles ne sont pas singulières (Wing [11]). Les résultats numériques ci-dessus suggèrent que l'équation intégrale singulière de première espèce est mal posée ; en particulier, pour le problème de Dirichlet, un raffinement de maillage ($M_1 \to M_2$) *dégrade* la solution au lieu de l'améliorer, contrairement au problème de Neumann.

Cet exemple suggère qu'il pourrait être indiqué de résoudre le problème de Neumann à l'aide des équations intégrales en tractions, dont la structure s'apparente à l'équation de deuxième espèce. Les équations intégrales en traction du type (8.47) sont encore peu développées actuellement sur le plan numérique (sauf en ce qui concerne les problèmes avec fissures), sans doute parce que les problèmes de régularisation n'ont été résolus correctement que trop récemment, sans doute aussi à cause des difficultés supplémentaires de mise en œuvre induites par la nécessité d'assurer une régularité $C^{1,\alpha}$ de $\boldsymbol{u}$ aux points de collocation (chapitre 5).

[1] L'écriture en valeur principale de Cauchy permet ici de mettre l'accent sur la structure d'équations intégrales de Fredholm.

	Neumann				Dirichlet			
	M_1		M_2		M_1		M_2	
$k_T R$	Δu_{max}	Δu_{moy}	Δu_{max}	Δu_{moy}	Δu_{max}	Δu_{moy}	Δu_{max}	Δu_{moy}
0.3162	2.8	2.4	.20	.19	2.1	1.3	10.	4.9
1.581	2.8	2.4	.20	.19	2.5	2.3	14.	6.6
0.3162	2.5	2.5	.26	.20	18.	11.	10.	4.9
0.3162	2.2	1.5	.22	.15	—	—	8.3	4.1
0.3162	5.1	3.0	.20	.15	—	—	8.3	4.9
0.3162	—	—	6.4	.34	—	—	18.	11.

Tableau 8.3 : Performances comparées pour la résolution des problèmes de Neumann et de Dirichlet pour la cavité sphérique pressurisée, d'après [2] (les écarts Δu sont en %).

PROPAGATION D'ONDES DANS UN DEMI-ESPACE : CALCUL D'EFFET DE SITE (CLOUTEAU [3]). Cet exemple fait intervenir un demi-espace élastique homogène (surface libre $y_3 = 0$) tel que $c_L/c_T = 2$ et contenant une vallée ellipsoïdale, limitée par la surface (en coordonnées adimensionnelles) :

$$0.25y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$$

La vallée est soit vide, soit remplie d'un matériau élastique tel que :

$$c_L/c'_L = 2 \qquad c_T/c'_T = 2$$

La perturbation sur la propagation des ondes élastiques créée par la présence de la vallée ("effet de site") est simulée numériquement, au moyen d'éléments de frontière ; la solution élémentaire du demi-espace stratifié (Kennett [8]) est utilisée. De cette manière, le maillage (reproduit sur la figure 8.4) est réduit au demi-ellipsoïde qui réalise l'interface massif/vallée. Les figures 8.5 et 8.6 reproduisent quelques-uns des résultats numériques donnés dans [3].

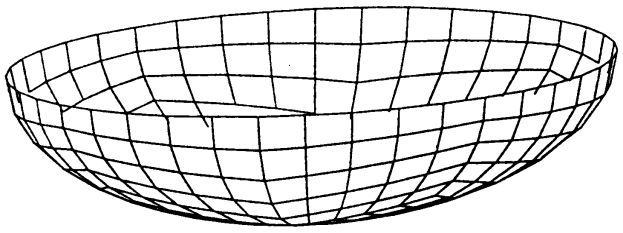

Figure 8.4: Effet de site dans une vallée ellipsoïdale : maillage d'éléments de frontière utilisé (d'après [3]).

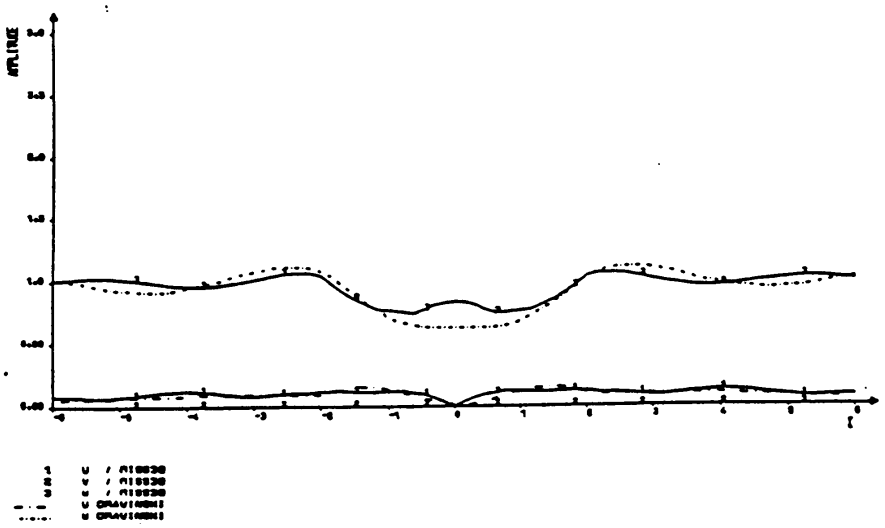

Figure 8.5: Effet de site dans une vallée ellipsoïdale vide : déplacements verticaux et horizontaux observés le long du grand axe (onde L, incidence verticale), d'après [3].

Références bibliographiques

[1] Abramowitz, M., Stegun, I. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York (1972).

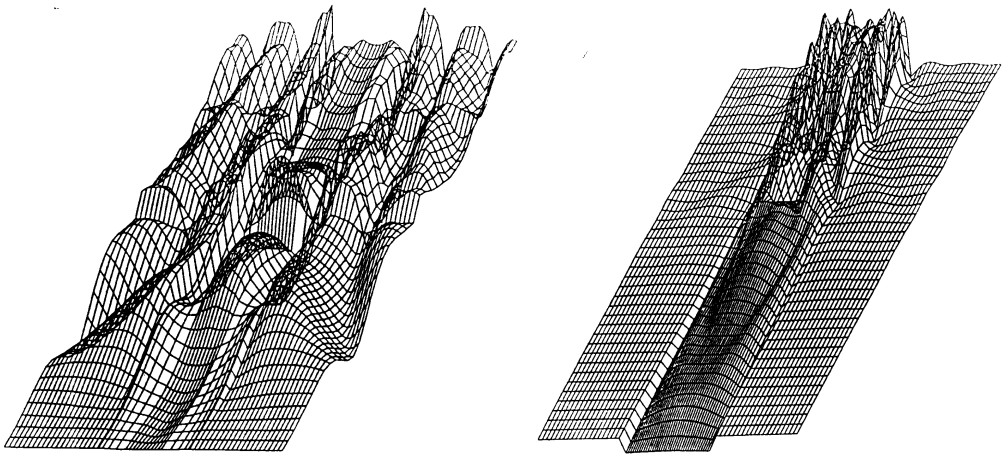

Figure 8.6: Effet de site dans une vallée ellipsoïdale vide (à gauche) ou remplie (à droite) : déplacements verticaux observés le long du grand axe (onde L, incidence verticale), d'après [3].

[2] BONNET, M. *Méthode des équations intégrales régularisées en élastodynamique tridimensionnelle.*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (Nov. 1986). publiée dans le Bulletin EDF/DER série C, 1/2, 1987.

[3] CLOUTEAU, D. *Propagation d'ondes dans les milieux hétérogènes. Application à la tenue des ouvrages sous séismes*. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris, France (1990).

[4] DONGARRA, J. J., BUNCH, J. R., MOLER, C. B., STEWART, G. B. LINPACK *users'guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA (1979).

[5] ERINGEN, A. C., SUHUBI, E. S. *Elastodynamics (vol II - linear theory)*. Academic Press (1975).

[6] GRADSHTEYN, I. S., RYZHIK, I. M. *Tables of integrals, series and products*. Academic Press (1980).

[7] HALPERN, L. *Etude des conditions aux limites absorbantes pour des schémas numériques relatifs à des équations hyperboliques linéaires*. Thèse de Doctorat, Université Paris VI (1987).

[8] KENNETT, B. L. N. Seismic wave propagation in stratified media. In *Advances in Applied Mechanics*, vol. 21. Academic Press (1981).

[9] REZAYAT, M., SHIPPY, D. J., RIZZO, F. J. On time-harmonic elastic wave analysis by the boundary element method for moderate to high frequencies. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **55**, 349–367 (1986).

[10] RIZZO, F. J., SHIPPY, D. J., REZAYAT, M. A boundary integral equation method for radiation and scattering of elastic waves in three dimensions. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **21**, 115–129 (1985).

[11] WING, G. M. *A primer on integral equations of the first kind*. SIAM Publications, Philadelphia, USA (1991).

9

Diffusion, écoulements fluides

9.1 Equation de la diffusion

On s'intéresse à la résolution de l'équation scalaire de la diffusion, d'inconnue $u(\boldsymbol{y}, t)$:

$$k\Delta u - \dot{u} = 0 \qquad \forall (\boldsymbol{y}, t) \in \Omega \times [0, T] \tag{9.1}$$

k étant une caractéristique connue du milieu physique. On suppose pour simplifier l'absence de sources distribuées dans Ω, que l'on pourrait introduire si nécessaire. Un problème bien posé comprend en outre des conditions initiales (prises par convention à $t = 0$) :

$$u(\boldsymbol{y}, 0) = u_0(\boldsymbol{y})$$

ainsi que des conditions aux limites (donnée de u, de $q = \boldsymbol{\nabla} u.\boldsymbol{n}$ ou d'une relation entre u et q en chaque point de la frontière $\partial\Omega$) ; des conditions à l'infini doivent également être imposées si Ω n'est pas borné.

Identité de réciprocité. Suivant une démarche analogue à celle employée au chapitre 7 pour l'équation des ondes, la formule de Green (2.4) appliquée à deux champs u^1, u^2 solutions de l'équation de diffusion (9.1) puis intégrée sur $\tau \in [0, t]$ conduit à :

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} \left[(q^1 \star u^2)(\boldsymbol{y}, t) - (q^2 \star u^1)(\boldsymbol{y}, t) \right] \, \mathrm{d}S_y \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{k} \left[u_0^2(\boldsymbol{y}) u^1(\boldsymbol{y}, t) - u_0^1(\boldsymbol{y}) u^2(\boldsymbol{y}, t) \right] \, \mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{9.2}$$

où le symbole $\star$ désigne le *produit de convolution temporelle* (7.3). On remarque que le terme de domaine s'annule pour des conditions initiales u_0^1, u_0^2 nulles.

Solution élémentaire. Pour un domaine $E \subseteq \mathbb{R}^3$ et un point fixé $\boldsymbol{x} \in E$, on considère la solution élémentaire $G(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, réponse dans E à une source ponctuelle impulsionnelle exercée en $\boldsymbol{x}$ à l'instant $t = 0$ et pour une condition initiale nulle. Cette dernière vérifie donc :

$$k\Delta G - \dot{G} + \delta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\delta(t) = 0 \tag{9.3}$$

La solution élémentaire pour l'espace infini ($E = \mathbb{R}^3$) est donnée par :

$$G(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{(4\pi k t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4kt}\right) \tag{9.4}$$

et vérifie la propriété de symétrie :

$$G(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y}, t, \boldsymbol{x})$$

La singularité au voisinage de $r = 0$ de la solution élémentaire (9.4) n'est pas directement visible. On peut toutefois montrer, par exemple par un calcul direct, que :

$$\int_0^t G(\boldsymbol{x}, t-\tau, \boldsymbol{y}) d\tau = \frac{1}{4\pi r} + O(1) \qquad (r \sim 0) \tag{9.5}$$

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION. Considérons un domaine Ω borné et soit $\boldsymbol{x}$ un point arbitraire *non situé sur* $\partial\Omega$. L'identité de réciprocité (9.2) appliquée à l'état réel (état 1) et à la solution élémentaire impulsionnelle (état 2) conduit à :

$$\begin{aligned} &u(\boldsymbol{x}, t) + \int_{\partial\Omega} \{H(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \star u(\boldsymbol{y}, t) - G(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \star q(\boldsymbol{y}, t)\} \, \mathrm{d}S_y \\ &= \frac{1}{k} \int_\Omega u_0(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{9.6}$$

en notant $H = G_{,j} n_j$ la dérivée normale de la solution élémentaire et avec $\kappa = 1$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega$), $\kappa = 0$ ($\boldsymbol{x} \notin \Omega$). Cette formule est applicable pour tout $t \geq 0$ et tout point $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$, et une simple dérivation sous le signe intégral donne la représentation intégrale du gradient $\boldsymbol{\nabla} u(\boldsymbol{x})$.

EQUATION INTÉGRALE DE FRONTIÈRE. L'équation intégrale est obtenue par la méthode habituelle de passage à la limite $\varepsilon \to 0$ dans les équations écrites pour un domaine $\Omega_\varepsilon = \Omega - v_\varepsilon$ construit par prélèvement d'un voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ de $\boldsymbol{x}$. La propriété (9.5) de report des singularités en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ de la solution élémentaire dynamique dans sa contrepartie statique est utilisée. Supposant pour simplifier $u_0 = 0$, on obtient l'équation intégrale régularisée :

$$\begin{aligned} &\int_{\partial\Omega} \{H(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \star u(\boldsymbol{y}, t) - u(\boldsymbol{y}, t) H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\} \, \mathrm{d}S_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}, t) - u(\boldsymbol{x}, t)] H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} G(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \star q(\boldsymbol{y}, t) \, \mathrm{d}S_y = 0 \end{aligned} \tag{9.7}$$

DISCRÉTISATION. La technique exposée au chapitre 7 pour l'équation des ondes en régime temporel peut être reprise, et la structure des équations discrétisées est similaire. En particulier, la propriété de "translation temporelle" reste vérifiée si un pas de temps constant est utilisé. On note toutefois que la notion de causalité est absente.

FORMULATION EN VARIABLE DE LAPLACE. La transformation de Laplace :

$$f(t) \to \hat{f} = \mathcal{L}f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{9.8}$$

appliquée à (9.1) donne l'équation transformée :

$$[k\Delta\hat{u} - s]\hat{u} = 0 \tag{9.9}$$

Cette dernière admet pour solution élémentaire en milieu infini :

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) = \frac{1}{4\pi k r} e^{-r\sqrt{s/k}} \tag{9.10}$$

On voit donc que :

$$kG(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) - \frac{1}{4\pi r} = O(1) \qquad r \sim 0$$

ce qui permet ici encore d'obtenir une équation intégrale régularisée par transfert de la singularité dans la solution élémentaire statique :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} &[H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) - H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]u(\boldsymbol{y}, s)\,\mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}, s) - u(\boldsymbol{x}, s)]H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, s) \star q(\boldsymbol{y}, s)\,\mathrm{d}S_y = 0\end{aligned} \tag{9.11}$$

avec $H = kG_{,i}n_i$

9.2 Ecoulements fluides

ECOULEMENTS POTENTIELS. Il s'agit de fluides parfaits incompressibles en écoulement irrotationnel, dont le calcul se ramène à la recherche d'un potentiel des vitesses vérifiant l'équation de Laplace. Cette catégorie d'écoulements se prête donc bien à une résolution par éléments de frontière, suivant les techniques exposées au chapitre 3.

Cette classe de problèmes comprend également les écoulements de fluides parfaits en milieu poreux (loi de Darcy) et les écoulements à surface libre (houle, ondes de gravité). Des exemples et de nombreuses références sont donnés par Liggett [4].

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES. Les écoulements de fluides newtoniens incompressibles sont gouvernés par les équations locales de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla} p + \mu\Delta\boldsymbol{U} = \rho\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{U}.\boldsymbol{U}\right) - \rho g \\ \operatorname{div}\boldsymbol{U} = 0 \end{cases} \tag{9.12}$$

associées à des conditions aux limites cinématiques (exemples : adhérence à un obstacle ($\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{obstacle}$), vitesse à l'infini donnée) ou dynamiques (exemple : équilibre avec la pression ambiante). Le tenseur des contraintes est relié à la vitesse par la loi de comportement du fluide newtonien incompressible :

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(U_{i,j} + U_{j,i}) \tag{9.13}$$

Les équations de Navier-Stokes sont non-linéaires en raison du terme convectif[1] $\boldsymbol{\nabla U}.\boldsymbol{U}$. Pour cette raison, la formulation intégrale, très complexe, fait apparaître des intégrales de domaine. Nous renvoyons le lecteur à Liggett [4], Wu et Wahbah [7].

ECOULEMENTS LENTS STATIONNAIRES DE FLUIDES VISQUEUX INCOMPRESSIBLES. Les champs de vitesse $\boldsymbol{U}$ et de pression p d'un écoulement fluide incompressible de viscosité μ vérifient, pour les mouvements lents stationnaires et en l'absence de gravité, les équations (système de Stokes) :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla} p + \mu \Delta \boldsymbol{U} = \boldsymbol{0} \\ \operatorname{div} \boldsymbol{U} = 0 \end{cases} \tag{9.14}$$

L'hypothèse de lenteur conduit à négliger le terme convectif $\boldsymbol{\nabla U}.\boldsymbol{U}$ et permet de linéariser les équations de l'écoulement.

Le système de Stokes possède une solution élémentaire (vitesse $\boldsymbol{U}^k$ et pression P^k), associée à une source ponctuelle au point $\boldsymbol{x}$ et suivant la direction $\boldsymbol{e}_k$, donnée, pour les problèmes tridimensionnels, par[2] :

$$U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{8\pi r}[\delta_{ik} + r_{,i} r_{,k}] \qquad P^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{\mu}{4\pi}(\frac{1}{r})_{,k} \tag{9.15}$$

Le tenseur des contraintes de composantes Σ_{ij}^k, associé à $(\boldsymbol{U}^k, P^k)$, est donné par :

$$\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{3\mu}{4\pi}\frac{r_{,i} r_{,j} r_{,k}}{r^2} \tag{9.16}$$

et vérifiant :

$$\begin{cases} -\boldsymbol{\nabla} P^k + \mu \Delta \boldsymbol{U}^k + \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_k = 0 \\ \operatorname{div} \boldsymbol{U} = 0 \end{cases} \tag{9.17}$$

On remarque que U_i^k et (P^k, Σ_{ij}^k) sont singulières comme $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-1}$ et $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-2}$ respectivement. D'autre part, pour un domaine fluide Ω et des champs $\boldsymbol{U}^1, \boldsymbol{V}^2, p^1$ réguliers, on a :

$$\int_\Omega \boldsymbol{U}^2.(\mu\Delta\boldsymbol{U}^1 - \boldsymbol{\nabla} p^1)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{U}^2.\boldsymbol{\sigma}^1.\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega (\mu \boldsymbol{\nabla U}^1 : \boldsymbol{\nabla U}^2 - p \operatorname{div} \boldsymbol{U}^2)\,\mathrm{d}V$$

ce qui conduit, pour des champs $\boldsymbol{U}^1, \boldsymbol{U}^2$ à divergence nulle, à l'identité de réciprocité :

$$\int_\Omega \left\{\boldsymbol{U}^2.(\mu\Delta\boldsymbol{U}^1 - \boldsymbol{\nabla} p^1) - \boldsymbol{U}^1.(\mu\Delta\boldsymbol{U}^2 - \boldsymbol{\nabla} p^2)\right\}\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \left\{\boldsymbol{U}^2.\boldsymbol{t}^1 - \boldsymbol{U}^1.\boldsymbol{t}^2\right\}\,\mathrm{d}S$$

où $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}$ désigne le vecteur-contrainte.

Suivant la démarche habituelle, on peut prendre pour états 1 et 2 l'écoulement inconnu solution de (9.14) et la solution élémentaire (9.17), respectivement, dans l'identité de réciprocité. Tous calculs faits, cela conduit pour un point $\boldsymbol{x}$ non situé

[1] l'accélération est en effet la dérivée matérielle de la vitesse, au sens de la définition (12.3).

[2] Elle est souvent appelée *stokeslet* dans la littérature anglophone.

sur la frontière du domaine fluide Ω à la formule de représentation intégrale du champ de vitesses :

$$U_k(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{ t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - U_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \, \mathrm{d}S_y$$

$T_i^k = \Sigma_{ij}^k$ désignant le vecteur-contrainte élémentaire. Le laplacien de $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ est alors représenté par :

$$U_{k,\ell\ell}(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{ t_i(\boldsymbol{y}) U_{i,\ell\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - U_i(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij,\ell\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) \right\} \, \mathrm{d}S_y \tag{9.18}$$

(on a utilisé l'égalité des dérivées secondes par rapport aux composantes de $\boldsymbol{x}$ et de $\boldsymbol{y}$ de la solution élémentaire (9.17)). De plus, on remarque que (9.17) vérifie :

$$\begin{aligned} U_{i,\ell\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= U_{i,\ell k}^\ell(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &&= -U_{i,\ell\bar{k}}^\ell(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ P_{,\ell\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= P_{,\ell k}^\ell(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &&= -P_{,\ell\bar{k}}^\ell(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

Puisque $\Delta\boldsymbol{U} = \boldsymbol{\nabla} p$ d'après (9.14), cette propriété permet de donner la représentation intégrale de la pression $p(\boldsymbol{x})$ par intégration de la formule (9.18) par rapport à x_k :

$$p(\boldsymbol{x}) - p_0 = \int_{\partial\Omega} \left\{ U_i(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij,\ell}^\ell(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y}) U_{i,\ell}^\ell(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \, \mathrm{d}S_y \tag{9.19}$$

à la constante d'intégration p_0 près.

L'équation (9.14_1) traduit en fait l'équilibre des contraintes données par la loi de comportement (9.13) : $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}$. On en déduit l'identité :

$$\int_{\partial\Omega} T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y + \kappa \delta_{ik} = 0$$

avec $\kappa = 1$ ($\boldsymbol{x} \in \Omega$), $\kappa = 0$ ($\boldsymbol{x} \notin \Omega$). Celle-ci permet, comme en élasticité, d'obtenir une équation intégrale régularisée :

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ [U_i(\boldsymbol{y}) - U_i(\boldsymbol{y})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \, \mathrm{d}S_y = 0 \tag{9.20}$$

Résolution numérique. On remarque la forte ressemblance entre les équations intégrales et solutions élémentaires pour le problème de Stokes (9.15)–(9.20) et pour l'élasticité statique (4.8)–(4.31). En particulier, les techniques de discrétisation exposées au chapitre 4 sont applicables sans modification.

Références bibliographiques

[1] Abousleiman, Y., Cheng, A. H. D. Boundary element solution for steady and unsteady Stokes flow. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **117**, 1–13 (1994).

[2] CHANG, Y. P., KANG, C. S., CHEN, D. J. The use of fundamental Green's functions for the solutions of problems of heat conduction in anisotropic media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, **16**, 1905–1918 (1973).

[3] HU, H. Study of integral equation methods for transonic flow calculations. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **11**, 101–107 (1993).

[4] LIGGETT, J. A. Fluid mechanics. In D. E. Beskos (ed.), *Boundary element methods in mechanics.*, vol. 1, pp. 367–416. North Holland (1987).

[5] POWER, H., PARTRIDGE, P. W. The use of Stokes' fundamental solution for the boundary-only element formulation of the three-dimensional Navier-Stokes equations for moderate Reynolds numbers. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **37**, 1825–1840 (1994).

[6] VAN DER WEIDEN, R., DE HOOP, A. T. Boundary integral equations for the computational modeling of three-dimensional groundwater flow problems. *Comp. Mech.*, **4**, 283–291 (1989).

[7] WU, J. C., WAHBAH, M. *Numerical solution of viscous flow equations using integral representations.*, vol. 59 of *Lecture notes in Physics*, pp. 448–453. Springer-Verlag (1976).

Partie III

Techniques complémentaires

10

Equations intégrales variationnelles

L'approche par *collocation* dont nous avons parlé jusqu'ici, si elle est la plus utilisée en pratique, n'est pas la seule possible. On se propose d'exposer dans ce chapitre la construction d'une formulation variationnelle intégrale pour les problèmes aux limites mixtes tridimensionnels en statique, pour laquelle certains résultats de régularisation du chapitre 2 jouent un rôle important. On néglige pour simplifier l'existence de forces de volume. La frontière $\partial\Omega$ est supposée régulière (voir la section 1.6) en chacun de ses points ; la normale unitaire est dirigée, suivant la convention habituelle, vers l'extérieur du domaine Ω.

10.1 Formulation intégrale symétrique pour l'équation de Laplace

IDÉE DIRECTRICE. Laissant de côté les difficultés liées à la singularité de la solution élémentaire, les équations intégrales en potentiel et en flux pour la solution (u, q) de l'équation de Laplace sur un domaine Ω s'écrivent :

$$0 = \frac{1}{2}q(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{y})G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_i(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_y$$
$$0 = \frac{1}{2}u(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$

L'idée consiste alors à multiplier les deux équations intégrales ci-dessus par des fonctions-test, respectivement $\tilde{u}$ et $\tilde{q}$, puis intégrer le résultat une nouvelle fois sur $\partial\Omega$, ce

qui donne le système d'équations :

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{x})\tilde{u}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \tilde{u}(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{y})G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})n_i(\boldsymbol{x})n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
&\quad - \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \tilde{u}(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
0 &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{x})\tilde{q}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
&\quad - \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}
$$

Le système ci-dessus constitue l'écriture des équations intégrales au sens des *résidus pondérés*. Il présente une structure symétrique, de la forme :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_{uu}(u,\tilde{u}) + \mathcal{B}_{qu}(q,\tilde{u}) &= 0 \\
\mathcal{B}_{uq}(u,\tilde{q}) + \mathcal{B}_{qq}(q,\tilde{q}) &= 0
\end{aligned}
$$

où les formes bilinéaires $\mathcal{B}_{uu}$ et $\mathcal{B}_{qq}$ sont symétriques et $\mathcal{B}_{uq}$ $\mathcal{B}_{qu}$ sont transposées l'une de l'autre, en raison des propriétés de symétrie de la solution élémentaire $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$.

En pratique, la construction du système d'équations symétriques est plus délicate car il faut d'une part utiliser des formes régularisées des équations intégrales, d'autre part faire apparaître explicitement les conditions aux limites du problème. C'est ce que nous montrons maintenant, sur le problème modèle de l'équation de Laplace avec conditions aux limites mixtes :

$$
\Delta u = 0 \qquad u = u^D \text{ sur } S_u \quad q = q^D \text{ sur } S_{\mathrm{q}} \tag{10.1}
$$

RÉSIDU PONDÉRÉ POUR L'ÉQUATION INTÉGRALE EN POTENTIEL. On reprend l'équation intégrale (2.20), soit :

$$
0 = \kappa u(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \tag{10.2}
$$

(avec $\kappa = 0$ si Ω borné et $\kappa = 1$ si $\mathbb{R}^3 - \Omega$ est borné), valable sous cette forme régularisée pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, et notamment pour $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$. Elle est alors multipliée par une fonction-test $\tilde{q}(\boldsymbol{x})$ et intégrée une nouvelle fois sur $\partial\Omega$, et on obtient :

$$
\begin{aligned}
0 &= \kappa\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x})[u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
&\quad - \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x
\end{aligned} \tag{10.3}
$$

Les intégrales de surface successives sont faiblement singulière et régulière.

Formulation variationnelle intégrale du problème de Dirichlet. Supposons u donné sur toute la frontière : $u = u^D$ sur $\partial\Omega$. Alors l'équation (10.3) entraîne que le flux q inconnu est solution du problème variationnel :

$$
\mathcal{B}_{qq}(q,\tilde{q}) = \mathcal{L}_q(\tilde{q}) \qquad \forall \tilde{q} \in \mathcal{V}_q \tag{10.4}
$$

où $\mathcal{V}_q$ désigne l'ensemble des fonctions-test $\tilde{q}$ définies sur $\partial\Omega$ et continues par morceaux, et :

$$\mathcal{B}_{qq}(q,\tilde{q}) = \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$
$$\mathcal{L}_q(\tilde{q}) = \kappa\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x})u^D(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x})[u^D(\boldsymbol{y}) - u^D(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x$$

Le caractère symétrique de la forme bilinéaire $\mathcal{B}_{qq}$ découle de la propriété de symétrie (2.9) :

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \tag{10.5}$$

Résidu pondéré pour l'équation intégrale en flux. Cette fois, il s'agit de formuler au sens des résidus pondérés la représentation intégrale (2.15) du gradient de u :

$$0 = u_{,i}(\boldsymbol{z}) + \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{y})G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \tag{10.6}$$

qui, sous cette forme non régularisée, n'est valable que pour $\boldsymbol{z} \notin \partial\Omega$; le domaine Ω peut être borné ou non. Suivant une idée de Sirtori et coll. [12], considérons une surface fermée auxiliaire $\tilde{S}$, intérieure au domaine Ω (en particulier $\tilde{S} \cap \partial\Omega = \emptyset$), et telle qu'il existe une relation biunivoque $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega \to \boldsymbol{z} \in \tilde{S}$. Pour une frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière, il est toujours possible de construire une telle surface auxiliaire $\tilde{S}$, par exemple par :

$$\boldsymbol{x} \in \partial\Omega \to \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \eta\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) \in \tilde{S} \tag{10.7}$$

pour $\eta > 0$ suffisamment petit. On choisit d'orienter la normale unitaire sur $\tilde{S}$ de telle sorte qu'elle soit dirigée de $\tilde{S}$ vers $\partial\Omega$.

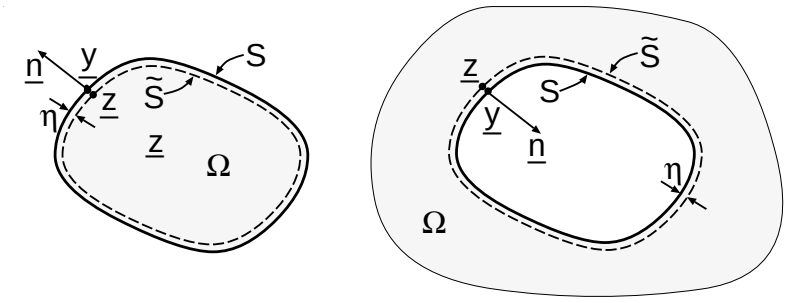

Figure 10.1: Surface auxiliaire $\tilde{S}$.

On considère alors une fonction-test $\tilde{u}(\boldsymbol{z})$ définie sur $\tilde{S}$. Le produit contracté de (10.6) par $\tilde{u}(\boldsymbol{z})n_i(\boldsymbol{z})$ est intégré sur $\tilde{S}$ par rapport à $\boldsymbol{z}$ (à ce stade, les surfaces $\tilde{S}$ et $\partial\Omega$ sont disjointes et les intégrales obtenues sont donc non-singulières), ce qui donne l'égalité :

$$I_1(\tilde{S},\partial\Omega) + I_2(\tilde{S},\partial\Omega) = 0 \tag{10.8}$$

en posant :

$$I_1(\tilde{S},\partial\Omega) = \int_{\tilde{S}} \tilde{u}(\boldsymbol{z})q(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_z - \int_{\tilde{S}}\int_{\partial\Omega} \tilde{u}(\boldsymbol{z})q(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_z \tag{10.9}$$

$$I_2(\tilde{S},\partial\Omega) = \int_{\tilde{S}}\int_{\partial\Omega} \tilde{u}(\boldsymbol{z})u(\boldsymbol{y})G_{,\bar{\imath}j}n_i(\boldsymbol{z})n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_z \tag{10.10}$$

On se propose de chercher les expressions limites $I_1(\partial\Omega,\partial\Omega)$ et $I_2(\partial\Omega,\partial\Omega)$ de $I_1(\tilde{S},\partial\Omega)$ et $I_2(\tilde{S},\partial\Omega)$ quand la surface $\tilde{S}$ tend vers $\partial\Omega$ (soit pour $\eta\to 0$ avec la construction (10.7)).

Passage à la limite pour I_1. Le terme I_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} I_1(\tilde{S},\partial\Omega) = {} & \int_{\tilde{S}} \tilde{u}(\boldsymbol{z})q(\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_z - \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y}) \int_{\tilde{S}} [\tilde{u}(\boldsymbol{z}) - \tilde{u}(\boldsymbol{y})]H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_z\,\mathrm{d}S_y \\ & - \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})\tilde{u}(\boldsymbol{y}) \left\{ \int_{\tilde{S}} H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_z \right\} \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{10.11}$$

où on a permuté les intégrations sur $\partial\Omega$ et $\tilde{S}$ puis additionné et soustrait une même quantité aux fins ultérieures de régularisation. Ensuite, l'identité (4.7) donne, compte tenu de la convention d'orientation de $\boldsymbol{n}$ sur $\tilde{S}$:

$$\int_{\tilde{S}} H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_z = \kappa \tag{10.12}$$

En effet, $\boldsymbol{y}$ est extérieur à $\tilde{S}$ si Ω est borné ($\kappa = 0$) et intérieur à $\tilde{S}$ si $\mathbb{R}^3 - \Omega$ est borné ($\kappa = 1$) ; dans ce dernier cas, la normale $\boldsymbol{n}$ à $\tilde{S}$ est *intérieure* à $\tilde{S}$. A ce stade, le passage à la limite $\tilde{S}\to\partial\Omega$ est possible : en effet, l'expression :

$$\int_{\tilde{S}} [\tilde{u}(\boldsymbol{z}) - \tilde{u}(\boldsymbol{y})]H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}S_z$$

considérée comme fonction de $\boldsymbol{y}$, est continue à la traversée de $\tilde{S}$. L'expression limite de $I_1(\tilde{S},\partial\Omega)$ pour $\tilde{S}\to\partial\Omega$ est donc obtenue par simple substitution de $\tilde{S}$ par $\partial\Omega$ et de $\boldsymbol{z}\in\tilde{S}$ par $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ dans (10.11) et en tenant compte de (10.12) :

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{S}\to\partial\Omega} I_1(\tilde{S},\partial\Omega) = {} & (1-\kappa)\int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})\tilde{u}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\ & - \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y}) \int_{\partial\Omega} [\tilde{u}(\boldsymbol{x}) - \tilde{u}(\boldsymbol{y})]H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{10.13}$$

Les intégrales interne (par rapport à $\boldsymbol{x}$) et externe (par rapport à $\boldsymbol{y}$) sont respectivement faiblement singulière et régulière.

Passage à la limite pour I_2. Le terme $I_2(\tilde{S},\partial\Omega)$, contenant le noyau hypersingulier $G_{,\bar{\imath}j}$, va subir deux intégrations par parties successives. En effet, le fait que G vérifie $G_{,ii}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = G_{,\bar{\imath}\bar{\imath}}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0$ ($\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{z}$) entraîne l'existence d'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})$ tel que, pour tout $\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{y}$:

$$G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = e_{iap}e_{jbq}B_{ab,\bar{p}q}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \tag{10.14}$$

En particulier, si $G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ est la solution élémentaire de l'espace infini, le tenseur $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ est donné simplement par :

$$B_{ab}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = -\delta_{ab}G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = -\frac{\delta_{ab}}{4\pi r}$$

Il est singulier comme r^{-1} seulement et vérifie les propriétés de symétrie :

$$B_{ab}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = B_{ba}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = B_{ab}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \tag{10.15}$$

On peut alors reporter (10.14) dans l'expression (10.10) et appliquer à deux reprises la formule de Stokes (A.5) pour les surfaces fermées $\partial\Omega$ et $\tilde{S}$. Cela donne :

$$\begin{aligned} I_2(\tilde{S},\partial\Omega) &= \int_{\tilde{S}} \tilde{u}(\boldsymbol{z}) e_{iap} n_i(\boldsymbol{z}) \int_{\partial\Omega} e_{jbq} n_j(\boldsymbol{y}) u(\boldsymbol{y}) B_{ab,\bar{p}q}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_z \\ &= -\int_{\tilde{S}} \tilde{u}(\boldsymbol{z}) e_{iab} n_i(\boldsymbol{z}) \int_{\partial\Omega} (Ru)_b(\boldsymbol{y}) B_{ab,\bar{p}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_z \\ &= \int_{\tilde{S}} (R\tilde{u})_a(\boldsymbol{z}) \int_{\partial\Omega} (Ru)_b(\boldsymbol{y}) B_{ab}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_z \end{aligned} \tag{10.16}$$

avec la notation :

$$(Ru)_a = e_{iap} n_i u_{,p}$$

En raison du caractère faiblement singulier de $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$, l'expression :

$$\int_{\partial\Omega} B_{ab}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})(Ru)_b(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$

considérée comme une fonction de $\boldsymbol{z}$ est continue à la traversée de $\partial\Omega$. L'expression limite $I_2(\partial\Omega,\partial\Omega)$ de $I_2(\tilde{S},\partial\Omega)$ pour $\tilde{S}\to\partial\Omega$ est donc ici encore obtenue par simple substitution de $\tilde{S}$ par $\partial\Omega$ et $\boldsymbol{z}\in\tilde{S}$ par $\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ dans (10.16) :

$$\lim_{\tilde{S}\to\partial\Omega} I_2(\tilde{S},\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} (R\tilde{u})_a(\boldsymbol{x}) \int_{\partial\Omega} B_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(Ru)_b(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \tag{10.17}$$

dans laquelle une des deux intégrations de surface (interne ou externe) dans (10.16) est faiblement singulière, l'autre étant régulière.

Compte tenu des résultats intermédiaires (10.13), (10.17), la forme limite de (10.8) pour $\tilde{S}\to\partial\Omega$ s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 = (1-\kappa)\int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})\tilde{u}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})[\tilde{u}(\boldsymbol{x})-\tilde{u}(\boldsymbol{y})]H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y \\ + \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} (R\tilde{u})_a(\boldsymbol{x})(Ru)_b(\boldsymbol{y})B_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \end{aligned} \tag{10.18}$$

où le coefficient κ conserve la signification qu'il avait pour l'équation (10.2).

Remarques. Une condition suffisante pour la convergence des intégrales (plus précisément de chacune des deux intégrales, externe ou interne) de (10.18) est que les variables q et u soient respectivement continue par morceaux et $C^{0,\alpha}$ en tout point de $\partial\Omega$. Ces conditions de régularité, identiques à celles pour l'équation (10.3) et pour l'équation intégrale en déplacement (10.2), sont moins restrictives que celles associées à la collocation pour un point $\boldsymbol{z}$ de $\partial\Omega$ de l'équation (10.6)[1]

L'opérateur différentiel $f \to e_{abc} n_a f_{,b} \boldsymbol{e}_c$ est introduit par Nedelec [7] sous le nom de *rotationnel surfacique* $\mathbf{rot}_S f$ associé au champ scalaire f. Pour un paramétrage :

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in \Delta \to \boldsymbol{y} \in \partial\Omega$$

de la surface $\partial\Omega$ au voisinage de $\boldsymbol{y}$, on montre en effet que :

$$e_{abc} n_a f_{,b} \, \mathrm{d}S_y = e_{\alpha\beta 3} f_{,\alpha} (\boldsymbol{a}_\beta . \boldsymbol{e}_a) d\xi_1 d\xi_2 \tag{10.19}$$

Il en découle que la combinaison $e_{abc} n_a f_{,b}$ dépend uniquement des valeurs de f sur $\partial\Omega$, quel que soit son prolongement hors de cette surface.

FORMULATION VARIATIONNELLE INTÉGRALE DU PROBLÈME DE NEUMANN. Supposons les flux donnés sur toute la frontière : $q = q^D$ sur $\partial\Omega$. Alors, du fait de l'identité (10.18), le potentiel u inconnu est solution du problème variationnel :

$$\mathcal{B}_{uu}(u, \tilde{u}) = \mathcal{L}_u(\tilde{u}) \qquad \forall \tilde{u} \in \mathcal{V}_u \tag{10.20}$$

avec :

$$\mathcal{B}_{uu}(u, \tilde{u}) = \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} (R\tilde{u})_a(\boldsymbol{x}) (Ru)_b(\boldsymbol{y}) B_{ab}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \, \mathrm{d}S_x$$

$$\mathcal{L}_u(\tilde{u}) = (1 - \kappa) \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y}) \tilde{u}(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y}) [\tilde{u}(\boldsymbol{x}) - \tilde{u}(\boldsymbol{y})] H(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}S_x \, \mathrm{d}S_y$$

Le caractère symétrique de la forme bilinéaire $\mathcal{B}_{uu}$ découle des propriétés de symétrie (10.15) du tenseur $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

10.2 Formulation intégrale variationnelle pour le problème aux limites mixte

Les résultats précédents permettent d'obtenir une formulation variationnelle symétrique pour le problème aux limites mixte (10.1). Il suffit d'écrire simultanément les équations (10.3) et (10.18), en y restreignant le support géométrique des fonctions-test $\tilde{q}, \tilde{u}$ à S_q et S_u respectivement, soit :

$$\tilde{u} \in \mathcal{V}_u = \left\{ \tilde{u} \mid \tilde{u} \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega) \text{ et } \tilde{u}(\boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in S_u \right\}$$

$$\tilde{q} \in \mathcal{V}_q = \{ \tilde{q} \mid \tilde{q} \text{ continus par morceaux sur } \partial\Omega \text{ et } \tilde{q}(\boldsymbol{x}) = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in S_\mathrm{q} \}$$

[1] On se souvient (chapitre 5) que, dans ce dernier cas, il fallait $q \in C^{0,\alpha}$ et $u \in C^{1,\alpha}$ au voisinage de $\mathbf{z}$, ce qui entraînait des complications dans la mise en œuvre numérique.

D'autre part, considérons un prolongement (ou *relèvement*) arbitraire $\hat{u}^D$ de la donnée u^D, c'est-à-dire une fonction régulière (et en particulier continue) définie sur la frontière $\partial\Omega$ entière et telle que $\hat{u}^D = u^D$ sur S_u. On procède alors à un changement d'inconnue, en posant $u = \hat{u} + \hat{u}^D$: on a par construction $\hat{u} = 0$ sur le bord ∂S_u. Cette manœuvre n'est nécessaire que si la donnée u^D n'est pas nulle sur le bord ∂S_u : dans le cas contraire, prendre $\hat{u} = u, \hat{u}^D = 0$ sur S_{q} convient.

Ces opérations conduisent à la formulation intégrale variationnelle pour le problème (10.1), d'inconnues les variables physiques $\hat{u}$ sur S_{q} et q sur S_u :

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{B}_{uu}(\hat{u},\tilde{u}) + \mathcal{B}_{qu}(q,\tilde{u}) & = \mathcal{L}_u(\tilde{u}) \\ \mathcal{B}_{uq}(\hat{u},\tilde{q}) + \mathcal{B}_{qq}(q,\tilde{q}) & = \mathcal{L}_q(\tilde{q}) \end{array}\right. \qquad \forall \tilde{u} \in \mathcal{V}_u,\ \forall \tilde{q} \in \mathcal{V}_q \tag{10.21}$$

où les formes bilinéaires sont données par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{uq}(\hat{u},\tilde{q}) &= -\int_{S_u}\int_{S_{\mathrm{q}}} \tilde{q}(\boldsymbol{x})\hat{u}(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
\mathcal{B}_{qq}(q,\tilde{q}) &= \int_{S_u}\int_{S_u} \tilde{q}(\boldsymbol{x})q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
\mathcal{B}_{qu}(q,\tilde{u}) &= -\int_{S_u}\int_{S_{\mathrm{q}}} q(\boldsymbol{y})\tilde{u}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y \\
\mathcal{B}_{uu}(\hat{u},\tilde{u}) &= \int_{S_{\mathrm{q}}}\int_{S_{\mathrm{q}}} (R\tilde{u})_a(\boldsymbol{x})B_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(R\hat{u})_b(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x
\end{aligned}$$

et les formes linéaires, où les données u^D en potentiel et q^D en flux apparaissent explicitement, par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_q(\tilde{q}) &= \kappa\int_{S_u} \tilde{q}(\boldsymbol{x})u^D(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x - \int_{S_u}\int_{S_{\mathrm{q}}} \tilde{q}(\boldsymbol{x})q^D(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
&\quad + \int_{S_u}\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x})[\hat{u}^D(\boldsymbol{y}) - \hat{u}^D(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
\mathcal{L}_u(\tilde{u}) &= (\kappa-1)\int_{S_{\mathrm{q}}} q^D(\boldsymbol{y})\tilde{u}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&\quad - \int_{S_{\mathrm{q}}}\int_{S_u} (R\tilde{u})_a(\boldsymbol{x})B_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(R\hat{u})_b(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
&\quad + \int_{S_{\mathrm{q}}}\int_{S_{\mathrm{q}}} q^D(\boldsymbol{y})[\tilde{u}(\boldsymbol{x}) - \tilde{u}(\boldsymbol{y})]H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y \\
&\quad - \int_{S_{\mathrm{q}}}\int_{S_u} q^D(\boldsymbol{y})\tilde{u}(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}$$

La formulation (10.21) est symétrique en raison des propriétés de symétrie (10.5) et

(10.15) de la solution élémentaire :

$$\forall(\hat{u},\tilde{u})\in\mathcal{V}_u,\ \forall(q,\tilde{q})\in\mathcal{V}_q \qquad \left\{\begin{array}{ll}\mathcal{B}_{uu}(\hat{u},\tilde{u}) & =\mathcal{B}_{uu}(\tilde{u},\hat{u})\\ \mathcal{B}_{qq}(q,\tilde{q}) & =\mathcal{B}_{qq}(\tilde{q},q)\\ \mathcal{B}_{uq}(\hat{u},\tilde{q}) & =\mathcal{B}_{qu}(\tilde{q},\hat{u})\end{array}\right.$$

Il faut noter que, pour une solution élémentaire autre que celle de l'espace infini, l'expression du tenseur $\boldsymbol{B}$ défini par (10.14) reste à déterminer. D'autre part, sans l'introduction du relèvement $\hat{u}^D$ de la donnée u^D, la formulation serait non symétrique pour une donnée u^D non nulle.

10.3 Stationnarité d'une fonctionnelle

Le propos de cette section est de montrer que la formulation (10.21), présentée comme une formulation faible des équations intégrales en potentiel et en gradient, exprime également des conditions de stationnarité. En effet, on sait que la solution du problème (10.1) rend stationnaire la fonctionnelle $E(v)$:

$$E(v)=\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}(v).\boldsymbol{\nabla}(v)\,\mathrm{d}V-\int_{S_\mathrm{q}} q^D v\,\mathrm{d}S-\int_{S_u} q(v-u^D)\,\mathrm{d}S$$

Le dernier terme de cette fonctionnelle incorpore la contrainte correspondant au respect de la donnée en potentiel sur S_u, de sorte que l'écriture des conditions de stationnarité de $E(v)$, c'est-à-dire de la nullité de la première variation de $E(v)$, est faite sans contrainte sur v. La solution u est donc telle que, si on pose $v=u+\delta u$, on ait :

$$\delta E(u).\delta u=\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}(u).\boldsymbol{\nabla}(\delta u)\,\mathrm{d}V-\int_{S_\mathrm{q}} q^D\delta u\,\mathrm{d}S-\int_{S_u} q\delta u\,\mathrm{d}S=0 \tag{10.22}$$

sans contrainte sur δu. En fait, puisque :

$$\int_\Omega \boldsymbol{\nabla}(v).\boldsymbol{\nabla}(\delta u)\,\mathrm{d}V=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial n}\delta u\,\mathrm{d}S-\int_\Omega \Delta v\delta u\,\mathrm{d}V$$

on montre facilement que u est solution du problème (10.1) et que le multiplicateur de Lagrange q sur S_u est égal à la dérivée normale de u.

On suppose maintenant que la stationnarité de $E(v)$ n'est recherchée que sur le sous-espace des fonctions v harmoniques ($\Delta v=0$). L'inconnue u étant aussi harmonique, l'équation (10.22) peut dans ce cas être restreinte aux variations $\delta u=v-u$ harmoniques ($\Delta\delta u=0$). Une intégration par parties de l'intégrale de domaine dans (10.22) donne :

$$\delta E(u).\delta u=\int_{S_u} u^D\frac{\partial\delta u}{\partial n}\,\mathrm{d}S+\int_{S_T} u\frac{\partial\delta u}{\partial n}\,\mathrm{d}S-\int_{S_T} q^D\delta u\,\mathrm{d}S-\int_{S_u} q\delta u\,\mathrm{d}S=0 \tag{10.23}$$

CONSTRUCTION DES FONCTIONS-TEST. La construction des fonctions-test harmoniques repose sur le fait, établi au chapitre 2, que *tout* champ harmonique admet la représentation intégrale (pour $\boldsymbol{x}$ intérieur à Ω) :

$$\delta u(\boldsymbol{x})=-\int_{\partial\Omega}\delta u(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y+\int_{\partial\Omega}\delta q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \tag{10.24}$$

où δq désigne la dérivée normale de δu. De même, tout δu harmonique dans le domaine *extérieur* $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$ vérifie en tout point $\boldsymbol{x}$ intérieur à Ω la formule de représentation extérieure (par référence au domaine complémentaire $\bar{\Omega}$) :

$$0 = -\int_{\partial\Omega} \delta\bar{u}(\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y + \int_{\partial\Omega} \delta\bar{q}(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \tag{10.25}$$

où $\delta\bar{q}$ désigne la dérivée normale de $\delta\bar{u}$. La normale $\boldsymbol{n}$ extérieure à Ω est utilisée dans les deux formules (10.24) et (10.25). Ensuite, (10.25) est retranchée de (10.24), ce qui donne :

$$\delta u(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \tilde{u}(\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$

en termes des sauts de potentiel et de flux à travers $\partial\Omega$: $\tilde{u} = \delta\bar{u} - \delta u$ et $\tilde{\boldsymbol{t}} = \delta\bar{q} - \delta q$. On peut en fait restreindre cette formule en imposant $\delta\bar{u} = \delta u$, soit $\tilde{u} = 0$ sur S_u et $\delta\bar{q} = -\delta q$, soit $\tilde{t} = 0$ sur S_{T}, ce qui donne :

$$\delta u(\boldsymbol{x}) = \int_{S_{\mathrm{q}}} \tilde{u}(\boldsymbol{y}) H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{S_u} \tilde{q}(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \tag{10.26}$$

Cette construction des fonctions-test harmoniques δu reflète la structure des conditions aux limites du problème original (10.1). De même, le gradient de δu est donné à partir de (10.26) par la représentation :

$$\delta u_{,i}(\boldsymbol{x}) = \int_{S_{\mathrm{q}}} \tilde{u}(\boldsymbol{y}) G_{,\bar{\imath}j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{S_u} \tilde{q}(\boldsymbol{y}) G_{,\bar{\imath}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \tag{10.27}$$

Formulation variationnelle intégrale. La substitution de (10.26) et (10.27) dans la condition de stationnarité (10.23) conduit alors à la formulation intégrale variationnelle (10.21). Il faut temporairement considérer la définition (10.26) des fonctions-test δu pour la surface auxiliaire $\tilde{S}$, puis régulariser les intégrales avant de faire le passage $\tilde{S} \to \partial\Omega$. En fait, les termes en $\tilde{q}$ et $\tilde{u}$ qui apparaissent dans cette opération sont précisément les résidus pondérés des équations intégrales respectivement en potentiel et en flux, et donnent les relations (10.3) et (10.18).

La formulation (10.21) est ainsi bien une formulation intégrale *variationnelle* au sens où elle exprime les conditions de stationnarité d'une fonctionnelle.

10.4 Formulation variationnelle intégrale indirecte

Considérons un domaine borné Ω et son complémentaire $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 - \Omega$, supports respectivement d'un problème (10.1) intérieur et extérieur de solutions respectives (u^I, q^I) et (u^E, q^E). Introduisons les sauts de potentiel $\phi = u^E - u^I$ et de flux $\psi = q^E + q^I$. On note que ϕ doit ainsi être continu sur $\partial\Omega$, mais que ψ ne l'est pas nécessairement.

L'addition de l'équation (10.3) prise pour le problème intérieur puis extérieur donne :

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x}) u^E(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x - \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x})[\phi(\boldsymbol{y}) - \phi(\boldsymbol{x})] H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\ &- \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \tilde{q}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \end{aligned} \tag{10.28}$$

la normale $\boldsymbol{n}$ implicitement présente dans $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, étant par convention prise extérieure à $\partial\Omega$. De même, la soustraction de l'équation (10.18) prise pour le problème intérieur puis extérieur donne :

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{\partial\Omega} q^I(\boldsymbol{y})\tilde{u}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{\partial\Omega}\psi(\boldsymbol{y})\int_{\partial\Omega}[\tilde{u}(\boldsymbol{x})-\tilde{u}(\boldsymbol{y})]H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y \\ &- \int_{\partial\Omega}(R\tilde{u})_a(\boldsymbol{x})\int_{\partial\Omega}B_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(R\phi)_b(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \end{aligned} \tag{10.29}$$

Les relations (10.28), (10.29) ainsi obtenues permettent de formuler des équations intégrales variationnelles indirectes, d'inconnues ϕ,ψ.

Problème de Dirichlet. Prenons $S_u = \partial\Omega$ et supposons $\phi = 0$ sur S_{q}, ce qui revient à considérer les problèmes intérieur et extérieur pour la *même* donnée u^D. L'équation (10.28) conduit alors à la formulation variationnelle symétrique du problème de Dirichlet intérieur ou extérieur :

$$\begin{aligned} &\forall\tilde{q}\in\mathcal{V}_q,\quad \text{trouver } \psi\in\mathcal{V}_q \quad \text{tel que} \\ &\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\psi(\boldsymbol{y})\tilde{q}(\boldsymbol{x})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x = \int_{\partial\Omega}\tilde{q}(\boldsymbol{x})u^D(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x \end{aligned} \tag{10.30}$$

Une fois l'équation intégrale variationnelle ci-dessus résolue par rapport à la densité ψ, le potentiel u et son gradient peuvent être évalués par les formules (4.7), (4.7) (point d'observation $\boldsymbol{x}$ intérieur à Ω ou $\bar{\Omega}$) ou (4.7), (4.7) (point d'observation $\boldsymbol{x}$ sur $\partial\Omega$).

Problème de Neumann. Prenons $S_{\mathrm{q}} = \partial\Omega$ et supposons $\psi = 0$ sur $\partial\Omega$, ce qui revient à considérer simultanément les problèmes intérieur et extérieur pour des données en flux opposées. L'équation (10.29) conduit à la formulation variationnelle symétrique du problème de Neumann intérieur :

$$\begin{aligned} &\forall\tilde{u}\in\mathcal{V}_u,\quad \text{trouver } \phi\in\mathcal{V}_u \quad \text{tel que} \\ &\int_{\partial\Omega}(R\tilde{u})_a(\boldsymbol{x})\int_{\partial\Omega}B_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(R\phi)_b(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x = \int_{\partial\Omega}q^D(\boldsymbol{y})\tilde{u}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{10.31}$$

Une fois l'équation intégrale variationnelle ci-dessus résolue par rapport à la densité ϕ, le potentiel u et son gradient peuvent être évalués par les formules (4.7), (4.7) (point d'observation $\boldsymbol{x}$ intérieur à Ω ou $\bar{\Omega}$) ou (4.7), (4.7) (point d'observation $\boldsymbol{x}$ sur $\partial\Omega$).

Problème aux limites mixte. Prenant $\psi = 0$ sur S_{q} et $\phi = 0$ sur S_u, les équations (10.28) et (10.29) conduisent à la formulation variationnelle symétrique du problème (10.1) intérieur :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } \phi\in\mathcal{V}_u, \psi\in\mathcal{V}_q \quad \text{tels que} \\ &\left\{\begin{array}{ll} \mathcal{B}_{\phi\phi}(\phi,\tilde{\phi}) + \mathcal{B}_{\psi\phi}(\psi,\tilde{\phi}) & = \mathcal{L}_\phi(\tilde{\phi}) \\ \mathcal{B}_{\phi\psi}(\phi,\tilde{\psi}) + \mathcal{B}_{\psi\psi}(\psi,\tilde{\psi}) & = \mathcal{L}_\psi(\tilde{\psi}) \end{array}\right. \qquad (\forall\tilde{\phi}\in\mathcal{V}_u,\ \forall\tilde{\psi}\in\mathcal{V}_q) \end{aligned} \tag{10.32}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\phi\psi}(\phi,\tilde{\psi}) &= \int_{S_u}\int_{S_q} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x})\phi(\boldsymbol{y})H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
\mathcal{B}_{\psi\psi}(\phi,\tilde{\psi}) &= \int_{S_u}\int_{S_u} \tilde{\psi}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
\mathcal{L}_{\psi}(\tilde{\psi}) &= \int_{S_u} \tilde{q}(\boldsymbol{x})u^D(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x \\
\mathcal{B}_{\psi\phi}(\psi,\tilde{\phi}) &= \int_{S_u} \psi(\boldsymbol{y})\int_{S_q} \tilde{\phi}(\boldsymbol{x})H(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y \\
\mathcal{B}_{\phi\phi}(\phi,\tilde{\phi}) &= \int_{S_q}\int_{S_q} (R\tilde{\phi})_a(\boldsymbol{x})B_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(R\tilde{\phi})_b(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
\mathcal{L}_{\phi}(\tilde{\phi}) &= \int_{S_q} q^D(\boldsymbol{y})\tilde{\phi}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}$$

10.5 Mise en œuvre numérique des éléments finis de frontière

Pour fixer les idées, on examine la discrétisation de la formulation variationnelle intégrale (10.31) gouvernant le problème de Neumann intérieur.

Discrétisation de la surface et des inconnues. Les principes exposés au chapitre 3 sont appliqués : la frontière $\partial\Omega$ est découpée en $\mathrm{N_E}$ éléments $E_1,\ldots,E_{\mathrm{N_E}}$ triangulaires ou quadrilatéraux, la position du point $\boldsymbol{y}$ sur l'élément E_e $(1 \le e \le \mathrm{N_E})$ étant définie, une fois donnés N_e nœuds géométriques $\boldsymbol{y}^q$ et fonctions de forme N_q :

$$\boldsymbol{\xi} \in \Delta_e \to \boldsymbol{y} = \sum_{q=1}^{N_e} N_q(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{y}^q$$

le maillage comportant un total de N_N nœuds. Les champs $\phi, \tilde{\phi}$ sont interpolés par valeurs nodales $\phi^q, \tilde{\phi}^q$ et fonctions d'interpolation $N_q(\boldsymbol{\xi})$:

$$(\phi,\tilde{\phi})(\boldsymbol{y}) = \sum_{q=1}^{N_i} N_q(\boldsymbol{\xi})(\phi,\tilde{\phi})^q \qquad (\boldsymbol{\xi} \in \Delta_e)$$

La substitution de ces interpolations dans la formulation (10.31) donne :

$$\Big(\forall\{\tilde{\phi}\} = \{\tilde{\phi}^1,\ldots,\tilde{\phi}^{N_N}\}\Big) \qquad \{\tilde{\phi}\}^T[\boldsymbol{K}]\{\phi\} = \{\tilde{\phi}\}^T\{\boldsymbol{f}\} \qquad \{\phi\} = \{\phi^1,\ldots,\phi^{N_N}\}$$

ou encore :

$$[\boldsymbol{K}]\{\phi\} = \{\boldsymbol{f}\} \tag{10.33}$$

avec :

$$K_{\tilde{q}q} = \int_{D_q}\int_{D_{\tilde{q}}} B_{ab}(\boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}),\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})) \\ \{e_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}3}N_{\tilde{q},\tilde{\alpha}}(\tilde{\boldsymbol{\xi}})(\boldsymbol{a}_{\tilde{\beta}}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}).\boldsymbol{e}_a)\}\{e_{\alpha\beta 3}N_{q,\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{a}_\beta(\boldsymbol{\xi}).\boldsymbol{e}_b)\}\,\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\xi \tag{10.34}$$

$$f_{\tilde{q}} = \int_{D_{\tilde{q}}} q^D(\boldsymbol{x}(\tilde{\boldsymbol{\xi}}))N_{\tilde{q}}(\tilde{\boldsymbol{\xi}})J(\tilde{\boldsymbol{\xi}})\,\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \tag{10.35}$$

Les points $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ parcourent respectivement les surfaces $D_{\tilde{q}}$ (paramétrée par $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$) et D_q (paramétrée par $\boldsymbol{\xi}$), supports géométriques des fonctions de forme $N_{\tilde{q}}$ et N_q.

INTÉGRATIONS RÉGULIÈRES. Celles-ci peuvent ici encore être faites par points de Gauss (voir section 3.4). Les intégrales élémentaires doubles, du type :

$$I_{e\tilde{e}} = \int_{\Delta_{\tilde{e}}}\int_{\Delta_e} f(\tilde{\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\xi$$

sont alors calculées par une formule produit utilisant les points et poids de Gauss $(\boldsymbol{\xi}_i,w_i)$ et $(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j,\tilde{w}_j)$ sur les éléments de référence Δ_e et $\tilde{\Delta}_e$:

$$I_{e\tilde{e}} \approx \sum_{i=1}^{N} w_i' \int_{\Delta_e} f(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i,\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi \approx \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i' w_j f(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i,\tilde{\boldsymbol{\xi}}_j)$$

INTÉGRATIONS SINGULIÈRES. Les intégrales doubles de surface $I_{e\tilde{e}}^{sing}$ présentant une singularité sont celles pour lesquelles $e=\tilde{e}$. Dans ce cas, l'intégrale interne est singulière tandis que l'intégrale externe est régulière. On peut donc employer des points de Gauss pour l'intégrale externe et écrire :

$$I_{e,e}^{sing} = \int_{\Delta_e}\int_{\Delta_e} f(\tilde{\boldsymbol{\xi}},\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\xi \approx \sum_{i=1}^{N}\tilde{w}_i\int_{\Delta_e} f(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i,\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\xi$$

où $f(\boldsymbol{\xi},\tilde{\boldsymbol{\xi}})$ est singulier comme $|\tilde{\boldsymbol{\xi}}-\boldsymbol{\xi}|^{-1}$. Le calcul de l'intégrale interne est fait selon la technique de passage en coordonnées polaires sur l'élément de référence introduite en section 3.5, en posant pour chacun des points de Gauss $\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i$:

$$(\xi_1,\xi_2) = (\tilde{\xi}_{i1},\tilde{\xi}_{i2}) + (\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)$$

On peut alors définir $\hat{f}(\rho,\alpha;\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i)$, régulière en $\rho=0$, de manière à avoir :

$$f(\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i,\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\rho}\hat{f}(\rho,\alpha;\tilde{\boldsymbol{\xi}}_i)$$

On écrira ainsi :

$$\int_E\int_E (R\psi)_a(\boldsymbol{x})(R\phi)_b(\boldsymbol{y})B_{ab}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\ = \sum_{\tilde{q}=1}^{\mathrm{N}_e}\tilde{\phi}^{\tilde{q}}\sum_{q=1}^{\mathrm{N}_e}\phi^q\sum_{i=1}^{N}\tilde{w}_i\int_E \hat{B}_{ab}(\rho,\alpha;\boldsymbol{\xi}_i)e_{\alpha\beta 3}N_{q,\alpha}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{a}_\beta.\boldsymbol{e}_b)d\rho d\alpha$$

De même, pour ce qui est de la formulation générale (10.21), les autres intégrales élémentaires faiblement singulières sont calculées suivant la même méthode, et ce pour chaque point de Gauss $\boldsymbol{\xi}_i$ de Δ_e, soit :

$$\begin{aligned}
&\int_E \int_E \tilde{q}(\boldsymbol{x})[u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&\quad = \sum_{\tilde{q}=1}^{\mathrm{N}_e} \tilde{q}^{\tilde{q}} \sum_{q=1}^{\mathrm{N}_e} u^q \sum_{i=1}^{N} \tilde{w}_i \int_E \hat{H}(\rho,\alpha;\boldsymbol{\xi}_i)\hat{N}_q(\rho,\alpha;\boldsymbol{\xi}_i)J(\boldsymbol{\xi})d\rho d\alpha \\
&\int_E \int_E \tilde{\psi}(\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\
&\quad = \sum_{\tilde{q}=1}^{\mathrm{N}_e} \tilde{\psi}^{\tilde{q}} \sum_{q=1}^{\mathrm{N}_e} \psi^q \sum_{i=1}^{N} \tilde{w}_i \int_E \hat{G}(\rho,\alpha;\boldsymbol{\xi}_i)N_q(\boldsymbol{\xi})J(\boldsymbol{\xi})d\rho d\alpha
\end{aligned}$$

On tire ainsi plein avantage, sur le plan numérique, de la régularisation.

Résolution du système linéaire. Le caractère symétrique de la formulation variationnelle (10.21) permet pour un problème et un maillage donnés, au niveau de la résolution du système linéaire, des gains de temps calcul et de place mémoire. En effet, l'équation (10.34) met en évidence le caractère symétrique (reposant sur la propriété (10.15)) de la matrice $[\boldsymbol{K}]$ du système d'équations (10.33). La formulation variationnelle intégrale présente ainsi des similitudes avec les méthodes d'éléments finis classiques. Toutefois la matrice $[\boldsymbol{K}]$ est pleine, et ne présente pas la structure bande : la présence du noyau $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ fait que les termes d'influence $\int_{E_{\tilde{e}}} \int_{E_e} \{\ldots\}\,\mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{\xi}}\,\mathrm{d}\xi$ sont non nuls quel que soit $(e,\tilde{e})$, et ne sont pas localisés aux éléments $E_e, E_{\tilde{e}}$ comportant des nœuds en commun comme en éléments finis. Le système linéaire (10.33) peut par exemple être résolu par une méthode de Choleski.

10.6 Elasticité

La démarche développée pour les problèmes scalaires est également applicable à l'élasticité. On considère par exemple le problème aux limites mixte pour l'élasticité linéaire isotrope :

$$C_{ijab}u_{a,bj} = 0 \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^D \text{ sur } S_u \quad \boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}^D \text{ sur } S_{\mathrm{T}} \tag{10.36}$$

Le raisonnement mené en section 10.3 conduit à l'équation de stationnarité :

$$\begin{aligned}
\delta E(\boldsymbol{u}).\delta\boldsymbol{u} = &\int_{S_u} \boldsymbol{u}^D.\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{\delta u})\,\mathrm{d}S + \int_{S_T} \boldsymbol{u}.\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{\delta u})\,\mathrm{d}S \\
&- \int_{S_T} \boldsymbol{t}^D.\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S - \int_{S_u} \boldsymbol{t}.\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S = 0
\end{aligned} \tag{10.37}$$

pour des fonctions-test $\delta\boldsymbol{u}$ vérifiant l'équation locale :

$$C_{ijab}\delta u_{a,bj} = 0$$

Ces dernières sont prises sous la forme :

$$\delta u_k(\boldsymbol{x}) = \int_{S_T} \tilde{u}_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y - \int_{S_u} \tilde{t}_i(y) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$
$$\delta\sigma_{ij}(\boldsymbol{x}) = C_{ijk\ell}\int_{S_T} \tilde{u}_a(\boldsymbol{y}) n_b(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ab,\ell}^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_y - \int_{S_u} \tilde{t}_k(y)\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_y$$

FORMULATION INTÉGRALE VARIATIONNELLE POUR L'ÉLASTICITÉ. La démarche conduite en section (10.1) est transposable à l'élasticité linéaire. Elle permet de montrer que le déplacement $\boldsymbol{u}$ sur S_T et le vecteur contrainte $\boldsymbol{t}$ sur S_u inconnus sont solution du problème variationnel :

$$\begin{array}{l}\text{Trouver } \hat{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{V}_u, \boldsymbol{t} \in \mathcal{V}_T \quad \text{tels que} \\ \left\{\begin{array}{rl} \mathcal{B}_{uu}(\hat{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{u}}) + \mathcal{B}_{tu}(\boldsymbol{t},\tilde{\boldsymbol{u}}) & = \mathcal{L}_u(\tilde{\boldsymbol{u}}) \\ \mathcal{B}_{ut}(\hat{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{t}}) + \mathcal{B}_{tt}(\boldsymbol{t},\tilde{\boldsymbol{t}}) & = \mathcal{L}_t(\tilde{\boldsymbol{t}}) \end{array}\right. \qquad \forall \tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{V}_u,\ \forall \tilde{\boldsymbol{t}} \in \mathcal{V}_T \end{array} \tag{10.38}$$

où les formes bilinéaires sont données par :

$$\mathcal{B}_{uu}(\hat{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{u}}) = \int_{S_T} (R\hat{u}_i)_q(\boldsymbol{x}) \int_{S_T} B_{ikqs}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})(R\tilde{u}_k)_s(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x$$
$$\mathcal{B}_{tu}(\boldsymbol{t},\tilde{\boldsymbol{u}}) = -\int_{S_u}\int_{S_T} t_k(\boldsymbol{x})\tilde{u}_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x$$
$$\mathcal{B}_{ut}(\hat{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{t}}) = -\int_{S_u}\int_{S_T} \tilde{t}_k(\boldsymbol{y}) u_i(\boldsymbol{x}) T_i^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y$$
$$\mathcal{B}_{tt}(\hat{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{t}}) = \int_{S_u}\int_{S_u} t_k(\boldsymbol{x})\tilde{t}_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x$$

et les formes linéaires par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u(\tilde{\boldsymbol{u}}) = (\kappa-1)\int_{S_T} t_k^D(\boldsymbol{x})\tilde{u}_k(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x - \int_{S_T} t_k^D(\boldsymbol{x})\tilde{u}_i(\boldsymbol{x})\int_{S_u} T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\ + \int_{S_T}\int_{S_T} t_k^D(\boldsymbol{x})[\tilde{u}_i(\boldsymbol{y}) - \tilde{u}_i(\boldsymbol{x})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\ - \int_{S_T} (R\hat{u}_i^D)_q(\boldsymbol{x})\int_{S_u} B_{iqks}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})(R\tilde{u}_k)_s(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x \\ \mathcal{L}_t(\tilde{\boldsymbol{t}}) = \kappa\int_{S_u} \tilde{t}_k(\boldsymbol{x}) u_k^D(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x + \int_{S_u}\int_{\partial\Omega} \tilde{t}_k(\boldsymbol{y})[\hat{u}_i^D(\boldsymbol{x}) - \hat{u}_i^D(\boldsymbol{y})] T_i^k(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y \\ - \int_{S_u}\int_{S_T} t_k^D(\boldsymbol{x})\tilde{t}_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\,\mathrm{d}S_x\end{aligned}$$

Les espaces $\mathcal{V}_u, \mathcal{V}_t$ des fonctions admissibles sont définis par :

$$\mathcal{V}_u = \left\{\tilde{\boldsymbol{u}} \mid \tilde{\boldsymbol{u}} \in C^{0,\alpha}(S_\mathrm{T}) \text{ et } \tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} \text{ on } \partial S_\mathrm{T}\right\}$$
$$\mathcal{V}_t = \left\{\tilde{\boldsymbol{t}} \mid \tilde{\boldsymbol{t}} \text{ continu par morceaux sur } S_\mathrm{T}\right\}$$

Noter que, contrairement à $(\hat{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{u}})$, aucune restriction n'est imposée sur les valeurs prises par $(\boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{t}})$ sur ∂S_{T}. On a encore utilisé, comme en section 10.1, un prolongement $\hat{\boldsymbol{u}}^D$ sur $\partial\Omega$, choisi arbitrairement, de la donnée $\boldsymbol{u}^D$, et fait le changement d'inconnue :

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}^D \qquad \text{sur } S_{\mathrm{T}}$$

de manière à préserver le caractère symétrique de la formulation (10.38). On a en effet les relations :

$$\forall(\hat{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{u}})\,,\ \forall(\boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{t}}) \qquad \left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{B}_{uu}(\hat{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{u}}) & = \mathcal{B}_{uu}(\tilde{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{u}}) \\ \mathcal{B}_{tt}(\boldsymbol{t}, \tilde{\boldsymbol{t}}) & = \mathcal{B}_{tt}(\tilde{\boldsymbol{t}}, \boldsymbol{t}) \\ \mathcal{B}_{ut}(\hat{\boldsymbol{u}}, \tilde{\boldsymbol{t}}) & = \mathcal{B}_{tu}(\tilde{\boldsymbol{t}}, \hat{\boldsymbol{u}}) \end{array} \right.$$

Enfin, il a également été procédé à une double intégration par parties : en effet, suivant un argument utilisé par Nishimura et Kobayashi [10] et en raison de la propriété (4.16) de la solution élémentaire élastique, on a pour $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{y}$:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y_b}\left\{ C_{ijk\ell} \frac{\partial}{\partial z_\ell} \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \right\} = C_{ijk\ell} \frac{\partial}{\partial z_\ell}\left\{ \frac{\partial}{\partial y_b} \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \right\}$$
$$0 = \frac{\partial}{\partial z_j}\left\{ C_{ijk\ell} \frac{\partial}{\partial z_\ell} \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \right\} = C_{abk\ell} \frac{\partial}{\partial y_\ell}\left\{ \frac{\partial}{\partial z_j} \Sigma^k_{ij}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \right\}$$

ce qui entraîne l'existence d'un tenseur du quatrième ordre $\boldsymbol{A}$ tel que :

$$C_{ijk\ell} \frac{\partial}{\partial z_\ell} \Sigma^k_{ab}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = e_{iep} e_{jfq} e_{agr} e_{bhs} \frac{\partial}{\partial x_e} \frac{\partial}{\partial x_f} \frac{\partial}{\partial z_g} \frac{\partial}{\partial z_h} A_{pqrs}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) \qquad (\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x})$$

Le tenseur $\boldsymbol{A}$ associé à la solution élémentaire de Kelvin a été donné (Nedelec [8]) par :

$$A_{pqrs}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = \frac{\mu}{8\pi} \left[\delta_{pr}\delta_{qs} + \delta_{ps}\delta_{qr} + \frac{2\nu}{1-\nu} \delta_{pq}\delta_{rs} \right] |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}|$$

On pose alors :

$$B_{ikqs}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) = e_{iep} e_{kgr} \frac{\partial}{\partial x_e} \frac{\partial}{\partial z_g} A_{pqrs}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) \tag{10.39}$$

Autres formulations. La formulation intégrale variationnelle directe (10.38) peut conduire à des formulations indirectes. On donne au chapitre 13 celle associée à une fissure chargée symétriquement sur ses lèvres.

10.7 Commentaires

Les formulations variationnelles intégrales ont fait l'objet de travaux, notamment de la part de mathématiciens appliqués, voir par exemple Bendali [3], Cortey-Dumont [5], Nedelec [9], [8], Wendland [14]. Elles ont néanmoins vu peu d'applications dans le domaine de la mécanique des solides (voir Sirtori et coll. [12], Parreira et Guiggiani [11], Becache [1], Nishimura et Kobayashi [10]), comparativement aux méthodes de collocation.

Comme on l'a vu, les méthodes intégrales variationnelles font intervenir des intégrales doubles de surface (toutefois Bui [4] propose une formulation intégrale symétrique ne présentant que des intégrales simples). Les méthodes variationnelles sont néanmoins intéressantes sur le plan conceptuel : elles se prêtent mieux que les méthodes de collocation aux études de convergence, et on dispose de plus de résultats (Nedelec [9], Wendland [14]), qui de plus sont meilleurs que pour la méthode de collocation (à maillage et interpolation égaux).

Dans ce chapitre comme dans les précédents, on voit qu'une régularisation préalable permet d'obtenir des formulations offrant le maximum de généralité (géométries et données quelconques, sous réserve d'un minimum de régularité) et de souplesse (pour le choix de l'interpolation).

L'approche présentée ici peut être étendue à d'autres situations, et notamment à l'élastodynamique et l'acoustique. Il suffit pour cela de reporter, comme au chapitre 8, les singularités dans les solutions élémentaires statiques et de transposer les résultats de ce chapitre. Ici encore, le traitement du cas statique est l'étape-clé, permettant ensuite facilement d'obtenir des formulations intégrales (ici, variationnelles) régularisées pour l'élastodynamique. Nous ne développons pas ici ces extensions en raison du volume déjà important de cet ouvrage. Du reste, cela a déjà été fait pour le rayonnement acoustique (Hamdi [6]) et les fissures en milieu infini.

Références bibliographiques

[1] BÉCACHE, E. A variational boundary integral equation method for an elastodynamic antiplane crack. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **36**, 969–993 (1993).

[2] BENDALI, A. Problème aux limites extérieur et intérieur pour le système de Maxwell en régime harmonique. Rapport interne no. 59, CMAP, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1980).

[3] BENITEZ, F. G., ROSAKIS, A. J. Three-dimensional elastostatics of a layer and a layered medium. *J. Elast.*, **18**, 3–50 (1987).

[4] BUI, H D. On the variational boundary integral equations in elastodynamics with the use of conjugate functions. *J. Elast.*, **28**, 247–256 (1992).

[5] CORTEY-DUMONT, PH. *Simulation numérique de problèmes de diffraction d'ondes par une fissure*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, France (1985).

[6] HAMDI, M. A. *Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains*. Thèse de Doctorat, Université Technologique de Compiègne, France (1982).

[7] NEDELEC, J. C. Approximation des équations intégrales en physique et en mécanique. Notes de cours, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1977).

[8] NEDELEC, J. C. Integral equations with non integrable kernels. *Integral equations and operator theory*, **5**, 562–572 (1982).

[9] NEDELEC, J. C. Le potentiel de double couche pour les ondes élastiques. Rapport interne n^0 99, CMAP Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1983).

[10] NISHIMURA, N., KOBAYASHI, S. A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems. *Comp. Mech.*, **4**, 319–328 (1989).

[11] Parreira, P., Guiggiani, M. On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method. *Computers and Structures*, **33**, 269–279 (1989).

[12] Sirtori, S., Maier, G., Novati, G., Miccoli, S. A Galerkin symmetric boundary element method in elasticity: formulation and implementation. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **35**, 255–282 (1992).

[13] Washizu, K. *Variational methods in elasticity and plasticity (3rd edition)*. Pergamon Press (1980).

[14] Wendland, W. L. Asymptotic accuracy and convergence for point collocation methods. In C.A. Brebbia (ed.), *Topics in boundary element research.*, vol. 2. Springer-Verlag (1984).

11

Exploitation des symétries géométriques

11.1 Introduction

On est assez fréquemment conduit à considérer des problèmes posés sur des domaines Ω présentant des symétries géométriques, qu'on peut décrire par un *groupe de symétrie* G de n isométries par lesquelles Ω est invariant :

$$(\forall \boldsymbol{s} \in G) \qquad \boldsymbol{s}(\Omega) = \Omega \tag{11.1}$$

Si le problème posé sur Ω est linéaire, il peut être ramené à n *sous-problèmes* posés sur une *cellule de symétrie* C, c'est-à-dire une partie de Ω de mesure n fois plus petite permettant de reconstituer Ω par l'action du groupe de symétrie :

$$\Omega = \bigcup_{s \in G} \boldsymbol{s}(C) \tag{11.2}$$

Le temps de calcul nécessaire à la résolution d'un problème croît plus vite que sa taille, de sorte qu'une décomposition en sous-problèmes permet une réduction importante.

La réduction d'un problème sur une cellule de symétrie est facile quand les données (sources, conditions aux limites) et le domaine partagent les mêmes symétries, mais plus délicate à formuler et mettre en œuvre de façon optimale[1] dans le cas contraire. Bossavit [2] a développé une approche générale et systématique de l'utilisation optimale des symétries géométriques dans les problèmes aux limites linéaires, reposant sur la théorie de la représentation linéaire des groupes finis ; ce travail a été mené dans le contexte des formulations variationnelles classiques de problèmes elliptiques, afin d'être appliqué aux méthodes d'éléments finis. Le résultat principal est une méthode systématique de décomposition en sous-problèmes puis synthèse de la solution du problème complet, utilisant des formules algébriques, applicable quels que soient les degrés de symétrie relatifs des données et du domaine.

Le propos de ce chapitre est de montrer l'adaptation de l'approche de Bossavit aux méthodes d'équations intégrales. Ce sujet important est peu étudié dans la littérature (voir néanmoins Allgower et coll. [1], Lobry et Broche [4]). Pour fixer les idées, la

[1] C'est-à-dire en exploitant la cellule de symétrie la plus petite possible.

présentation est faite pour le contexte du problème avec données aux limites mixte de l'élasticité statique tridimensionnelle, d'inconnues vectorielles :

$$(P) \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) & = & \mathbf{0} & \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} & = & \boldsymbol{t}^D & \text{sur } S_{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{u}^D & \text{sur } S_u \end{array} \right.$$

avec $S_{\mathrm{T}} \cap S_u = \emptyset$ et $S_{\mathrm{T}} \cup S_u = \partial\Omega$, la démarche étant bien entendu applicable aux autres contextes couverts par cet ouvrage. Le problème (P) admet également la formulation variationnelle :

$$(P) \qquad \text{Trouver } \boldsymbol{u} \in \mathcal{V}, \quad \left(\forall \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}_0 \quad \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} u : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\nabla} v) \, \mathrm{d}V = \int_{S_T} (\boldsymbol{t}^D . \boldsymbol{v}) \, \mathrm{d}S \right) \quad (11.3)$$

avec :

$$\mathcal{V} = \{ \boldsymbol{w} \in H^1(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{w} \mid_{S_u} = \boldsymbol{u}^D \} \qquad \mathcal{V}_0 = \{ \boldsymbol{w} \in H^1(\Omega) \text{ et } \boldsymbol{w} \mid_{S_u} = \mathbf{0} \}$$

On suppose que non seulement Ω, mais aussi S_u, S_{T} sont invariants sous l'action d'un groupe fini de symétrie G : des portions symétriques de la frontière supportent des conditions aux limites *du même type*. Par contre, aucune restriction n'est imposée sur les *valeurs* prises par les données $(\boldsymbol{u}^D, \boldsymbol{t}^D)$ en des points symétriques. On cherche alors à faire le meilleur usage de la symétrie *géométrique* du domaine Ω.

11.2 Symétries géométriques et problèmes aux limites [2]

Cette section propose un rappel succinct des concepts et notations utilisés dans l'approche de l'exploitation des symétries géométriques développée par Bossavit [2].

On ne peut tirer parti des symétries du domaine d'étude Ω que si l'opérateur différentiel (ici $\operatorname{div}[\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})]$, opérateur elliptique du second ordre par rapport au déplacement $\boldsymbol{u}$) est également invariant par l'action du groupe de symétrie G. Cet énoncé vague peut être précisé à l'aide de la formulation variationnelle (11.3) : la forme bilinéaire :

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega (\boldsymbol{\nabla} u : \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\nabla} v) \, \mathrm{d}V$$

doit vérifier la *propriété d'équivariance* :

$$\forall \boldsymbol{s} \in G \qquad a(\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{v}) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \qquad (11.4)$$

avec la notation $\boldsymbol{S}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x})$. En élasticité linéaire, l'équivariance est par exemple clairement vérifiée si les coefficients élastiques sont constants sur Ω, mais serait violée dans la plupart des cas avec des coefficients élastiques $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$ hétérogènes. En d'autres termes, G doit être le groupe des symétries *géométriques et matérielles* du solide considéré. On ne considère ici que des groupes de symétrie finis *commutatifs*, c'est-à-dire pour lesquels $\boldsymbol{s}_1 \boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{s}_2 \boldsymbol{s}_1$ $(\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in G)$; l'*ordre* du groupe, c'est-à-dire le nombre d'éléments de G, est noté n.

Il s'agit donc de remplacer le problème (P) sur Ω par n *sous-problèmes* sur une *cellule de symétrie* C puis de reconstruire la solution globale de (P) par une combinaison linéaire, avec des coefficients de pondération adéquats, des solutions aux n sous-problèmes. Cela suppose la linéarité par rapport aux données du problème aux limites (P) : en élasticité, on parle du principe de superposition. Une cellule de symétrie est, par définition, un sous-domaine de Ω, n fois plus petit que Ω, qui reproduit Ω par action du groupe G :

$$\Omega = \boldsymbol{s}_1(C) \cup \ldots \cup \boldsymbol{s}_n(C)$$

Une définition plus abstraite et précise est donnée dans [2].

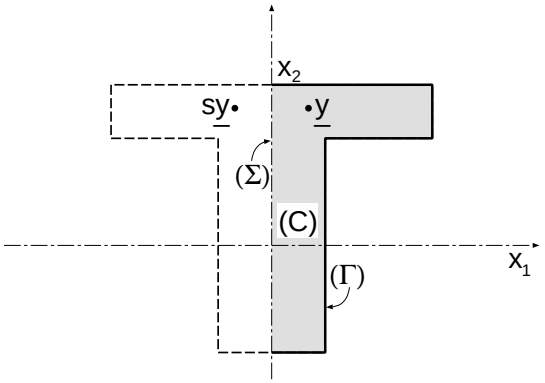

Figure 11.1: Domaine symétrique Ω et cellule de symétrie C : cas $G = \{\mathbf{1}, \mathbf{s}\}$, $\Omega = C \cup \mathbf{s}(C)$.

Analyse élémentaire pour la symétrie plane. Il s'agit du cas simple $G = \{\mathbf{1}, \boldsymbol{s}\}$, $\boldsymbol{s}$ étant une symétrie plane. On construit alors classiquement les parties symétrique et antisymétrique des données :

$$\begin{array}{rcl} (\boldsymbol{u}_E^D, \boldsymbol{t}_E^D)(\boldsymbol{x}) & = & \left\{ \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{u}^D(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^D(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x})\right] \,,\, \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{t}^D(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{s}\boldsymbol{t}^D(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x})\right] \right\} \\ (\boldsymbol{u}_O^D, \boldsymbol{t}_O^D)(\boldsymbol{x}) & = & \left\{ \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{u}^D(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^D(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x})\right] \,,\, \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{t}^D(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{s}\boldsymbol{t}^D(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x})\right] \right\} \end{array} \tag{11.5}$$

Ainsi la solution $\boldsymbol{u}$ de (P) est la somme de ses parties symétrique et antisymétrique : $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_O + \boldsymbol{u}_E$, ces dernières étant solutions de (P) pour les données aux limites définies par (11.5). Mais $\boldsymbol{u}_O$ et $\boldsymbol{u}_E$ ont par construction des propriétés de symétrie connues :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{s}(C) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{u}_E(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}) & = & \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}_E(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{u}_O(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}) & = & \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}_O(\boldsymbol{x}) \end{array} \right.$$

et peuvent donc être calculés, en vertu de l'hypothèse d'équivariance (11.4) comme solutions de problèmes du type (P), posés sur C (figure 11.1). Les données aux limites (11.5) ne portent que sur la portion $\partial C \cap \partial\Omega$ de la frontière de C située sur $\partial\Omega$,

notée Γ dans la suite ; elles doivent être complétées par des conditions supplémentaires sur la portion Σ intérieure à Ω de la frontière de C. Ces dernières sont en fait les contraintes induites par les propriétés de symétrie, les points de Σ étant ceux pour lesquels $(\boldsymbol{x} \in C) \Rightarrow (\boldsymbol{sx} \in C)$:

$$\boldsymbol{n}.\boldsymbol{u}_E = 0 \qquad \boldsymbol{u}_O - (\boldsymbol{u}_O.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \qquad \text{sur } \Sigma \tag{11.6}$$

Les équations (11.5) et (11.6) définissent ainsi la *décomposition* du problème (P) en deux sous-problèmes (P_E), (P_O) posés sur C, d'inconnues $(\tilde{\boldsymbol{u}}_E, \tilde{\boldsymbol{u}}_O)$, restrictions à C des parties symétrique et antisymétrique (la notation $\tilde{(\,)}$ sert à distinguer les champs définis seulement sur la cellule de symétrie C). La phase de reconstruction consiste alors à prolonger $(\tilde{\boldsymbol{u}}_E, \tilde{\boldsymbol{u}}_O)$ au domaine Ω entier en vertu des propriétés de symétrie connues, soit :

$$\forall \boldsymbol{x} \in C \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{\boldsymbol{u}}_E(\boldsymbol{sx}) & = & \boldsymbol{s}\boldsymbol{u}_E(\boldsymbol{x}) \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_O(\boldsymbol{sx}) & = & -\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}_O(\boldsymbol{x}) \end{array} \right. \tag{11.7}$$

et finalement reconstituer le champ $\boldsymbol{u}$ complet par :

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \Omega) \qquad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_O(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{u}_E(\boldsymbol{x}) \tag{11.8}$$

Ces étapes peuvent être regroupées en une seule formule, donnant $\boldsymbol{u}$ dans Ω à partir de $(\tilde{\boldsymbol{u}}_E, \tilde{\boldsymbol{u}}_O)$:

$$(\forall \boldsymbol{x} \in C) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) & = & \tilde{\boldsymbol{u}}_E(\boldsymbol{x}) + \tilde{\boldsymbol{u}}_O(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{sx}) & = & \boldsymbol{s}\tilde{\boldsymbol{u}}_E(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{s}\tilde{\boldsymbol{u}}_O(\boldsymbol{x}) \end{array} \right. \tag{11.9}$$

Cette méthode intuitive est suffisante pour analyser la situation la plus simple (groupe de symétrie à deux éléments $G = \{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{s}\}$) mais s'avère très lourde pour des groupes de symétrie plus riches. Un traitement systématique de cette question est donc souhaitable, de manière à disposer de l'équivalent des formules (11.5), (11.6) de décomposition et (11.9) de reconstruction dans le cas général.

CAS GÉNÉRAL. L'approche systématique de Bossavit repose sur l'utilisation de la théorie des *représentations linéaires des groupes finis*. Par souci de simplicité, on se limite ici aux groupes de symétrie commutatifs, dits aussi *abéliens* :

$$\forall \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in G, \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2 = \boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_1$$

quoique les groupes de symétrie non abéliens soient également inclus dans l'analyse de Bossavit[2].

Par définition, une *représentation irréductible* d'un groupe fini abélien G est une fonction ρ à valeurs complexes sur G qui préserve la structure de groupe, et donc vérifie les propriétés :

$$\rho(\boldsymbol{1}) = 1 \qquad \text{et} \qquad (\forall \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2 \in G) \quad \rho(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2) = \rho(\boldsymbol{s}_1)\rho(\boldsymbol{s}_2) \tag{11.10}$$

Un groupe fini G d'ordre n possède exactement n représentations irréductibles $\{\rho_\nu, \nu = 0, \ldots, n-1\}$. Celles-ci sont connues et tabulées pour les groupes finis usuels ; par exemple :

[2]Par exemple, la présence simultanée de symétries cycliques et planes définit des groupes de symétrie non commutatifs, et est donc exclue du champ de ce chapitre.

- *Symétrie cyclique.* Si G est le groupe cyclique $G = \{\mathbf{1}, \boldsymbol{r}, \ldots, \boldsymbol{r}^{n-1}\}$ ($\boldsymbol{r}$ étant une rotation d'angle $2\pi/n$ dans l'espace) :

$$\rho_\nu(\boldsymbol{r}) = \exp(2i\pi\nu/n) \qquad (\nu = 0, \ldots, n-1) \tag{11.11}$$

- *Symétries planes.* Appelons $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ et $\boldsymbol{s}_3$ les symétries planes par rapport aux plans de coordonnées $(x_1 = 0)$, $(x_2 = 0)$ et $(x_3 = 0)$. Les groupes de symétrie :

$$D_1 = \{\mathbf{1}, \boldsymbol{s}_1\}$$
$$D_2 = \{\mathbf{1}, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\}$$
$$D_3 = \{1, \boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{s}_3\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{q} = \boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_3\}$$

associés respectivement aux symétries planes par rapport à un, deux et trois plans de coordonnées, d'ordres respectifs $n = 2, 4, 8$, admettent les représentations irréductibles suivantes :

D_1	$\mathbf{1}$	$\mathbf{s}_1$
ρ_0	+1	+1
ρ_1	+1	-1

D_2	$\mathbf{1}$	$\mathbf{s}_1$	$\mathbf{s}_2$	$\mathbf{q}$
ρ_0	+1	+1	+1	+1
ρ_1	+1	-1	+1	-1
ρ_2	+1	+1	-1	-1
ρ_3	+1	-1	-1	+1

D_3	$\mathbf{1}$	$\mathbf{s}_1$	$\mathbf{s}_2$	$\mathbf{s}_3$	$\mathbf{p}_1$	$\mathbf{p}_2$	$\mathbf{p}_3$	$\mathbf{q}$
ρ_0	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
ρ_1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1
ρ_2	+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1
ρ_3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
ρ_4	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
ρ_5	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1
ρ_6	+1	-1	-1	+1	-1	-1	+1	+1
ρ_7	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1

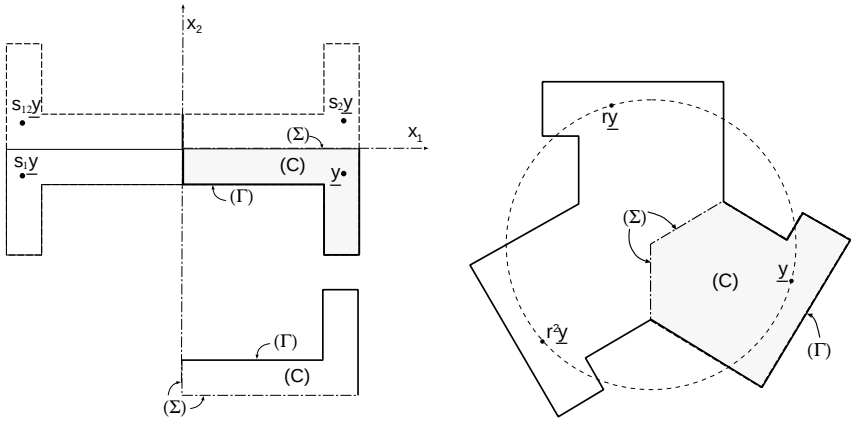

Figure 11.2: Domaine symétrique Ω et cellule de symétrie C :
$G = \{1, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\}$, $\Omega = C \cup \mathbf{s}_1(C) \cup \mathbf{s}_2(C) \cup \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2(C)$ (à gauche)
$G = \{\mathbf{1}, \mathbf{r}, \mathbf{r}^2\}$, $\Omega = C \cup \mathbf{r}(C) \cup \mathbf{r}^2(C)$ (à droite).

Bossavit a démontré que les représentations irréductibles fournissent en fait les coefficients qui apparaissent dans les formules générales de décomposition et reconstruction. Nous allons maintenant donner ces résultats, renvoyant le lecteur à [2] pour leur preuve. L'exploitation des symétries géométriques, pour le problème variationnel (P), repose ainsi sur les trois étapes suivantes.

1 - Choix d'une cellule de symétrie. La cellule C est choisie comme sous-ensemble de Ω tel que :

$$|C| = \frac{1}{n}|\Omega| \qquad \text{et} \qquad \Omega = \boldsymbol{s}_1(C) \cup \ldots \cup \boldsymbol{s}_n(C) \quad (\boldsymbol{s}_1, \ldots, \boldsymbol{s}_n \in G)$$

Notons Γ_u et Γ_T les restrictions respectives de S_u et S_{T} à C ($\Gamma_T \cap \Gamma_u = \emptyset$) et posons $\Gamma_T \cup \Gamma_u = \Gamma$. Ainsi la frontière totale de C est $\partial C = \Sigma \cup \Gamma$ (figure 11.2), Σ étant la portion intérieure à Ω de ∂C. De cette manière, S_u et S_{T} sont engendrés par l'action de G sur Γ_u et Γ_T respectivement.

2 - Réduction à des sous-problèmes posés sur C. Les n sous-problèmes (P_ν) (ν variant de 0 à $n-1$) sont définis par :

$$(P_\nu) \begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_\nu) & = \mathbf{0} & & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\nu}})(\boldsymbol{x}) & = \boldsymbol{t}^{D(\nu)}(\boldsymbol{x}) & = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\boldsymbol{s}\in G} \rho_\nu(\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{t}^D(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}) & \text{sur } S_{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{u}^\nu(\boldsymbol{x}) & = \boldsymbol{u}^{D(\nu)}(\boldsymbol{x}) & = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\boldsymbol{s}\in G} \rho_\nu(\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{u}^D(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}) & \text{sur } S_u \end{cases} \tag{11.12}$$

Ces formules généralisent les données (11.5) définissant les solutions $\boldsymbol{u}_E, \boldsymbol{u}_O$; elles se réduisent à ces dernières pour $G = \{\mathbf{1}, \boldsymbol{s}\}$, avec les indices $\nu = (0,1)$ à la place de (E,O). Il peut arriver que les données $(\boldsymbol{u}^{D(\nu)}, \boldsymbol{t}^{D(\nu)})$ de (P_ν) soit nulles pour certaines valeurs de ν ; cela se produit si les données originales $(\boldsymbol{u}^D, \boldsymbol{t}^D)$ de (P) sont elles-mêmes invariantes sous l'action d'un sous-groupe G' de G. En particulier :

- si $G' = \{\mathbf{1}\}$ (données avec symétrie maximale) : seul le sous-problème (P_1) a des données non nulles ;
- si $G' = G$ (données sans symétrie) : les n sous-problèmes doivent être considérés.

Par construction, les solutions $\boldsymbol{u}^\nu$ des sous-problèmes (P_ν) vérifient[3], pour tout élément $\boldsymbol{s}_0$ fixé de G :

$$\boldsymbol{u}^\nu(\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{y}) = \rho_\nu(\boldsymbol{s}_0^{-1})\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{u}^\nu(\boldsymbol{y}) \tag{11.13}$$

[3]Pour le voir, calculer par exemple $\mathbf{t}^{D(\nu)}(\mathbf{s_0 x})$ défini par (11.12) en faisant le changement de variable $\mathbf{s} = \mathbf{t}\mathbf{s}_0^{-1}$ et en utilisant les propriétés de la représentation ρ_ν.

ce qui généralise (11.7) et permet de reformuler les sous-problèmes sur la cellule de symétrie C :

$$(P_\nu)\begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\boldsymbol{u}}_\nu) & = \mathbf{0} & \text{dans } C \\ \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\nu}})(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{t}}^{D(\nu)}(\boldsymbol{x}) & = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\boldsymbol{s}\in G}\rho_\nu(\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}^{-1}\tilde{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}) & \text{sur } \Gamma_T \\ \tilde{\boldsymbol{u}}^\nu(\boldsymbol{x}) = \tilde{\boldsymbol{u}}^{D(\nu)}(\boldsymbol{x}) & = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\boldsymbol{s}\in G}\rho_\nu(\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{u}^D(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}) & \text{sur } \Gamma_u \\ \gamma_\nu\tilde{\boldsymbol{u}}^\nu & = \mathbf{0} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \tag{11.14}$$

La dernière équation ci-dessus doit être explicitée : il s'agit de la contrainte sur Σ induite par la propriété de symétrie (11.7) de $\boldsymbol{u}^\nu$. Bossavit montre qu'il existe pour tout point $\boldsymbol{x}$ de Σ un élément $\boldsymbol{s}_x \in G$ tel que $\boldsymbol{s}_x\boldsymbol{x} \in \Sigma$ et que $\boldsymbol{s}_x$ est unique pour presque tous les $\boldsymbol{x} \in \Sigma$; il pose alors :

$$\gamma_\nu\tilde{\boldsymbol{u}}^\nu = \tilde{\boldsymbol{u}}^\nu(\boldsymbol{x}) - \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1})\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^\nu(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}) \tag{11.15}$$

On peut voir par exemple que les conditions définies par $(11.14)_4$, (11.15) redonnent (11.9) pour le cas de la symétrie plane.

3 - Reconstruction de la solution globale. Après résolution des sous-problèmes (P_ν) en les inconnues $\tilde{\boldsymbol{u}}^\nu$, la solution $\boldsymbol{u}$ du problème (P) est reconstruite par la formule :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{y}) = \sum_{\nu=0}^{n-1}\rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1})\boldsymbol{s}\boldsymbol{u}^\nu(\boldsymbol{y}) \qquad (\forall \boldsymbol{y} \in C, \forall \boldsymbol{s} \in G) \tag{11.16}$$

qui redonne (11.9) dans le cas particulier de la symétrie par rapport à un seul plan.

Représentations irréductibles à valeurs complexes. Les représentations irréductibles ρ de groupes finis G commutatifs, généralement à valeurs complexes comme pour le groupe des symétries cycliques, éq. (11.11), sont toutefois à valeurs réelles dans certains cas particuliers importants, comme les groupes de symétries planes.

Des difficultés apparaissent pour l'étude des problèmes aux limites posés en variable réelle quand les coefficients ρ_ν sont des nombres complexes, car la définition (11.14) fait que les sous-problèmes (P_ν) ont des données complexes. Il est en fait établi [2] que les représentations ρ_ν peuvent être regroupées en *paires conjuguées* $(\rho_{\nu_1}, \rho_{\nu_2})$, telles que :

$$\overline{\rho}_{\nu_1}(\boldsymbol{s}) = \rho_{\nu_2}(\boldsymbol{s}) \qquad (\forall \boldsymbol{s} \in G)$$

Ainsi, pour un problème (P) à valeurs réelles, les solutions $\tilde{\boldsymbol{u}}^{\nu_1}, \tilde{\boldsymbol{u}}^{\nu_2}$ aux sous-problèmes (P_ν) sont complexes conjuguées d'après (11.14). Posant $\tilde{\boldsymbol{u}}^{\nu_1} = \boldsymbol{v} + i\boldsymbol{w}$, $\tilde{\boldsymbol{u}}^{\nu_2} = \boldsymbol{v} - i\boldsymbol{w}$, les sous-problèmes ($\mathrm{P}_{\nu_1}$), ($\mathrm{P}_{\nu_2}$) font intervenir la même condition $(11.14)_4$ sur la frontière complémentaire Σ, qui s'explicite comme :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Re(\rho_\nu(\boldsymbol{s}_x)) & \Im(\rho_\nu(\boldsymbol{s}_x)) \\ -\Im(\rho_\nu(\boldsymbol{s}_x)) & \Re(\rho_\nu(\boldsymbol{s}_x)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_x\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{s}_x^{-1}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{11.17}$$

pour tout point $\boldsymbol{x} \in \Sigma$ tel qu'il existe $\boldsymbol{s}_x \in G$ vérifiant $\boldsymbol{s}_x\boldsymbol{x} \in \Sigma$. On est ainsi ramené à des *paires* de sous-problèmes d'inconnues réelles $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ *couplés* par la condition ci-dessus. Cette particularité intervient notamment pour les symétries cycliques.

11.3 Equations intégrales de frontière et symétries géométriques

On s'intéresse maintenant plus particulièrement à la prise en compte des symétries dans les équations intégrales de frontière, prenant comme exemple l'équation (4.31) pour les problèmes élastostatiques, soit :

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ [u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \, \mathrm{d}S_y = 0 \tag{11.18}$$

Il faut donc, pour un groupe G de symétrie géométrique donné, définir une cellule de symétrie, construire les sous-problèmes (P_ν) et reconstruire la solution globale.

Une méthode a priori possible consiste à traduire les sous-problèmes (P_ν) définis par (11.14) en langage d'équations intégrales, c'est-à-dire écrire (11.18) pour le domaine constitué par la cellule de symétrie C de frontière $\partial C = \Sigma \cup \Gamma$ et incorporer les conditions aux limites $(11.14)_{(2,3,4)}$. Toutefois, le gain apporté par la prise en compte des symétries ne dépend pas ici du rapport $|C|/|\Omega]$ des volumes des domaines mais de celui $|\partial C|/|\partial\Omega|$ des *aires des frontières*. Si l'aire de la frontière additionnelle Σ de la cellule de symétrie C est du même ordre que celle de la trace Γ de $\partial\Omega$ sur C, l'usage de la symétrie n'apportera pas de gain notable. Par exemple, si Ω est une sphère et C un octant délimité par les plans de coordonnées, on a $|C|/|\Omega| = 1/8$ mais $|\partial C|/|\partial\Omega| = 5/16$ seulement.

Il faut donc plutôt formuler les sous-problèmes comme des équations intégrales *dont le support géométrique est* Γ, car ainsi les rapports $|\Gamma|/|\partial\Omega|$ des aires et $|C|/|\Omega|$ des volumes sont égaux. En d'autres termes, Γ doit apparaître comme la cellule de symétrie associée à la frontière $\partial\Omega$. Pour ce faire, on remarque que chacun des états $(\boldsymbol{u}^\nu, \boldsymbol{t}^\nu)$ vérifie l'équation intégrale (11.18) :

$$\int_{\partial\Omega} \left\{ [u_i^\nu(\boldsymbol{y}) - u_i^\nu(\boldsymbol{x})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i^\nu(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \, \mathrm{d}S_y = 0$$

Les changements de variable $(\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{y})$ permettent alors de se ramener à une somme d'intégrales sur Γ :

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in G} \int_\Gamma \left\{ [u_i^\nu(\boldsymbol{s}\boldsymbol{y}) - u_i^\nu(\boldsymbol{x})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\boldsymbol{y}) - t_i^\nu(\boldsymbol{s}\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\boldsymbol{y}) \right\} \, \mathrm{d}S_y = 0 \tag{11.19}$$

Le point de collocation $\boldsymbol{x}$ est fixé, le changement de variable ne portant que sur le point d'intégration $\boldsymbol{y}$. De plus, chaque $\boldsymbol{s} \in G$ est une isométrie, donc préserve l'élément différentiel $\mathrm{d}S_y$.

C'est à ce stade qu'intervient l'équivalent de la propriété d'équivariance (11.4) : la solution de Kelvin (4.8), (4.9) vérifie :

$$\begin{aligned} U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\boldsymbol{y}) &= s_{ip} s_{kq} U_p^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}\boldsymbol{y}) &= s_{ip} s_{kq} T_p^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned} \qquad (\forall \boldsymbol{s} \in G) \tag{11.20}$$

où un élément $\boldsymbol{s} \in G$ (plus exactement, l'application linéaire associée à l'isométrie *affine* $\boldsymbol{s}$) est représentée par sa matrice 3×3 $[s_{ij}]$. En fait, l'écriture ci-dessus sous-entend que

le point origine de l'espace (affine) géométrique est *invariant par l'action du groupe* G. L'équivariance (11.20), ainsi que la propriété de symétrie (11.13) que vérifie $(\boldsymbol{u}^\nu, \boldsymbol{t}^\nu)$, sont alors exploitées dans l'équation intégrale (11.19), qui devient :

$$0 = \sum_{\boldsymbol{s}\in G} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{ip} s_{kq} \int_\Gamma [s_{im}\tilde{u}_m^\nu(\boldsymbol{y}) - \tilde{u}_i^\nu(\boldsymbol{x})\rho_\nu(\boldsymbol{s})] T_p^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$
$$- \sum_{\boldsymbol{s}\in G} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{ip} s_{kq} s_{im} \int_\Gamma t_m^\nu(\boldsymbol{y}) U_p^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$

soit, puisque $\boldsymbol{s}$ est une isométrie et vérifie de ce fait $\boldsymbol{s}^T\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}\boldsymbol{s}^T = \mathbf{1}$, ou encore, $s_{im}s_{ip} = \delta_{mp}$:

$$0 = \sum_{\boldsymbol{s}\in G} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{kq} \int_\Gamma [\tilde{u}_p^\nu(\boldsymbol{y}) - s_{ip}\tilde{u}_i^\nu(\boldsymbol{x})\rho_\nu(\boldsymbol{s})] T_p^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$
$$- \sum_{\boldsymbol{s}\in G} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{kq} \int_\Gamma t_p^\nu(\boldsymbol{y}) U_p^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \tag{11.21}$$

Enfin, on remarque que (11.13) avec $\boldsymbol{s}$ remplacé par $\boldsymbol{s}^{-1} = \boldsymbol{s}^T$ donne :

$$\rho_\nu(\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{u}^\nu(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}^\nu(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}) \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in C, \forall \boldsymbol{s} \in G)$$

ou encore, en composantes :

$$\rho_\nu(\boldsymbol{s}) s_{ip} \tilde{u}_i^\nu(\boldsymbol{x}) = \tilde{u}_p^\nu(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x}) \qquad (\forall \boldsymbol{x} \in C, \forall \boldsymbol{s} \in G)$$

ce qui entraîne :

$$\tilde{u}_p^\nu(\boldsymbol{y}) - \tilde{u}_i^\nu(\boldsymbol{x})\rho_\nu(\boldsymbol{s}) s_{ip} = \tilde{u}_p^\nu(\boldsymbol{y}) - \tilde{u}_p^\nu(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x})$$

Cette relation est reportée dans (11.21), ce qui achève d'établir que le sous-problème $(\mathrm{P})_\nu$, d'inconnues $(\tilde{\boldsymbol{u}}^\nu, \tilde{\boldsymbol{t}}^\nu)$, est gouverné par l'équation intégrale :

$$0 = \sum_{\boldsymbol{s}\in G} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{kq} \int_\Gamma [\tilde{u}_p^\nu(\boldsymbol{y}) - \tilde{u}_p^\nu(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x})] T_p^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y$$
$$- \sum_{\boldsymbol{s}\in G} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{kq} \int_\Gamma t_p^\nu(\boldsymbol{y}) U_p^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \tag{11.22}$$

Celle-ci a pour support géométrique l'intersection Γ de la frontière de C avec $\partial\Omega$; Γ est donc une cellule de symétrie associée à la frontière $\partial\Omega$. Elle est applicable quel que soit le groupe de symétrie G abélien considéré, et donc en particulier en présence de symétries planes ou cycliques. Une fois tous les sous-problèmes résolus, la formule (11.16) permet de reconstruire la solution globale $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})\,|_{\partial\Omega}$ de (11.18).

11.4 Discrétisation de l'équation intégrale (11.22)

Ici, seule la cellule de symétrie Γ, et non la frontière complète $\partial\Omega$, est subdivisée en éléments de frontière (N_E éléments, N_N nœuds). La version discrétisée de l'équation

intégrale (11.22), avec des notations analogues à celles du chapitre 3, s'écrit :

$$0 = \sum_{s\in G} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{kq} \left\{ \sum_{e\in I(s^{-1}x)} \sum_{q=1}^{N_e} AS_{iq}(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q)\tilde{u}_i^{m(e,q)\nu} + \sum_{e\notin I(s^{-1}x)} \sum_{q=1}^{N_e} AR_{iq}(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q)\tilde{u}_i^{m(e,q)\nu} - \sum_{e=1}^{N_E}\sum_{q=1}^{N_e} B_{iq}(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q)\tilde{t}_i^{m(e,q)\nu} - \left(\sum_{e\notin I(s^{-1}x)} \widehat{AR}_{iq}(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e) \right) \tilde{u}_i^\nu(\boldsymbol{x}) \right\} \tag{11.23}$$

dans laquelle les matrices élémentaires, données par :

$$\begin{aligned} AS_{ir}(\boldsymbol{z}, e, q) &= \int_{E^{(e)}} \hat{N}_q(\rho, \alpha; \boldsymbol{z}) T_i^r(\rho, \alpha) J(\boldsymbol{\xi}) d\rho d\alpha \\ AR_{ir}(\boldsymbol{z}, e, q) &= \int_{E^{(e)}} N_q(\boldsymbol{\xi}) T_i^r(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\xi \\ \widehat{AR}_{ir}(\boldsymbol{z}, e, q) &= \int_{E^{(e)}} T_i^r(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\xi \\ B_{ir}(\boldsymbol{z}, e, q) &= \int_{E^{(e)}} N_q(\boldsymbol{\xi}) U_i^r(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

sont *indépendantes du numéro de sous-problème* ν. Chacune des matrices élémentaires $AS(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q)$, $AR(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q)$, $B(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q)$, une fois calculée, contribue à l'assemblage de chacun des sous-problèmes discrétisés. Seule la pondération des matrices élémentaires, qui utilise les coefficients $\rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1})$, dépend du sous-problème. Cette remarque, essentielle sur le plan pratique, souligne l'origine de l'économie de temps de calcul permise par l'utilisation des symétries.

De fait, la dépendance par rapport à ν du sous-problème (P_ν) se manifeste seulement à travers les conditions aux limites, l'opérateur (forme bilinéaire, opérateur différentiel ou opérateur intégral) traduisant les équations de champ étant le même pour tous les (P_ν). Ainsi, l'équation intégrale discrétisée associée à (P_ν) ne dépend de ν qu'à travers les valeurs nodales *données*, et il était prévisible que les intégrales élémentaires ne dépendent pas de ν.

GAIN APPORTÉ PAR L'UTILISATION DES SYMÉTRIES. L'examen de (11.23) permet un décompte approximatif d'opérations arithmétiques. La discrétisation en éléments de frontière porte sur la cellule de symétrie G, n fois plus petite que la frontière originale $\partial\Omega$. D'autre part, il faut calculer les intégrales élémentaires $AS(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q)$, $AR(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q)$ et $J(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q)$ pour tous les éléments du maillage de Γ et toutes les images $\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}$ des points de collocation $\boldsymbol{x}$. En d'autres termes, la boucle d'assemblage parcourt le nombre de points de collocation qui aurait été utilisé pour la frontière $\partial\Omega$ entière, mais un nombre d'éléments n fois plus faible. De la sorte, on s'attend à ce que l'exploitation des symétries divise par n le nombre total d'intégrales élémentaires à évaluer, et donc le temps de calcul consommé par la phase d'assemblage. Cependant, la construction des équations discrétisées (11.23) repose aussi sur le calcul, pour chaque

sous-problème, de sommes pondérées par les coefficients $\rho_\nu(\boldsymbol{s})$, ce qui entraîne un coût additionnel en termes d'opérations arithmétiques qui vient altérer le ratio idéal $1/n$.

De même, la résolution d'un système linéaire de taille $(nN \times nN)$ est remplacée par celle de n systèmes linéaires de taille[4] $(N \times N)$. Les matrices étant pleines et non symétriques, la résolution d'un système $(N \times N)$ demande $O(N^3)$ opérations. Par conséquent, on s'attend à ce que le rapport des nombres d'opérations élémentaires pour la phase de résolution soit :

$$\frac{\text{nb. opér. sans symétrie}}{\text{nb. opér. avec symétrie}} = \frac{(nN)^3}{n(N)^3} = n^2$$

11.5 Représentations intégrales aux points intérieurs

L'analyse n'a porté jusqu'ici que sur la phase de formulation et de résolution de l'équation intégrale, et il reste à examiner celle de post-traitement. En effet, l'effet de la prise en compte de symétries permet aussi d'accélérer le calcul de valeurs de $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ aux points intérieurs à l'aide des représentations intégrales.

Représentation intégrale du déplacement. La valeur de $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ en un point d'observation intérieur est donnée par la formule (4.20) :

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} \left\{ t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \tag{11.24}$$

qui peut aussi être ramenée à une somme d'intégrales sur la cellule de symétrie Γ :

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{s\in G} \int_\Gamma \left\{ t_i(\boldsymbol{sy}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{sy}) - u_i(\boldsymbol{sy}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{sy}) \right\} \mathrm{d}S_y \tag{11.25}$$

On tient alors compte de l'équivariance (11.20) et de la formule de reconstruction (11.16) pour obtenir :

$$\begin{aligned} u_k(\boldsymbol{x}) = &\sum_{s\in G} \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{ip} s_{kq} s_{im} \int_\Gamma t_m^\nu(\boldsymbol{y}) U_p^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \\ &- \sum_{s\in G} \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{ip} s_{kq} s_{im} \int_\Gamma \tilde{u}_m^\nu(\boldsymbol{y}) T_p^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

soit, puisque $s_{im} s_{ip} = \delta_{mp}$:

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{s\in G} \sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{kq} \int_\Gamma \left\{ t_i^\nu(\boldsymbol{y}) U_i^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - \tilde{u}_i^\nu(\boldsymbol{y}) T_i^q(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \tag{11.26}$$

[4] En raison de l'intervention des conditions supplémentaires sur Σ, le facteur n entre la dimension des matrices dans les deux cas est approximatif, et devient exact à la limite pour un maillage très fin.

Finalement, la forme discrétisée de la formule de représentation du déplacement s'écrit :

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{s\in G}\sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{rk} \sum_{q=1}^{N_e}\sum_{E_e\subset\Gamma} \left\{ \tilde{t}_i^{(q)\nu} B_{ir}(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q) - \tilde{u}_i^{(q)\nu} A_{ir}(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q) \right\} \tag{11.27}$$

les matrices élémentaires, indépendantes du numéro de sous-problème, étant données par :

$$A(\boldsymbol{z}, e, q)_{ir} = \int_E N_q(\boldsymbol{\xi}) T_i^r(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\xi$$
$$B(\boldsymbol{z}, e, q)_{ir} = \int_E N_q(\boldsymbol{\xi}) U_i^r(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) J(\boldsymbol{\xi})\, \mathrm{d}\xi$$

GAIN APPORTÉ PAR L'EXPLOITATION DES SYMÉTRIES. L'évaluation numérique de l'expression (11.27) nécessite le calcul des intégrales élémentaires pour chaque élément de Γ et pour chaque image $\boldsymbol{sx}$ ($\boldsymbol{s} \in G$) du point d'observation, soit au total $n \times N_E$ termes différents pour chaque type A, B. C'est exactement le nombre d'intégrales élémentaires qu'il faudrait calculer en l'absence de symétrie. On peut alors avoir l'impression que la formule (11.26) n'apporte pas d'avantage par rapport à (11.24). Toutefois, considérons la formule discrétisée (11.27) pour le point d'observation $\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{x}$, symétrique de $\boldsymbol{x}$ par l'action de $\boldsymbol{s}_0 \in G$ fixé :

$$u_k(\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{x}) = \sum_{s\in G}\sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) s_{rk} \sum_{q=1}^{N_e}\sum_{E_e\subset\Gamma} \left\{ \tilde{t}_i^{(q)\nu} B_{ir}(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{x}, e, q) - \tilde{u}_i^{(q)\nu} A_{ir}(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{x}, e, q) \right\} \tag{11.28}$$

Selon un résultat classique de la théorie des groupes, la relation $(\boldsymbol{t} \in G) \to (\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_0\boldsymbol{t} \in G)$ est bijective. On peut donc remplacer $\boldsymbol{s}$ par $\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{t}$ et faire porter la sommation sur $\boldsymbol{t}$ dans la formule ci-dessus, pour obtenir :

$$u_k(\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{t}\in G}\sum_{\nu=0}^{n-1} \rho_\nu(\boldsymbol{t}^{-1})\rho_\nu(\boldsymbol{s}_0)(\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{t})_{rk} \sum_{q=1}^{N_e}\sum_{E_e\subset\Gamma} \left\{ \tilde{u}_i^{(q)\nu} A_{ir}(\boldsymbol{t}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q) - \tilde{t}_i^{(q)\nu} B_{ir}(\boldsymbol{t}^{-1}\boldsymbol{x}, e, q) \right\} \tag{11.29}$$

compte tenu de ce que, par définition de ρ_ν :

$$\rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}) = \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{s}_0^{-1}\boldsymbol{s}_0) = \rho_\nu(\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{s}_0^{-1})\rho_\nu(\boldsymbol{s}_0)$$

Cette formule montre donc que les intégrales élémentaires nécessaires au calcul de $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ par (11.27) permettent également le calcul des valeurs de $\boldsymbol{u}$ en tous les points

$\boldsymbol{s}_0\boldsymbol{x}$ images par G du point d'observation initial $\boldsymbol{x}$. Le gain apporté par l'exploitation des symétries géométriques réside dans le fait que les mêmes intégrales élémentaires permettent l'évaluation de n valeurs de la représentation intégrale (aux n points images de $\boldsymbol{x}$ par le groupe de symétrie) au lieu d'une seule valeur en l'absence d'exploitation des symétries. Seules les pondérations des matrices élémentaires changent d'un point image à un autre.

Représentation intégrale du tenseur des contraintes. Les mêmes considérations s'appliquent pour le calcul du tenseur des contraintes. Il suffit d'écrire la formule de représentation obtenue par application de la loi de Hooke à (11.28).

11.6 Exploitation des symétries : récapitulation

Il est d'abord nécessaire que, pour chaque groupe de symétrie G dont on envisage l'exploitation, les informations suivantes soient définies dans le code d'éléments de frontière :

- La *table de multiplication de* G, tableau $n \times n$ d'entiers TABLE : $k = \text{TABLE}(i, j)$ est le numéro du résultat $\boldsymbol{s}_k$ de la multiplication de $\boldsymbol{s}_i$ par $\boldsymbol{s}_j$ $\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{s}_i\boldsymbol{s}_j$.
- La *table des représentations irréductibles* de G, c'est-à-dire le tableau $n \times n$ des coefficients $\rho_\nu(\boldsymbol{s}_i)$ $(0 \leq \nu \leq n-1,\ 1 \leq i \leq n)$.
- La définition analytique de l'action des éléments $\boldsymbol{s} \in G$ sur un point (ou vecteur) $\boldsymbol{x}$, c'est-à-dire n matrices $[s_{ij}]_{1\leq i,j\leq 3}$ telles que $(\boldsymbol{s}\boldsymbol{x})_i = s_{ij}x_j$.

L'exploitation des symétries géométriques dans un code repose alors sur les opérations suivantes.

1. *Introduction des données.*
   - Donnée de $(G = \{\boldsymbol{s}_1, \ldots \boldsymbol{s}_n\})$ parmi les possibilités prévues dans le code.
   - Données définissant le maillage *de la cellule de symétrie* Γ : nœuds, table de connectivité...
   - Données définissant les conditions aux limites. Pour tout point $\boldsymbol{y} \in \Gamma$, il faut fournir n données aux limites : par exemple, si $\boldsymbol{y}$ est le siège d'efforts imposés $\boldsymbol{t}^D(\boldsymbol{y})$, il faut fournir les n données $\boldsymbol{t}^D(\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{y}), \ldots, \boldsymbol{t}^D(\boldsymbol{s}_n\boldsymbol{y})$.
   - Calcul des données aux limites $(\tilde{\boldsymbol{u}}^{D(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{t}}^{D(\nu)})$ pour chaque sous-problème (P_ν), suivant (11.12). Ne retenir dans la suite que les sous-problèmes (P_ν) ayant des données non nulles.
   - Pour chaque $\boldsymbol{s} \in G$ successivement, recherche des nœuds $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ tels que $\boldsymbol{s}\boldsymbol{x} \in \Gamma$. Ecriture des relations supplémentaires $(11.14)_4$.
2. *Assemblage et résolution des sous-problèmes* (P_ν).
   - Construction des équations intégrales discrétisées (11.22) pour chaque sous-problème (P_ν).

- Incorporation des données aux limites $(\tilde{\boldsymbol{u}}^{D(\nu)}, \tilde{\boldsymbol{t}}^{D(\nu)})$ et réarrangement du système matriciel par permutation des colonnes.
- Prise en compte des relations supplémentaires $(11.14)_4$ (construites lors de la phase précédente), soit par élimination d'équations et d'inconnues du système (en l'absence de couplage entre sous-problèmes), soit par ajout d'équations (en présence de couplage, par exemple pour l'utilisation de symétries cycliques).
- Résolution des systèmes linéaires par rapport aux valeurs nodales inconnues de $(\tilde{\boldsymbol{u}}^{\nu}, \tilde{\boldsymbol{t}}^{\nu})\,|_{\Gamma}$.

3. *Reconstruction de la solution de (P)* sur $\partial\Omega$ au moyen de la formule (11.16).
4. *Post-traitement : représentations aux points intérieurs.* Pour chaque point d'observation $\boldsymbol{x}$ spécifié par l'utilisateur, calcul de la représentation discrétisée (11.29) du déplacement et de son homologue pour les contraintes.

11.7 Exemple numérique en élastodynamique

Un massif élastique infini contient une cavité sphérique, de rayon unité, chargée par des efforts de contact $\boldsymbol{t}^D = (A + B\sin\theta C\sin\theta e^{i\phi})e^{-i\omega t}$ (A, B, C : constantes complexes, θ, ϕ : angles sphériques). Les constantes élastiques et la pulsation ω sont choisis de façon à avoir $k_L = 0.5345, k_T = 1$. Ce chargement ne présente pas de symétrie particulière ; il est par ailleurs une combinaison linéaire des modes sphériques (0,0), (1,0), (1,1) connus analytiquement (Eringen et Suhubi [3]).

La cellule de symétrie est constituée de l'octant à coordonnées positives de la sphère. Les maillages M_1 (3 éléments, 16 nœuds) et M_2 (12 éléments, 49 nœuds) de l'octant, employant l'élément quadrilatéral à 8 nœuds, ont été considérés. Les huit sous-problèmes correspondant à la décomposition, définie par Bossavit [2], d'un chargement quelconque en parties symétriques et antisymétriques représentent, après repérage des degrés de liberté nuls par symétrie ou antisymétrie, 33, 30, 30, 30, 26, 26, 26 et 21 inconnues scalaires pour le maillage M_1 et 120, 113, 113, 113, 105, 105, 105 et 96 pour le maillage M_2. En l'absence de ce repérage, chacun des huit sous-problèmes aurait 48 (maillage M_1) ou 147 (maillage M_2) inconnues.

La résolution sans prise en compte des symétries utilise les maillages M_3 (24 éléments, 74 nœuds et 222 inconnues scalaires) et M_4 (96 éléments, 290 nœuds et 870 inconnues scalaires) de la sphère entière obtenus par reproduction de M_1, M_2 respectivement sur les 7 octants restants.

Les erreurs relatives en moyenne quadratique relevées pour le déplacement sur la frontière de la cavité sont :

$$e = 6.5 \times 10^{-3} \quad (M_1, M_3) \qquad 5.2 \times 10^{-4} \quad (M_2, M_4)$$

L'intérêt principal de cet exemple est bien sûr l'étude de l'efficacité de la prise en compte des symétries géométriques. La majeure partie du temps de calcul est consacrée aux étapes d'assemblage et de résolution. Le tableau 11.1 présente les temps de calcul (relevés sur une station de travail de type DN400) pour l'assemblage, la résolution, le calcul de la représentation intégrale en un point.

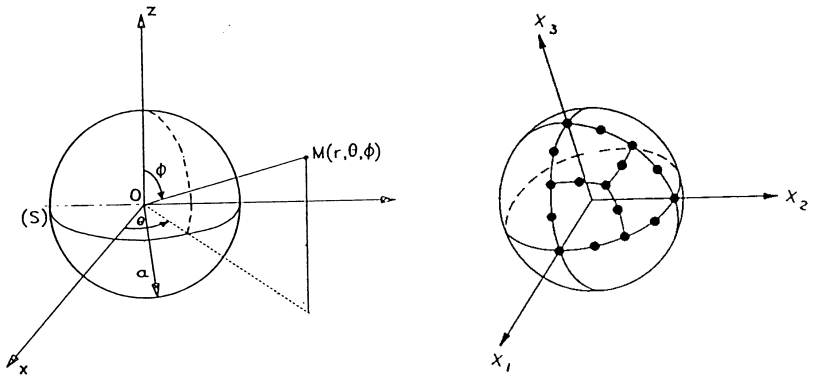

Figure 11.3: Cavité sphérique et coordonnées sphériques (à gauche) ; Maillage M_1 (à droite).

	Assemblage (s)	Résolution (s)	Post-traitement (s)
M_1	70.7	4.86	6.01
M_3	210.	171.	3.49
M_2	488.	184.	23.3
M_4	1786.	9430.	13.6

Tableau 11.1 : Temps de calcul pour les quatre maillages M_1, M_2, M_3, M_4.

Le rapport des temps d'assemblage avec et sans usage de symétries vaut environ 1/4 au lieu de la valeur idéale 1/8. Ceci semble dû à la présence d'opérations supplémentaires (pondérations de matrices élémentaires par des coefficients différents pour chaque sous-problème) et à la complexité accrue de la boucle d'assemblage.

Le rapport des temps de résolution avec et sans usage de symétries vaut environ 1/35 (M_1, M_3) et 1/51 (M_2, M_4), s'approchant ainsi de la valeur idéale 1/64 pour le maillage le plus fin.

Le temps de post-traitement est plus important pour M_1 que pour M_3 (idem avec M_2 et M_4). En cas d'utilisation de symétrie (maillages M_1, M_2), $(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}))$ sont en fait évalués simultanément aux 8 images de $\boldsymbol{x}$ par le groupe de symétrie, mais en $\boldsymbol{x}$ seulement avec M_3, M_4.

Signalons que l'exemple présenté à la fin du chapitre 8 (diffraction d'une onde élastique par une cavité sphérique) utilise également la symétrie géométrique.

Références bibliographiques

[1] Allgower, E. L., Böhmer, K., Georg, K., Miranda, R. Exploiting symmetry in boundary element methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, **29**, 534–552 (1992).

[2] Bossavit, A. Symmetry, groups and boundary value problems : a progressive introduction to noncommutative harmonic analysis of partial differential equations in domains with geometrical symmetry. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **56**, 167–215 (1986).

[3] ERINGEN, A. C., SUHUBI, E. S. *Elastodynamics (vol II - linear theory)*. Academic Press (1975).

[4] LOBRY, J., BROCHE, CH. Geometrical symmetry in the boundary element method. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **14**, 229–238 (1994).

12

Dérivation par rapport au domaine

12.1 Motivation

La considération des variations premières et secondes de fonctionnelles intégrales dans une transformation de domaine géométrique intervient dans nombre de situations où le domaine lui-même est une variable importante. Parmi celles-ci figurent les problèmes d'optimisation de forme, où la fonction-objectif et les contraintes sont généralement des intégrales posées sur le domaine de la structure ou sa frontière et dépendant des variables mécaniques (déplacement, contraintes...), elles-mêmes fonction du domaine. Les problèmes inverses géométriques, où le domaine est partiellement inconnu (identification de fissures, défauts...) constituent une famille de problèmes de nature différente mais conduisant à des techniques de résolution similaires. La partie inconnue du domaine (ou de sa frontière) est généralement recherchée de façon à minimiser une distance entre valeurs calculées (pour une configuration géométrique fixée) et données (pour la configuration géométrique réelle, inconnue) d'une certaine grandeur mécanique. Enfin, les problèmes d'évolution en mécanique de la rupture ou de l'endommagement font intervenir des fronts géométriques. Leur propagation est fréquemment gouvernée par des critères énergétiques, la dérivée seconde de l'énergie potentielle à l'équilibre par rapport à des perturbations du front jouant alors un rôle essentiel. Toutes ces situations ont pour point commun de faire intervenir les variations de fonctionnelles intégrales qui dépendent du domaine géométrique de manière directe (par l'intermédiaire du support d'intégration) mais aussi indirecte (par l'intermédiaire de l'état mécanique, solution d'un problème aux limites).

Pour de nombreuses raisons, il est important de pouvoir évaluer les variations premières et secondes de telles fonctionnelles. La plupart des algorithmes d'optimisation utilisent les dérivées premières de la fonctionnelle optimisée, les algorithmes de type Newton utilisant même les dérivées secondes. De plus, une évaluation précise des dérivées secondes donne le moyen pratique de vérifier a posteriori que la solution vérifie les conditions d'optimalité. Enfin, la dérivée seconde de l'énergie potentielle gouverne certains problèmes. Il est d'autre part bien connu que l'estimation de telles dérivées par différences finies (qui ici reposent sur des perturbations petites mais finies du domaine géométrique) sont numériquement coûteuses, en raison de la nécessité de

résoudre un problème aux limites sur chaque domaine perturbé, et très sensibles aux erreurs d'évaluation de la fonctionnelle elle-même (Tikhonov et Arsenin [8]).

Ceci conduit à s'intéresser aux méthodes analytiques de dérivation dans une transformation de domaine. Elles consistent essentiellement à décrire une variation du domaine par rapport à sa configuration actuelle par la donnée d'un champ $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{y})$ de "vitesse" de transformation de la frontière. Cela permet de reprendre les résultats classiques de la cinématique des milieux continus, et notamment les formules de dérivation matérielles d'intégrales, à ceci près que le "mouvement", utilisé pour décrire mathématiquement un changement infinitésimal du domaine support d'un problème aux limites et non une transformation matérielle, est fictif. Simon [7] a traité le concept mathématique de dérivée par rapport au domaine. D'autres travaux (par exemple Haug et coll. [3], Petryk et Mroz [5]) sont orientés vers les méthodes d'éléments finis. Pourtant, pour les problèmes ayant le domaine ou sa frontière comme variable principale, il est naturel d'envisager l'utilisation de méthodes d'équations intégrales, qui représentent en quelque sorte la modélisation "minimale". On cherche alors à calculer les variations de fonctionnelles en combinant les équations intégrales de surface et la dérivation par rapport à un domaine variable. Cela peut être accompli au moyen soit de la dérivation directe, soit de la méthode de l'état adjoint.

Ce chapitre est consacré à la dérivation directe, qui consiste à prendre la dérivée dans une transformation de domaine donnée de la formulation intégrale qui gouverne l'état physique à domaine fixé. Cela donne une équation intégrale dont l'inconnue est la dérivée de l'état dans la transformation de domaine. On choisit, pour fixer les idées, d'exposer la méthode de dérivation directe pour l'équation intégrale (2.20) associée à l'équation de Poisson. La même démarche est applicable à d'autres situations ; les équations intégrales dérivées pour l'élasticité isotrope sont données en fin de chapitre.

12.2 Dérivation dans une variation de domaine

On s'intéresse au calcul de la perturbation de l'état physique induite par un petit changement du domaine géométrique Ω. Transposant les concepts classiques de la cinématique des milieux continus (Salençon [6]), le changement du domaine est décrit mathématiquement par une famille de *transformations* $\boldsymbol{F}$, difféomorphismes dépendant d'un *paramètre cinématique* (temps fictif) η (description de type "lagrangien") :

$$\boldsymbol{X} \in \Omega \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \eta) \in \Omega(\eta) \qquad \text{et} \qquad (\forall \boldsymbol{X} \in \Omega) \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, 0) = \boldsymbol{X} \tag{12.1}$$

On définit la *vitesse de transformation* $\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}, \eta)$ associée à la transformation $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}, \eta) = \boldsymbol{F}_{,\eta}(\boldsymbol{X}, \eta) \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \eta) \tag{12.2}$$

qui est donc la "vitesse" au point courant $\boldsymbol{x}$, en représentation "eulérienne".

DÉRIVATION DE CHAMPS DANS LA TRANSFORMATION GÉOMÉTRIQUE. Soit maintenant $f(\boldsymbol{x}, \eta)$ un champ scalaire ou tensoriel donné en représentation "eulérienne". La dérivée "lagrangienne" $\overset{\star}{f}$ de f, représentative des variations de f en suivant le

"mouvement[1]" $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \eta)$, est définie par :

$$\overset{\star}{f}(\boldsymbol{x}, \eta) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[f(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \eta + h), \eta + h) - f(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}, \eta), \eta) \right]$$

et est reliée à la dérivée partielle $f_{,\eta}$ par :

$$\overset{\star}{f}(\boldsymbol{x}, \eta) = f_{,\eta}(\boldsymbol{x}, \eta) + \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x}, \eta).\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}, \eta) \tag{12.3}$$

Cette définition, appliquée habituellement à des transformations matérielles, est classique en cinématique des milieux continus ($\boldsymbol{\nabla} f$ désigne le gradient eulérien de f, par rapport à $\boldsymbol{x}$). De plus la dérivée lagragienne du gradient $\boldsymbol{\nabla} f$ d'un champ scalaire ou tensoriel f est donnée par :

$$(\boldsymbol{\nabla} f)^{\star} = \boldsymbol{\nabla} \overset{\star}{f} - \boldsymbol{\nabla} f.\boldsymbol{\nabla} \theta \tag{12.4}$$

tandis que celle d'un vecteur *matériel* $\boldsymbol{a}$ attaché au point mobile $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}; \eta)$ est donnée par :

$$\overset{\star}{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{a} \tag{12.5}$$

Dérivées d'éléments différentiels. Les dérivées lagrangiennes d'éléments différentiels $\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}S$, $\mathrm{d}s$ associés à des volumes $\Omega(\eta)$, surfaces $S(\eta)$ et courbes $\Gamma(\eta)$ transportés par la transformation géométrique $\boldsymbol{F}$, à l'"instant" η, sont données par :

$$\overset{\star}{\mathrm{d}}V = \operatorname{div} \boldsymbol{\theta} \, \mathrm{d}V \qquad \overset{\star}{\mathrm{d}}S = \operatorname{div}_S \boldsymbol{\theta} \, \mathrm{d}S \qquad \overset{\star}{\mathrm{d}}s = \boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\tau} \, \mathrm{d}s \tag{12.6}$$

où div_S désigne l'opérateur divergence surfacique (annexe A) et $\boldsymbol{\tau}$ la tangente unitaire à la courbe matérielle $\Gamma(\eta)$. Dans un même ordre d'idées, on a :

$$\overset{\star}{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{n}.\boldsymbol{\nabla}_S \boldsymbol{\theta} \qquad \overset{\star}{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\tau} - (\boldsymbol{\tau}.\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\tau} \tag{12.7}$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire à la surface matérielle $S(\eta)$ et $\boldsymbol{\nabla}_S$ l'opérateur gradient surfacique. La preuve de certains de ces résultats est brièvement rappelée en annexe 12.1. Les vecteurs $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\tau}$ ne sont pas matériels.

Dérivées d'intégrales. Considérons des intégrales de volume $I(\eta)$, de surface $J(\eta)$ et curviligne $H(\eta)$ définies sur des volumes $\Omega(\eta)$, surfaces $S(\eta)$ et courbes $\Gamma(\eta)$ transportés par la transformation géométrique $\boldsymbol{F}$:

$$I(\eta) = \int_{\Omega(\eta)} f(\boldsymbol{y}, \eta) \, \mathrm{d}V \qquad J(\eta) = \int_{S(\eta)} g(\boldsymbol{y}, \eta) \, \mathrm{d}S \qquad H(\eta) = \int_{\Gamma(\eta)} h(\boldsymbol{y}, \eta) \, \mathrm{d}s$$

Leurs dérivées s'expriment à l'aide de formules classiques de la cinématique des milieux continus. D'abord, $\overset{\star}{I}(\eta)$ admet les deux expressions équivalentes :

$$\overset{\star}{I}(\eta) = \int_{\Omega(\eta)} [\overset{\star}{f} + f \operatorname{div} \boldsymbol{\theta}] \, \mathrm{d}V \tag{12.8}$$

$$= \int_{\Omega(\eta)} f_{,\eta} \, \mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega(\eta)} f[\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{n}] \, \mathrm{d}S \tag{12.9}$$

[1]Les guillemets, qui rappellent que les termes correspondants font référence à une transformation F géométrique et non matérielle, sont abandonnés dans la suite pour ne pas alourdir l'écriture.

où $\boldsymbol{n}$ désigne la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$. Ensuite, $\overset{\star}{J}(\eta)$ admet les expressions suivantes :

$$\overset{\star}{J}(\eta) = \int_{S(\eta)} \left[\overset{\star}{g} + g\mathrm{div}_S\boldsymbol{\theta}\right] \mathrm{d}S \tag{12.10}$$

$$= \int_{S(\eta)} [g_{,\eta} + (g_{,n} - 2Kg)(\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{n})] \mathrm{d}S + \int_{\partial S(\eta)} g\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\nu}\, \mathrm{d}s \tag{12.11}$$

où K est la courbure moyenne en $\boldsymbol{y} \in S$:

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{div}_S\boldsymbol{n}$$

R_1, R_2 étant les rayons de courbures principaux en $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{\nu}$ la normale unitaire sortante à ∂S (figure 12.1) et contenue dans le plan tangent à S, dans le cas où la surface S a un bord. Enfin la dérivée $\overset{\star}{H}(\eta)$ est donnée par :

$$\overset{\star}{H}(\eta) = \int_{\Gamma(\eta)} \left[\overset{\star}{h} + h\left(\frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\boldsymbol{\tau}}.\boldsymbol{\tau}\right)\right] \mathrm{d}s \tag{12.12}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ désigne la tangente unitaire à $\Gamma(\eta)$. Si de plus $\Gamma(\eta)$ est une courbe fermée C de rayon de courbure algébrique $R(s)$, alors on a :

$$\overset{\star}{H}(\eta) = \int_C \left[\overset{\star}{h} + h\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\tau}) - \frac{1}{R}\theta_\nu\right)\right] \mathrm{d}s \tag{12.13}$$

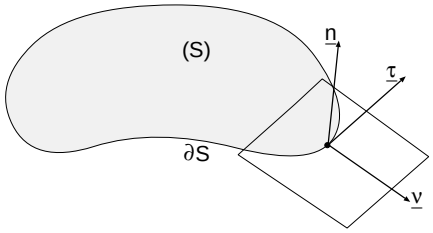

Figure 12.1: Repère (n, ν, τ) attaché à ∂S.

Les expressions (12.8) à (12.13) de $\overset{\star}{I}, \overset{\star}{J}, \overset{\star}{H}$ sont établies par exemple dans Mialon [4], Petryk et Mroz [5]. Elles permettent d'aborder le cas, qui nous intéresse ici, de fonctionnelles intégrales qui dépendent implicitement du domaine à travers la solution d'une équation intégrale.

12.3 Equation intégrale sur la dérivée première de l'état par rapport au domaine

Pour une configuration géométrique Ω fixée, considérons un état (u, q) associé à l'équation de Poisson, qui vérifie donc l'équation intégrale (2.20). Introduisant par commodité

une notation abrégée, cette dernière s'écrit :

$$I_1(\boldsymbol{x},u) - I_2(\boldsymbol{x},q) = F(\boldsymbol{x}) \tag{12.14}$$

$$I_1(\boldsymbol{x},u) \;=\; \bar{\kappa}u(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \tag{12.15}$$

$$I_2(\boldsymbol{x},q) \;=\; \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \tag{12.16}$$

$$F(\boldsymbol{x}) \;=\; \int_{\Omega} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})b(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}V_y \tag{12.17}$$

avec $\bar{\kappa} = 0$ (Ω borné) ou $\bar{\kappa} = 1$ ($\mathbb{R}^3 - \Omega$ borné). L'équation (12.14) prise pour $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega(\eta)$ porte sur les valeurs à la frontière du potentiel u et du flux $q = \boldsymbol{\nabla} u.\boldsymbol{n}$. Elle vaut pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, et est équivalente à l'équation locale $\Delta u + b = 0$ sur $\Omega(\eta)$. G désigne la solution élémentaire de l'espace infini : $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1/(4\pi r)$.

Etablissement de l'équation intégrale dérivée. L'équation intégrale (12.14) va permettre d'étudier l'effet sur (u,q) d'une variation du domaine $\Omega(\eta)$, c'est à dire du paramètre cinématique η, pour une transformation géométrique donnée $\boldsymbol{F}$. Si (u,q) sont solutions d'un problème aux limites sur $\Omega(\eta)$ pour chaque $\eta \geq 0$ (ils sont donc, ainsi que les sources réparties b, fonctions du point géométrique $\boldsymbol{y}$ et de η), l'équation (12.14) est vérifiée pour tout $\Omega(\eta)$. Prenons alors sa dérivée par rapport à η, de telle sorte que le *point de collocation* $\boldsymbol{x}$ accompagne la transformation de domaine. Il est important de remarquer que cette opération est licite car l'équation intégrale (12.14) ne met en jeu que des intégrales impropres intégrables au sens ordinaire, que l'on peut donc dériver par rapport au paramètre η.

Il s'agit en résumé d'écrire la forme développée de l'équation intégrale :

$$\overset{\star}{I}_1(\boldsymbol{x},u) - \overset{\star}{I}_2(\boldsymbol{x},q) = \overset{\star}{F}(\boldsymbol{x}) \tag{12.18}$$

D'abord, la dérivation lagrangienne des intégrales de surface $I_1(\boldsymbol{x},u), I_2(\boldsymbol{x},q)$ par application de la formule (12.10) donne, compte tenu de la linéarité de I_1, I_2 par rapport à u, q respectivement :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} I_1(\boldsymbol{x},u) = I_1(\boldsymbol{x},\overset{\star}{u}) + J_1(\boldsymbol{x},u;\boldsymbol{\theta}) \tag{12.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} I_2(\boldsymbol{x},q) = I_2(\boldsymbol{x},\overset{\star}{q}) + J_2(\boldsymbol{x},q;\boldsymbol{\theta}) \tag{12.20}$$

avec :

$$\begin{aligned} J_1(\boldsymbol{x},u;\boldsymbol{\theta}) = &\int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] \left\{ \overset{\star}{n}_j(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - n_j(\boldsymbol{y})(G_{,j})^{\star}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\,\mathrm{d}S_y)^{\star} \end{aligned} \tag{12.21}$$

$$J_2(\boldsymbol{x},q;\boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y}) \left\{ [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] G_{,r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) D_r\theta_r(\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \tag{12.22}$$

Les formules (12.19)–(12.21) et (12.20)–(12.22) s'entendent pour le domaine $\Omega = \Omega(\eta)$ et valent pour tout η pour lequel la transformation géométrique $\boldsymbol{F}(\cdot, \eta)$ est définie.

L'expression (12.21) de J_1 peut être arrangée. D'abord, les formules (12.6), (12.7) écrites en composantes, avec les notations de l'annexe A, donnent :

$$\overset{\star}{n}_j = -n_r D_j \theta_r \qquad (\,\mathrm{d}S)^\star = D_r \theta_r \,\mathrm{d}S$$

De plus, les dérivées lagrangiennes de la solution élémentaire G, fonction des *deux* points matériels $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ et indépendante de l'argument η, sont obtenues à partir de (12.3) :

$$\begin{aligned} \overset{\star}{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \theta_r(\boldsymbol{y}) G_{,r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \theta_r(\boldsymbol{x}) G_{,\bar{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] G_{,r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad (12.23) \\ (G_{,j})^\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \theta_r(\boldsymbol{y}) G_{,jr}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \theta_r(\boldsymbol{x}) G_{,j\bar{r}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] G_{,jr}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad (12.24) \end{aligned}$$

en raison des propriétés de symétrie (4.13). On peut remarquer que, pour $\boldsymbol{\theta}$ suffisamment régulier, les quantités $[u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})](G_{,j})^\star$, $\overset{\star}{G}$ ont des singularités intégrables. La prise en compte de ces identités donne :

$$\begin{aligned} J_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}) &= \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})][[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] n_j(\boldsymbol{y}) G_{,jr}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \left\{ n_j(\boldsymbol{y}) D_r \theta_r(\boldsymbol{y}) - n_r D_j \theta_r(\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &= \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})][[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] n_j G_{,jr}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) D_{jr} \theta_r(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \qquad (12.25) \end{aligned}$$

où on a employé l'opérateur différentiel tangentiel D_{ij} défini par (A.8). Ensuite, remarquant ici encore que l'équation $G_{,jj} = 0$ $(\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x})$ vérifiée par G entraîne :

$$\begin{aligned} n_j(\boldsymbol{y}) G_{,jr}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= [n_j(\boldsymbol{y}) G_{,jr}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - n_r(\boldsymbol{y}) G_{,jj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] + n_r(\boldsymbol{y}) G_{,jj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= D_{jr} G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad (12.26) \end{aligned}$$

le second membre de l'équation (12.25) devient :

$$\begin{aligned} J_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}) &= \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})][[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] D_{jr} G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) D_{jr} \theta_r(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \\ &= \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] D_{jr} \left\{ [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

Une intégration par parties au moyen de la formule (A.7) permet alors d'obtenir :

$$\begin{aligned} J_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}) &= \int_{\partial\Omega} \{D_{rj}[u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]\} \, [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ &= \int_{\partial\Omega} D_{rj} u(\boldsymbol{y}) [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

Enfin, la dérivée du second membre $F(\boldsymbol{x})$, éq. (12.17) dans la transformation de domaine est calculée au moyen de la formule (12.8) :

$$\begin{aligned} \overset{\star}{F}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\eta}) = &\int_\Omega \overset{\star}{b}_i(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y \\ &+ \int_\Omega b(\boldsymbol{y}) \left\{ G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) [[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]] + G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \theta_{j,j}(\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}V_y \end{aligned}$$

expression qu'il est commode de transformer à l'aide de la formule de la divergence :

$$\begin{aligned} \overset{\star}{F}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\eta}) &= \int_\Omega \overset{\star}{b}_i(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y + \int_\Omega b(\boldsymbol{y}) \left\{ G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) [[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]] \right\}_{,j} \mathrm{d}V_y \\ &= \int_\Omega \left[\overset{\star}{b}_i(\boldsymbol{y}) - b_{,j}(\boldsymbol{y}) [[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]] \right] G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} b(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) [[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]] n_j(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ &= \int_\Omega b_{,\eta}(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y + \theta_j(\boldsymbol{x}) \int_\Omega b_{,j}(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} b(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) [[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]] n_j(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{12.27}$$

Equation intégrale dérivée au premier ordre. Si le potentiel u et le flux q vérifient l'équation intégrale (12.14) pour le domaine $\Omega = \Omega(\eta)$, toute perturbation continue de cet état associée à une transformation géométrique $\boldsymbol{F}(\cdot, \eta)$ (de vitesse de transformation $\boldsymbol{\theta}$ de régularité $C^{0,1}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$), et une variation de source $b(\cdot, \eta)$ continues est telle que les dérivées matérielles $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{q}) \,|_{\partial\Omega}$ vérifient l'équation intégrale :

$$\boxed{I_1(\boldsymbol{x}, \overset{\star}{u}) - I_2(\boldsymbol{x}, \overset{\star}{q}) = \overset{\star}{F}(\boldsymbol{x}) - J_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}) + J_2(\boldsymbol{x}, q; \boldsymbol{\theta})} \tag{12.28}$$

avec :

$$J_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega} D_{rj} u(\boldsymbol{y}) [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \tag{12.29}$$

$$J_2(\boldsymbol{x}, q; \boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y}) \left\{ [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]] G_{,r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) D_r \theta_r(\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \tag{12.30}$$

$$\begin{aligned} \overset{\star}{F}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\eta}) = &\int_\Omega b_{,\eta}(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y + \theta_j(\boldsymbol{x}) \int_\Omega b_{,j}(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y \\ &+ \int_{\partial\Omega} b(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) [[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]] n_j(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{12.31}$$

Ce résultat, vrai pour tout point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, définit une équation intégrale de frontière (quand $\boldsymbol{x}$ est pris sur $\partial\Omega$) ou une représentation intégrale de $\overset{\star}{u}(\boldsymbol{x};\eta)$ (quand $\boldsymbol{x}$ est pris intérieur à Ω). L'équation intégrale est faiblement singulière sous réserve que u et $\boldsymbol{\theta}$ soient de régularités respectives $C^{0,\alpha}$ et $C^{0,1}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. On vérifie sans peine que le fait d'utiliser comme point de départ l'équation intégrale régularisée (12.14) assure l'intégrabilité de tous les termes apparaissant tant dans le résultat final (12.28) que dans les étapes nécessaires à sa démonstration, sous réserve d'une régularité minimale des champs $u, \boldsymbol{\theta}$. L'utilisation de l'intégration par parties n'est pas indispensable ; elle permet seulement d'exprimer J_1 sous une forme (12.29) plus compacte.

NATURE DU SECOND MEMBRE DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DÉRIVÉE. Il peut sembler curieux que le problème du calcul des valeurs surfaciques $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{q})$ fasse intervenir d'une part des conditions aux limites sur $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{q})$, d'autre part un second membre connu, formé d'intégrales de surface, que l'on pourrait également interpréter au premier abord comme provenant de conditions aux limites. En fait, ce second membre doit être interprété comme un terme de source. Pour le voir, on remarque que :

$$\overset{\star}{q} = (\boldsymbol{\nabla} u.\boldsymbol{n})^\star = \boldsymbol{\nabla}\overset{\star}{u}.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\nabla} u.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\nabla} u.\overset{\star}{\boldsymbol{n}}$$

et que la dérivée matérielle $\overset{\star}{\boldsymbol{n}}$ (12.7) peut également s'écrire :

$$\overset{\star}{\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{n}.\boldsymbol{\theta}_{,n})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}.\nabla\boldsymbol{\theta} = (\operatorname{div}\boldsymbol{\theta} - \operatorname{div}_S\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta}$$

ce qui donne :

$$\overset{\star}{q} + (\operatorname{div}_S\boldsymbol{\theta})q = \overset{\star}{u}_{,n} - \boldsymbol{A}.\boldsymbol{n} \qquad\qquad \boldsymbol{A} = -(\operatorname{div}\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\nabla} u + \boldsymbol{\nabla} u.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\nabla} u$$

Le report de cette relation dans l'expression (12.16) de $\overset{\star}{I}_2$ donne :

$$\begin{aligned}\overset{\star}{I}_2(\boldsymbol{x}, q; \boldsymbol{\theta}) = &\int_{\partial\Omega} \overset{\star}{u}_{,n}(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\ &+ \int_{\partial\Omega} \{q(\boldsymbol{y})[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - A_j(\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

Une transformation analytique à base d'intégrations par parties (annexe 12.2) montre ensuite que :

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} A_j(\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y &= \int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left\{A_j(\boldsymbol{y}) - b(\boldsymbol{y})[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]\right\}_{,j} \\ &+ \int_{\partial\Omega} [[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]\left\{q(\boldsymbol{y})G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})b(\boldsymbol{y})n_j(\boldsymbol{y})\right\}\mathrm{d}S_y \\ &- \int_{\partial\Omega} [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]]G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})D_{rj}u_i(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

Si on reporte cette relation, ainsi que les expressions de $\overset{\star}{I}_1$ et $\overset{\star}{F}$, dans l'équation intégrale dérivée (12.18), on obtient, tous calculs faits, l'identité :

$$I_2(\boldsymbol{x}, \overset{\star}{u}_{,n}) - I_1(\boldsymbol{x}, \overset{\star}{u}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left\{(b(\boldsymbol{y})\theta_j(\boldsymbol{y}) - A_j(\boldsymbol{y}))_{,j} + b_{,\eta}(\boldsymbol{y})\right\}\mathrm{d}V_y \qquad (12.32)$$

L'interprétation du résultat ci-dessus est que l'équation intégrale dérivée (12.28), adéquatement reformulée, présente une structure mathématique similaire à (12.14) ; les inconnues étant ici $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{u}_{,n})$ et la source volumique égale à $\operatorname{div}(b\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{A}) + b_{,\eta}$. Dans le cas $b = 0$ (absence de source pour le problème initial), le terme ci-dessus se réduit à $-\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ (mais ne s'annule pas) ; l'intégrale de domaine correspondante se trouve alors être convertible analytiquement en intégrales de frontière et donne le terme $J_2 - J_1$, second membre de l'équation intégrale dérivée (12.28)).

12.4 Equation intégrale régularisée sur les variations secondes de l'état

Nous nous proposons maintenant d'étudier les équations intégrales qui régissent les variations secondes par rapport au domaine des champs élastiques (u, q) à la frontière.

Dérivée seconde dans une transformation de domaine. Supposons, afin de pouvoir considérer des dérivées secondes croisées, que la transformation géométrique $\boldsymbol{F}$ dépende de deux paramètres cinématiques η_1, η_2 :

$$\boldsymbol{X} \in \Omega(0) \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}; \eta_1, \eta_2)$$

Les vitesses de transformation $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\mu}$ par rapport à η_1, η_2 et l'"accélération" $\boldsymbol{\chi}$ sont introduites :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}; \eta_1, \eta_2) = \boldsymbol{F}_{,\eta_1}(\boldsymbol{X}; \eta_1, \eta_2) \\ &\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}; \eta_1, \eta_2) = \boldsymbol{F}_{,\eta_2}(\boldsymbol{X}; \eta_1, \eta_2) \qquad\qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}; \eta_1, \eta_2) \\ &\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{x}; \eta_1, \eta_2) = \boldsymbol{F}_{,\eta_1\eta_2}(\boldsymbol{X}; \eta_1, \eta_2) \end{aligned}$$

Soit alors $f(\boldsymbol{x}; \eta_1, \eta_2)$ un champ (scalaire ou tensoriel) suffisamment régulier. On note $\overset{\star}{f}$ et $\overset{\vee}{f}$ les dérivées lagrangiennes de f par rapport à η_1, η_2 respectivement et $\overset{\star\vee}{f}$ la dérivée lagrangienne seconde définie par :

$$\overset{\star\vee}{f}(\boldsymbol{x}; \eta_1, \eta_2) = g_{,\eta_1\eta_2}(\boldsymbol{X}; \eta_1, \eta_2) \qquad g(\boldsymbol{X}; \eta_1, \eta_2) = f(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}; \eta_1, \eta_2); \eta_1, \eta_2) \tag{12.33}$$

On note que, moyennant ces définitions, $\boldsymbol{\chi} = \overset{\vee}{\boldsymbol{\theta}} = \overset{\star}{\boldsymbol{\mu}}$ et $\overset{\star\vee}{f} = \overset{\vee\star}{f} = (\overset{\vee}{f})^{\star} = (\overset{\star}{f})^{\vee}$ (égalité des dérivées secondes croisées).

Equation intégrale dérivée au second ordre. On suppose, pour simplifier, l'absence de source ($b = 0$) et on part de l'équation intégrale (12.28) reliant les dérivées premières lagrangiennes de (u, q) :

$$I_1(\boldsymbol{x}, \overset{\star}{u}) - I_2(\boldsymbol{x}, \overset{\star}{q}) = -J_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}) + J_2(\boldsymbol{x}, q; \boldsymbol{\theta})$$

Elle est vraie pour tout domaine $\Omega = \Omega(\eta_1, \eta_2)$, toute solution (u, q) de l'équation de Poisson et toute dérivée lagrangienne $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{q})$ par rapport à η_1 de cette solution. On sait d'autre part que, compte tenu des définitions introduites, prendre la dérivée seconde

croisée de l'équation intégrale initiale (12.14) par rapport à η_1, η_2 équivaut à prendre la dérivée de l'équation ci-dessus par rapport à η_2, calcul que nous présentons maintenant.

Tout d'abord, la dérivée du premier membre est immédiatement donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta_2}\left\{I_1(\boldsymbol{x},\overset{\star}{u}) - I_2(\boldsymbol{x},\overset{\star}{q})\right\} = I_1(\boldsymbol{x},\overset{\star\vee}{u}) - I_2(\boldsymbol{x},\overset{\star\vee}{q}) + J_1(\boldsymbol{x},\overset{\star}{q},\boldsymbol{\mu}) - J_2(\boldsymbol{x},\overset{\star}{u},\boldsymbol{\mu}) \tag{12.34}$$

En effet, ce résultat n'est qu'une transposition, (u, q) devenant $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{q})$, de la dérivée du premier membre de (12.28). Il reste donc à calculer l'expression des dérivées $\overset{\vee}{J}_1, \overset{\vee}{J}_2$ de J_1, J_2 par rapport à η_2. La dérivée lagrangienne $\overset{\vee}{J}_2$ est donnée, à partir de la formule (12.10) et compte tenu de la linéarité de J_2 par rapport à q et $\boldsymbol{\theta}$, par :

$$\overset{\vee}{J}_2(\boldsymbol{x}, q, \boldsymbol{\theta}) = J_2(\boldsymbol{x}, \overset{\vee}{q}, \boldsymbol{\theta}) + J_2(\boldsymbol{x}, q, \boldsymbol{\chi}) + K_2(\boldsymbol{x}, q; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}) \tag{12.35}$$

avec, tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
&K_2(\boldsymbol{x}, q; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}) \\
&= \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y}) G^k_{,ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})[[\theta_i(\boldsymbol{y}) - \theta_i(\boldsymbol{x})]][[\mu_j(y) - \mu_j(x)]]\,\mathrm{d}S_y \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left\{[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]] D_i\mu_i(\boldsymbol{y}) + [[\mu_j(y) - \mu_j(x)]] D_i\theta_i(\boldsymbol{y})\right\}\mathrm{d}S_y \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} q(\boldsymbol{y}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\left\{n_i n_j D_k\mu_i D_k\theta_j - D_j\mu_k D_k\theta_j + D_j\theta_j D_k\mu_k\right\}(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned} \tag{12.36}$$

De même, la dérivée matérielle de $J_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta})$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\overset{\vee}{J}_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}) &= J_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\chi}) \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} [[\theta_i(\boldsymbol{y}) - \theta_i(\boldsymbol{x})]] G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\{(D_{ij}u)^{\vee}(\boldsymbol{y}) + D_{ij}u(\boldsymbol{y}) D_k\mu_k(\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}S_y \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} [[\theta_i(\boldsymbol{y}) - \theta_i(\boldsymbol{x})]][[\mu_k(y) - \mu_k(x)]] G_{,jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) D_{ij}u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}$$

On montre (éq. (12.54), annexe 12.3) que :

$$(D_{ij}f)^{\star} = D_{ij}\overset{\star}{f} + D_j\theta D_{ki}f + D_i\theta_k D_{jk}f$$

ce qui entraîne :

$$\overset{\vee}{J}_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}) = J_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\chi}) + J_1(\boldsymbol{x}, \overset{\vee}{u}; \boldsymbol{\theta}) + K_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}) \tag{12.37}$$

avec :

$$\begin{aligned}
&K_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}) \\
&= \int_{\partial\Omega} [[\theta_i(\boldsymbol{y}) - \theta_i(\boldsymbol{x})]]\left\{[[\mu_k(y) - \mu_k(x)]] G_{,jk}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + D_k\mu_k(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\} D_{ij}u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} [[\theta_i(\boldsymbol{y}) - \theta_i(\boldsymbol{x})]]\left\{D_j\mu_k D_{ki}u + D_i\mu_k D_{jk}u\right\}(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned} \tag{12.38}$$

Equation intégrale dérivée au second ordre. Si le potentiel u et le flux q vérifient l'équation intégrale (12.14) pour le domaine $\Omega = \Omega(\eta)$, toute perturbation continue de cet état associée à une transformation géométrique $\boldsymbol{F}(\cdot,\eta)$ (de vitesse de transformation $\boldsymbol{\theta}$ de régularité $C^{0,1}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$) et une variation de source $b(\cdot,\eta)$ continues est telle que les dérivées secondes croisées $(\overset{\star\vee}{u}, \overset{\star\vee}{q})\,|_{\partial\Omega}$ vérifient l'équation intégrale :

$$
\begin{aligned}
&I_1(\boldsymbol{x}, \overset{\star\vee}{u}) - I_2(\boldsymbol{x}, \overset{\star\vee}{q}) \\
&= J_2(\boldsymbol{x}, \overset{\star}{q}; \boldsymbol{\mu}) + J_2(\boldsymbol{x}, \overset{\vee}{q}; \boldsymbol{\theta}) - J_1(\boldsymbol{x}, \overset{\star}{u}; \boldsymbol{\mu}) - J_1(\boldsymbol{x}, \overset{\vee}{u}; \boldsymbol{\theta}) \\
&\quad + J_2(\boldsymbol{x}, q; \boldsymbol{\chi}) - J_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\chi}) + K_2(\boldsymbol{x}, q; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}) - K_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})
\end{aligned}
\tag{12.39}
$$

où J_1, J_2, K_1, K_2 sont donnés respectivement par les équations (12.29), (12.30), (12.38) et (12.36). Ce résultat, vrai pour tout point $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, définit une équation intégrale de frontière (quand $\boldsymbol{x}$ est pris sur $\partial\Omega$) ou une représentation intégrale de $\overset{\star\vee}{u}$ (quand $\boldsymbol{x}$ est pris intérieur à Ω). L'équation intégrale est faiblement singulière sous réserve que u et $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})$ soient de régularités respectives $C^{0,\alpha}$ et $C^{0,1}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$.

Caractère symétrique en $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}$ de l'équation intégrale (12.39). Le second membre de l'équation intégrale (12.39) est symétrique en $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})$, bien que ce ne soit pas entièrement apparent. En effet, la symétrie par rapport à $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})$ de $J_2(\boldsymbol{x}, \overset{\star}{q}; \boldsymbol{\mu}) + J_2(\boldsymbol{x}, \overset{\vee}{q}; \boldsymbol{\theta}) - J_1(\boldsymbol{x}, \overset{\star}{u}; \boldsymbol{\mu}) - J_1(\boldsymbol{x}, \overset{\vee}{u}; \boldsymbol{\theta})$ apparaît clairement au vu des équations (12.29)–(12.30) ; de même, $K_2(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})$ est également symétrique par rapport à $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})$, au vu de l'équation (12.36), ainsi que $J_2(\boldsymbol{x}, q; \boldsymbol{\chi}) - J_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\chi})$ puisque $\boldsymbol{\chi} = \overset{\vee}{\boldsymbol{\theta}} = \overset{\star}{\boldsymbol{\mu}}$. En revanche, le caractère symétrique de $K_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})$ n'est pas apparent. Pour l'établir, on montre en annexe 12.4 que K_1 admet aussi l'expression :

$$
\begin{aligned}
&K_1(\boldsymbol{x}, u; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}) \\
&= \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] n_j(\boldsymbol{y}) (G_{,j})^{\star\vee}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] \left\{ (G_{,j})^{\star}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) D_{jk}\mu_j(\boldsymbol{y}) + (G_{,j})^{\vee}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) D_{jk}\theta_k(\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) d_j(\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
d_j = n_i \, &(D_j\theta_i D_k\mu_k + D_j\mu_i D_k\theta_k - D_j\mu_k D_k\theta_i - D_j\theta_k D_k\mu_i) \\
&+ n_j \, (D_k\theta_i D_i\mu_k - D_i\theta_i D_k\mu_k)
\end{aligned}
$$

qui est symétrique en $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}$.

12.5 Commentaires concernant les équations intégrales dérivées

L'équation intégrale dérivée au premier ordre (12.28) ne définit pas, pour une vitesse de transformation donnée $\boldsymbol{\theta}$, une paire unique $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{q})$. Pour ce faire, il faut en plus préciser comment les conditions aux limites associées au problème aux limites évoluent dans la transformation de domaine. Le plus simple est de supposer qu'un changement de domaine donné est décrit à l'aide d'une transformation $\boldsymbol{F}(\cdot;\eta)$ choisie[2] de sorte que les portions S_u, S_{T} de $\partial\Omega$ soient également des surfaces matérielles :

$$S_u(\eta) = \boldsymbol{F}(S_u;\eta) \qquad S_{\mathrm{T}}(\eta) = \boldsymbol{F}(S_{\mathrm{T}};\eta)$$

Dans ce cas, $u, \overset{\star}{u}$ et $q, \overset{\star}{q}$ sont connus ou inconnus sur les mêmes portions de $\partial\Omega$. Alors $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{q})$ sont des formes linéaires en $\boldsymbol{\theta}$, à conditions que les conditions aux limites correspondantes soient elles-mêmes linéaires en $\boldsymbol{\theta}$. Ce type de commentaire vaut également pour l'équation intégrale dérivée au second ordre (12.39) ; celle ci ne définit pas, pour des $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\chi}$ donnés, une paire unique $(\overset{\star\vee}{u}, \overset{\star\vee}{q})$.

Les paires (u,q), $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{q})$ et $(\overset{\star\vee}{u}, \overset{\star\vee}{q})$, inconnues respectives des équations intégrales (12.14), (12.28) et (12.39), sont gouvernées par les mêmes opérateurs intégraux. Plus précisément, si on choisit $\boldsymbol{F}(\cdot;\eta)$ de manière à ce que les surfaces S_u, S_{T} soient matérielles, les valeurs de (u,q), $(\overset{\star}{u}, \overset{\star}{q})$ et $(\overset{\star\vee}{u}, \overset{\star\vee}{q})$ non prescrites par les mêmes conditions aux limites sont gouvernées par le même opérateur intégral. Ceci est d'une grande importance d'un point de vue pratique : l'opérateur intégral discrétisé, assemblé et factorisé pour le calcul numérique de u, q par (12.14), est ensuite réutilisé sous forme factorisée pour la résolution numérique de (12.28), (12.39). Les dérivées premières et secondes de l'état (u,q) sont donc calculables au prix de la construction des seconds membres de (12.28) pour tout $\boldsymbol{\theta}$ et de (12.39) pour toute paire $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu})$, suivie de la résolution de systèmes linéaires triangulaires. Ceci représente un coût de calcul raisonnable, comparé à celui nécessaire pour une résolution de l'équation intégrale initiale (12.14).

La définition d'une dérivée matérielle du second ordre soulève quelques difficultés. Il peut par exemple sembler naturel de considérer l'action *successive* de deux transformations géométriques, chacune associée à un paramètre cinématique η_1, η_2 :

$$\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}^1(\boldsymbol{Y};\eta_1) \to \boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}^2(\boldsymbol{z};\eta_2)$$

les vitesses de transformation $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}$ étant associées respectivement à $\boldsymbol{F}^1, \boldsymbol{F}^2$ selon (12.2). Mais alors, une dérivation matérielle dans la transformation $\boldsymbol{F}^2$ suivie par une dérivation du résultat dans la transformation $\boldsymbol{F}^2$ donnerait en général $\overset{\vee}{\boldsymbol{\theta}} \neq \overset{\star}{\boldsymbol{\mu}}$, $\overset{\star\vee}{f} \neq \overset{\vee\star}{f}$, $\overset{\star\vee}{J} \neq \overset{\vee\star}{J}$. Une telle approche, d'apparence naturelle, peut donc s'avérer inadéquate. Cette particularité est liée au fait qu'en général la composition de deux transformations ne commute pas :

$$\boldsymbol{F}^2(\boldsymbol{F}^1(\boldsymbol{Y},\eta_1),\eta_2) \neq \boldsymbol{F}^1(\boldsymbol{F}^2(\boldsymbol{Y},\eta_2),\eta_1)$$

[2]En effet, un changement de domaine donné peut être décrit à l'aide d'une infinité de transformations $\mathbf{F}$ différentes.

La définition (12.33) n'est pas ambigue de ce point de vue car elle porte sur *une* transformation dépendant de deux (ou, ce qui est pareil, d'un nombre fini de) paramètres. Cette approche est en particulier adaptée aux problèmes de calcul de sensibilités au second ordre par rapport à un nombre fini de variables de conception rencontrés en optimisation de forme.

Une autre approche, proposée par exemple par Simon [7], la *dérivée par rapport au domaine DJ* d'une fonctionnelle $J(\Omega)$ dépendant du domaine Ω est définie à partir de la considération de petites perturbations $\boldsymbol{\theta}$ du domaine Ω, sans référence à des paramètres cinématiques :

$$\boldsymbol{y} \in \Omega \to \boldsymbol{y} + \delta\boldsymbol{y} \in \Omega + \delta\Omega \qquad \delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{y})$$

où $\boldsymbol{\theta}$ appartient à un espace fonctionnel $\mathcal{V}$ de dimension infinie. Alors DJ est l'opérateur linéaire en $\boldsymbol{\theta}$ tel que :

$$\langle DJ(\Omega), \boldsymbol{\theta} \rangle = J(\Omega + \boldsymbol{\theta}) - J(\Omega) + o(|\boldsymbol{\theta}|_{\mathcal{V}}) \tag{12.40}$$

Dans le cas d'intégrales de surface, il s'avère, comme attendu, que la formule (12.10), valable pour des surfaces transportées selon (12.1) (et donc dépendant d'un (nombre fini de) paramètre(s) cinématique(s)), est égale à la dérivée de domaine appliquée à une petite variation $\boldsymbol{\theta} dp$ de Ω (dérivée directionnelle) $\langle DJ(\Omega), \boldsymbol{\theta} \rangle dp$ de J :

$$J(\Omega + \boldsymbol{\theta} dp) - J(\Omega) = \overset{\star}{J} dp + o(dp)$$

Il n'en est plus ainsi au second ordre. La *dérivée seconde par rapport au domaine* $D^2J(\Omega)$ (Simon [7]) repose sur des perturbations de Ω de la forme :

$$\boldsymbol{y} \in \Omega \to \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{y})$$

et est donc définie comme une forme bilinéaire sur $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}$ telle que :

$$\langle \boldsymbol{\mu}, D^2J(\Omega), \boldsymbol{\theta} \rangle = J(\Omega + (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\mu})) - J(\Omega) - \overset{\star}{J}(\Omega; \boldsymbol{\theta}) - \overset{\vee}{J}(\Omega; \boldsymbol{\mu}) + o(|\boldsymbol{\theta}|^2_{\mathcal{V}}, |\boldsymbol{\mu}|^2_{\mathcal{V}}) \tag{12.41}$$

pour $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}$ petits, suivant la définition générale de la seconde variation d'une fonctionnelle. En revanche, la définition (12.1) repose sur des perturbations de Ω de la forme :

$$\boldsymbol{y} \in \Omega_{\boldsymbol{p}} \to \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{p}) \delta p_1 + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{p}) \delta p_2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{p}) \delta p_1 \delta p_2$$

Ainsi, la dérivée matérielle seconde ne coïncide pas en général avec la valeur fournie par la dérivée seconde par rapport au domaine, sauf pour le cas particulier de transformations géométriques $\boldsymbol{F}(\cdot; \eta_1, \eta_2)$ telles que $\boldsymbol{\chi} = 0$:

$$\langle \boldsymbol{\mu}, D^2J(\Omega), \boldsymbol{\theta} \rangle - \overset{\star\vee}{J} = \int_S \mathrm{div}_S \boldsymbol{\chi} \, \mathrm{d}S$$

De même, remarquons que, puisque $\Omega + (\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\mu}) \neq (\Omega + \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\mu})$, la définition (12.41) ne résulte pas de deux dérivations successives.

Pour ce qui est des résultats de ce chapitre, l'équation intégrale dérivée au premier ordre (12.28) peut être considérée comme gouvernant la dérivée de l'état élastique par rapport au domaine (au sens de Simon), sans référence à un paramètre cinématique. En revanche, l'interprétation de l'équation dérivée au second ordre (12.39) demande plus de prudence en raison de la différence fondamentale, que nous avons tenté d'expliquer, entre dérivée matérielle seconde et dérivée seconde par rapport au domaine.

12.6 Discrétisation par éléments de frontière

REPRÉSENTATION DE SURFACES VARIABLES. Les représentations usuelles de surfaces au moyen d'éléments de frontière discutées au chapitre 3 reposent sur l'interpolation de N nœuds $\boldsymbol{y}^k$ $(1 \leq k \leq N)$ à l'aide de N fonctions de forme $N^k(\boldsymbol{\xi})$:

$$\boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{N} N^k(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{y}^k \qquad\qquad (\boldsymbol{\xi} \in E_0) \tag{12.42}$$

et on voit donc que, pour un choix fixé des fonctions de forme, la surface $\partial\Omega$ est définie par la donnée des nœuds. Quand la frontière $\partial\Omega$ est variable, il est donc logique de piloter son évolution à l'aide des nœuds, c'est-à-dire de représenter la surface variable par (12.42) avec des nœuds évoluant selon une transformation géométrique donnée :

$$\boldsymbol{y}^k = F(\boldsymbol{Y}^k; \boldsymbol{\eta}) \tag{12.43}$$

$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ étant le vecteur des paramètres cinématiques. Ainsi, pour deux paramètres cinématiques génériques η_1, η_2, les vitesses de transformation discrétisées $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}$ et l'accélération $\boldsymbol{\chi}$ associées à (12.42)–(12.43) sont données par :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{y}) &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{,\eta_1}(\boldsymbol{Y}_k; \boldsymbol{\eta}) N_k(\boldsymbol{\xi}) \\
\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{y}) &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{,\eta_2}(\boldsymbol{Y}_k; \boldsymbol{\eta}) N_k(\boldsymbol{\xi}) \\
\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{y}) &= \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{,\eta_1\eta_2}(\boldsymbol{Y}_k; \boldsymbol{\eta}) N_k(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}$$

c'est-à-dire des interpolations de type (12.42). On note que cette méthode d'interpolation garantit la continuité $C^{0,1}$ de $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\chi}$ sur la frontière.

STRUCTURE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINEAIRES. La discrétisation des équations intégrales (12.14), (12.28), et (12.39) selon la méthode du chapitre 3 conduit, en l'absence de sources, à des systèmes linéaires de la forme :

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{A}]\,\{\boldsymbol{u}\} + [\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{q}\} &= \{\boldsymbol{0}\} \\
[\boldsymbol{A}]\,\{\overset{\star}{\boldsymbol{u}}\} + [\boldsymbol{B}]\{\overset{\star}{\boldsymbol{q}}\} &= \{\boldsymbol{f}^1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}; \boldsymbol{\theta})\} \\
[\boldsymbol{A}]\,\{\overset{\star\vee}{\boldsymbol{u}}\} + [\boldsymbol{B}]\{\overset{\star\vee}{\boldsymbol{q}}\} &= \{\boldsymbol{f}^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{q}, \overset{\star}{\boldsymbol{u}}, \overset{\star}{\boldsymbol{q}}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\chi})\}
\end{aligned}$$

Les mêmes matrices $[\boldsymbol{A}], [\boldsymbol{B}]$ apparaissent au premier membre de chacune des trois équations. Après répartition des colonnes associées aux degrés de liberté connus et inconnus, les systèmes d'équations prennent la forme :

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{K}]\,\{\boldsymbol{v}\} &= \{\boldsymbol{g}^0\} \\
[\boldsymbol{K}]\,\{\overset{\star}{\boldsymbol{v}}\} &= \{\boldsymbol{g}^1(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{\theta})\} \\
[\boldsymbol{K}]\,\{\overset{\star\vee}{\boldsymbol{v}}\} &= \{\boldsymbol{g}^2(\boldsymbol{v}, \overset{\star}{\boldsymbol{v}}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\chi})\}
\end{aligned}$$

où $\boldsymbol{v}$, $\overset{\star}{\boldsymbol{v}}$ et $\overset{\star\vee}{\boldsymbol{v}}$ regroupent les degrés de liberté inconnus de l'état et ses dérivées. Ces systèmes sont gouvernés par le même opérateur (matriciel) $[\boldsymbol{K}]$. Cela n'est toutefois vrai qu'à condition que la description analytique $\boldsymbol{F}(;\boldsymbol{\eta})$ de la transformation de domaine soit choisie de manière à ce que les surfaces $\boldsymbol{F}(S_u;\boldsymbol{\eta})$ et $\boldsymbol{F}(S_{\mathrm{T}};\boldsymbol{\eta})$ obtenues par transport de S_u et S_{T} supportent respectivement des potentiels et flux imposés pour les problèmes aux limites posés sur $\boldsymbol{F}(\Omega;\boldsymbol{\eta})$.

Discrétisation des opérateurs différentiels tangentiels. Les formules (A.13), (A.14) et (A.17) de l'annexe A donnent les expressions des opérateurs $\boldsymbol{\nabla}_S$, div_S et D_{ij} calculées à l'aide d'une représentation paramétrique. Elles sont donc applicables au paramétrage de la surface et des inconnues par fonctions de forme :

$$\boldsymbol{\nabla}_S f = \sum_{k=1}^{N} \left\{ N_{k,\alpha} g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\beta \right\} (\boldsymbol{\xi}) f^k \tag{12.44}$$

$$\mathrm{div}_S \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{N} \left\{ N_{k,\alpha} g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\beta \right\} (\boldsymbol{\xi}).\boldsymbol{u}^k \tag{12.45}$$

$$D_{ij} f \,\mathrm{d}S_y = \varepsilon_{ijk} \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{e}_k . \left\{ N_{k,1} \boldsymbol{a}^2 - N_{k,2} \boldsymbol{a}_1 \right\} (\boldsymbol{\xi}) f^k \,\mathrm{d}\xi \tag{12.46}$$

où $\boldsymbol{a}_{1,2}$ désignent les vecteurs de la base naturelle associée au paramétrage (12.42) de l'élément et $g^{\alpha\beta}$ sont les coefficients de la représentation deux fois contravariante du tenseur métrique, vérifiant donc $g^{\alpha\gamma}(\boldsymbol{a}_\gamma.\boldsymbol{a}_\beta) = \delta^\alpha_\beta$. Les formules (12.44), (12.45) et (12.46) permettent la discrétisation des opérateurs différentiels tangentiels qui apparaissent dans les équations intégrales dérivées.

Intégrations élémentaires singulières. Les intégrations singulières se produisent quand E contient le point de collocation point $\boldsymbol{x}$. Une intégrale élémentaire singulière typique, qui intervient pour la discrétisation de (12.39), est :

$$I^s = \int_E [[\theta_r(\boldsymbol{y}) - \theta_r(\boldsymbol{x})]][[\mu_q(y) - \mu_q(x)]] G_{,ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) D_{ij} u \,\mathrm{d}S_y \tag{12.47}$$

La technique de passage en coordonnées polaires sur l'élément de référence exposée au chapitre 3 peut alors être utilisée ; il faut notamment utiliser les "fonctions de forme réduites" $\hat{N}(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta})$ de manière à avoir :

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{x}) = \rho \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{y}^k_{,\eta_1} \hat{N}_k(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta})$$

$$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}) = \rho \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{y}^k_{,\eta_1} \hat{N}_k(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta})$$

Compte tenu de la singularité en $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-3}$ de $G_{,ij}$, on obtient ainsi une intégrale régulière dans le système (ρ,α).

12.7 Exemples

SENSIBILITÉ DE FRÉQUENCES PROPRES (BURCZINSKI ET FEDELINSKI [2]). Les auteurs traitent comme exemple numérique de validation le cas d'une plaque (élasticité en déformations planes), l'objectif étant de maximiser la première fréquence propre de vibration ($\omega = 3116\,Hz$ initialement), en jouant sur la forme du côté inférieur AB. Les variables de conception sont $\eta_i = y_2^i$, ordonnées des nœuds de ce segment. L'aire de

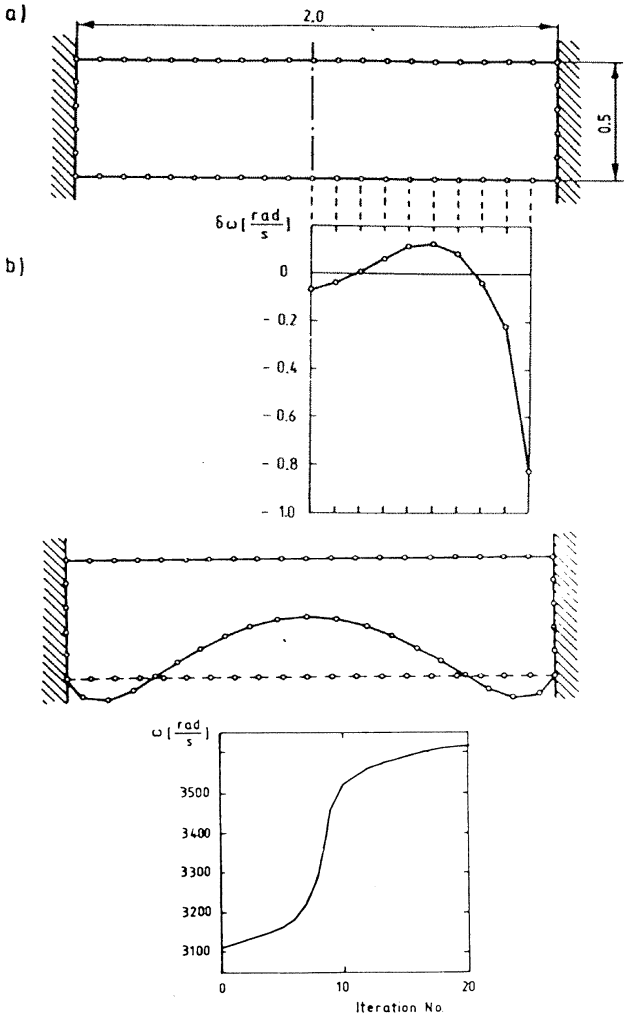

Figure 12.2: Analyse de sensibilité de fréquences propres de vibration (d'après [2]) : (a) structure initiale ; (b) dérivées premières de la première fréquence propre ; (c) forme modifiée de la structure ; (d) évolution de la première fréquence propre au cours de l'optimisation (20 itérations au total).

la plaque modifiée ne doit pas dépasser une certaine borne supérieure. La figure 12.2 reproduit les résultats obtenus ; la forme finale, obtenue en 20 itérations, correspond à $\omega_{final} \approx 3600\, Hz$.

Optimisation de forme en élastoplasticité (Wei et coll. [9]). Une plaque carrée (côté $2L = 10m$) est percée en son centre d'un trou de forme elliptique (grand axe $a = 1m$, petit axe b à déterminer). Le matériau constitutif est élasto-viscoplastique. Des forces de tractions croissantes $\tau \boldsymbol{e}_1, 0.75\tau \boldsymbol{e}_2$ sont appliquées respectivement sur les côtés $y_1 = \pm L$, $y_2 = \pm L$. Il s'agit de trouver la valeur de $\beta = b/a$ qui rende la contrainte circonférentielle finale (en fin de chargement) le long du trou aussi uniforme que possible ; l'unique paramètre de conception est donc β ou b. La solution en élasticité linéaire serait simplement $\beta = 0.75$. La figure 12.3 montre les profils de contraintes circonférentielles en fonction de $\beta = b/a$, au temps de chargement final, pour le matériau à comportement non-linéaire ; l'optimum (profil plat) est trouvé pour $\beta \approx 0.69$.

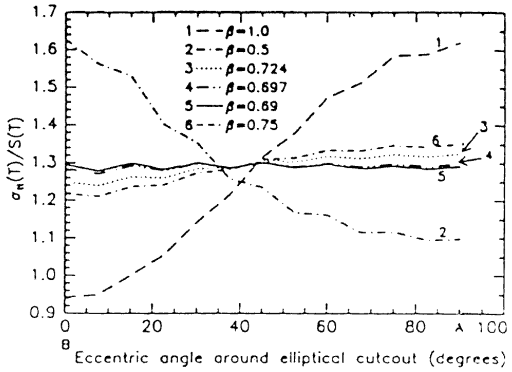

Figure 12.3: Profils de contraintes circonférentielles en fonction de la coordonnée angulaire le long du trou, pour plusieurs valeurs du rapport $\beta = b/a$ des axes, au temps de chargement final.

Calcul de taux de restitution d'énergie en Mécanique de la rupture. En Mécanique de la rupture, une grandeur importante est le *taux de restitution d'énergie* G, dérivée de l'énergie potentielle à l'équilibre W dans une extension de la fissure Γ : c'est l'énergie dissipée par unité d'aire de fissure créée dans le solide. Mathématiquement défini comme la dérivée de W par rapport au domaine pour les transformations géométriques représentant une extension de la fissure, G est fonction du point sur le front de fissure. Le calcul numérique de G est donc une application possible de l'équation intégrale dérivée, dont un aperçu plus détaillé est donné en section 13.7.

Annexe 12.1 – Dérivée de l'élément d'aire

Soit S_η une surface matérielle (au sens de (12.1)), et désignons par $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ un couple de vecteurs *matériels* attachés à un point *matériel* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y}; \eta)$, supposés unitaires et orthogonaux pour une valeur particulière η_0 du pseudo-temps, et situés dans le plan tangent à S_η en $\boldsymbol{y}(\eta)$ pour tout η dans un voisinage de η_0. Pour tout η ainsi choisi, la normale unitaire à S_η en $\boldsymbol{y}$ est donc donnée par :

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}; \eta) = \frac{1}{|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}|}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$$

De plus, l'élément différentiel d'aire $\mathrm{d}S$ en $\boldsymbol{y}$ est proportionnel à la norme $|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}|$, de sorte que :

$$\overset{\star}{\widehat{\mathrm{d}S}} = |\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}|^\star \, \mathrm{d}S \tag{12.48}$$

La dérivée matérielle du produit vectoriel $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ est maintenant calculée pour la valeur particulière η_0 de η, à l'aide de (12.5) :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})^\star &= (\boldsymbol{\nabla\theta}.\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{\nabla\theta}.\boldsymbol{b}) \\ &= [(\boldsymbol{\nabla\theta})_{aa} + (\boldsymbol{\nabla\theta})_{bb}]\boldsymbol{n} - (\boldsymbol{\nabla\theta})_{na}\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{\nabla\theta})_{nb}\boldsymbol{b} \\ &= (\mathrm{div}_S\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}.\boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{\theta}\end{aligned}$$

où on a tenu compte du fait que $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{n})$ est un trièdre orthonormé pour $\eta = \eta_0$ (les gradient et divergence surfaciques sont définis en annexe A). De plus, on a :

$$\| \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \|^\star = \frac{\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}}{\| \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \|}.(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})^\star = \boldsymbol{n}.(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})^\star = \mathrm{div}_S\boldsymbol{\theta}$$

Il en résulte les expressions donnant les dérivées matérielles de la normale unitaire $\boldsymbol{n}$ et de l'élément différentiel d'aire $\mathrm{d}S$ en $\boldsymbol{y} \in S_\eta$:

$$\overset{\star}{\mathrm{d}S} = \mathrm{div}_S\boldsymbol{\theta}\,\mathrm{d}S = D_r\theta_r\,\mathrm{d}S \qquad \overset{\star}{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{n}.\boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{\theta} = -n_rD_j\theta_r\boldsymbol{e}_j \tag{12.49}$$

Annexe 12.2 – Preuve de l'identité (4.61)

Elle repose sur une série d'intégrations par parties. D'abord, la formule classique de la divergence donne :

$$\int_{\partial\Omega} A_i(\boldsymbol{y})n_i(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y = \int_\Omega \{G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})A_{i,i}(\boldsymbol{y}) + G_{,i}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})A_i(\boldsymbol{y})\}\,\mathrm{d}V_y \tag{12.50}$$

Ensuite, d'après la définition (5.24) de $\boldsymbol{A}$, la deuxième intégrale de l'équation ci-dessus s'écrit :

$$I = \int_\Omega G_{,i}\left\{u_{,j}\theta_{j,i} - u_{,i}\theta_{j,j} + \theta_{j,i}u_{,j}\right\}\,\mathrm{d}V \tag{12.51}$$

(on omet les arguments $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$). L'identité :

$$\int_\Omega (fg_{,i}h_{,j} - fg_{,j}h_{,i})\,\mathrm{d}V = \int_\Omega (gh_{,i}f_{,j} - gh_{,j}f_{,i})\,\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} fgD_{ij}h\,\mathrm{d}S$$

est une conséquence de la formule de la divergence et permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \{u_{,j}\theta_{j,i} - u_{,i}\theta_{j,j}\}\ \mathrm{d}V \\
&= \int_{\partial\Omega} D_{ij}u[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]G_{,i}\,\mathrm{d}S + \int_\Omega [[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]\,\{G_{,ij}u_{,i} - G_{,ii}u_{,j}\}\ \mathrm{d}V \\
&= \int_{\partial\Omega} D_{ij}u[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]G_{,i}\,\mathrm{d}S + \int_\Omega [[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]G_{,ij}u_{,i}\ \mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{12.52}$$

dans laquelle on a utilisé $\theta_{j,i}(\boldsymbol{y}) = [[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]_{,i}$ aux fins de régularisation, ainsi que l'équation d'équilibre $G_{,ii} = 0$ ($\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x}$). De plus, on a également :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \theta_{j,i}u_{,j}\ \mathrm{d}V \\
&= \int_{\partial\Omega} G_{,j}[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]q\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \{G_{,ij}u_{,i} + G_{,j}u_{,ii}\}\,[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]\ \mathrm{d}V \\
&= \int_{\partial\Omega} G_{,j}[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]q\,\mathrm{d}S + \int_\Omega \{G_{,j}b - G_{,ij}u_{,i}\}\,[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]\ \mathrm{d}V \\
&= \int_{\partial\Omega} \{q(\boldsymbol{y})G_{,j}[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]] + bG[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]n_j\}\ \mathrm{d}S \\
&\quad - \int_\Omega \{b_{,j}G + G_{,ij}u_{,i}\}\,[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]\ \mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{12.53}$$

en raison notamment de l'équation d'équilibre $u_{,ii} + b = 0$. Finalement, on reporte les équations (12.52-12.53) dans l'intégrale I, éq. (12.51), pour obtenir le résultat :

$$\begin{aligned}
I = &\int_{\partial\Omega} q[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]G_{,j}\,\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega} [[\theta_i(\boldsymbol{y}) - \theta_i(\boldsymbol{x})]\,D_{ij}u\,\mathrm{d}S \\
&+ \int_{\partial\Omega} bG[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]]n_j\,\mathrm{d}S - \int_\Omega G(b[[\theta_j(\boldsymbol{y}) - \theta_j(\boldsymbol{x})]])_{,j}\ \mathrm{d}V
\end{aligned}$$

dont le report dans (12.50) établit l'identité (4.61).

Annexe 12.3 – Expression de $(D_{ij}f)^\star$, $(D_if)^\star$, $(D_iu_i)^\star$

Expression de $(D_{ij}f)^\star$. Partant de la définition :

$$D_{ij}f = n_if_{,j} - n_jf_{,i}$$

et utilisant les relations (12.4), (12.7) écrites en composantes :

$$(f_{,i})^\star = \overset{\star}{f}_{,i} - f_{,j}\theta_{j,i} \qquad \overset{\star}{n}_i = -n_jD_i\theta_j$$

on a :

$$\begin{aligned}(D_{ij}f)^\star &= n_i(\overset{\star}{f}_{,j} - f_{,k}\theta_{k,j}) - n_k D_i\theta_k f_{,j} - n_j(\overset{\star}{f}_{,i} - f_{,k}\theta_{k,i}) + n_k D_j\theta_k f_{,i}\\ &= D_{ij}\overset{\star}{f} - f_{,k}D_{ij}\theta_k + n_k D_j\theta_k f_{,i} - n_k D_i\theta_k f_{,j}\\ &= D_{ij}\overset{\star}{f} - f_{,k}D_{ij}\theta_k + D_j\theta_k(n_k f_{,i} - n_i f_{,k}) + n_i D_j\theta_k f_{,k}\\ &\quad - D_i\theta_k(n_k f_{,j} - n_j f_{,k}) - n_j D_i\theta_k f_{,k}\\ &= D_{ij}\overset{\star}{f} - f_{,k}D_{ij}\theta_k + f_{,k}D_{ij}\theta_k + D_j\theta_k D_{ki}f + D_i\theta_k D_{jk}f\end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$(D_{ij}f)^\star = D_{ij}\overset{\star}{f} + D_j\theta_k D_{qr}f + D_r\theta_k D_{sq}f \tag{12.54}$$

EXPRESSION DE $(D_i f)^\star$. On remarque que :

$$-n_i D_{ij}f = n_j(n_j D_i f - n_i D_i f) = D_i f$$

puisque $\boldsymbol{\nabla}_S f.\boldsymbol{n} = 0$ par définition (A.4) du gradient tangentiel. Par conséquent, les équations (12.7) et (12.54) peuvent être combinées, pour obtenir :

$$(D_i f)^\star = -n_j(D_{ij}f)^\star - \overset{\star}{n}_j D_{ij}f = -n_j(D_{ij}f)^\star + n_k D_j\theta_k n_i D_j f$$

et donc l'expression recherchée :

$$(D_i f)^\star = D_i\overset{\star}{f} - D_i\theta_k D_k f + n_k D_j\theta_k n_i D_j f \tag{12.55}$$

EXPRESSION DE $(D_i u_i)^\star$. La formule (12.55) précédente appliquée à $f = u_i$ et sommée sur l'indice i donne, en composantes :

$$(D_i u_i)^\star = D_i\overset{\star}{u}_i - D_i\theta_k D_k u_i + n_k D_j\theta_k n_i D_j u_i \tag{12.56}$$

et, en notation intrinsèque :

$$(\mathrm{div}_S\boldsymbol{u})^\star = \mathrm{div}_S\overset{\star}{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{u} - \overset{\star}{\boldsymbol{n}}.(\boldsymbol{n}.\boldsymbol{\nabla}_S\boldsymbol{u}) \tag{12.57}$$

Annexe 12.4 – Expression symétrique de $K_1(x, u; \theta, \mu)$

Elle repose sur le fait que $J_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{\theta})$ est également donné par l'équation (12.25) :

$$\begin{aligned}J_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; \boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega} &[u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})]\\ &\{[[\theta_i(\boldsymbol{y}) - \theta_i(\boldsymbol{x})]]n_j(\boldsymbol{y})G_{,ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - D_{ij}\theta_i(\boldsymbol{y})G_{,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\}\ \mathrm{d}S_y\end{aligned}$$

qui est celle obtenue avant intégration par parties. Appliquons alors la formule (12.10) de dérivation lagrangienne à cette variante. Compte tenu de (12.6), (12.24), on a :

$$\begin{aligned}
\overset{\vee}{J}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\boldsymbol{\theta}) = &\int_{\partial\Omega} [\overset{\vee}{u}(\boldsymbol{y}) - \overset{\vee}{u}(\boldsymbol{x})][[\theta_i(\boldsymbol{y}) - \theta_i(\boldsymbol{x})]] n_j(\boldsymbol{y}) (G_{,j})^\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&- \int_{\partial\Omega} [\overset{\vee}{u}(\boldsymbol{y}) - \overset{\vee}{u}(\boldsymbol{x})] D_{ij}\theta_i(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&+ \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})][\chi_i(\boldsymbol{y}) - \chi_i(\boldsymbol{x})] n_j(\boldsymbol{y}) G_{,ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&- \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] (D_{ij}\theta_i)^\vee(\boldsymbol{y}) G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&+ \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})][[\theta_i(\boldsymbol{y}) - \theta_i(\boldsymbol{x})]] n_j(\boldsymbol{y}) (G_{,j})^\vee(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&+ \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})][[\theta_i(\boldsymbol{y}) - \theta_i(\boldsymbol{x})]] (G_{,j})^\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) D_{jk}\mu_k(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&- \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] D_{ij}\theta_i(\boldsymbol{y}) \left\{ G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) D_k\mu_k(\boldsymbol{y}) + G_{,j})^\vee(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\}\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après (12.54) :

$$(D_{ij}\theta_i)^\vee = D_{ij}\chi_i + D_j\theta_k D_{ki}\theta_i + D_i\theta_k D_{jk}\theta_i$$

ce qui conduit, après réarrangement des termes, au résultat :

$$\overset{\vee}{J}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\boldsymbol{\theta}) = J_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\boldsymbol{\chi}) + J_1(\boldsymbol{x},\overset{\vee}{\boldsymbol{u}};\boldsymbol{\theta}) + K_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u};\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\mu})$$

avec :

$$\begin{aligned}
K_1(\boldsymbol{x},u;\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\mu}) = &\int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] n_j(\boldsymbol{y}) (G_{,j})^{\star\vee}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&+ \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] (G_{,j})^\star(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) D_{jk}\mu_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&+ \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] (G_{,j})^\vee(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) D_{jk}\theta_k(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y \\
&- \int_{\partial\Omega} [u(\boldsymbol{y}) - u(\boldsymbol{x})] G_{,j}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) d_j(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
d_j = &\, n_i \left(D_j\theta_i D_k\mu_k + D_j\mu_i D_k\theta_k - D_j\mu_k D_k\theta_i - D_j\theta_k D_k\mu_i \right) \\
&+ n_j \left(D_k\theta_i D_i\mu_k - D_i\theta_i D_k\mu_k \right)
\end{aligned}$$

qui met en évidence le caractère symétrique de K_1 par rapport à $(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\mu})$. L'expression (12.38) de K_1, plus compacte, est toutefois préférable pour les applications.

Références bibliographiques

[1] BONNET, M. Regularized BIE formulations for first- and second-order shape sensitivity of elastic fields. *Computers and Structures*, **56**, 799–811 (1995).

[2] BURCZYŃSKI, T., FEDELINSKI, P. Shape sensitivity analysis of natural frequencies of structures using boundary elements. *Struct. Optim.*, **2**, 47–54 (1990).

[3] HAUG, E. J., CHOI, K. K., KOMKOV, V. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press (1986).

[4] MIALON, P. Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode θ. Bulletin EDF/DER série c vol. 3, Electricité de France (1987).

[5] PETRYK, H., MRÓZ, Z. Time derivatives of integrals and functionals defined on varying volume and surface domains. *Arch. Mech.*, **38**, 694–724 (1986).

[6] SALENCON, J. *Mécanique des milieux continus (vols. 1,2,3)*. Presses de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (2004).

[7] SIMON, J. Second variations for domain optimization problems. In F. Kappel, K. Kunisch, W. Schappacher (eds.), *Control theory of distributed parameter systems and applications.*, vol. 91 of *International Series of Numerical Mathematics*, pp. 361–378. Birkhäuser Verlag, Basel (1989).

[8] TIKHONOV, A. N., ARSENIN, V. Y. *Solutions to ill-posed problems*. Winston-Wiley, New York (1977).

[9] WEI, X., LEU, L. J., CHANDRA, A., MUKHERJEE, S. Shape optimization in elasticity and elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.*, **31**, 533–550 (1994).

Partie IV

Aspects complémentaires en mécanique des solides

13

Equations intégrales pour les solides élastiques fissurés

Les méthodes d'équations intégrales de frontière sont d'un emploi assez fréquent en mécanique de la rupture. Outre l'avantage du gain d'une dimension d'espace par rapport aux méthodes d'éléments finis, une meilleure précision est obtenue dans l'évaluation des grandeurs locales (par exemple, les facteurs d'intensité de contraintes) au voisinage du front de fissure. Enfin, pour la simulation numérique de trajets d'extension de fissures dans des situations tridimensionnelles, il est beaucoup plus facile de réactualiser le maillage en éléments de frontière d'une surface que le maillage en éléments finis d'un volume, le problème du remaillage étant généralement compliqué par la nécessité de transporter un raffinement de maillage au voisinage du front de fissure.

13.1 Inapplicabilité des équations intégrales en déplacements

On considère un solide élastique Ω de frontière extérieure S et contenant une fissure Γ. Les deux lèvres Γ^+, Γ^- de la fissure sont geométriquement identiques et munies de normales unitaires $\boldsymbol{n}^+$, $\boldsymbol{n}^-$ opposées et choisies de sorte que $\boldsymbol{n}^-$ soit orientée de S^- vers S^+ (ce choix d'orientation respecte notre convention habituelle suivant laquelle la normale est dirigée vers *l'extérieur du milieu matériel*) ; la surface $\Gamma = \Gamma^+ = \Gamma^-$ est supposée deux fois continûment différentiable par morceaux.

Considérons pour fixer les idées des efforts imposés sur toute la frontière extérieure : $S_{\mathrm{T}} = S$. Le déplacement $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ régnant dans le solide fissuré, en un point d'observation $\boldsymbol{x}$ intérieur à Ω, s'écrit :

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \int_S \left\{ u_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i^D(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y + \int_\Gamma \phi_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \qquad (13.1)$$

($\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{u}^+(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{u}^-(\boldsymbol{y})$: saut de déplacement à travers la fissure). Cette expression est obtenue en prenant la représentation (4.20) pour un solide borné contenant une

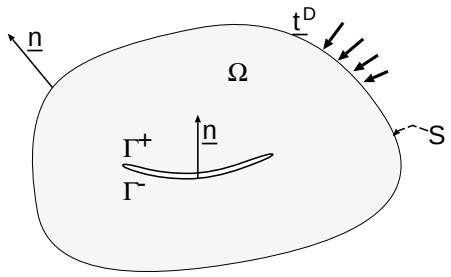

Figure 13.1: Solide élastique fissuré.

cavité infiniment mince limitée par les surfaces $\Gamma^{\pm}$; le vecteur contrainte de Kelvin T_i^k fait implicitement référence à la normale $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}^-$ extérieure à Ω sur Γ^-.

Considérons alors le déplacement $\hat{\boldsymbol{u}}$ créé *en l'absence de fissure* par l'application des efforts $\boldsymbol{t}^D$ sur S_{T} ; il est donné dans Ω par la représentation intégrale :

$$\hat{u}_k(\boldsymbol{x}) = \int_S \left\{ \hat{u}_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - t_i^D(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \tag{13.2}$$

De plus, $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{y})$ est continu à la traversée de la surface Γ. L'équation (13.2) est maintenant retranchée de (13.1), pour obtenir :

$$\Delta u_k(\boldsymbol{x}) = \int_S \Delta u_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \int_\Gamma \phi_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \tag{13.3}$$

où $\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \hat{\boldsymbol{u}}$ est la perturbation du déplacement induite par la présence de la fissure, pour un chargement extérieur $\boldsymbol{t}^D$ invariable. La formule ci-dessus est une équation linéaire homogène sur $\Delta\boldsymbol{u}$, et admet donc une infinité de solutions $\Delta\boldsymbol{u}$. Par contrecoup, l'équation (13.1) admet une infinité de solutions $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}} + \Delta\boldsymbol{u}$ et n'est donc pas exploitable. Cet argument s'étend sans peine à des conditions aux limites quelconques sur S.

Il existe ainsi deux types distincts de formulations intégrales pour des solides élastiques fissurés. Le premier (méthode de sous-structuration) consiste à décomposer Ω en deux sous-domaines fictifs, la frontière de séparation incluant la fissure, et permet d'utiliser les équations intégrales en déplacement mais conduit à résoudre deux problèmes élastiques couplés, dans l'esprit de la technique présentée en section 3.7. Le second (méthode des discontinuités de déplacement) évite ce couplage mais nécessite l'utilisation d'équations intégrales en traction similaires à celles présentées au chapitre 5[1].

Il faut préciser que, pour quelques situations géométriques particulières (par exemple pour le plan infini avec une fissure droite, cf. Snyder et Cruse [14]), des solutions élémentaires spéciales incorporant l'existence d'une fissure libre de contraintes sont connues, l'alternative précédente devenant alors sans objet.

[1] La discussion objet de cette section reprend en fait, en l'étendant à un domaine Ω borné, la remarque avancée au début du chapitre 5 qui motivait l'examen d'équations intégrales en traction.

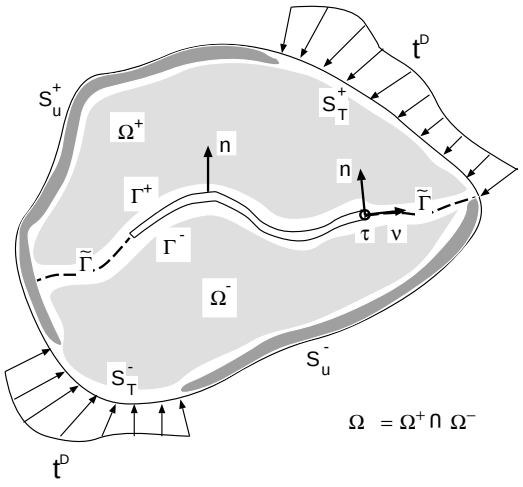

Figure 13.2: Solide élastique fissuré Ω: approche multirégion.

13.2 Méthode de sous-structuration

Elle consiste à décomposer le domaine élastique fissuré Ω en deux sous-domaines complémentaires Ω^+ et Ω^- fictifs, la surface de séparation étant construite en prolongeant la fissure Γ par une surface $\tilde{\Gamma}$ (figure 13.2). Le problème du solide fissuré est alors transformé en deux problèmes élastiques couplés sans fissure, avec les conditions aux limites et de continuité :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \boldsymbol{u} & = & \boldsymbol{u}^D & \text{sur } S_u^{\pm} \\ \boldsymbol{t} & = & \boldsymbol{t}^D & \text{sur } S_T^{\pm} \\ \boldsymbol{t} & = & 0 & \text{sur } \Gamma^{\pm} \end{array}\right. \qquad \text{pour chaque sous-domaine } \Omega^{\pm}$$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \boldsymbol{u}^+ & = & \boldsymbol{u}^- & \\ \boldsymbol{t}^+ & = & \boldsymbol{t}^- & \text{sur } \tilde{\Gamma} \end{array}\right. \qquad \text{continuité entre } \Omega^+ \text{ et } \Omega^- \tag{13.4}$$

Chaque sous-problème peut alors être formulé au moyen de l'équation intégrale (4.31). Cette approche présente l'avantage de pouvoir traiter les solides fissurés à l'aide de l'équation intégrale en déplacements usuelle, qui est la plus simple à mettre en œuvre. Par contre, elle oblige à résoudre deux problèmes couplés et introduit une nouvelle surface $\tilde{\Gamma}$, et donc des inconnues supplémentaires.

Fissure dans un plan de symétrie. Pour le cas particulier utile où il existe un plan de symétrie Π contenant la fissure Γ (qui doit donc notamment être plane) et où le chargement externe $\boldsymbol{t}^D$ est symétrique par rapport au plan Π, on ne résout que le sous-problème sur Ω^+ (ou Ω^-), et la condition de continuité $(13.4)_2$ est remplacée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{u}^+.\boldsymbol{n} & = & 0 \\ \boldsymbol{t}^+ - (\boldsymbol{t}^+.\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{sur } (\Pi \cap \Omega) - \Gamma \tag{13.5}$$

Cette technique reste applicable en cas de chargement externe non symétrique, en utilisant la méthode de décomposition en sous-problèmes exposée au chapitre 11 ; les conditions (13.5) à écrire sur le plan de symétrie doivent alors être modifiées.

13.3 Méthode des discontinuités de déplacement pour un solide non borné

Afin de présenter les caractéristiques essentielles de la méthode des discontinuités de déplacement sur un problème-modèle, le domaine élastique Ω est dans cette section supposé infini, sa frontière étant donc réduite à la fissure Γ. L'équilibre élastique de Ω créé par des efforts de contact donnés $\boldsymbol{T}^{\pm}$ appliqués sur les faces $\Gamma^{\pm}$ est considéré. Cette condition aux limites, peu physique en soi, résulte souvent d'une application du principe de superposition à un problème d'équilibre élastique avec fissure libre de contraintes et chargement donné à l'infini ou encore, plus généralement, au calcul de la perturbation induite par la présence d'une fissure d'un état d'équilibre connu du massif non fissuré.

On reprend l'idée de la décomposition de Ω en deux sous-domaines fictifs $\Omega^{\pm}$, la surface auxiliaire $\tilde{\Gamma}$ étant maintenant choisie de manière à prolonger Γ en une surface *fermée* C^2 qui réalise une partition de l'espace infini $\mathbb{R}^3$ en un domaine borné Ω^- intérieur à $\Gamma \cup \tilde{\Gamma}$ et son complémentaire non borné $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 - \Omega^-$, de normales unitaires respectives $\boldsymbol{n}^{\pm}$ opposées. Un problème élastique intérieur (posé sur Ω^-) et un problème élastique extérieur (posé sur Ω^+) sont simultanément considérés. Notant $\boldsymbol{u}^{\pm}, \boldsymbol{\sigma}^{\pm}$ les déplacements et contraintes élastiques sur $\Omega^{\pm}$, le problème de la fissure chargée et en milieu infini correspond aux conditions suivantes sur $\Gamma \cup \tilde{\Gamma}$ (efforts exercés sur les faces $\Gamma^{\pm}$ et continuité du déplacement et du vecteur contrainte à travers $\tilde{\Gamma}$) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n})^+ = \boldsymbol{T}^+ & (\text{sur } \Gamma^+) \\ (\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n})^- = \boldsymbol{T}^- & (\text{sur } \Gamma^-) \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{u}^+ = \boldsymbol{u}^- \\ (\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n})^+ = -(\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n})^- \end{array} \right. \quad (\text{sur } \tilde{\Gamma}) \tag{13.6}$$

On peut alors appliquer à chaque sous-domaine $\Omega^{\pm}$ pris séparément la formule de représentation intégrale régularisée (5.34) du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^{\pm}(\boldsymbol{x})$ en équilibre élastique, pour un point d'observation $\boldsymbol{x}$ situé sur Γ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma_{ij}^{\pm}(\boldsymbol{x}) = C_{ijk\ell} \int_{\Gamma} \left[D_{\ell b}^{\pm} u_a^{\pm}(\boldsymbol{y}) - D_{\ell b}^{\pm} u_a^{\pm}(\boldsymbol{x}) \right] \Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ - \int_{\Gamma} [t_k^{\pm}(\boldsymbol{y}) - t_k^{\pm}(\boldsymbol{x})] \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ + C_{ijk\ell} A_{ab}^k(\boldsymbol{x}, \Gamma \cup \tilde{\Gamma}) D_{\ell b}^{\pm} u_a^{\pm}(\boldsymbol{x}) - t_k^{\pm}(\boldsymbol{x}) A_{ij}^k(\boldsymbol{x}, \Gamma \cup \tilde{\Gamma}) \end{aligned}$$

dans laquelle la notation $D_{\ell b}^{\pm}$ précise celle des normales $\boldsymbol{n}^{\pm}$ qui est employée dans l'opérateur $D_{\ell b}$; toutes les intégrales sont convergentes. Les termes $A_{ab}^k(\boldsymbol{x}, \cdot)$ sont donnés par l'équation (5.51).

Compte tenu de l'opposition des deux normales $\boldsymbol{n}^{\pm}$ et du fait que les $A_{pq}^k(\boldsymbol{x}, \Gamma \cup \tilde{\Gamma})$ ne font pas intervenir la normale, l'addition membre à membre de la formule ci-dessus

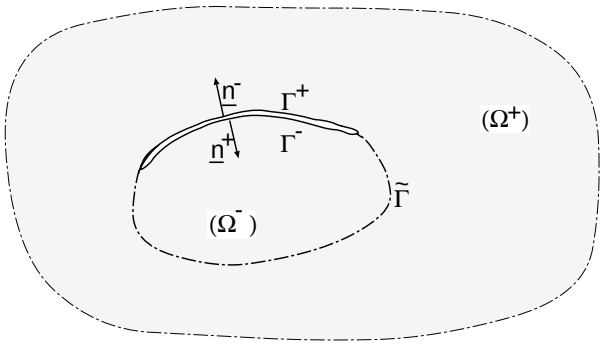

Figure 13.3: Fissure dans un massif élastique infini Ω et domaines auxiliaires Ω^+, Ω^- : notations géométriques.

prise pour Ω^- puis Ω^+ donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-](\boldsymbol{x}) = &-C_{ijk\ell}\int_{\Gamma\cup\tilde{\Gamma}}[D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{y}) - D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x})]\,\Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\ &-\int_{\Gamma\cup\tilde{\Gamma}}[S_k(\boldsymbol{y}) - S_k(\boldsymbol{x})]\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\ &-C_{ijk\ell}A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\Gamma\cup\tilde{\Gamma})D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x}) - S_k(\boldsymbol{x})A_{ij}^k(\boldsymbol{x},\Gamma\cup\tilde{\Gamma})\end{aligned}$$

où on a posé $\phi_i = u_i^+ - u_i^-$ (saut de déplacement à travers $\Gamma\cup\tilde{\Gamma}$) et $S_i = t_i^+ + t_i^-$ (saut de vecteur contrainte à travers $\Gamma\cup\tilde{\Gamma}$), tandis que $D_{\ell b}$ fait référence à la normale $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}^-$. La prise en compte des conditions (13.6) dans l'équation ci-dessus permet, en séparant les intégrales sur Γ et $\tilde{\Gamma}$ et en remarquant que :

$$A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\Gamma\cup\tilde{\Gamma}) = A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\Gamma) + A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\tilde{\Gamma})$$

d'établir la formule :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-](\boldsymbol{x}) = &-C_{ijk\ell}\int_{\Gamma}[D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{y}) - D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x})]\,\Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\ &-\int_{\Gamma}[S_k(\boldsymbol{y}) - S_k(\boldsymbol{x})]\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}S_y\\ &-C_{ijk\ell}A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\Gamma)D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x}) - S_k(\boldsymbol{x})A_{ij}^k(\boldsymbol{x},\Gamma)\end{aligned}$$

Le produit contracté par la normale $\boldsymbol{n}^{\pm}(\boldsymbol{x})$ donne alors, puisque :

$$\frac{1}{2}[\sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-](\boldsymbol{x})n_j^{\pm}(\boldsymbol{x}) = T_i^{\pm}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}S_i(\boldsymbol{x})$$

l'*équation intégrale en traction* :

$$\begin{aligned} T_i^{\pm}(\boldsymbol{x}) = &-n_j^{\pm}(\boldsymbol{x}) C_{ijk\ell} A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\Gamma) D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x}) - S_k(\boldsymbol{x}) \left(A_{ij}^k(\boldsymbol{x},\Gamma) n_j^{\pm}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\delta_{ik} \right) \\ &- n_j^{\pm}(\boldsymbol{x}) C_{ijk\ell} \int_\Gamma \left[D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{y}) - D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x}) \right] \Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ &- n_j^{\pm}(\boldsymbol{x}) \int_\Gamma [S_k(\boldsymbol{y}) - S_k(\boldsymbol{x})] \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{13.7}$$

qui relie les efforts donnés $T_i^{\pm}$ exercés sur les lèvres de la fissure au saut de déplacement inconnu $\boldsymbol{\phi}$. Une fois $\boldsymbol{\phi}$ calculé, le déplacement aux points extérieurs est explicitement donné par la formule de représentation intégrale :

$$u_k(\boldsymbol{x}) = \int_\Gamma \left\{ \phi_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + S_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \, \mathrm{d}S_y$$

qui permet le calcul de l'ensemble des variables élastiques (déformations, contraintes) en tout point d'observation intérieur au massif infini.

Dans le cas d'un chargement symétrique ($T_i^+ + \boldsymbol{T}_i^- = 0$, soit $S_i = 0$), l'équation intégrale (13.7) se réduit à :

$$T_i^{\pm}(\boldsymbol{x}) = -C_{ijk\ell} n_j^{\pm}(\boldsymbol{x}) \left\{ A_{ab}^k(\boldsymbol{x},G) D_{\ell b}\phi_a + \int_\Gamma \left[D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{y}) - D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x}) \right] \Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \right\} \tag{13.8}$$

On remarque d'autre part que l'obtention de (13.7) revient à chercher l'expression du tenseur des contraintes au point $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ associé à un potentiel élastique de double couche, la densité $\boldsymbol{\phi}$ ayant ici une interprétation physique évidente. On pouvait donc obtenir l'équation (13.7) à partir de l'équation (5.38).

Il est important de noter que la continuité du déplacement sur le domaine fissuré implique la nullité du saut de déplacement $\boldsymbol{\phi}$ sur le front de fissure $\partial\Gamma$.

EXTENSION À L'ÉLASTODYNAMIQUE. La démarche de la section précédente peut aussi être appliquée aux équations intégrales régularisées de l'élastodynamique (chapitres 7, 8). Nous donnons directement les résultats pour un massif infini et un chargement symétrique ($S_i = 0$), laissant au lecteur le soin de formuler les autres cas.

Elastodynamique transitoire. Les efforts $T_i^+(\boldsymbol{x},t) = -T_i^-(\boldsymbol{x},t)$ appliqués sur les lèvres $\Gamma^{\pm}$ sont reliés au saut de déplacement $\phi_a(\boldsymbol{y},t)$ par l'équation intégrale régularisée :

$$\begin{aligned} T_i^{\pm}(\boldsymbol{x},t) = &- C_{ijk\ell} n_b^{\pm}(\boldsymbol{x}) \Big\{ D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x},t) A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\Gamma) \\ &+ \int_\Gamma \left[\Sigma_{ab}^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{y},t)] - D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x},t) \Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right] \, \mathrm{d}S_y \\ &+ \rho \int_\Gamma U_a^k[\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}|\ddot{\phi}_a(\boldsymbol{y},t)] n_\ell(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \Big\} \end{aligned} \tag{13.9}$$

Elastodynamique stationnaire. Les efforts $T_i^+(\boldsymbol{x}) = -T_i^-(\boldsymbol{x})$ appliqués sur les lèvres $\Gamma^\pm$ sont reliés au saut de déplacement $\phi_a(\boldsymbol{y})$ par l'équation intégrale régularisée :

$$\begin{aligned} T_i^\pm(\boldsymbol{x}) = & -C_{ijk\ell} n_j^\pm(\boldsymbol{x}) \Big\{ D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x}) A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\Gamma) \\ & + \int_\Gamma \left[D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega) - D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x}) \Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right] \mathrm{d}S_y \\ & - \rho\omega^2 \int_\Gamma U_a^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};\omega)\phi_a(\boldsymbol{y}) n_\ell(\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y \Big\} \end{aligned} \tag{13.10}$$

Cas particulier des fissures planes. La fissure Γ est supposée située dans le plan $(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)$. Pour deux points $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ de Γ, on a alors :

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{e}_3 \qquad r_{,3} = r_{,n} = 0 \qquad D_{\ell b} f = \delta_{\ell 3} f_{,b} - \delta_{b3} f_{,\ell} \tag{13.11}$$

L'équation intégrale (13.8) statique s'écrit, compte tenu des relations (13.11) :

$$\begin{aligned} T_i^\pm(\boldsymbol{x}) = & \pm C_{i3k3} \left\{ \int_\Gamma \left[\phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{x}) \right] \Sigma_{a\alpha}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y + \phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{x}) A_{a\alpha}^k(\boldsymbol{x},\Gamma) \right\} \\ & \mp C_{i3k\alpha} \left\{ \int_\Gamma \left[\phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{x}) \right] \Sigma_{a3}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y + \phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{x}) A_{a3}^k(\boldsymbol{x},\Gamma) \right\} \end{aligned}$$

l'indice α prenant les valeurs $1, 2$; le tenseur de Hooke isotrope étant donné par (1.17).

Fissure en ouverture normale ($i = 3$). Il s'agit donc d'un chargement en mode I, dans la terminologie de la Mécanique de la rupture. Dans ce cas, on a $C_{33k3} = (\lambda + 2\mu)\delta_{k3}$ et $C_{33k\alpha} = \lambda\delta_{k\alpha}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} T_3^\pm(\boldsymbol{x}) = & \pm(\lambda + 2\mu) \left\{ \int_S \left[\phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{x}) \right] \Sigma_{a\alpha}^3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y + \phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{x}) A_{a\alpha}^3(\boldsymbol{x},\Gamma) \right\} \\ & \mp \lambda \left\{ \int_S \left[\phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{x}) \right] \Sigma_{a3}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y + \phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{x}) A_{a3}^\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma) \right\} \end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'expression (4.9) de la solution de Kelvin, on a :

$$\begin{aligned} \Sigma_{a\alpha}^3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= -\Sigma_{a3}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &&= -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \frac{r_{,\alpha}}{r^2} \delta_{a3} \\ A_{\alpha 3}^a(\boldsymbol{x},\Gamma) &= -A_{a3}^\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma) &&= -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \delta_{a3} I_\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma) \end{aligned}$$

On obtient finalement l'équation intégrale reliant $\pm T_3$ au saut de déplacement normal ϕ_3 à travers Γ :

$$\boxed{T_3^\pm(\boldsymbol{x}) = \mp \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \int_S \left[\phi_{3,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{3,\alpha}(\boldsymbol{x}) \right] r_{,\alpha} \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} + \phi_{3,\alpha}(\boldsymbol{x}) I_\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma) \right\}} \tag{13.12}$$

compte tenu de :

$$\lambda + \mu = \frac{\mu}{1-2\nu}$$

Efforts de contact tangentiels ($i = 1, 2$). Dans ce cas, on a $C_{\beta 3k3} = \mu\delta_{k\beta}$ et $C_{\beta 3k\alpha} = \mu\delta_{\alpha\beta}\delta_{k3}$, ce qui donne :

$$T_\beta^\pm(\boldsymbol{x}) = \pm\mu \left\{ \int_S [\phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{x})]\, \Sigma_{a\alpha}^\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y + \phi_{a,\alpha}(\boldsymbol{x}) A_{a\alpha}^\beta(\boldsymbol{x},\Gamma) \right\}$$
$$\mp \mu \left\{ \int_S [\phi_{a,\beta}(\boldsymbol{y}) - \phi_{a,\beta}(\boldsymbol{x})]\, \Sigma_{a3}^3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, \mathrm{d}S_y + \phi_{a,\beta}(\boldsymbol{x}) A_{a3}^3(\boldsymbol{x},\Gamma) \right\}$$

D'autre part, d'après l'expression (4.9) de la solution de Kelvin, on a :

$$\Sigma_{3\alpha}^3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} \frac{r_{,\alpha}}{r^2}$$
$$\Sigma_{a\alpha}^\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{3r_{,a}r_{,\alpha}r_{,\beta} + (1-2\nu)(\delta_{a\beta}r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\beta}r_{,a} - \delta_{a\alpha}r_{,\beta})\}$$

En particulier, (13.11) implique que $\Sigma_{3\alpha}^\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ pour $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \Gamma$. Les formules précédentes entraînent :

$$A_{3\alpha}^3(\boldsymbol{x},\Gamma) = -\frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)} I_\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma)$$
$$A_{\gamma\alpha}^\beta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \{3J_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{x},\Gamma)$$
$$+ (1-2\nu)[\delta_{\gamma\beta} I_\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma) + \delta_{\alpha\beta} I_\gamma(\boldsymbol{x},\Gamma) - \delta_{\gamma\alpha} I_\beta(\boldsymbol{x},\Gamma)]\}$$

On obtient, tous calculs faits, l'équation intégrale reliant $\pm T_\beta$ aux composantes tangentielles ϕ_α du saut de déplacement à travers Γ :

$$T_\beta^\pm(\boldsymbol{x}) = \mp\frac{3\mu}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \phi_{\alpha,\gamma}(\boldsymbol{x}) J_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{x},\Gamma) + \int_S r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} [\phi_{\alpha,\gamma}(\boldsymbol{y}) - \phi_{\alpha,\gamma}(\boldsymbol{x})] \frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \right\}$$
$$\mp \frac{\mu(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} \int_S \{r_{,\beta}[\phi_{\alpha,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{\alpha,\alpha}(\boldsymbol{x})] - r_{,\alpha}[\phi_{\beta,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{\beta,\alpha}(\boldsymbol{x})]\} \frac{\mathrm{d}S_y}{2}$$
$$\mp \frac{\mu(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)} [\phi_{\alpha,\alpha}(\boldsymbol{x}) I_\beta(\boldsymbol{x},\Gamma) - \phi_{\beta,\alpha}(\boldsymbol{x}) I_\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma)] \tag{13.13}$$

Dans les équations intégrales (13.12), (13.13), les intégrales auxiliaires $I_\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma)$ et $J_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{x},\Gamma)$ se réduisent, pour une surface Γ plane, à des intégrales de contour (annexe 5.1) :

$$I_\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma) = -\int_{\partial S} \nu_\alpha \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \tag{13.14}$$

$$3J_{\alpha\beta\gamma}(\boldsymbol{x},\Gamma) = \delta_{\alpha\beta} I_\gamma(\boldsymbol{x},\Gamma) + \delta_{\beta\gamma} I_\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma) - \int_{\partial S} r_{,\alpha} r_{,\beta} \nu_{,\gamma} \frac{\mathrm{d}s_y}{r} \tag{13.15}$$

Commentaires. Les équations intégrales (13.12), (13.13) sont les versions régularisées des équations intégrales en valeur principale proposées par Weaver [18] et Bui [2]. On voit que les champs d'ouverture normale ϕ_3 et tangentielle $\phi_{1,2}$ de fissure sont

découplés, gouvernés respectivement par les équations (13.12) et (13.13), qui régissent donc respectivement les modes I et II–III.

L'hypothèse d'une surface plane simplifie grandement la régularisation dans la mesure où les intégrales auxiliaires $I_\alpha, J_{\alpha\beta\gamma}$ se réduisent à des intégrales de contour (comparer avec les expressions (5.31), (5.32) de l'annexe 5.1 pour le cas général).

Cas élastodynamique stationnaire. Pour le mode d'ouverture normale, l'équation intégrale en traction s'écrit tous calculs faits :

$$\begin{aligned} T_3^{\pm}(\boldsymbol{x}) = \pm\frac{\mu}{2\pi}\int_S \phi_{3,\alpha}(\boldsymbol{y})\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}D - \frac{\nu}{1-2\nu}E + \frac{1}{1-\nu}\right] r_{,\alpha}\frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} \\ \mp \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)}\left\{\int_S [\phi_{3,\alpha}(\boldsymbol{y}) - \phi_{3,\alpha}(\boldsymbol{x})]\, r_{,\alpha}\frac{\mathrm{d}S_y}{r^2} + \phi_{3,\alpha}(\boldsymbol{x}) I_\alpha(\boldsymbol{x},\Gamma)\right\} \\ \mp \frac{\mu(1-\nu)}{2\pi(1-2\nu)}k_T^2\int_S \phi_3(\boldsymbol{y})[A + e^{ik_T r}]\frac{\mathrm{d}S_y}{r} \end{aligned} \tag{13.16}$$

Les quantités A, D, E sont données par (8.35), et la quantité :

$$\frac{1-\nu}{1-2\nu}D - \frac{\nu}{1-2\nu}E + \frac{1}{1-\nu}$$

est régulière et doit être exprimée à l'aide des développements (8.36) pour le calcul des intégrales élémentaires singulières.

13.4 Méthode des discontinuités de déplacement pour un solide borné

Le solide Ω est maintenant supposé borné : il est donc délimité par la fissure Γ d'une part, par une frontière externe S d'autre part. Par rapport à ce qui précède, il faut donc incorporer la prise en compte de la frontière externe dans la formulation intégrale. L'idée générale est d'associer l'équation intégrale en traction pour les points de collocation situés sur Γ et l'équation intégrale en déplacement pour les points de collocation situés sur S.

Pour ce faire, on reprend l'idée de compléter Γ par une surface auxiliaire $\tilde{\Gamma}$, qui doit maintenant être prise intérieure à Ω, de sorte que $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$, le sous-domaine Ω^- étant limité par Γ et $\tilde{\Gamma}$ (figure 13.4).

Equation intégrale en déplacements. On écrit alors la formule de représentation du déplacement (4.20) pour le domaine Ω^- ($\partial\Omega^- = \Gamma\cup\tilde{\Gamma}$) et un point de collocation $\boldsymbol{x} \in S$, donc extérieur à Ω^- :

$$0 = \int_{\Gamma\cup\tilde{\Gamma}} \left\{u_i^-(\boldsymbol{y})T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i^-(\boldsymbol{y})U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right\}\,\mathrm{d}S_y$$

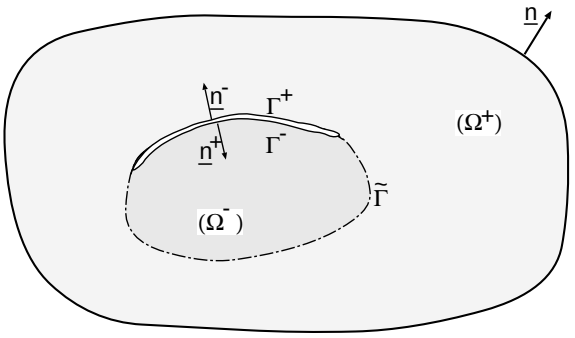

Figure 13.4: Fissure dans un solide élastique borné Ω et domaines auxiliaires Ω^+, Ω^- : notations géométriques.

ainsi que l'équation intégrale en déplacements (4.31) pour le domaine Ω^+ (de frontière $\partial\Omega^+ = S \cup \Gamma \cup \tilde{\Gamma}$) et le même point de collocation $\boldsymbol{x} \in S$:

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{\Gamma\cup\tilde{\Gamma}} \left\{ u_i^+(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i^+(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_S \left\{ [u_i^+(\boldsymbol{y}) - u_i^+(\boldsymbol{x})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i^+(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

L'addition de ces deux relations conduit à :

$$\begin{aligned} 0 = &\int_S \left\{ [u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &- \int_\Gamma \left\{ \phi_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + S_i^+(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{13.17}$$

EQUATION INTÉGRALE EN TRACTIONS. On peut procéder comme ci-dessus, à partir de la représentation intégrale (13.7) du tenseur des contraintes, pour obtenir une équation intégrale en tractions en $\boldsymbol{x} \in S$, dans le cas du solide borné fissuré. Le résultat, qui vaut pour tout $\boldsymbol{x} \in \Gamma$, est le suivant :

$$\begin{aligned} &T_i^\pm(\boldsymbol{x}) \\ &= -n_j^\pm(\boldsymbol{x}) C_{ijk\ell} \left\{ A_{ab}^k(\boldsymbol{x},\Gamma) D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x}) + \int_\Gamma \left[D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{y}) - D_{\ell b}\phi_a(\boldsymbol{x}) \right] \Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \right\} \\ &\quad - n_j^\pm(\boldsymbol{x}) \left\{ A_{ij}^k(\boldsymbol{x},\Gamma) S_k(\boldsymbol{x}) + \int_\Gamma \left[S_k(\boldsymbol{y}) - S_k(\boldsymbol{x}) \right] \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \right\} \\ &\quad - n_b^\pm(\boldsymbol{x}) \int_S \left\{ D_{\ell b} u_a(\boldsymbol{y}) C_{ijk\ell} \Sigma_{ab}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_k(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \end{aligned} \tag{13.18}$$

FORMULATION INTÉGRALE DU PROBLÈME ÉLASTIQUE. Un problème élastostatique pour un solide fissuré peut ainsi être formulé par des équations intégrales couplées :

- Equations intégrales en déplacements (13.17) aux points de collocation $\boldsymbol{x} \in S$

- Equations intégrales en tractions (13.18) aux points de collocation $\boldsymbol{x} \in \Gamma$.

L'équation intégrale en déplacements, comme on le voit ici encore, est insensible à l'ajout de tractions symétriques sur Γ et ne devait donc pas être utilisée aux points de collocation $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ situés sur la fissure. Il était donc nécessaire d'écrire l'équation intégrale en tractions (13.18) pour les points de collocation situés sur la fissure.

L'utilisation de l'équation intégrale en tractions aux points $\boldsymbol{x} \in S$, qui est licite, est évitée en raison de la plus grande lourdeur de sa discrétisation.

13.5 Evaluation des facteurs d'intensité de contraintes en front de fissure

La discrétisation reprend les notions exposées aux chapitres 3 et 5. La surface Γ de la fissure supporte l'inconnue saut de déplacement $\boldsymbol{\phi}$. Les restrictions quant au choix des points de collocation ou des types d'interpolation concernant l'équation intégrale en traction (chapitre 5), s'appliquent pour la discrétisation de la fissure et du saut de déplacement. D'autre part, cette dernière doit être construite de telle sorte que $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$ sur le front de fissure $\partial\Gamma$; en particulier toutes les valeurs nodales aux nœuds situés sur le front sont nulles.

Il est, d'autre part, bien connu (Bui [3]) que les champs de déformation et de contraintes élastiques sont singuliers au voisinage du front de fissure $\partial\Gamma$: pour un point $\boldsymbol{y}_0$ de $\partial\Gamma$ auquel est attaché le trièdre direct $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\nu})$ de vecteurs unitaires ($\boldsymbol{n}$: normale à Γ, $\boldsymbol{\tau}$: tangente à $\partial\Gamma$, $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\tau} \wedge \boldsymbol{n}$: normale à $\partial\Gamma$ sortant de Γ et située dans le plan tangent à Γ en $\boldsymbol{y}_0$), les expressions asymptotiques du déplacement en un point

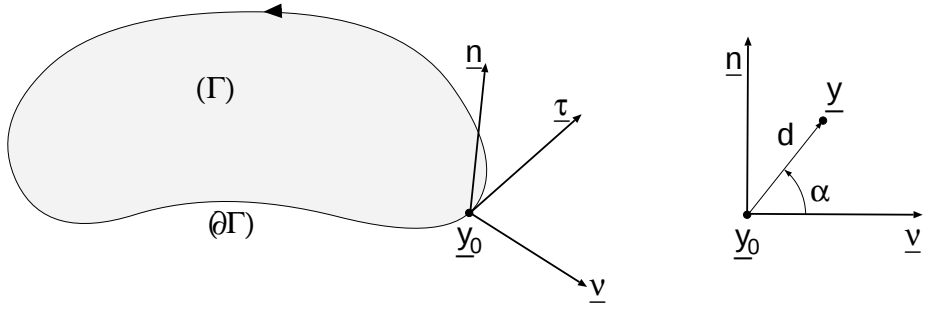

Figure 13.5: Repérage d'un point au voisinage du front de fissure $\partial\Gamma$.

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + d(\cos\alpha\boldsymbol{\nu} + \sin\alpha\boldsymbol{n})$ situé à une petite distance d du front sont :

$$\begin{aligned} u_\nu &= \sqrt{\frac{d}{2\pi}}\left\{\frac{K_I}{2\mu}\cos\frac{\alpha}{2}(k-\cos\alpha) + \frac{K_{II}}{2\mu}\sin\frac{\alpha}{2}(k+\cos\alpha+2)\right\} + O(d) \\ u_n &= \sqrt{\frac{d}{2\pi}}\left\{\frac{K_I}{2\mu}\sin\frac{\alpha}{2}(k-\cos\alpha) - \frac{K_{II}}{2\mu}\sin\frac{\alpha}{2}(k+\cos\alpha-2)\right\} + O(d) \\ u_\tau &= \frac{2K_{III}}{\mu}\sqrt{\frac{d}{2\pi}}\sin\frac{\alpha}{2} + O(d) \end{aligned} \tag{13.19}$$

avec $k = 3 - 4\nu$. Les déformations et les contraintes calculées à partir des formules ci-dessus sont donc singulières comme $d^{-1/2}$. Les *facteurs d'intensité de contraintes* K_I, K_{II}, K_{III} dépendent de la géométrie du solide et des sollicitations ; ils sont par ailleurs fonction du point sur le front de fissure. On considère dans certaines applications que la fissure se propage si ces facteurs atteignent des *ténacités* $K_{Ic}, \ldots$ valeurs-seuil caractéristiques du matériau constitutif. D'autre part, la formulation de critères de *fatigue* (progression de fissures sous un grand nombre de cycles) fait également intervenir les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes.

L'évaluation de K_I, K_{II}, K_{III} en tout point du front revêt donc souvent une grande importance pratique. Dans le contexte des éléments de frontière, ils sont en général évalués par *extrapolation cinématique* : les formules (13.19) prises pour $\alpha = \pm\pi$ donnent les déplacements $\boldsymbol{u}^\pm$ sur les lèvres supérieure Γ^+ et inférieure Γ^- de Γ au voisinage de $\partial\Gamma$, et on obtient :

$$\begin{aligned} \phi_n &= K_I\frac{4(1-\nu)}{\mu}\sqrt{\frac{d}{2\pi}} + O(d) \\ \phi_\nu &= K_{II}\frac{4(1-\nu)}{\mu}\sqrt{\frac{d}{2\pi}} + O(d) \\ \phi_\tau &= K_{III}\frac{4}{\mu}\sqrt{\frac{d}{2\pi}} + O(d) \end{aligned} \tag{13.20}$$

Les facteurs d'intensité de contraintes peuvent ainsi être évalués à partir du saut de déplacement à travers Γ par :

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{d\to 0}\frac{\mu}{4(1-\nu)}\sqrt{\frac{2\pi}{d}}\phi_n \\ K_{II} &= \lim_{d\to 0}\frac{\mu}{4(1-\nu)}\sqrt{\frac{2\pi}{d}}\phi_\nu \\ K_{III} &= \lim_{d\to 0}\frac{\mu}{4}\sqrt{\frac{2\pi}{d}}\phi_\tau \end{aligned} \tag{13.21}$$

Une première méthode, la plus simple, consiste à appliquer les formules ci-dessus sur les éléments adjacents au front, pour les nœuds les plus proches ; avec les notations de la figure 13.6, on évalue ainsi K_I aux nœuds 1,2,3 par :

$$K_I^{7,8,1} \approx \frac{\mu}{4(1-\nu)}\sqrt{\frac{2\pi}{d_{6,9,2}}}\phi_n^{6,9,2}$$

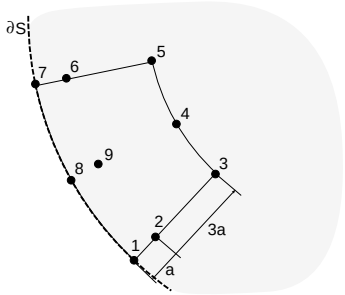

Figure 13.6: Elément à 9 nœuds avec nœuds 2,6,9 "au quart".

Cette technique ne donne toutefois pas toujours de très bons résultats, car les interpolations usuelles de $\boldsymbol{\phi}$ reproduisent mal la variation en $\sqrt{d}$ au voisinage de $\partial\Gamma$.

Une amélioration consiste à utiliser des éléments avec *nœuds au quart*. Par exemple, considérons pour fixer les idées un élément plan à 9 nœuds, adjacent au front de fissure $\partial\Gamma$, et supposons les nœuds $\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^2, \boldsymbol{y}^3$ alignés sur une droite perpendiculaire à $\partial\Gamma$ et répartis de telle sorte que :

$$\boldsymbol{y}^2 - \boldsymbol{y}^1 = -a\boldsymbol{\nu} \qquad \boldsymbol{y}^3 - \boldsymbol{y}^1 = -4a\boldsymbol{\nu} \tag{13.22}$$

Par construction, le nœud $\boldsymbol{y}^2$ est donc situé au quart de la longueur, égale à $4a$, du segment $[\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^3]$. Avec ce type d'élément, l'interpolation le long de ce segment est quadratique et un point $\boldsymbol{y} \in [\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{y}^3]$ est paramétré par :

$$\boldsymbol{y} = N_1(\xi_1)\boldsymbol{y}^1 + N_2(\xi_1)\boldsymbol{y}^2 + N_3(\xi_1)\boldsymbol{y}^3$$

et avec les fonctions d'interpolation (B.1). Compte tenu de la disposition (13.22) des nœuds, on obtient :

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^1 = -(1+\xi)^2 a\boldsymbol{\nu}$$

et la distance $d = \left|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^1\right|$ vaut :

$$d = a(1+\xi)^2 \tag{13.23}$$

D'autre part, l'interpolation d'une composante ϕ de l'ouverture de fissure ($\phi^1 = 0$ puisque ϕ est nul sur le front) s'écrit :

$$\phi(\boldsymbol{y}) = N_2(\xi)\phi^2 + N_3(\xi)\phi^3 = (1+\xi)[\phi^2 + (\frac{1}{2}\phi^3 - \phi^2)\xi]$$

Eliminant ξ_1 entre l'équation précédente et (13.23), on trouve :

$$\phi(\boldsymbol{y}) = \sqrt{\frac{d}{a}}\left[2\phi^2 - \frac{1}{2}\phi^3 + \sqrt{\frac{d}{a}}\left(\frac{1}{2}\phi^3 - \phi^2\right)\right] \tag{13.24}$$

Cet artifice permet ainsi, en utilisant des fonctions d'interpolation usuelles, de représenter la variation en $d^{1/2}$ de $\boldsymbol{\phi}$ au voisinage de $\partial\Gamma$. Le facteur d'intensité de contraintes K_I, par exemple, est ainsi évalué au moyen de la formule :

$$K_I = \frac{\mu}{4(1-\nu)}\sqrt{2\pi a}\left(2\phi^2 - \phi^3\right) \tag{13.25}$$

à partir des valeurs nodales de ϕ_n aux nœuds 2 et 3, et de même pour K_{II}, K_{III}.

En cas d'utilisation de la méthode de sous-structuration, la représentation du caractère singulier en $d_{-1/2}$ du vecteur-contrainte sur $\tilde{\Gamma}$ et le long du front $\partial\Gamma$ nécessite une technique similaire ; il est alors possible d'évaluer les facteurs d'intensité de contraintes par *extrapolation statique*.

13.6 Exemples numériques

FISSURE INTERNE EN ÉLASTOSTATIQUE (MI ET ALIABADI [9]). Une fissure elliptique inclinée est située dans un barreau élastique isotrope en traction uniforme (figure 13.7). La solution exacte, en termes de facteurs d'intensité de contraintes, est connue (Tada, Paris et Irwin [15]). Le problème, utilisé comme exemple de validation, est résolu numériquement (Mi et Aliabadi [9]) à l'aide d'une combinaison d'équations intégrales en déplacement (de type (4.32)) et en traction (de type (5.34)) mais non régularisées. Les auteurs ont utilisé deux maillages M_1 et M_2, de 66 et 154 éléments (carrés à 8 nœuds) au total (comprenant respectivement 20 et 64 éléments sur la fissure, figure 13.7). La figure 13.8 reproduit les résultats obtenus, par la méthode de l'extrapolation des déplacements, pour les facteurs d'intensité de contraintes K_I, K_{II}, K_{III} et pour les deux maillages. L'écart avec la solution analytique est de 6% (maillage M_1) ou 2% (maillage M_2).

FISSURE DÉBOUCHANTE EN ÉLASTOSTATIQUE (LE VAN [8]). L'exemple d'un barreau cylindrique (rayon R) entaillé par une fissure semi-elliptique (demi-axes a, b) est

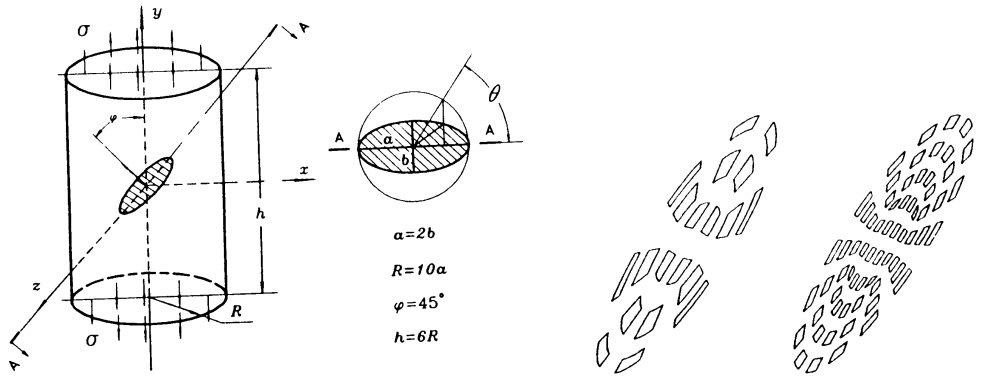

Figure 13.7: Fissure inclinée elliptique dans un barreau cylindrique (d'après [9]) : à droite : maillage de la fissure.

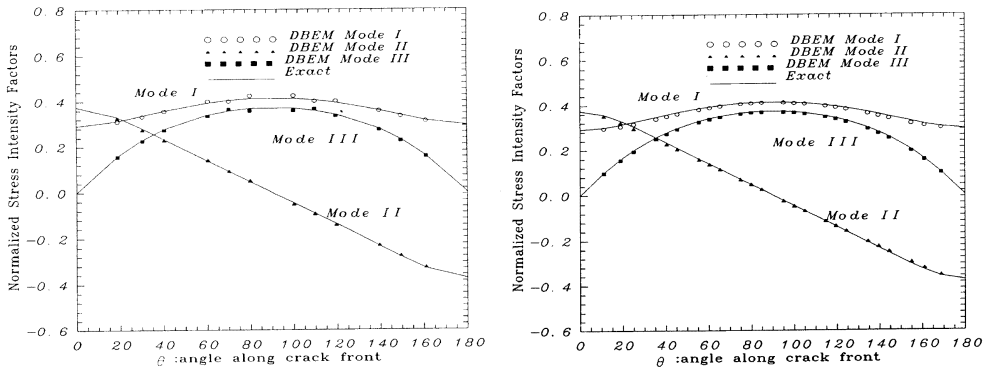

Figure 13.8: Fissure inclinée elliptique dans un barreau cylindrique : facteurs d'intensité de contraintes, maillage M_1 (gauche), maillage M_2 (droite) (d'après [9]).

considéré (figure 13.9). Les lèvres de la fissure sont chargées par une pression (uniforme ou linéaire) ou bien par un cisaillement. Cela permet de simuler respectivement l'extension, la flexion (dans le plan perpendiculaire à la fissure) et la torsion de la barre.

Un maillage par éléments quadratiques à 4 nœuds, comprenant notamment 58 éléments pour la fissure, est utilisé. Les résultats numériques obtenus pour le cas $b/a = 5/7$, $b/R = 0.4$ sont reproduits en figure 13.10 (représentations graphiques). Pour le chargement en pression, le facteur d'intensité K_I au point le plus profond de la fissure ($\boldsymbol{y}_1 = b - R, y_2 = 0$) a pu être comparé avec des résultats de la littérature concernant des situations géométriquement voisines ; l'accord s'est révélé satisfaisant (quelques % d'écart relatif).

Simulation numérique d'une propagation de fissure (Koller et coll. [6]). Dans cet exemple, une fissure droite C de longueur initiale ℓ_0, située sur l'axe $\boldsymbol{e}_1$,

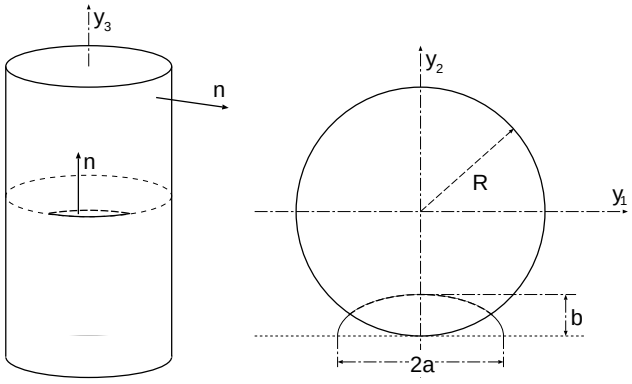

Figure 13.9: Barreau cylindrique entaillé (d'après [8]).

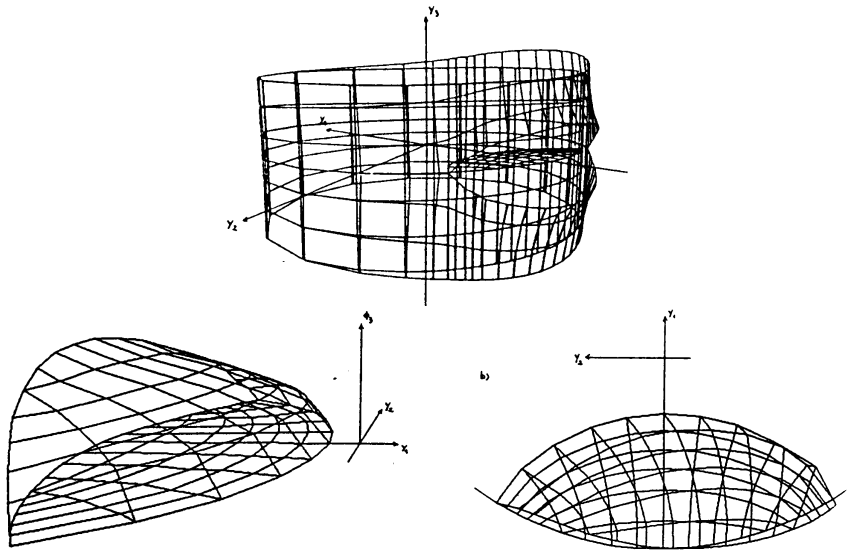

Figure 13.10: Déformée de la barre (en haut) et ouverture des lèvres (pression linéaire, torsion) (d'après [8]).

est chargée par un cisaillement antiplan (mode III) $\boldsymbol{T}^{\pm}(\boldsymbol{y}) = \pm\tau H(t)\boldsymbol{e}_3$, τ étant une constante et $H(t)$ la fonction échelon. La propagation de l'extrémité droite de C est régie par le critère $K_{III} = K^c_{III}$, égalité du facteur d'intensité de contraintes dynamique en mode III et de la ténacité du matériau élastique ; l'extrémité gauche est supposée fixe. Seule la propagation de l'extrémité droite de C est considérée, et on note $\ell(t)$ la longueur de C à l'instant t ($\ell(0) = \ell$).

La fissure est discrétisée en J éléments d'égale longueur Δx, et l'intervalle d'étude $t \in [0, T]$ est découpé en I pas de temps égaux Δt. Une discrétisation linéaire par morceaux en espace et en temps est adoptée pour l'inconnue $\phi(\boldsymbol{y}, t)$. La collocation de l'équation intégrale est faite aux milieux d'éléments et aux instants $t = i\Delta t$, $i = 1, 2, \ldots I$. Le ratio $c\Delta t/\Delta x$ est choisi égal à $1/2$, de manière à calculer analytiquement la plupart des intégrales élémentaires permettant la construction de l'équation de convolution discrète. Le système d'équations linéaires qui doit être résolu à chaque pas de temps a ainsi $J - 1$ inconnues et J équations, et est donc traité au sens des moindres carrés (bibliothèque de programmes LINPACK [4]).

La propagation est simulée par ajout d'un nouvel élément si le critère de propagation est vérifié, de sorte que I augmente au long de l'intégration en temps. Les résultats numériques obtenus pour la propagation de l'extrémité droite (figure 13.11) sont en accord excellent avec la solution exacte. Ils sont également meilleurs que ceux obtenus antérieurement par Virieux et Madariaga [17] par différences finies, en particulier pour ce qui est de la phase d'accélération initiale.

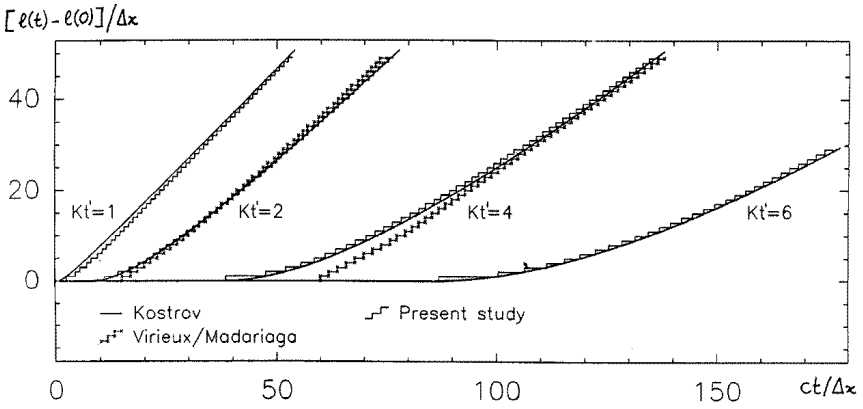

Figure 13.11: Position $\ell(t)$ de la pointe de la fissure au cours du temps : résultats numériques de [6] (équations intégrales), comparés avec ceux de [7] (analytiques) et [17] (différences finies). Les résultats sont normalisés, avec $K' = K^c_{III}/(\mu\sqrt{\pi\Delta x})$.

13.7 Formulations intégrales pour l'approche énergétique de la rupture fragile

Considérons un solide Ω fissuré, Γ désignant la (réunion des) fissures présentes. Il est maintenant bien connu que beaucoup de problèmes de Mécanique de la rupture peuvent être abordés par des méthodes énergétiques. En particulier, la dérivée première de l'énergie potentielle à l'équilibre W par rapport à une extension du front de fissure $\partial\Gamma$ définit le taux de restitution d'énergie $G(s)$ (caractéristique de la dissipation d'énergie par avancement de la fissure Γ, et relié à la singularité des contraintes dans le cas élastique), par :

$$\int_\Gamma G\theta_\nu \, \mathrm{d}s + W_{,\Omega}.\boldsymbol{\theta} = 0 \qquad \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta \tag{13.26}$$

Θ désignant l'ensemble de toutes les vitesses de transformation $\boldsymbol{\theta}$ décrivant une extension du front de fissure. Ensuite, l'étude de l'extension réelle de la fissure (calcul de la vitesse d'extension du front, étude de l'unicité de la solution en vitesse et de l'instabilité éventuelle de cette extension) au moyen d'un critère du type Griffith $g(G) \leq 0$ nécessite celle des variations de G, donc le calcul des dérivées secondes de W.

Principe des méthodes énergétiques en Mécanique de la rupture. Les premières applications du point de vue énergétique ont consisté à calculer, au moyen de modèles éléments finis, des valeurs numériques approchées de la dérivée première de l'énergie potentielle à l'équilibre W dans une extension de fissure (et donc du taux de restitution d'énergie G), obtenues par différences finies. C'est la méthode de l'extension virtuelle de fissure, proposée par Hellen [5] et Parks [12] : pour un problème bidimensionnel, on suppose une extension (virtuelle) de la fissure Δl et on calcule la variation de l'énergie potentielle ΔW de la structure fissurée. La valeur de G peut alors être

obtenue par sa définition :

$$G \simeq -\frac{\Delta W}{\Delta l}$$

La méthode des différences finies peut engendrer des erreurs numériques non contrôlées suivant le choix de l'accroissement virtuel de fissure Δl, en raison des difficultés déjà mentionnées liées à l'opération de dérivation numérique.

LA "MÉTHODE θ". Rappelons brièvement le principe de la "méthode θ". L'énergie potentielle à l'équilibre W, donnée (en élasticité linéaire et en l'absence d'efforts de volume) par :

$$W = \frac{1}{2}\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\nabla u}\, \mathrm{d}V - \int_{S_T} \boldsymbol{t}^D.\boldsymbol{u}\, \mathrm{d}S$$

($\boldsymbol{u}$ étant le déplacement solution du problème d'équilibre élastique avec données aux limites $\boldsymbol{u}^D = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{t}^D$) est dérivée dans une transformation de domaine, pour obtenir, après prise en compte de l'équation d'équilibre élastique sous forme variationnelle, l'expression :

$$\overset{\star}{W} = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\nabla u} \mathrm{div}\, \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : (\boldsymbol{\nabla u}.\boldsymbol{\nabla \theta}) \right\} \mathrm{d}V \tag{13.27}$$

On note que l'expression ci-dessus donne la dérivée de W en fonction de $\boldsymbol{\theta}$ et de l'état élastique actuel : conformément à la théorie et de la même manière que l'intégrale J, la dérivée de l'état élastique dans la transformation de domaine n'apparaît pas. La matérialisation de cette propriété dans (13.27) repose sur une utilisation astucieuse du caractère symétrique de la formulation variationnelle de l'équilibre élastique.

L'expression (13.27), reportée dans (13.26), se prête à une discrétisation par éléments finis. La construction d'une base $\boldsymbol{\theta}_1, \ldots \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{NC}}$ définissant un sous-espace de dimension finie NC de Θ et l'évaluation de $\overset{\star}{W}$ ci-dessus pour chaque $\boldsymbol{\theta}_k$ permet ainsi à partir de (13.26) la construction d'un système linéaire dont les inconnues sont les valeurs nodales de G en NC nœuds du front $\partial\Gamma$. Le calcul de la vitesse réelle d'extension au moyen d'un critère de type Griffith peut ensuite être développé, sous réserve d'établir les expressions des dérivées de $\overset{\star}{W}$, éq. (13.27), dans une variation du domaine ou du chargement.

Précisons que (13.27) est obtenue par dérivation matérielle d'intégrales au moyen des formules (12.8-12.10), de façon à faire apparaître des dérivées de type lagrangien. Ceci présente l'avantage sur une dérivation de type eulérien de ne pas conduire à des singularités élastiques non intégrables le long de $\partial\Gamma$. En contrepartie, la formule (13.27) masque le fait, établi par ailleurs (Mialon [10], Pradeilles-Duval [13]) que la valeur prise par $\overset{\star}{W}$ dépend uniquement de la trace normale $\theta_\nu \mid_{\partial\Gamma}$ de $\boldsymbol{\theta}$ le long de $\partial\Gamma$ et non de son prolongement sur Ω. On a en quelque sorte troqué la lisibilité du résultat contre sa calculabilité effective.

LA "MÉTHODE θ-INTÉGRALE". Elle consiste à traduire la "méthode θ" en termes de formulations intégrales et d'éléments de frontière. L'idée principale est d'utiliser la

forme suivante de W, ne contenant que des intégrales de frontière :

$$W = \frac{1}{2}\int_{S_u} \boldsymbol{u}^D.\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\int_{S_T} \boldsymbol{u}.\boldsymbol{t}^D\,\mathrm{d}S \tag{13.28}$$

dont les conditions d'application sont restrictives : linéarité géométrique et de comportement, absence d'efforts de volume. La dérivée première de W dans une extension virtuelle de fissure (vitesse $\boldsymbol{\theta}$ laissant fixe la frontière extérieure) et en l'absence de variation de chargement (données aux frontières $\boldsymbol{u}^D$ et $\boldsymbol{t}^D$ invariables) est alors simplement donnée par :

$$W_{,\Gamma}.\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2}\int_{S_u} \overset{\star}{\boldsymbol{t}}.\boldsymbol{u}^D\,\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\int_{S_T} \boldsymbol{t}^D.\overset{\star}{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}S \tag{13.29}$$

L'évaluation de cette expression demande le calcul de la dérivée première $(\overset{\star}{\boldsymbol{u}}, \overset{\star}{\boldsymbol{t}})$ des variables élastiques portées par la frontière pour $\boldsymbol{\theta}$ donné, qui est gouvernée sur chaque sous-domaine $\Omega^{\pm}$ par l'équation intégrale (12.28). Substituer à $W_\Gamma.\boldsymbol{\theta}$ l'expression (13.29) de $\overset{\star}{W}$ dans l'équation variationnelle (13.26) permet, après discrétisation, le calcul de G.

La mise en œuvre numérique de la méthode θ-intégrale (Bonnet et Xiao [1]) repose alors sur la méthode de sous-structuration, qui permet l'utilisation de l'équation intégrale en déplacement (4.31) et sa dérivée dans une transformation de domaine[2] (12.28). Elle nécessite notamment le développement de fonctions d'interpolation vectorielles $\boldsymbol{B}^k(\boldsymbol{\xi})$ permettant la définition d'un prolongement des vitesses normales d'extension $(\boldsymbol{\theta}.\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu}.\boldsymbol{\nu})\,|_{\partial\Gamma}$, de la forme :

$$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{\mathrm{NC}} \boldsymbol{B}^k(\boldsymbol{\xi})\theta_k$$

où θ_k désigne la valeur de θ_ν au nœud k du front de fissure. Ces fonctions sont construites de sorte que leur support géométrique soit restreint aux couronnes d'éléments de frontière immédiatement adjacents au front, et d'autre part que l'interpolation ci-dessus se réduise à une interpolation unidimensionnelle classique quand $\boldsymbol{y} \in \partial\Gamma$.

Exemple numérique : fissure semi-elliptique débouchante. La fissure semi-elliptique débouchante située sur le plan $z = 0$ dans un solide parallélépipédique ($-L \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq t$, $-H \leq z \leq H$), soumis à une traction uniforme $\pm p\boldsymbol{e}_z$ en $z = \pm H$, est un problème classique en mécanique de la rupture (voir fig. 13.12 pour les notations géométriques). En raison des symétries géométriques, seuls le quart $x \geq 0, z \geq 0$ de la frontière extérieure du solide et la moitié $x \geq 0$ du plan de fissure ont été maillés. Au total 136 éléments à 9 nœuds ont été utilisés pour les résultats reproduits ci-après ; le (demi-) front de fissure représente 6 côtés d'éléments, de sorte que G et la vitesse d'extension virtuelle du front sont représentées par interpolation quadratique de 13 valeurs nodales. Deux variantes de maillage (figure 13.12) sont utilisées, les espacements angulaires entre deux nœuds du front étant respectivement uniformes

[2]Ici limitée à une extension de la fissure dans son plan tangent, la frontière extérieure du solide fissuré étant fixe.

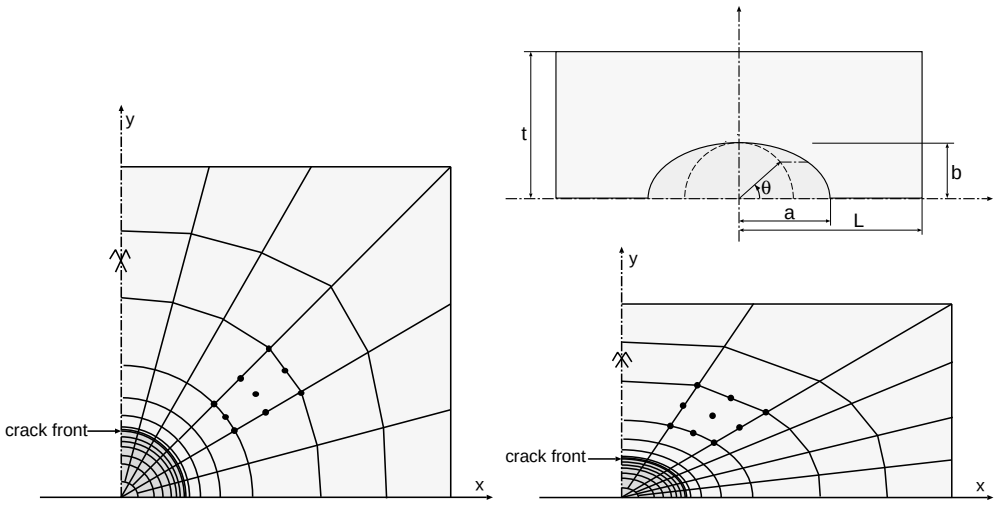

Figure 13.12: Fissure semi-elliptique débouchante : notations géométriques pour le plan de fissure (en haut à droite), maillage par éléments de frontière du plan de fissure (à gauche : maillage M1, $b = a$; en bas à droite, maillage M2, $b - 0.6a$).

($\Delta\theta = \pi/24$, maillage M_1) ou non-uniformes ($\Delta\theta = \pi/32$ (resp. $\pi/16$) for $\theta \in [0, \pi/4]$ (resp. $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$),, maillage M_2 ; $\theta = 0$ correspond au point de débouchement du front.

La figure 13.13 présente des comparaisons sur le facteur d'intensité de contraintes adimensionnel $K_I^\star = K_I/K_I^e$, où :

$$K_I^e = \frac{1}{Q} p\sqrt{\pi a} \qquad Q = E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta} d\theta$$

et

$$k^2 = \begin{cases} 1 - (b/a)^2 & (b \leq a) \\ 1 - (a/b)^2 & (b \geq a) \end{cases}$$

Les valeurs numériques de $K_I^\star$ ont été obtenues par la formule d'Irwin à partir des valeurs de G calculées par méthode θ-intégrale. Elles sont comparées à des valeurs proposées par Newman et Raju [11] (provenant de simulations par éléments finis) et par Tanaka et Itoh [16] (obtenues à l'aide d'un élément spécial perfectionné qui permet la représentation de la singularité usuelle en front de fissure mais aussi celle, différente et fonction de ν, au point de débouchement), ces dernières donnant en principe la meilleure référence près du point de débouchement. La meilleure aptitude du maillage M2, comparé à M1, à reproduire le pic secondaire près du point de débouchement est mise en évidence. De façon générale, ces résultats présentent un accord satisfaisant avec les résultats de [11], [16]. Les valeurs de $K_I^\star$ obtenues par extrapolation de l'ouverture normale de fissure sont également reportées ; elles présentent un accord moins satisfaisant, bien que la discrétisation ait utilisé des éléments avec nœud au quart.

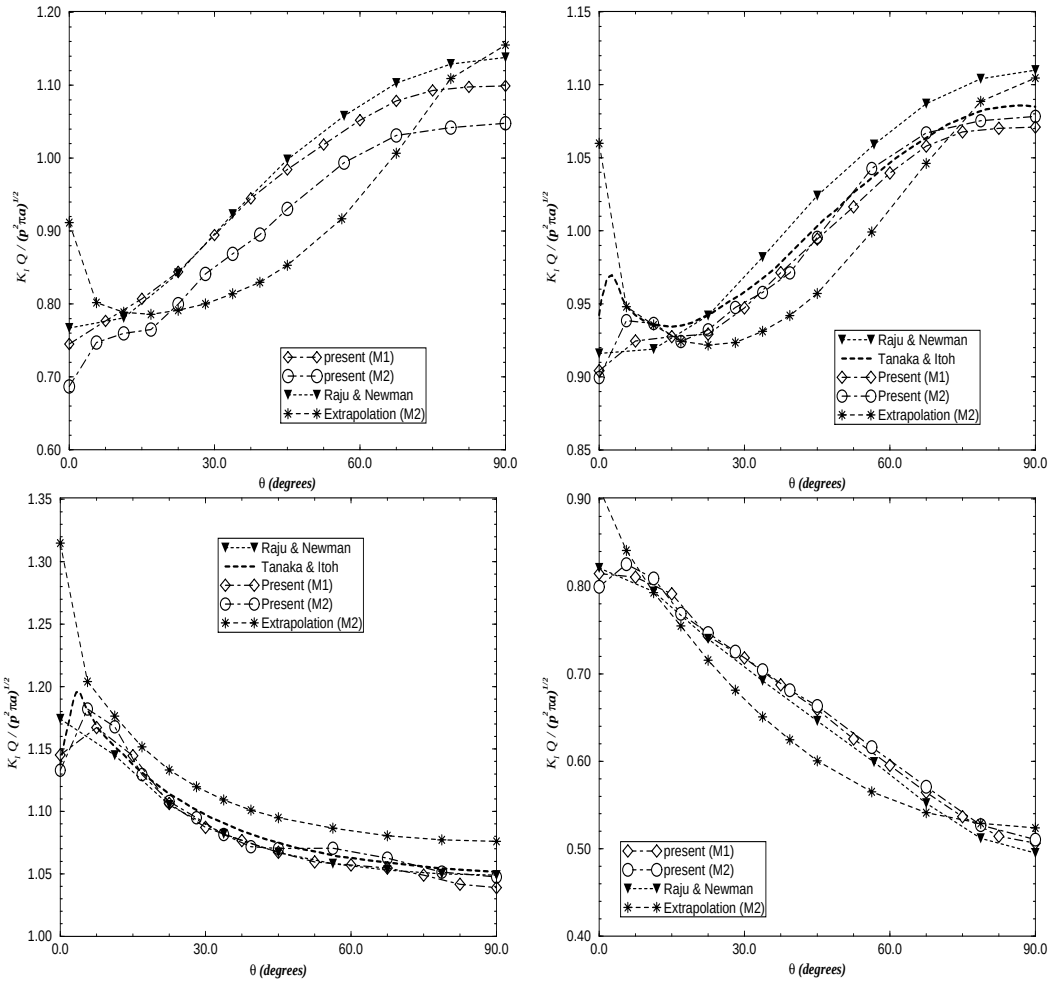

Figure 13.13: Fissure semi-elliptique débouchante (en haut à gauche : $b = 0.4a$, en haut à droite : $b = 0.6a$, en bas à gauche : $b = a$, en bas à droite : $b = 2a$) : comparaisons.

Références bibliographiques

[1] Bonnet, M., Xiao, H. Computation of energy release rate along a crack front using material differentiation of elastic BIE. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **15**, 137–150 (1995).

[2] Bui, H. D. An Integral Equation Method for Solving the Problem of a Plane Crack of Arbitrary Shape. *J. Mech. Phys. Solids*, **25**, 29–39 (1977).

[3] Bui, H. D. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson (1978).

[4] Dongarra, J. J., Bunch, J. R., Moler, C. B., Stewart, G. B. Linpack *users'guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, USA (1979).

[5] HELLEN, T. K. On the method of virtual crack extension. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **9**, 187–207 (1975).

[6] KOLLER, M. G., BONNET, M., MADARIAGA, R. Modelling of dynamical crack propagation using time-domain boundary integral equations. *Wave Motion*, **16**, 339–366 (1992).

[7] KOSTROV, B. V. Unsteady propagation of longitudinal shear cracks. *Int. J. Appl. Math. Mech. (PMM)*, **30**, 1241–1248 (1966).

[8] LE VAN, A. *Equations intégrales pour fissures 3D. Contribution à la régularisation*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, France (1988).

[9] MI, Y., ALIABADI, M. H. Dual boundary element method for analysis of 3-D crack problems. In J. Dominguez C. A. Brebbia, F. Paris (eds.), *Boundary Elements XIV*, pp. 315–329. Comp. Mech. Publ., Southampton (1992).

[10] MIALON, P. Calcul de la dérivée d'une grandeur par rapport à un fond de fissure par la méthode θ. Bulletin EDF/DER série c vol. 3, Electricité de France (1987).

[11] NEWMAN, J. C., RAJU, I. S. An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack. *Engng. Frac. Mech.*, **15**, 185–192 (1981).

[12] PARKS, D. M. A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip strees intensity factors. *Int. J. Fract.*, **10**, 487–501 (1974).

[13] PRADEILLES-DUVAL, R. M. *Evolution de systèmes avec surfaces de discontinuité mobiles : application au délaminage*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France (1992).

[14] SNYDER, M. D., CRUSE, T. A. Boundary integral equation analysis of cracked anisotropic plates. *Int. J. Fract.*, **11**, 315–328 (1975).

[15] TADA, H., PARIS, P., IRWIN, G. The stress analysis of cracks handbook. Tech. rep., Del. Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, USA (1973).

[16] TANAKA, M., ITOH, H. New crack elements for boundary element analysis of elastostatics considering arbitrary stress singularities. *Appl. Math. Modelling*, **11**, 357–363 (1987).

[17] VIRIEUX, J., MADARIAGA, R. Dynamic faulting studied by a finite difference method. *Bull. Seism. Soc. Am.*, **72**, 345–369 (1982).

[18] WEAVER, J. Three-dimensional crack analysis. *Int. J. Solids Struct.*, **13**, 321–330 (1977).

14

Déformations ou contraintes initiales, inclusions, problèmes élastoplastiques

Les problèmes d'élastostatique avec déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^I$ ou contraintes $\boldsymbol{\sigma}^I$ initiales se présentent notamment en thermoélasticité ($\boldsymbol{\varepsilon}^I = \alpha T \boldsymbol{I}$, où T est un champ d'écarts de température et α le coefficient de dilatation thermique, pour un matériau isotrope) ou en micromécanique (cas de matrices élastiques contenant des inclusions, siège de déformations plastiques résiduelles, ou des inhomogénéités). D'autre part, la résolution numérique de problèmes d'élastoplasticité nécessite des méthodes incrémentales-itératives qui utilisent des calculs élastiques avec déformations ou contraintes "initiales".

14.1 Problèmes élastostatiques avec déformations ou contraintes initiales

Déformations et contraintes initiales. La déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ du solide élastique Ω peut être décomposée en déformations initiale $\boldsymbol{\varepsilon}^I$ et élastique $\boldsymbol{\varepsilon}^E$, où $\boldsymbol{\varepsilon}^E$ prend la valeur élastiquement associée à la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ régnant dans Ω :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^E + \boldsymbol{\varepsilon}^I \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^E$$

Un autre point de vue consiste à décomposer le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ en contraintes "initiales" $\boldsymbol{\sigma}^I$ et élastiques $\boldsymbol{\sigma}^E$, telles que :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^E - \boldsymbol{\sigma}^I \qquad \text{avec} \quad \boldsymbol{\sigma}^E = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

Avec ces définitions, on a $\boldsymbol{\sigma}^I = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^I$, mais par contre $\boldsymbol{\sigma}^E \neq \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^E$ en général.

Equations locales et conditions aux limites. Un chargement (forces de volume ρF, efforts de contact $\boldsymbol{t}^D$ sur S_{T}, déplacement imposé $\boldsymbol{u}^D$ sur S_u) est par ailleurs appliqué au solide Ω. L'équation d'équilibre et les conditions aux limites en efforts revêtent l'une des deux formes suivantes, selon le point de vue adopté (déformations

ou contraintes initiales) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} &= \operatorname{div}(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^I) - \rho\boldsymbol{F} \qquad \text{ou} \quad \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^I) - \rho\boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{t}^D + (\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^I).\boldsymbol{n} \qquad \text{ou} \quad \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{t}^D + (\boldsymbol{\sigma}^I).\boldsymbol{n} \end{aligned}$$

EQUATION INTÉGRALE EN DÉPLACEMENT. Dans tout le chapitre, on ne considère pour simplifier que l'emploi de la solution de Kelvin, de loin la plus fréquemment utilisée en pratique. L'équation intégrale en déplacements (4.31) est applicable au problème élastique avec déformations ou contraintes initiales, les forces de volume au second membre étant égales à $\rho\boldsymbol{F} - \operatorname{div}(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^I)$ ou $\rho\boldsymbol{F} - \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^I)$. En déformations initiales, cela donne :

$$\begin{aligned} \bar\kappa u_k(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \left\{ [u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - f_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ = \int_\Omega [\rho F_i(\boldsymbol{y}) - C_{ijab}\varepsilon^I_{ab,j}(\boldsymbol{y})] U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{14.1}$$

où $\bar\kappa = 0$ (Ω borné) ou $\bar\kappa = 1$ ($\mathbb{R}^3 - \Omega$ borné) ; la notation $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ est un raccourci pour $\boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f} = (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^I).\boldsymbol{n}$, qui est donc distinct du vecteur contrainte $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}$. On peut alors intégrer par parties l'intégrale de volume contenant $\boldsymbol{\varepsilon}^I$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega C_{ijab}\varepsilon^I_{ab,j}(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \\ &= \int_{\partial\Omega} C_{ijab}\varepsilon^I_{ab}(\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}S_y - \int_\Omega \varepsilon^I_{ij}(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,\mathrm{d}V_y \end{aligned}$$

(la dernière intégrale de volume étant convergente puisque $\Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \sim |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-2}$) et incorporer ce résultat dans (14.1). Puisque :

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T}^n(\boldsymbol{u}) - (\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^I).\boldsymbol{n} = \boldsymbol{f} - (\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^I).\boldsymbol{n}$$

on obtient une équation intégrale reliant $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n}$ sur la frontière de Ω :

$$\begin{aligned} \bar\kappa u_k(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} \left\{ [u_i(\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{x})] T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ = \int_\Omega \left[\rho F_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varepsilon^I_{ij}(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right] \mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{14.2}$$

De même, le déplacement en un point intérieur $\boldsymbol{x} \in \Omega, \boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$ admet la représentation :

$$\begin{aligned} u_k(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_\Omega \left[\rho F_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \varepsilon^I_{ij}(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right] \mathrm{d}V_y \end{aligned} \tag{14.3}$$

Supposant la distribution de déformations initiales $\boldsymbol{\varepsilon}^I$ connue, la résolution numérique de l'équation intégrale (14.2) repose sur les notions développées au chapitre 3, et notamment les méthodes analytique (transformation en intégrales de frontière) ou numérique (utilisation de "cellules d'intégration") pour l'évaluation des intégrales de domaine connues (section 3.6).

Représentation des déformations ou des contraintes aux points intérieurs. Il est souvent important de pouvoir évaluer les déformations ou contraintes, issues de la représentation (14.3), aux points intérieurs au domaine ; en particulier cette étape est cruciale pour la résolution de problèmes d'élastoplasticité. Ceci nécessite la dérivation par rapport aux coordonnées du point intérieur $\boldsymbol{x}$ de la représentation intégrale (14.3). A ce stade surgit une difficulté technique : la dérivation de (14.3) par rapport à x_ℓ nécessite en particulier le calcul de :

$$I_{k\ell}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \int_\Omega \varepsilon^I_{ij}(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y$$

Or, les dérivées $\Sigma^k_{ij,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ présentent une singularité en $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{-3}$, qui n'est pas intégrable sur Ω, et on ne peut donc pas calculer $I_{k\ell}(\boldsymbol{x})$ par simple dérivation sous le signe intégral. Cette difficulté, qui ne se manifeste qu'en présence de déformations (ou contraintes) initiales, est sérieuse ; ce problème était incorrectement traité dans la littérature jusqu'à ce que Bui [3] donne l'expression correcte de $I_{k\ell}(\boldsymbol{x})$:

$$I_{k\ell}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega{}^\star \varepsilon^I_{ij}(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ij,\bar{\ell}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y - 2\mu \left[\frac{8-10\nu}{15(1-\nu)} \varepsilon^I_{k\ell}(\boldsymbol{x}) - \frac{1-5\nu}{15(1-\nu)} \varepsilon^I_{aa}(\boldsymbol{x}) \delta_{k\ell} \right] \tag{14.4}$$

faisant intervenir un terme libre et une intégrale qui doit être calculée au sens des valeurs principales de Cauchy. La correction de Bui repose sur l'isolation de la singularité à l'aide d'un voisinage d'exclusion $v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ sphérique *puis* la dérivation de l'intégrale de domaine par rapport à x_ℓ. Le domaine d'intégration $\Omega - v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ dépend ainsi de $\boldsymbol{x}$ par l'intermédiaire de $v_\varepsilon(\boldsymbol{x})$, et la correction porte sur le terme de *dérivée convective*.

Régularisation de la représentation des déformations ou contraintes aux points intérieurs. L'emploi de la formule (14.4) implique l'évaluation d'intégrales de domaine en valeur principale de Cauchy, ce qui est toujours délicat. C'est pourquoi nous montrons maintenant comment l'approche de régularisation indirecte permet, au moyen d'une identité intégrale associée à un état auxiliaire, de reformuler la représentation sous forme intégrable.

Considérons un tenseur de déformations initiales $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ constant, donc en particulier géométriquement compatible. En l'absence d'efforts de volume et de liaisons cinématiques, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ induit dans Ω l'état élastique défini à un mouvement rigidifiant près par :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\varepsilon}^0.\boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^E(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0} \tag{14.5}$$

La représentation (14.3) appliquée à cet état auxiliaire donne l'identité, vraie pour tout tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ symétrique :

$$\left\{ \delta_{ki} x_j + \int_{\partial\Omega} y_j T^k_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y - \int_\Omega \Sigma^k_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y \right\} \varepsilon^0_{ij} = 0 \tag{14.6}$$

On peut donc en particulier appliquer cette identité à la valeur $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \boldsymbol{\varepsilon}^I(\boldsymbol{x})$, ce qui

permet de réécrire la représentation (14.3) sous la forme :

$$\begin{aligned} u_k(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ t_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - u_i(\boldsymbol{y}) T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &+ \int_\Omega \left[\rho F_i(\boldsymbol{y}) U_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + [\varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{y}) - \varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{x})] \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right] \mathrm{d}V_y \\ &+ \varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{x}) \left\{ \delta_{ki} x_j + \int_{\partial\Omega} y_j T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \right\} \end{aligned} \tag{14.7}$$

La présence du terme $[\boldsymbol{\varepsilon}^I(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{\varepsilon}^I(\boldsymbol{x})]$ dans l'intégrale de volume permet de prendre la dérivée sous le signe intégral de cette dernière sans difficulté, à condition que $\boldsymbol{\varepsilon}^I \in C^{0,\alpha}$ en $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. En effet, on a sous cette hypothèse :

$$[\varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{y}) - \varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{x})] \Sigma_{ij,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \sim |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^{-3+\alpha}$$

et cette quantité est donc intégrable, au sens classique, sur Ω. La dérivée de (14.7) par rapport à $\boldsymbol{x}$ donne alors, compte tenu de la propriété (4.13) d'échange des dérivations de la solution de Kelvin par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$:

$$\begin{aligned} u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ u_i(\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y}) U_{i,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &- \int_\Omega \left[\rho F_i(\boldsymbol{y}) U_{i,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + [\varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{y}) - \varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{x})] \Sigma_{ij,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right] \mathrm{d}V_y \\ &+ \varepsilon_{ij,\ell}^I(\boldsymbol{x}) \left\{ \delta_{ki} x_j + \int_{\partial\Omega} y_j T_i^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y - \int_\Omega \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y \right\} \\ &+ \varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{x}) \left\{ \delta_{ki} \delta_{\ell j} - \int_{\partial\Omega} y_j \Sigma_{aj,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_a(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \right\} \end{aligned}$$

Le facteur de $\varepsilon_{ij,\ell}^I(\boldsymbol{x})$ dans l'équation ci-dessus est nul en raison de l'identité (14.6), et celui de $\varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{x})$ peut être transformé par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} y_j \Sigma_{aj,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) n_a(\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y &= \int_{\partial\Omega} D_{\ell a} y_j \Sigma_{aj}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ &= (1 - \bar{\kappa}) \delta_{ki} \delta_{\ell j} + \int_{\partial\Omega} n_\ell(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \end{aligned}$$

On obtient ainsi la forme régularisée de la représentation intégrale du gradient du déplacement en un point intérieur $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{aligned} u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) = &\int_{\partial\Omega} \left\{ u_i(\boldsymbol{y}) n_j(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) - t_i(\boldsymbol{y}) U_{i,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right\} \mathrm{d}S_y \\ &- \int_\Omega \left[\rho F_i(\boldsymbol{y}) U_{i,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + [\varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{y}) - \varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{x})] \Sigma_{ij,\ell}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \right] \mathrm{d}V_y \\ &+ \varepsilon_{ij}^I(\boldsymbol{x}) \left\{ \bar{\kappa} \delta_{ki} \delta_{\ell j} - \int_{\partial\Omega} n_\ell(\boldsymbol{y}) \Sigma_{ij}^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \right\} \end{aligned} \tag{14.8}$$

Commentaires. Comme les autres expressions régularisées proposées dans cet ouvrage, le résultat (14.8) est intéressant pour les applications, car il permet d'éviter le calcul numérique de la valeur principale (14.4), qui est délicat. Il n'est valable que pour la solution de Kelvin, car son établissement a utilisé l'interversion des dérivées par rapport à $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$. La formulation en contraintes initiales s'obtient par simple substitution de $\boldsymbol{\varepsilon}^I$ par $\boldsymbol{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}^I$ dans (14.8).

14.2 Champs élastiques créés par des inclusions

Un des champs d'application des problèmes d'élasticité avec déformations initiales est la micromécanique (Mura [10]), qui traite notamment de solides élastiques Ω contenant des *inclusions* (une région $D \subset \Omega$ est le siège d'une déformation initiale $\boldsymbol{\varepsilon}^I$, cette dernière étant nulle hors de D) ou des *inhomogénéités* (une région $D \subset \Omega$ est constituée d'un matériau de constantes élastiques $\boldsymbol{C}^\star$ différent de la *matrice* $\Omega - D$, de constantes élastiques $\boldsymbol{C}$). On s'intéresse aux champs de déformations et de contraintes induits par la présence de l'inclusion ou l'inhomogénéité D, avec des forces de volume $\boldsymbol{F}$ nulles. Le cas où $\Omega = \mathbb{R}^3$ (matrice infinie) a fait l'objet de nombreuses études (voir [10] et les nombreuses références citées dans cet ouvrage), l'évaluation des représentations intégrales conduisant à des solutions exactes analytiques.

Représentation du tenseur de déformation. La représentation intégrale régularisée (14.8) du gradient de déplacement s'applique à cette catégorie de problèmes. Considérons le cas de l'inclusion dans une matrice infinie ($\Omega = \mathbb{R}^3$). L'application de (14.8) séparément à l'inclusion D et à la matricce $\mathbb{R}^3 - D$ puis l'addition des deux relations obtenues donne, compte tenu des conditions de raccord (déplacement continu et tractions opposées) et de l'opposition des normales :

$$u_{k,\ell}(\boldsymbol{x}) = -\varepsilon^I_{ij}(\boldsymbol{x}) \int_{\partial D} n_\ell(\boldsymbol{y}) \Sigma^k_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}S_y \\ - \int_D \left[\varepsilon^I_{ij}(\boldsymbol{y}) - \varepsilon^I_{ij}(\boldsymbol{x})\right] \Sigma^k_{ij,\ell}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}V_y \tag{14.9}$$

Cette formule suppose que la résultante des forces de volume $C_{ijab}\varepsilon^I_{ab,j}$ est finie, de sorte que les champs de déplacement $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ décroissent à l'infini selon (4.34). Elle est applicable en tout point de l'espace, $\boldsymbol{n}$ étant prise extérieure au sous-domaine (D ou $\Omega - D$) contenant $\boldsymbol{x}$. La déformation totale $\boldsymbol{\varepsilon}$ apparaît ainsi comme une fonction linéaire de la déformation initiale $\boldsymbol{\varepsilon}^I$ imposée dans l'inclusion.

Pour le cas particulier de déformations initiales $\boldsymbol{\varepsilon}^I$ uniformes dans D ($\varepsilon^I_{ij}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^I_{ij}$), cette dernière permet d'écrire, pour un point $\boldsymbol{x}$ intérieur à l'inclusion D :

$$\varepsilon_{k\ell}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\varepsilon^I_{ij} \int_{\partial\Omega} \left[n_\ell(\boldsymbol{y})\Sigma^k_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + n_k(\boldsymbol{y})\Sigma^\ell_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right] \mathrm{d}S_y = S_{k\ell ij}(\boldsymbol{x})\varepsilon^I_{ij} \tag{14.10}$$

on voit apparaitre le résultat classique selon lequel le tenseur des déformations total $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ à l'intérieur de l'inclusion dépend linéairement de $\boldsymbol{\varepsilon}^I$. Si D est un ellipsoïde, on peut montrer par un calcul direct de l'intégrale de (14.10) que $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$ est uniforme dans D : $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{S}$ est le *tenseur d'Eshelby.*

CAS DE L'INHOMOGÉNÉITÉ : MÉTHODE DE L'INCLUSION ÉQUIVALENTE. On suppose que D est une inhomogénéité. Si l'état de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ et de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^0 = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^0$ est connu dans Ω en l'absence d'inhomogénéité (c'est-à-dire pour $\boldsymbol{C}^\star = \boldsymbol{C}$), on peut alors introduire une *déformation initiale équivalente* $\boldsymbol{\varepsilon}^\star$ permettant de simuler l'inhomogénéité par une inclusion fictive. En effet, on aura respectivement dans D :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^0 &= \boldsymbol{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^0 - \boldsymbol{\varepsilon}^\star) \qquad \text{(inclusion)} \\ &= \boldsymbol{C}^\star : (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^0) \qquad \text{(inhomogénéité)} \end{aligned}$$

D'autre part, $\boldsymbol{\varepsilon}$ dépend linéairement de $\boldsymbol{\varepsilon}^\star$ par l'intermédiaire de la représentation (14.9), de sorte que les égalités ci-dessus relient $\boldsymbol{\varepsilon}^\star$ à $\boldsymbol{\varepsilon}^0$. Par exemple, si $\boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\sigma}^0$ sont uniformes, $\boldsymbol{\varepsilon}^\star$ est également uniforme, de sorte que (14.10) permette d'écrire :

$$\boldsymbol{C}^\star : (\boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{S} : \boldsymbol{\varepsilon}^\star - \boldsymbol{\varepsilon}^\star) = \boldsymbol{C} : (\boldsymbol{S} : \boldsymbol{\varepsilon}^\star + \boldsymbol{\varepsilon}^0)$$

qui permet de trouver $\boldsymbol{\varepsilon}^\star$ connaissant $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}^\star$, $\boldsymbol{\varepsilon}^0$. Le calcul d'états élastiques en présence d'une inhomogénéité est ainsi ramené au cas d'une inclusion.

INCLUSIONS OU INHOMOGÉNÉITÉS DANS UNE MATRICE FINIE. L'approche présentée permet d'envisager le calcul numérique de champs élastiques créés par la présence d'inclusions dans une matrice finie. Dans ce cas, il est nécessaire de prescrire des conditions aux limites sur la frontière extérieure $\partial\Omega$. Le problème d'élasticité doit alors en général être résolu numériquement : l'équation intégrale (14.2) est discrétisée suivant les techniques discutées au chapitre 3, puis les champs de déformation et de contraintes en tout point sont calculés au moyen de (14.8).

14.3 Elastoplasticité en petites transformations

La méthode des équations intégrales est applicable à des problèmes comportant des non-linéarités de comportement (élastoplasticité, viscoplasticité) ou géométriques (grandes transformations). Ces aspects ont été développés par exemple par Mukherjee [8], Mukherjee et Chandra [9] pour les problèmes d'évolution quasistatique. Banerjee [1], Kontoni et Beskos [5] proposent des formulations pour l'élastoplasticité dynamique.

Nous montrons succinctement comment formuler au moyen d'équations intégrales les problèmes d'élastoplasticité en petites transformations. Cette approche, incrémentale et itérative, fait usage de problèmes d'élasticité avec déformations ou contraintes initiales. Contrairement aux cas évoqués précédemment (déformations thermiques, inclusions...), les déformations initiales ne sont pas connues à l'avance mais doivent être déterminées itérativement pour chaque incrément de temps, de manière à vérifier le critère d'élasticité et la loi d'écoulement plastique.

FORMULATION INCRÉMENTALE. Les problèmes élastoplastiques sont des problèmes d'évolution : l'état à un instant donné dépend de l'histoire de chargement. Les problèmes quasistatiques n'ont pas d'échelle de temps physique : on décrit l'évolution au moyen d'un paramètre cinématique, appelé "temps" pour simplifier. Les problèmes élastoplastiques sont formulés de manière incrémentale : on s'intéresse aux incréments

de déformations, contraintes... induits par un incrément de chargement. De nombreuses stratégies de résolution ont été proposées dans la littérature, parmi lesquelles l'algorithme implicite présenté ci-après (Bonnet et Mukherjee [2]).

Supposons le problème discrétisé à l'aide d'éléments de frontière (support des inconnues $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}$) et de cellules d'intégration. Ces dernières servent à interpoler $\boldsymbol{\varepsilon}^P$ (déformation "initiale" plastique, telle que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^P)$), par des représentations de type éléments finis, sur un sous-domaine *potentiellement plastique* estimé *a priori*[1]. Cette opération conduit à des écritures matricielles pour l'équation intégrale de frontière (14.2) et la représentation intégrale (14.8) du tenseur de déformation discrétisées :

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{u}\} - [\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{t}\} &= [\boldsymbol{Q}]\{\boldsymbol{C} : \varepsilon^{\mathrm{P}}\} \\ \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= [\boldsymbol{A}']\{\boldsymbol{t}\} - [\boldsymbol{B}']\{\boldsymbol{u}\} + [\boldsymbol{Q}']\{\boldsymbol{C} : \varepsilon^{\mathrm{P}}\}\end{aligned}$$

ou encore, en distinguant les valeurs inconnues de $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}$ (regroupées dans un vecteur $\{\boldsymbol{y}\}$) et les données aux limites et procédant aux permutations de colonnes adéquates :

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{y}\} = \{\boldsymbol{f}\} + [\boldsymbol{Q}]\{\boldsymbol{C} : \varepsilon^{\mathrm{P}}\} \tag{14.11}$$

$$\left[\boldsymbol{K}'\right]\{\boldsymbol{y}\} = \{\boldsymbol{f}'\} + [\boldsymbol{Q}']\{\boldsymbol{C} : \varepsilon^{\mathrm{P}}\} \tag{14.12}$$

les vecteurs $\{\boldsymbol{f}\}, \{\boldsymbol{f}'\}$ incorporant les données aux limites. On peut alors reporter $\{\boldsymbol{y}\}$ solution de (14.11) dans (14.12) :

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\boldsymbol{n}\} + [\boldsymbol{S}]\{\boldsymbol{C} : \varepsilon^{\mathrm{P}}\} \tag{14.13}$$

avec les notations :

$$\{\boldsymbol{n}\} = \{\boldsymbol{f}'\} - [\boldsymbol{K}'][\boldsymbol{K}]^{-1}\{\boldsymbol{f}\} \qquad [\boldsymbol{S}] = [\boldsymbol{Q}'] - [\boldsymbol{K}'][\boldsymbol{K}]^{-1}[\boldsymbol{Q}]$$

Ainsi $\{\boldsymbol{n}\}$ désigne la déformation purement élastique, c'est-à-dire pour le même chargement mais en supposant l'absence de déformations plastiques. On élimine alors $\boldsymbol{\varepsilon}^P$ au moyen de la relation de comportement élastique $\boldsymbol{C} : \varepsilon^{\mathrm{P}} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\sigma}$) de façon à réécrire (14.13) comme une relation entre la déformation totale et la contrainte, qui prend en compte l'équilibre et le comportement élastique :

$$[\boldsymbol{S}]\{\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{n}\} + [\boldsymbol{I}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{14.14}$$

Considérant maintenant le point de vue incrémental, on s'intéresse à l'évolution de la structure entre les instants t_n et t_{n+1}. L'équation (14.14) donne par différence :

$$[\boldsymbol{S}]\{\Delta\boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n\} - \{\Delta n_n\} + [\boldsymbol{I}]\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n\} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{14.15}$$

avec la notation $\Delta()_n = ()_{n+1} - ()_n$. Il reste à prendre en compte le comportement plastique. Nous choisissons ici de suivre la démarche de Simo et Taylor [11], qui proposent un *algorithme de retour radial* (ARR) permettant le calcul de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, en fonction de l'état de la structure à l'instant t_n et pour un incrément de déformation $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n$

[1] Les cellules d'intégration doivent idéalement discrétiser la portion de Ω supportant des déformations plastiques non nulles, qui n'est toutefois pas connue *a priori*.

donné ; notons symboliquement par $\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \bar{e}^{\mathrm{P}}_n, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ l'action de (ARR), $\bar{e}^{\mathrm{P}}$ désignant la déformation plastique équivalente cumulée :

$$\bar{e}^{\mathrm{P}} = \int_0^t \sqrt{\tfrac{2}{3}}(\boldsymbol{d}^p : \boldsymbol{d}^p) d\tau$$

L'ARR présente l'intérêt de tenir compte de l'utilisation d'un pas de temps fini et donc d'éviter une formulation en variables taux. Le report dans (14.15) conduit au système d'équations non-linéaires :

$$\{G(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n)\} \equiv [\boldsymbol{S}]\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \bar{e}^{\mathrm{P}}_n, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n) - \boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{C}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n\} - \{\Delta n_n\} + [\boldsymbol{I}]\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n\} = \{\boldsymbol{0}\} \tag{14.16}$$

dont l'inconnue principale est $\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$, valeur de l'incrément de déformation compatible avec à la fois le maintien de l'équilibre au cours du pas de chargement et le comportement élastoplastique. La résolution en $\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ nécessite une méthode itérative (Newton) : la correction additive $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^i_n = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}_n - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^i_n$ à $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^i_n$ vérifie l'équation linéaire :

$$([\boldsymbol{S}][\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^i_{n+1}] - [\boldsymbol{I}])\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}^i_n\} = \{G(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^i_n)\} \tag{14.17}$$

dans laquelle apparaissent les *opérateurs tangents* local :

$$\boldsymbol{C}_{n+1} = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n}(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \bar{e}^{\mathrm{P}}_n, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n)$$

et global $([\boldsymbol{S}][\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^i_{n+1}] - [\boldsymbol{I}])$. Ces itérations sont menées jusqu'à convergence de (14.16), et la valeur ainsi déterminée de $\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ permet d'actualiser l'état mécanique :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n \qquad \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \bar{e}^{\mathrm{P}}_n, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n)$$

Donnons pour compléter l'ARR associé à l'élasticité isotrope et à un critère de plasticité de Von Mises ($\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{\sigma})$: déviateur de contrainte, $\boldsymbol{\alpha}$: variable tensorielle d'écrouissage cinématique) :

$$\sqrt{\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi}} - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\kappa(\bar{e}^{\mathrm{P}}) \leq 0 \qquad (\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{\alpha})$$

Les déformations plastiques sont supposées incompressibles. Si le déviateur élastique :

$$\boldsymbol{\xi}^T_{n+1} = \boldsymbol{s}_n + 2\mu\Delta\boldsymbol{e}_n - \boldsymbol{\alpha}_n$$

($\boldsymbol{e}$: déviateur de déformation) viole le critère, on a [11] :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = K\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n : (\boldsymbol{m}\delta \otimes \boldsymbol{m}\delta) + \boldsymbol{s}_{n+1} \tag{14.18}$$

$$\boldsymbol{s}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \sqrt{\tfrac{2}{3}}(\kappa_{n+1} + \Delta H_n)\hat{\boldsymbol{n}} \tag{14.19}$$

$$\bar{e}^{\mathrm{P}}_{n+1} = \bar{e}^{\mathrm{P}}_n + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\gamma$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{\xi}^T_{n+1} / \left|\boldsymbol{\xi}^T_{n+1}\right|$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\Delta H_n\hat{\boldsymbol{n}} \tag{14.20}$$

avec $K = (3\lambda+2\mu)/3$: module de compressibilité, et $\Delta H_n = H_{n+1} - H_n$, $H_n = H(\bar{e}_n^{\mathrm{P}})$, H étant donnée. Le scalaire γ est solution d'une équation non-linéaire exprimant le respect du critère à l'instant t_{n+1} :

$$\left|\boldsymbol{\xi}_{n+1}^T\right| - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\kappa(\bar{e}_n^{\mathrm{P}} + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\gamma) - 2\mu\gamma - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\Delta H_n = 0 \tag{14.21}$$

Enfin, l'opérateur tangent local est donné [11] par :

$$\boldsymbol{C}_{n+1} = \boldsymbol{C} - 2\mu\left[(\beta-\delta)\hat{\boldsymbol{n}}\otimes\hat{\boldsymbol{n}} + (1-\beta)(\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{m}\delta\otimes\boldsymbol{m}\delta)\right] \tag{14.22}$$

avec $2I_{abcd} = \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}$ et les constantes :

$$\beta = \frac{1}{\left|\boldsymbol{\xi}_{n+1}^T\right|}\sqrt{\tfrac{2}{3}}(\Delta H_n + \kappa_{n+1}) \qquad \delta = \frac{\kappa'_{n+1} + H'_{n+1}}{\kappa'_{n+1} + H'_{n+1} + 3\mu}$$

Discussion. Ce type d'approche s'étend aux structures en matériau élasto-viscoplastiques, et aussi à certains problèmes avec non-linéarités géométriques (grandes transformations), voir Mukherjee et Chandra [9]. Dans d'autres travaux (Maier et collègues [7]), les équations intégrales variationnelles (chapitre 10) sont appliquées à l'élastoplasticité. La question de savoir qui, des éléments finis ou des équations intégrales, est le plus performant pour les problèmes non-linéaires est controversée. Le développement d'algorithmes pour la mécanique non-linéaire est actuellement beaucoup plus intense dans le domaine des méthodes d'éléments finis. La place relative occupée dans la littérature consacrée aux méthodes intégrales par les formulations et applications concernant la mécanique non-linéaire est assez faible. Ceci doit tenir à plusieurs facteurs :

- Le meilleur avancement de l'état de l'art en éléments finis.
- La relative complexité des formulations intégrales, notamment pour ce qui est du calcul des contraintes intérieures. L'introduction des cellules d'intégration, qui sont en fait (du point de vue de la création et manipulation des données) des éléments finis de domaine, affaiblit les avantages liés au traitement à la frontière. La nécessité de calculer numériquement la formule de représentation des contraintes (ou déformations) intérieures en de nombreux points peut induire des coûts de calcul importants ; de plus, le calcul des intégrales de domaines singulières, s'il ne pose pas de problème de fond grâce à la la représentation régularisée (14.8), demande néanmoins un traitement soigneux.
- Des limitations sur les classes de matériaux envisageables (ils doivent avoir des propriétés élastiques homogènes par morceaux, sans quoi les problèmes élastiques qui interviennent dans l'approche incrémentale/itérative ne sont pas traitables par équations intégrales).

Toutefois, il faut aussi remarquer que :

- La discrétisation du domaine en cellules d'intégration ne concerne que le domaine support de déformations plastiques non nulles. La méthode des équations intégrales

sera donc d'autant plus intéressante de ce point de vue que la zone plastifiée est petite devant le domaine d'étude (il est alors intéressant d'en connaître une "majoration a priori", c'est-à dire pouvoir donner a priori un domaine $\mathcal{P} \subset \Omega$ qui englobe avec certitude toute la région plastifiée).

- Corollairement, l'approche par équations intégrales est en particulier intéressante, ici encore, pour les problèmes posés en milieu infini, la zone plastifiée attendue étant finie. De tels problèmes sont notamment posés par le calcul d'ouvrages (tunnels...) géotechniques.
- Contrairement aux méthodes d'éléments finis, les champs de contraintes calculés à partir de (14.8) vérifient l'équation locale d'équilibre quel que soit $\boldsymbol{\varepsilon}^I$ ou $\boldsymbol{\sigma}^I$. La méthode itérative doit donc assurer le respect du critère et de la loi d'écoulement plastique, mais la vérification de l'équilibre des contraintes obtenues est inutile.

Les travaux à venir permettront sans doute de mieux cerner les performances des méthodes d'équations intégrales appliquées aux problèmes non linéaires en mécanique des solides. Il semble que fort peu de calculs numériques élastoplastiques tridimensionnels par éléments de frontière existent dans la littérature.

14.4 Exemples de calculs élastoplastiques par éléments de frontière

Tous les exemples qui suivent sont en déformations planes.

ELASTOPLASTICITÉ QUASI-STATIQUE EN PETITES TRANSFORMATIONS (TELLES ET BREBBIA [12]). Un tunnel de section circulaire (rayon r) est creusé dans un mas-

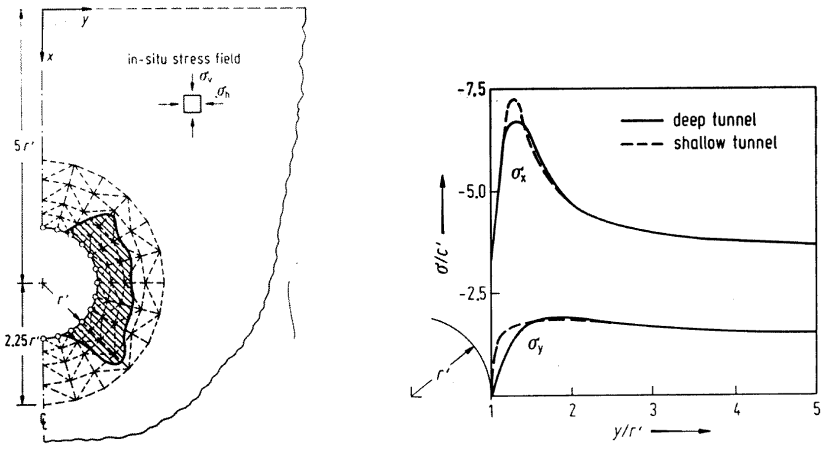

Figure 14.1: Tunnel dans un massif semi-infini: maillage et zone plastique (à gauche) ; contraintes le long d'un axe horizontal (à droite) comparées avec celles obtenues pour le tunnel dans un massif infini (d'après [12]).

sif semi-infini. Le matériau considéré (roche) vérifie un critère de Drucker-Prager. Le massif est considéré comme initialement soumis à un état de contraintes *in situ* $\sigma_x = p + \rho g x, \sigma_y = 0.4\sigma_x$. On charge alors la paroi du tunnel jusqu'à relâchement des contraintes *in situ* sur celle-ci.

Ce travail utilise une méthodes d'éléments de frontière reposant sur la solution élémentaire du demi-plan avec surface libre (annexe 4.3), de sorte que le maillage ne concerne que la paroi du tunnel (éléments de frontière) et une couronne autour de celle-ci (cellules d'intégration). La figure 14.1 montre le maillage utilisé, la zone plastique finale calculée et les contraintes σ_{xx}, σ_{yy} le long d'une ligne horizontale passant par le centre de la section du tunnel (trait tireté), comparées avec celles obtenues pour le tunnel dans les mêmes conditions de chargement mais situé dans un massif infini (trait

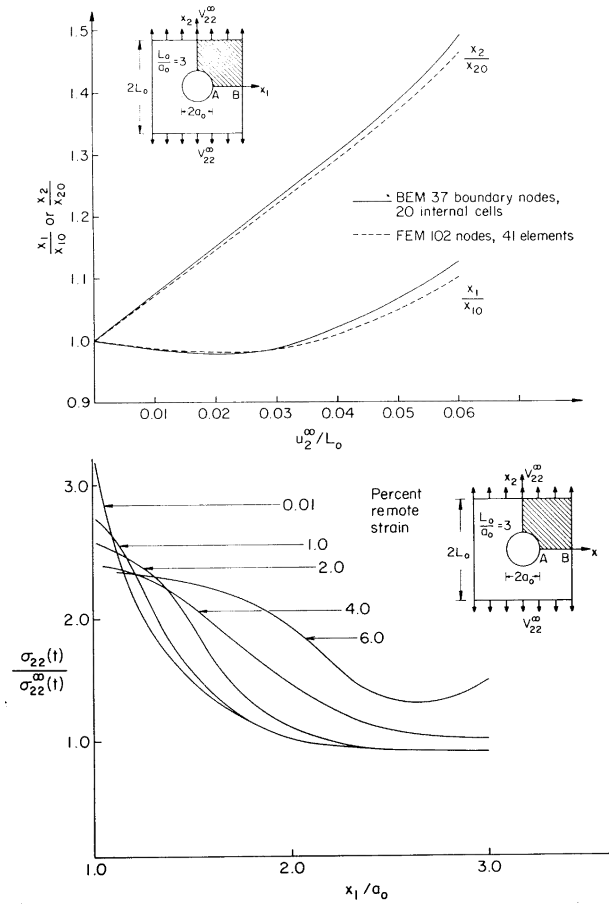

Figure 14.2: Plaque trouée viscoplastique en grandes transformations : histoire de déplacement des points A et C (en haut), contrainte σ_{22} le long de AB à divers stades du chargement (en bas), (d'après [9]).

plein). Ce type de problème est évidemment une application idéale des éléments de frontière : on évite totalement la représentation de la surface libre, et on voit que la taille de la zone plastique est de l'ordre du rayon du tunnel.

ELASTOVISCOPLASTICITÉ QUASISTATIQUE EN GRANDES TRANSFORMATIONS (MUKHERJEE ET CHANDRA [9]). Une plaque carrée (côté $2L_0$) comportant un trou central circulaire (rayon a_0) est soumise à un déplacement vertical uniforme imposé $\pm u_2^\infty$ (variable de contrôle) sur deux faces opposées, que l'on fait varier de 0 à $0.06L_0$. Elle est constituée d'un acier élastoviscoplastique (modèle de Hart). La figure 14.2 (haut) représente les déplacements (respectivement horizontaux et verticaux) des points situés initialement en $(a_0, 0)$ et $(0, a_0)$, calculés par éléments de frontière (37 nœuds frontière, 20 cellules d'intégration) et comparés à d'autres résultats numériques obtenus par éléments finis (41 éléments, 102 nœuds). Ils présentent entre eux une bonne concordance. La figure 14.2 (bas) donne les valeurs numériques, à différentes étapes du chargement, pour la contrainte σ_{22} le long de l'axe $y_2 = 0$. Les auteurs mentionnent des temps de calcul respectifs de 297s et 502s (sur IBM 370/178) pour les deux types de simulations.

ELASTOPLASTICITÉ DYNAMIQUE (ISRAIL ET BANERJEE [4]). Une cavité circulaire souterraine (rayon R), située dans un massif semi-infini à surface libre (centre de la cavité à une profondeur $2R$, figure 14.3) est soumise à une pression interne $p(t)$ "triangulaire" sur l'intervalle de temps $t \in [0, 2t_r]$. Le matériau constitutif du massif est

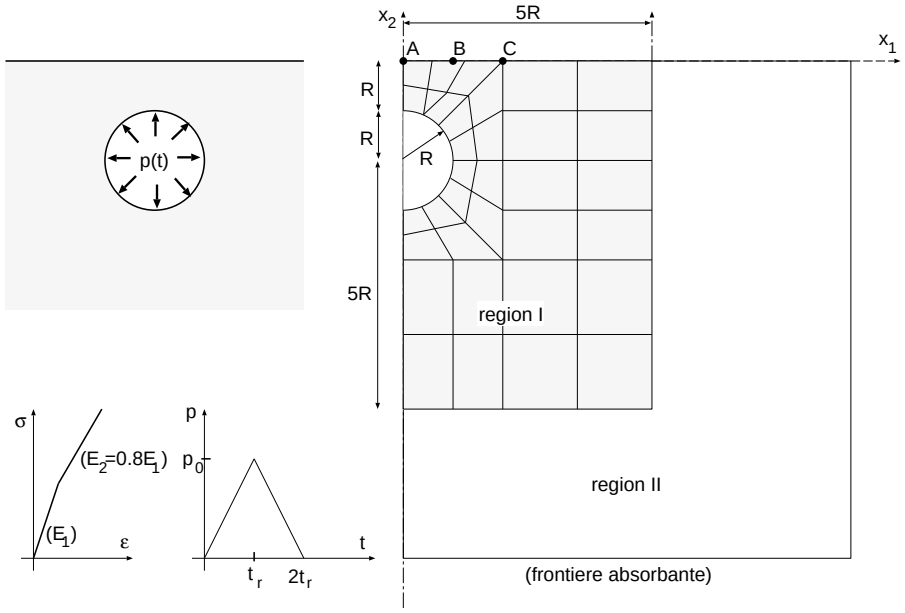

Figure 14.3: Explosion dans une cavité souterraine (d'après [4]) : définition du problème et maillage.

supposé isotrope et vérifie le critère de Von Mises. La pression maximum $p(t_r) = p_0$ est égale au double du seuil σ_0 du critère de Mises, et l'écrouissage uniaxial H vaut 0.8. Le massif est scindé en une région I, discrétisée à l'aide de 34 cellules d'intégration (quadrilatères à 8 nœuds), et une région II, supposée ne jamais entrer en plasticité (figure 14.3) ; les éléments de frontière curvilignes sont quadratiques à 3 nœuds.

La figure 14.4 montre l'histoire calculée des déplacements verticaux (normalisés par E/p_0R) aux points $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ indiqués sur la figure 14.3, en supposant le massif élastique

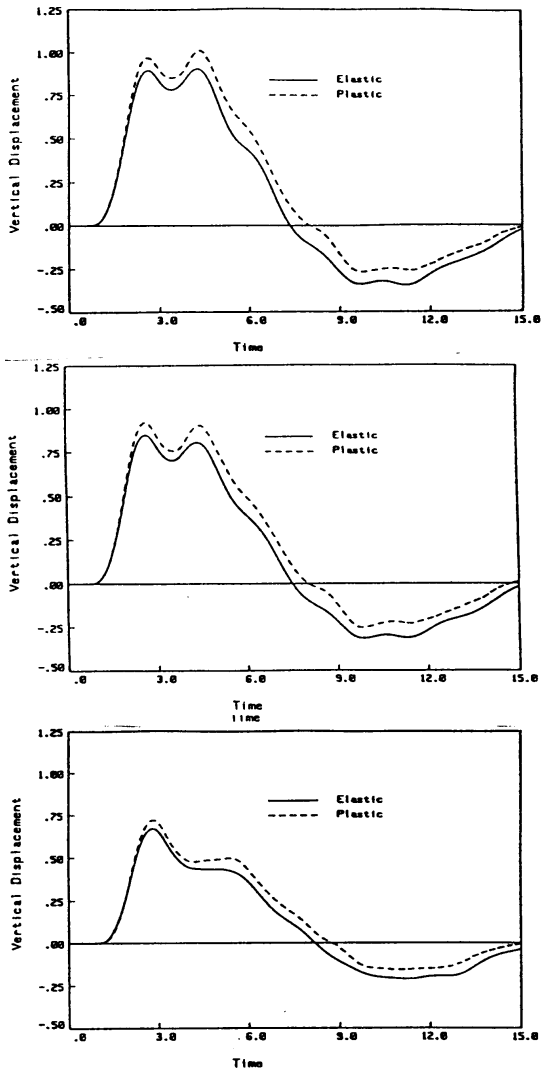

Figure 14.4: Explosion dans une cavité souterraine : histoire calculée du déplacement vertical (normalisé par E/p_0R) aux points A, B, C (d'après [4]).

(courbes pleines) ou élastique-plastique (courbes en tireté).

Références bibliographiques

[1] AHMAD, S., BANERJEE, P. K. Inelastic Transient elastodynamic analysis of three-dimensional problems by BEM. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **29**, 371–390 (1990).

[2] BONNET, M., MUKHERJEE, S. The consistent tangent operator and BEM formulations of regular and sensitivity problems in elasto-plasticity. In Shan-Fu Shen, Paul Dawson (eds.), *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pp. 33–38. A. A. Balkema (1995). (Numiform'95, USA).

[3] BUI, H. D. Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations. *Int. J. Solids Struct.*, **14**, 935–939 (1978).

[4] ISRAIL, A. S. M., BANERJEE, P. K. Advanced development of boundary element method for two-dimensional dynamic elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.*, **29**, 1433–1451 (1992).

[5] KONTONI, D. P. N., BESKOS, D. E. Application of the DR-BEM to inelastic dynamic problems. In J. Dominguez C. A. Brebbia, F. Paris (eds.), *Boundary Elements XIV*. Comp. Mech. Publ., Southampton (1992).

[6] LEU, L. J., MUKHERJEE, S. Sensitivity analysis and shape optimization in nonlinear solid mechanics. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **12**, 251–260 (1993).

[7] MAIER, G., MICCOLI, S., NOVATI, G., SIRTORI, S. A Galerkin symmetric boundary-element method in plasticity: formulation and implementation. In J. H. Kane, G. Maier, N. Tosaka, S. N. Atluri (eds.), *Advances in Boundary Element Techniques*, pp. 288–328. Springer-Verlag (1993).

[8] MUKHERJEE, S. *Boundary element methods in creep and fracture*. Elsevier (1982).

[9] MUKHERJEE, S., CHANDRA, A. Nonlinear solid mechanics. In D. E. Beskos (ed.), *Boundary element methods in mechanics.*, pp. 285–332. North Holland (1987).

[10] MURA, T. *Micromechanics of Defects in Solids*. Martinus Nijhoff (1982).

[11] SIMO, J. C., HUGHES, T. J. R. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag (1998).

[12] TELLES, J. C. F., BREBBIA, C. A. Boundary elements: new developments in elastoplastic analyses. *Appl. Math. Modelling*, **5**, 376–382 (1981).

[13] TELLES, J. C. F., CARRER, J. A. M. Implicit procedures for the solution of elastoplastic problems by the boundary element method. *Mathl. Comput. Modelling*, **15**, 303–311 (1991).

[14] TELLES, J. C. F., CARRER, J. A. M. Static and transient dynamic nonlinear stress analysis by the boundary element method with implicit techniques. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **14**, 65–4 (1994).

[15] WEI, X., LEU, L. J., CHANDRA, A., MUKHERJEE, S. Shape optimization in elasticity and elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.*, **31**, 533–550 (1994).

Annexes

A

Opérateurs différentiels tangentiels et intégration par parties sur des surfaces

Opérateurs différentiels tangentiels Soit S une surface deux fois continûment différentiable (C^2), fermée ou à bord ∂S, de normale unitaire $\boldsymbol{n}$. Appelons $\boldsymbol{m\nu}$ la normale unitaire sortante à ∂S située dans le plan tangent à S, et $\boldsymbol{m\tau}$ la tangente unitaire à ∂S définie par $\boldsymbol{m\tau} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{\nu}$.

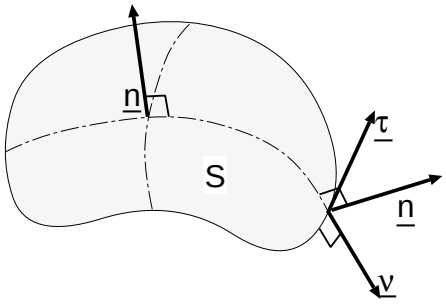

Figure A.1: Surface à bord: notations.

Considérons un champ scalaire $f(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} \in S$. Il se peut que la fonction f ne soit pas définie hors de S (c'est le cas par exemple si S est une fissure et si f est le saut de déplacement à travers S, ou encore si $f = n_i$). Dans ce cas, les dérivées cartésiennes $f_{,i}$ ne sont pas définies. On peut toutefois étendre le domaine de définition f à un voisinage V de S dans $\mathbb{R}^3$ par l'introduction d'un prolongement $\hat{f}$ de f sur V défini comme :

$$(\boldsymbol{y} \in V) \qquad \hat{f}(\boldsymbol{y}) = f(P(\boldsymbol{y})) \tag{A.1}$$

$P(\boldsymbol{y})$ étant la projection orthogonale de $\boldsymbol{y} \in V$ sur S. La restriction de $\hat{f}$ à S est clairement égale à f. De plus, la dérivée normale de $\hat{f}$ est nulle : le vecteur $\boldsymbol{\nabla}\hat{f}$ est tangent à S. Le *gradient tangentiel* de f, noté $\boldsymbol{\nabla}_S$, est alors défini par :

$$\boldsymbol{\nabla}_S f = \boldsymbol{\nabla}_S \hat{f} = \boldsymbol{\nabla}\hat{f} \tag{A.2}$$

On lui associe des dérivées partielles tangentielles D_r par projection sur les axes cartésiens :

$$\boldsymbol{\nabla}_S f = \hat{D}_r f \boldsymbol{e}_r \tag{A.3}$$

On remarque que, si f est un champ scalaire arbitraire défini sur V, le gradient tangentiel $\boldsymbol{\nabla}_S f$ est donné par :

$$\boldsymbol{\nabla}_S f = \boldsymbol{\nabla} f - \boldsymbol{n} f_{,n} \qquad D_r f = f_{,r} - n_r f_{,n} \tag{A.4}$$

INTÉGRATION PAR PARTIES DE COMBINAISONS DE DÉRIVÉES PARTIELLES CARTÉSIENNES. L'identité classique de Stokes pour un champ de vecteurs $\boldsymbol{u}$ défini sur V s'écrit, en composantes cartésiennes :

$$\int_S e_{abc} n_a u_{c,b} \, \mathrm{d}S = \int_{\partial S} u_a \tau_a \, \mathrm{d}s \tag{A.5}$$

Spécialisons la au champ de vecteurs $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_j f$, soit $u_c = \delta_{cj} f$. Cela conduit aux deux variantes suivantes de (A.5) :

$$\int_S e_{jab} f_{,b} n_{,a} \, \mathrm{d}S = \int_{\partial S} f \tau_j \, \mathrm{d}s \tag{A.6}$$

$$\int_S D_{rs} f \, \mathrm{d}S = e_{jrs} \int_{\partial S} f \tau_j \, \mathrm{d}s \tag{A.7}$$

où l'opérateur différentiel D_{rs} est défini pour toute paire d'indices r, s fixés par :

$$D_{rs} f = e_{jrs} e_{jab} n_a f_{,b} = n_r f_{,s} - n_s f_{,r} \tag{A.8}$$

compte tenu de la propriété vérifiée par le symbole de permutation :

$$e_{jrs} e_{jab} = \delta_{ra} \delta_{sb} - \delta_{rb} \delta_{sa} \tag{A.9}$$

L'identité (A.7) résulte ainsi de la contraction des deux membres de (A.6) par e_{jrs}, (r, s) étant choisie arbitrairement. De plus, la relation (A.4) appliquée à (A.8) donne :

$$D_{rs} f = n_r D_s f - n_s D_r f$$

ce qui est une autre manière de prouver que $D_{rs} f$ est un opérateur différentiel tangentiel, c'est-à-dire constitué uniquement de dérivées le long de S.

INTÉGRATION PAR PARTIES D'UNE DÉRIVÉE PARTIELLE TANGENTIELLE. L'application de l'identité de Stokes (A.5) au champ de vecteurs $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{e_r} f$, soit $u_c = e_{cdr} n_d f$ pour un indice r fixé conduit à l'identité suivante :

$$\int_S (-n_r K f + D_r f) \, \mathrm{d}S = \int_{\partial S} f \nu_r \, \mathrm{d}s \tag{A.10}$$

où $K(\boldsymbol{y})$ est l'opposé du double de la courbure moyenne de S :

$$K(\boldsymbol{y}) = D_r n_r(\boldsymbol{y}) = -(R_1^{-1} + R_2^{-1})$$

Remarques

- Les formules (A.6), (A.7) et (A.10) s'étendent à une surface S *régulière par morceaux*, à condition que $f(\boldsymbol{y})$ soit continue sur les arêtes de S. Par exemple, si S est l'union de deux surfaces S_1, S_2 régulières se raccordant le long de la courbe Γ, la formule (A.7) conduit à :

$$\int_{S_1 \cup S_2} D_{rj} f \, \mathrm{d}S = \varepsilon_{irj} \left\{ \int_{\partial S} f \tau_i \, \mathrm{d}s + \int_{\Gamma} f(\tau_i^1 + \tau_i^2) \, \mathrm{d}s \right\} \tag{A.11}$$

  et l'intégrale sur Γ est nulle car, avec des conventions d'orientation cohérentes de S_1 et S_2, $\boldsymbol{\tau}^1 + \boldsymbol{\tau}^2 = \mathbf{0}$ sur Γ.

- Si S, régulière par morceaux, est fermée, les intégrales de contour au second membre de (A.6), (A.7) et (A.10) disparaissent.

Utilisation d'une représentation paramétrique de S. Supposons S définie par un paramétrage $\boldsymbol{\xi} \in \Delta \to \boldsymbol{y} \in S$. Le gradient de f définie dans V est donné par :

$$\boldsymbol{m} \nabla f = f_{,\alpha} \boldsymbol{a}^{\alpha} + f_{,n} \boldsymbol{n} = f_{,\alpha} g^{\alpha\beta} \boldsymbol{a}_{\beta} + f_{,n} \boldsymbol{n} = f_{,\alpha} g^{\alpha\beta} (\boldsymbol{a_{\beta}} . \boldsymbol{e_r}) \boldsymbol{e}_r + f_{,n} \boldsymbol{n} \tag{A.12}$$

où $\boldsymbol{a}_{\alpha}$ $\boldsymbol{a}^{\alpha} = g^{\alpha\beta} \boldsymbol{a}_{\beta}$ $(\alpha = 1, 2)$ sont la base naturelle et sa base duale, les $g^{\alpha\beta}$ étant les composantes deux fois contravariantes du tenseur métrique. On en déduit l'expression du *gradient surfacique* $\boldsymbol{\nabla}_S f$:

$$\boldsymbol{\nabla}_S f = D_r f \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{\nabla} f - \boldsymbol{n} f_{,n} = f_{,\alpha} g^{\alpha\beta} (\boldsymbol{a_{\beta}} . \boldsymbol{e_r}) \boldsymbol{e}_r \tag{A.13}$$

valable également si f n'est définie que sur S.

Considérons maintenant un champ de vecteurs $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{\xi}) = u_r(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{e}_r$ défini sur S, dont les composantes u_r, données *dans un repère orthonormé fixe*, sont fonctions de $\boldsymbol{\xi} \in \Delta$. Dans ces conditions, on peut alors appliquer (A.13) à chacune des composantes u_r ce qui donne l'expression suivante pour la divergence surfacique $\mathrm{div}_S \boldsymbol{u}$:

$$\mathrm{div}_S \boldsymbol{u} = D_r u_r = \boldsymbol{\nabla}_S \tilde{f} . \boldsymbol{e}_r = g^{\alpha\beta} \boldsymbol{u}_{,\alpha} . \boldsymbol{a}_{\beta} \tag{A.14}$$

Compte tenu de la relation $g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$, on obtient l'expression développée suivante pour $\mathrm{div}_S \boldsymbol{u}$:

$$\mathrm{div}_S \boldsymbol{u} = \frac{1}{J} \left\{ \boldsymbol{a}_1 . (g_{22} \boldsymbol{u}_{,1} - g_{12} \boldsymbol{u}_{,2}) + \boldsymbol{a}_2 . (g_{11} \boldsymbol{u}_{,2} - g_{12} \boldsymbol{u}_{,1}) \right\} \tag{A.15}$$

avec :

$$J(\boldsymbol{\xi}) = \| \, \boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \, \|$$

En particulier, on a :

$$\mathrm{div}_S \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n} . (g^{\alpha 1} \boldsymbol{a}_{1,\alpha} + g^{\alpha 2} \boldsymbol{a}_{2,\alpha}) \tag{A.16}$$

Enfin, remarquons que (A.8) peut s'interpréter comme un produit vectoriel :

$$D_{rs} f = e_{ars} (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{\nabla_S} f) . \boldsymbol{e}_a$$

D'autre part, on a vu (chapitre 3, équation (3.5)) que :

$$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\xi})) = \frac{1}{J}(\boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2})$$

On a donc, d'après la formule du double produit vectoriel :

$$J(\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{\nabla_S f}) = f_{,\gamma} g^{\gamma\beta}(\boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2}) \wedge \boldsymbol{a_\beta} = f_{,\gamma} g^{\gamma\beta}[g_{1\beta}\boldsymbol{a}_2 - g_{2\beta}\boldsymbol{a}_1] = f_{,1}\boldsymbol{a}_2 - f_{,2}\boldsymbol{a}_1$$

et on en déduit l'expression de D_{rs} en fonction du paramétrage de l'élément :

$$JD_{rs} f \, \mathrm{d}S_y = e_{ars} \left[(\boldsymbol{a_2}.\boldsymbol{e_a}) f_{,1} - (\boldsymbol{a_1}.\boldsymbol{e_a}) f_{,2}\right] \mathrm{d}\xi \tag{A.17}$$

B

Fonctions d'interpolation et intégration numérique

Cette annexe donne quelques compléments relatifs à la méthode des éléments de frontière telle qu'exposée au chapitre 3 :

- Fonctions d'interpolation usuelles, c'est-à-dire celles employées pour les interpolations unidimensionnelles ou bidimensionnelles dans la méthode des éléments finis ;
- Fonctions de forme "réduites", utilisées pour les intégrations singulières ;
- Points et poids de Gauss, utilisés pour les intégrations régulières sur des segments[1] ou des triangles.

Les fonctions de forme modifiées (qualifiées de "réduites") sont spécifiques aux méthodes d'éléments de frontière, et de développement relativement récent. Elles fournissent un auxiliaire indispensable au calcul numérique correct, stable et précis des intégrales singulières, concrétisant en cela les résultats généraux de régularisation, et revêtent donc une grande importance pratique. Les autres informations de cette annexe, plus classiques, sont mentionnées par souci d'autosuffisance.

B.1 Fonctions de forme usuelles : problèmes bidimensionnels

On reprend les fonctions de forme utilisées en éléments finis pour les problèmes 1D, qui dépendent d'une seule variable ξ. Les fonctions de forme réduites $\hat{N}$ sont définies par :

$$N(\xi) - N(\eta) = \rho \hat{N}(\rho, \eta) \qquad \rho \equiv \xi - \eta$$

[1] On rappelle que l'intégration numérique sur un carré utilise les points de Gauss unidimensionnels, voir section 3.4.

ELÉMENT LINÉAIRE (2 NŒUDS). Il est défini au moyen des fonctions de forme :

$$N_1(\xi) = 1/2(1-\xi) \qquad N_2(\xi) = 1/2(1+\xi)$$

Cet élément conduit à des interpolations linéaires par morceaux. Les fonctions de forme réduites pour l'intégration singulière sont données par :

$$\hat{N}_1(\rho;\eta) = -1/2 \qquad \hat{N}_2(\rho;\eta) = 1/2$$

ELÉMENT QUADRATIQUE (3 NŒUDS). Il est défini au moyen des fonctions de forme :

$$N_1(\xi) = 1/2\xi(\xi-1) \quad N_2(\xi) = 1-\xi^2 \quad N_3(\xi) = 1/2\xi(\xi+1) \tag{B.1}$$

Cet élément conduit à des interpolations quadratiques par morceaux (et notamment d'approcher une courbe à l'aide d'arcs de paraboles raccordés). Les fonctions de forme réduites pour l'intégration singulière sont données par :

$$\hat{N}_1(\rho;\eta) = \eta + 1/2(\rho-1) \quad \hat{N}_2(\rho;\eta) = -2\eta - \rho \quad \hat{N}_3(\rho;\eta) = \eta + 1/2(\rho+1) \tag{B.2}$$

ELÉMENT CUBIQUE (4 NŒUDS). Il est défini au moyen des fonctions deforme :

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= -(1-\xi)(1-9\xi^2)/16 & N_2(\xi) &= 9(1-3\xi)(1-\xi^2)/16 \\ N_3(\xi) &= 9(1+3\xi)(1-\xi^2)/16 & N_4(\xi) &= -(1+\xi)(1-9\xi^2)/16 \end{aligned}$$

Les fonctions de forme réduites pour l'intégration singulière sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{N}_1(\xi) &= 1/16\left[1+18\eta-27\eta^2+\rho(9-27\eta)-9\rho^2\right] \\ \hat{N}_2(\xi) &= 9/16\left[-3-2\eta+9\eta^2+\rho(-1+9\eta)+3\rho^2\right] \\ \hat{N}_3(\xi) &= 9/16\left[3-2\eta-9\eta^2+\rho(-1-9\eta)-3\rho^2\right] \\ \hat{N}_4(\xi) &= 1/16\left[-1+18\eta+27\eta^2+\rho(9+27\eta)+9\rho^2\right] \end{aligned}$$

B.2 Fonctions de forme usuelles : problèmes tridimensionnels

Les fonctions de forme les plus couramment utilisées, issues de la méthode des éléments finis, sont des polynômes de degré ≥ 1 en (ξ_1, ξ_2), construits de manière à satisfaire les propriétés (3.3). Nous donnons pour chaque cas les fonctions de forme classiques $N(\boldsymbol{\xi})$ et les fonctions de forme "réduites" $\hat{N}(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta})$, non classiques.

TRIANGLE À TROIS NŒUDS ("ÉLÉMENT LINÉAIRE"). Il est défini au moyen des fonctions de forme :

$$N_1(\xi_1,\xi_2) = \xi_3 \qquad N_2(\xi_1,\xi_2) = \xi_1 \qquad N_3(\xi_1,\xi_2) = \xi_2 \qquad \text{avec } \xi_3 = 1-\xi_1-\xi_2$$

(ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les coordonnées barycentriques d'un point du triangle de référence, défini par $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \xi_3 \geq 0$). En raison du caractère linéaire des fonctions N_1, N_2, N_3 ci-dessus, l'élément triangulaire à 3 nœuds est plan avec des côtés rectilignes.

Les fonctions de forme réduites pour l'intégration singulière sont données par :

$$\hat{N}^1(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) = -(\cos\alpha + \sin\alpha) \qquad \hat{N}^2(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) = \cos\alpha \qquad \hat{N}^3(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) = \sin\alpha$$

QUADRANGLE À QUATRE NŒUDS ("ÉLÉMENT BILINÉAIRE"). Il est défini au moyen des fonctions de forme :

$$\begin{array}{ll} N_1(\xi_1,\xi_2) &= 1/4(\xi_1-1)(\xi_2-1) \\ N_2(\xi_1,\xi_2) &= 1/4(\xi_1+1)(\xi_2-1) \end{array} \qquad \begin{array}{ll} N_3(\xi_1,\xi_2) &= 1/4(\xi_1+1)(\xi_2+1) \\ N_4(\xi_1,\xi_2) &= 1/4(\xi_1-1)(\xi_2+1) \end{array}$$

Son nom provient du fait que ses fonctions de forme sont de degré total 2 mais de degré 1 par rapport à chaque variable. L'élément réel a ses quatre côtés rectilignes; mais affecte la forme d'une surface réglée si ses quatre sommets ne sont pas coplanaires.

Les fonctions de forme réduites pour l'intégration singulière sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{N}^1(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/4\,[-(1-\eta_1)\sin\alpha-(1-\eta_2)\cos\alpha+\rho\cos\alpha\sin\alpha] \\ \hat{N}^2(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/4\,[-(1+\eta_1)\sin\alpha+(1-\eta_2)\cos\alpha+\rho\cos\alpha\sin\alpha] \\ \hat{N}^3(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/4\,[(1+\eta_1)\sin\alpha+(1+\eta_2)\cos\alpha+\rho\cos\alpha\sin\alpha] \\ \hat{N}^4(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/4\,[(1-\eta_1)\sin\alpha-(1+\eta_2)\cos\alpha+\rho\cos\alpha\sin\alpha] \end{aligned}$$

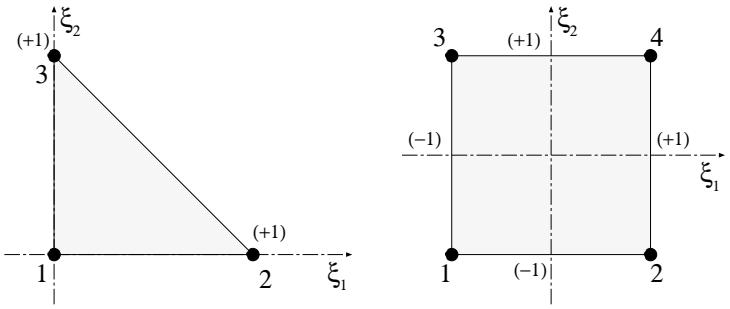

Figure B.1: Triangle à 3 nœuds et quadrangle à 4 nœuds.

TRIANGLE À SIX NŒUDS. Il est défini au moyen des fonctions de forme :

$$\begin{array}{lcl} N_1(\xi_1,\xi_2) &=& -\xi_3(1-2\xi_3) \\ N_3(\xi_1,\xi_2) &=& -\xi_1(1-2\xi_1) \\ N_5(\xi_1,\xi_2) &=& -\xi_2(1-2\xi_2) \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} N_2(\xi_1,\xi_2) &=& 4\xi_1\xi_3 \\ N_4(\xi_1,\xi_2) &=& 4\xi_1\xi_2 \\ N_6(\xi_1,\xi_2) &=& 4\xi_2\xi_3 \end{array}$$

A la différence du triangle à 3 nœuds, le caractère quadratique par rapport à chaque variable ξ_1, ξ_2 des fonctions $N_1, \ldots, N_6$ ci-dessus autorise des côtés courbes : on fait passer un arc de parabole par les trois nœuds qui définissent un côté. De même, l'élément réel est en général courbe.

Les dérivées $N_{m,\alpha}$ $(m = 1, \ldots, 8,\ \alpha = 1, 2)$ sont égales à :

$$\begin{array}{ll} N_{1,1}(\boldsymbol{\xi}) = 1-4\xi_3 & N_{1,2}(\boldsymbol{\xi}) = 1-4\xi_3 \\ N_{2,1}(\boldsymbol{\xi}) = 4(\xi_3-\xi_1) & N_{2,2}(\boldsymbol{\xi}) = -4\xi_1 \\ N_{3,1}(\boldsymbol{\xi}) = -1+4\xi_1 & N_{3,2}(\boldsymbol{\xi}) = 0 \\ N_{4,1}(\boldsymbol{\xi}) = 4\xi_2 & N_{4,2}(\boldsymbol{\xi}) = 4\xi_1 \\ N_{5,1}(\boldsymbol{\xi}) = 0 & N_{5,2}(\boldsymbol{\xi}) = -1+4\xi_2 \\ N_{6,1}(\boldsymbol{\xi}) = -4\xi_2 & N_{6,2}(\boldsymbol{\xi}) = 4(\xi_3-\xi_2) \end{array} \tag{B.3}$$

Les dérivées secondes $N_{m,\alpha\beta}$ $(m = 1, \ldots, 6,\ \alpha, \beta = 1, 2)$ sont égales à :

$$\begin{array}{lll} N_{1,11}(\boldsymbol{\xi}) = 4 & N_{1,12}(\boldsymbol{\xi}) = 4 & N_{1,22}(\boldsymbol{\xi}) = 4 \\ N_{2,11}(\boldsymbol{\xi}) = -8 & N_{2,12}(\boldsymbol{\xi}) = -4 & N_{2,22}(\boldsymbol{\xi}) = 0 \\ N_{3,11}(\boldsymbol{\xi}) = 4 & N_{3,12}(\boldsymbol{\xi}) = 0 & N_{3,22}(\boldsymbol{\xi}) = 0 \\ N_{4,11}(\boldsymbol{\xi}) = 0 & N_{4,12}(\boldsymbol{\xi}) = 4 & N_{4,22}(\boldsymbol{\xi}) = 0 \\ N_{5,11}(\boldsymbol{\xi}) = 0 & N_{5,12}(\boldsymbol{\xi}) = 0 & N_{5,22}(\boldsymbol{\xi}) = 4 \\ N_{6,11}(\boldsymbol{\xi}) = 0 & N_{6,12}(\boldsymbol{\xi}) = 4 & N_{6,22}(\boldsymbol{\xi}) = -8 \end{array} \tag{B.4}$$

Les fonctions de forme réduites pour l'intégration singulière sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{N}^1(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) &= -(4\eta_3 - 1)(\cos\alpha + \sin\alpha) + 2\rho(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 \\ \hat{N}^2(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) &= 4(\eta_3 \cos\alpha - \eta_1(\cos\alpha + \sin\alpha)) + 4\rho\cos\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha) \\ \hat{N}^3(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) &= (4\eta_1 - 1)\cos\alpha + 2\rho\cos^2\alpha \\ \hat{N}^4(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) &= 4(\eta_2 \cos\alpha + \eta_1 \sin\alpha) + 4\rho\cos\alpha\sin\alpha \\ \hat{N}^5(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) &= (4\eta_2 - 1)\sin\alpha + 2\rho\sin^2\alpha \\ \hat{N}^6(\rho, \alpha; \boldsymbol{\eta}) &= 4(\eta_3 \sin\alpha - \eta_2(\cos\alpha + \sin\alpha)) - 4\rho\sin\alpha(\cos\alpha + \sin\alpha) \end{aligned}$$

QUADRANGLE À HUIT NŒUDS ("ÉLÉMENT QUADRATIQUE INCOMPLET"). Il est défini au moyen des fonctions de forme :

$$\begin{array}{ll} N_1(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1-\xi_1)(1-\xi_2)(-1-\xi_1-\xi_2) & N_2(\boldsymbol{\xi}) = 1/2(1-\xi_1^2)(1-\xi_2) \\ N_3(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1+\xi_1)(1-\xi_2)(-1+\xi_1-\xi_2) & N_4(\boldsymbol{\xi}) = 1/2(1-\xi_2^2)(1+\xi_1) \\ N_5(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1+\xi_1)(1+\xi_2)(-1+\xi_1+\xi_2) & N_6(\boldsymbol{\xi}) = 1/2(1-\xi_1^2)(1+\xi_2) \\ N_7(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1-\xi_1)(1+\xi_2)(-1-\xi_1+\xi_2) & N_8(\boldsymbol{\xi}) = 1/2(1-\xi_2^2)(1-\xi_1) \end{array}$$

Les dérivées $N_{m,\alpha}$ $(m = 1, \ldots, 8,\ \alpha = 1, 2)$ sont égales à :

$$\begin{array}{ll} N_{1,1}(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1-\xi_2)(2\xi_1+\xi_2) & N_{2,1}(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_1(1-\xi_2) \\ N_{3,1}(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1-\xi_2)(2\xi_1-\xi_2) & N_{4,1}(\boldsymbol{\xi}) = 1/2(1-\xi_2^2) \\ N_{5,1}(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1+\xi_2)(2\xi_1+\xi_2) & N_{6,1}(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_1(1+\xi_2) \\ N_{7,1}(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1+\xi_2)(2\xi_1-\xi_2) & N_{8,1}(\boldsymbol{\xi}) = -1/2(1-\xi_2^2) \end{array} \tag{B.5}$$

$$\begin{array}{ll} N_{1,2}(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1-\xi_1)(\xi_1+2\xi_2) & N_{2,2}(\boldsymbol{\xi}) = -1/2(1-\xi_1^2) \\ N_{3,2}(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1+\xi_1)(-\xi_1+2\xi_2) & N_{4,2}(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_2(1+\xi_1) \\ N_{5,2}(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1+\xi_1)(\xi_1+2\xi_2) & N_{6,2}(\boldsymbol{\xi}) = 1/2(1-\xi_1^2) \\ N_{7,2}(\boldsymbol{\xi}) = 1/4(1-\xi_1)(-\xi_1+2\xi_2) & N_{8,2}(\boldsymbol{\xi}) = -\xi_2(1-\xi_1) \end{array} \tag{B.6}$$

tandis que les dérivées secondes $N_{m,\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ sont données par :

$$\begin{array}{lll} N_{1,11} = 1/2(1-\xi_2) & N_{1,22} = 1/2(1-\xi_1) & N_{1,12} = 1/4(1-2\xi_1-2\xi_2) \\ N_{2,11} = -(1-\xi_2) & N_{2,22} = 0 & N_{2,12} = \xi_1 \\ N_{3,11} = N_{1,11} & N_{3,22} = 1/2(1+\xi_1) & N_{3,12} = 1/4(-1-2\xi_1+2\xi_2) \\ N_{4,11} = 0 & N_{4,22} = -(1+\xi_1) & N_{4,12} = -\xi_2 \\ N_{5,11} = 1/2(1+\xi_2) & N_{5,22} = N_{3,22} & N_{5,12} = 1/4(1+2\xi_1+2\xi_2) \\ N_{6,11} = -(1+\xi_2) & N_{6,22} = 0 & N_{6,12} = -\xi_1 \\ N_{7,11} = N_{5,11} & N_{7,22} = N_{1,22} & N_{7,12} = 1/4(-1+2\xi_1-2\xi_2) \\ N_{8,11} = 0 & N_{8,22} = -(1-\xi_1) & N_{8,12} = \xi_2 \end{array}$$

Les fonctions de forme réduites pour l'intégration singulière sont :

$$\begin{aligned}
\hat{N}_1(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/4\,\{\cos\alpha(c_1-a_1)a_2+\sin\alpha(c_1-a_2)a_1\\
&\quad+\rho(a_2\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha+a_1\sin^2\alpha)\\
&\quad-\rho^2\cos\alpha\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)\}\\
\hat{N}_2(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/2\,\{a_2(a_1-a_3)\cos\alpha-a_1a_3\sin\alpha\\
&\quad+\rho(\cos\alpha\sin\alpha(a_3-a_1)-a_2\cos^2\alpha)+\rho^2\cos^2\alpha\sin\alpha\}\\
\hat{N}_3(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/4\,\{\sin\alpha(c_2-a_2)a_3-\cos\alpha(c_2-a_3)a_2\\
&\quad+\rho(a_3\sin^2\alpha-3\cos\alpha\sin\alpha+a_2\cos^2\alpha)\\
&\quad+\rho^2\cos\alpha\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)\}\\
\hat{N}_4(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/2\,\{a_3(a_2-a_4)\sin\alpha+a_2a_4\cos\alpha\\
&\quad-\rho(\cos\alpha\sin\alpha(a_4-a_2)+a_3\sin^2\alpha)-\rho^2\sin^2\alpha\cos\alpha\}\\
\hat{N}_5(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/4\,\{-\cos\alpha(c_3-a_3)a_4-\sin\alpha(c_3-a_4)a_3\\
&\quad+\rho(a_4\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha+a_3\sin^2\alpha)\\
&\quad+\rho^2\cos\alpha\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)\}\\
\hat{N}_6(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/2\,\{-a_4(a_3-a_1)\cos\alpha+a_3a_1\sin\alpha\\
&\quad+\rho(\cos\alpha\sin\alpha(a_1-a_3)-a_4\cos^2\alpha)-\rho^2\cos^2\alpha\sin\alpha\}\\
\hat{N}_7(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/4\,\{-\cos\alpha(c_4-a_4)a_1-\sin\alpha(c_4-a_1)a_4\\
&\quad+\rho(a_1\cos^2\alpha+3\cos\alpha\sin\alpha+a_4\sin^2\alpha)\\
&\quad+\rho^2\cos\alpha\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)\}\\
\hat{N}_8(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= 1/2\,\{-a_1(a_4-a_2)\cos\alpha+a_4a_2\sin\alpha\\
&\quad+\rho(\cos\alpha\sin\alpha(a_2-a_4)-a_1\cos^2\alpha)-\rho^2\cos^2\alpha\sin\alpha\}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{array}{lll}
a_1=1-\eta_1 & b_1=2\eta_1+\eta_2 & c_1=-1-\eta_1-\eta_2\\
a_2=1-\eta_2 & b_2=2\eta_1-\eta_2 & c_2=-1+\eta_1-\eta_2\\
a_3=1+\eta_1 & b_3=2\eta_2+\eta_1 & c_3=-1+\eta_1+\eta_2\\
a_4=1+\eta_2 & b_4=2\eta_2-\eta_1 & c_4=-1-\eta_1+\eta_2\\
a_5=\eta_2 & & \\
a_6=\eta_1 & &
\end{array}$$

Quadrangle à neuf nœuds ("élément quadratique complet"). Il est défini au moyen des fonctions de forme :

$$\begin{array}{lll}
N_1(\boldsymbol{\xi})=S_1(\xi_1)S_1(\xi_2) & N_4(\boldsymbol{\xi})=S_3(\xi_1)S_2(\xi_2) & N_7(\boldsymbol{\xi})=S_1(\xi_1)S_3(\xi_2)\\
N_2(\boldsymbol{\xi})=S_2(\xi_1)S_1(\xi_2) & N_5(\boldsymbol{\xi})=S_3(\xi_1)S_3(\xi_2) & N_8(\boldsymbol{\xi})=S_1(\xi_1)S_2(\xi_2)\\
N_3(\boldsymbol{\xi})=S_3(\xi_1)S_1(\xi_2) & N_6(\boldsymbol{\xi})=S_2(\xi_1)S_3(\xi_2) & N_9(\boldsymbol{\xi})=S_2(\xi_1)S_2(\xi_2)
\end{array}\qquad \text{(B.7)}$$

où S_1, S_2, S_3 sont les fonctions d'interpolation unidimensionnelles quadratiques (B.1).

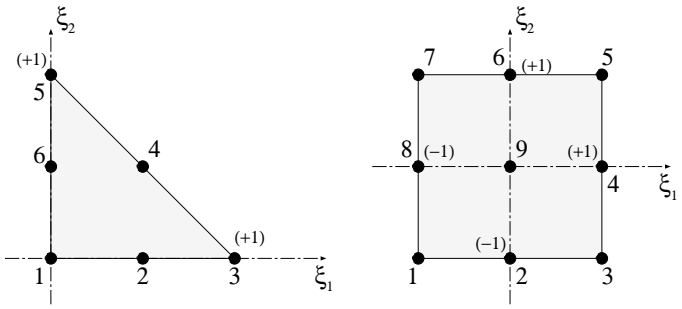

Figure B.2: Triangle à 6 nœuds et quadrangle à 9 nœuds.

Les fonctions de forme réduites pour l'intégration singulière sont données par :

$$
\begin{aligned}
\hat{N}_1(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= S_1(\xi_1)\hat{S}_1(\rho\sin\alpha;\eta_2) + \hat{S}_1(\rho\cos\alpha;\eta_1)S_1(\eta_2)\\
\hat{N}_2(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= S_2(\xi_1)\hat{S}_2(\rho\sin\alpha;\eta_2) + \hat{S}_1(\rho\cos\alpha;\eta_1)S_1(\eta_2)\\
\hat{N}_3(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= S_3(\xi_1)\hat{S}_3(\rho\sin\alpha;\eta_2) + \hat{S}_1(\rho\cos\alpha;\eta_1)S_1(\eta_2)\\
\hat{N}_4(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= S_3(\xi_1)\hat{S}_3(\rho\sin\alpha;\eta_2) + \hat{S}_2(\rho\cos\alpha;\eta_2)S_1(\eta_2)\\
\hat{N}_5(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= S_3(\xi_1)\hat{S}_3(\rho\sin\alpha;\eta_2) + \hat{S}_3(\rho\cos\alpha;\eta_3)S_1(\eta_2)\\
\hat{N}_6(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= S_2(\xi_1)\hat{S}_2(\rho\sin\alpha;\eta_2) + \hat{S}_3(\rho\cos\alpha;\eta_3)S_1(\eta_2)\\
\hat{N}_7(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= S_1(\xi_1)\hat{S}_1(\rho\sin\alpha;\eta_2) + \hat{S}_3(\rho\cos\alpha;\eta_3)S_1(\eta_2)\\
\hat{N}_8(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= S_1(\xi_1)\hat{S}_1(\rho\sin\alpha;\eta_2) + \hat{S}_2(\rho\cos\alpha;\eta_2)S_1(\eta_2)\\
\hat{N}_9(\rho,\alpha;\boldsymbol{\eta}) &= S_2(\xi_1)\hat{S}_2(\rho\sin\alpha;\eta_2) + \hat{S}_2(\rho\cos\alpha;\eta_2)S_1(\eta_2)
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

où les $\hat{S}_i$ sont les fonctions réduites unidimensionnelles (B.2).

B.3 Intégration numérique par points de Gauss

Dans toute cette section, N désigne le nombre de points de Gauss de la formule d'intégration approchée.

POINTS DE GAUSS POUR LE SEGMENT $[-1,1]$. Le tableau B.1 présente les points x_i et poids w_i de Gauss pour le segment $S=[-1,1]$. Ceux-ci sont toujours intérieurs à S, et sont symétriques par rapport à $x=0$, x_i et $x_{-i}=-x_i$ ayant le même poids w_i. Seules les abscisses positives sont indiquées.

POINTS DE GAUSS POUR LE TRIANGLE DE RÉFÉRENCE. Le tableau B.2 présente les points (x_i^T, y_i^T) et poids w_i de Gauss pour le triangle de référence $\mathcal{T}$, d'après Lyness et Jespersen [1]. Ils sont intérieurs à $\mathcal{T}$. D'autre part, ces formules respectent la symétrie ternaire du triangle : toutes les permutations des coordonnées barycentriques $x_i^T, y_i^T, 1-x_i^T-y_i^T$ définissent des Points de Gauss, les poids étant égaux. Cette symétrie

N	x_i	w_i
1	0.	2.
2	0.57735026918962576450	1.
3	0.	0.88888888888888888889
	0.77459666924148337703	0.55555555555555555556
4	0.33998104358485626480	0.65214515486254614262
	0.86113631159405257522	0.34785484513745385737
5	0.	0.56888888888888888889
	0.53846931010568309103	0.47862867049936646804
	0.90617984593866399279	0.23692688505618908751
6	0.23861918608319690863	0.46791393457269104738
	0.66120938646626451366	0.36076157304813860756
	0.93246951420315202781	0.17132449237917034504
7	0.	0.41795918367346938775
	0.40584515137739716690	0.38183005050511894495
	0.74153118559939443986	0.27970539148927666790
	0.94910791234275852452	0.12948496616886969327

Tableau B.1 : Points de Gauss pour le segment $-1 \leq \xi \leq 1$, d'après [2].

permet de condenser l'information dans le tableau B.2 : les points apparaissent avec une "multiplicité" M ($M = 1, 3, 6$ suivant les cas), qui indique à combien de points distincts correspond la ligne considérée.

N	x_i^T	y_i^T	w_i	M
3	0.166666666666667	0.166666666666667	0.166666666666667	3
6	0.445948490915965	0.445948490915965	0.111690794839005	3
	0.091576213509771	0.091576213509771	0.054975871827661	3
7	0.333333333333333	0.333333333333333	0.112500000000000	1
	0.470142064105115	0.470142064105115	0.066197076394253	3
	0.101286507323456	0.101286507323456	0.062969590272414	3
16	0.333333333333333	0.333333333333333	0.072157803838893	1
	0.081414823414554	0.459292588292722	0.047545817133642	3
	0.898905543365937	0.050547228317031	0.016229248811599	3
	0.658861384496479	0.170569307751760	0.051608685267359	3
	0.008394777409957	0.728492392955404	0.013615157087217	6
19	0.333333333333333	0.333333333333333	0.048567898141398	1
	0.020634961602525	0.489682519198737	0.015667350113570	3
	0.125820817014129	0.437089591492935	0.038913770502388	3
	0.623592928761935	0.188203535619032	0.039823869463604	3
	0.910540973211094	0.044729513394452	0.012788837829349	3
	0.036838412054736	0.741198598784498	0.021641769688645	6

Tableau B.2 : Points de Gauss pour le triangle de référence, d'après [1].

N	x_i	w_i
10	0.0090426309	0.1209551319
10	0.0539712662	0.1863635425
10	0.1353118246	0.1956608732
10	0.2470524162	0.1735771421
10	0.3802125396	0.1356956729
10	0.5237923179	0.0936467585
10	0.6657752055	0.0557877273
10	0.7941904160	0.0271598109
10	0.8981610912	0.0095151826
10	0.9688479887	0.0016381576

Tableau B.3 : Points de Gauss pour la singularité logarithmique sur le segment $0 \leq \xi \leq 1$.

POINTS DE GAUSS POUR L'INTÉGRATION DE SINGULARITÉS LOGARITHMIQUES. Les solutions élémentaires pour les problèmes plans présentent une singularité logarithmique, pour laquelle il existe des formules de quadrature de type gaussien. Plus précisément, le tableau B.3 donne, pour une formule à 10 points, les abscisses $x_i \in [0, 1]$ et poids w_i tels que :

$$\int_0^1 \mathrm{Log}\frac{1}{x} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{10} w_i f(x_i)$$

Références bibliographiques

[1] LYNESS, J. N., JESPERSEN, D. Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle. *J. Inst. Math. Appl.*, **15**, 19–32 (1975).

[2] STROUD, A. H., SECREST, D. *Gaussian quadrature formulas*. Prentice-Hall (1966).

Bibliographie

NOTE. *Les citations bibliographiques faites dans le corps de l'ouvrage, sous la forme d'un numéro de référence entre crochets, renvoient à la liste bibliographique en fin du chapitre concerné. Les références bibliographiques données ci-dessous représentent une synthèse, dans laquelle certaines références ont déjà fait l'objet de citations dans le corps de l'ouvrage et d'autres non. Cette synthèse est classée, pour la commodité du lecteur, par type de publication et présente pour les articles une ébauche de sous-classement thématique ; elle n'a aucune prétention à l'exhaustivité.*

Ouvrages généraux sur le sujet

BALAS J., SLADEK J., SLADEK V. – *Stress analysis by boundary element methods.* Elsevier, 1989.

BANERJEE P.K., BUTTERFIELD R. – *Boundary element methods in engineering sciences.* McGraw Hill, London, 1981.

BANERJEE P.K. – *The boundary element method in engineering (2nd. edition).* McGraw Hill, London, 1994.

BESKOS D.E. (EDITOR) – *Boundary Element Methods in Mechanics.* Computational Methods in Mechanics, vol. 3, North Holland, 1987.

BREBBIA C.A., TELLES J.C.F., WROBEL L.C. – *Boundary element techniques.* Springer Verlag, 1984.

BREBBIA C.A. (EDITOR) – *Topics in boundary element research*, vols. 1 et 2. Springer Verlag, 1984.

CHANDRA A., MUKHERJEE S. – *Boundary element methods in manufacturing.* Oxford University Press, Oxford, parution prévue en 1995.

COLTON D., KRESS R. – *Integral Equation Method in Scattering Theory.* John Wiley & sons, 1983.

CROUCH S.L., STARFIELD A.M. – *Boundary element methods in solid mechanics.* George, Allen and Unwin, 1983.

CRUSE T.A. – *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics.* Kluwer Academic Publishers, 1988.

FILIPPI P.J.T. – Integral equations in acoustics. In *Theoretical acoustics and numerical techniques* (P.J.T. Filippi, ed.), Springer-Verlag, 1983.

GUNTHER N.M. – *La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique.* Paris, Gauthier-Villars, 1934.

KELLOGG O.D. – *Fundations of potential theory.* Berlin, 1929.

KENNETT B.L.N. – Seismic wave propagation in stratified media. In *Advances in Applied Mechanics*, vol. 21, Academic Press, 1981.

KUPRADZE V.D. – *Dynamical problems in elasticity.* Progress in solids mechanics, vol. III, North Holland, 1963.

KUPRADZE V.D. (EDITOR) – *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity.* North Holland, 1979.

MANOLIS G., BESKOS D.E. – *Boundary element methods in elastodynamics.* Umwin Hyman, London 1988.

MIKHLIN S.G. – *Multi-dimensional singular integrals and singular integral equations.* Pergamon Press, 1965.

MUKHERJEE S. – *Boundary element methods in creep and fracture.* Elsevier, London, 1982.

PARTON V.Z., PERLIN P.I. – *Integral equations in elasticity.* Mir Publishers, Moscow, 1982.

PARTON V.Z., PERLIN P.I. – *Mathematical methods of the theory of elasticity (vols. 1, 2).* Mir Publishers, Moscow, 1984.

POZRIKIDIS C. – *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow.* Cambridge University Press, 1992.

TRICOMI F.G. – *Integral equations.* Interscience Publishers, New York, 1957.

WING G.M. – *A primer on integral equations of the first kind.* SIAM Publications, Philadelphia, USA, 1991.

Thèses

BECACHE E. – *Résolution par une méthode d'équations intégrales d'un problème de diffraction d'ondes élastiques transitoires par une fissure.* Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1991.

BENDALI A. – Problème aux limites extérieur et intérieur pour le système de Maxwell en régime harmonique. *Rapport interne no. 59, Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1980.*

BONNET M. – *Méthode des équations intégrales régularisées en élastodynamique tridimensionnelle.* Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1986 (publiée dans le Bulletin EDF/DER série C, 1/2, 1987).

BONNEMAY P. – *Equations intégrales pour l'élasticité plane.* Thèse de doctorat d'ingénieur, Université Paris VI, 1979.

CHAPEL F. – *Application de la méthode des équations intégrales à la dynamique des sols-structures sur pieux.* Thèse de doctorat d'ingénieur, Ecole Centrale de Paris, 1981.

CLOUTEAU D. – *Propagation d'ondes dans les milieux hétérogènes. Application à la tenue des ouvrages sous séismes.* Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 1990.

CORTEY-DUMONT PH. – *Simulation numérique de problèmes de diffraction d'ondes par une fissure.* Thèse d'Etat, Université Paris VI, 1985.

DANGLA P. – *Couplage éléments finis – équations intégrales en élastodynamique et interaction sol-structure.* Thèse de doctorat d'ingénieur, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1989.

HA DUONG T. – *Equations intégrales pour la résolution numérique de problèmes de diffraction d'ondes acoustiques dans* $\mathbb{R}^3$. Thèse d'Etat, Université Paris VI, 1987.

HALPERN L. – *Etude des conditions aux limites absorbantes pour des schémas numériques relatifs à des équations hyperboliques linéaires.* Thèse de 3^e cycle, 1980.

HAMDI M.A. – *Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains.* Thèse d'Etat, Université Technologique de Compiègne, 1982.

JEAN PH. – *Une méthode variationnelle par équations intégrales pour la résolution numérique de problèmes intérieurs et extérieurs de couplage élasto-acoustique.* Thèse de doctorat, UTC Compiègne, 1985.

LE VAN A. – *Equations intégrales pour fissures 3D. Contribution à la régularisation.* Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1988.

NISHIMURA N. – *Applications of the boundary integral equation methods to solid mechanics.* Thesis, Kyoto University, 1988.

PHAM T.L. – *Tenseurs de Green et de Neumann.* Thèse d'Etat, 1966.

PUTOT CL. – *Une nouvelle méthode d'équations intégrales pour certains problèmes de fissures planes.* Thèse de doctorat d'ingénieur, Paris VI, 1980.

TSAKALIDIS C. – *Diffraction d'ondes sismiques sur les structures sur pieux et fonctions de Green du sol multicouche.* Thèse de doctorat d'ingénieur, Ecole Centrale de Paris, 1985.

XIAO H. – *Equations intégrales de frontière, dérivation par rapport au domaine et approche énergétique pour les solides élastiques fissurés.* Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1994.

Articles

Solutions fondamentales

BENITEZ F.G., ROSAKIS A.J. – Three-dimensional elastostatics of a layer and a layered medium. *J. Elast.* **18***, 3-50, 1987.*

BERGER J.R. – Boundary element analysis of anisotropic bimaterials with special Green's functions. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, à paraître, 1995.

PAN Y.C., CHOU T.W. – Point force solution for an infinite transversely isotropic solid. *ASME J. Appl. Mech.* **43***, 608-612, 1976.*

RONGVED L. – Force interior to one of two joined semi-infinite solids. *Proc. 2nd. Midwestern Conf. Solid Mechanics*, pp. 1-13, 1955.

Thermique

CHANG Y.P., KANG C.S., CHEN D.J. – The use of fundamental Green's functions for the solutions of problems of heat conduction in anisotropic media. *Int. J. Heat Mass Transfer* **16***, 1905-1918, 1973.*

CHAUDOUET A. – Three-dimensional transient thermo-elastic analyses by the BIE method. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **24***, 25-45, 1987.*

KIKUTA M., TOGOH H., TANAKA M. – Boundary element analysis of nonlinear transient heat conduction problems. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* **62***, 321-329, 1987.*

SHARP S., CROUCH S.L. – Boundary integral methods for thermoelasticity problems. *ASME J. Appl. Mech.* **53***, 298-302, 1986.*

SHARP S., CROUCH S.L. – Heat conduction, thermoelasticity and consolidation. In *Boundary element methods in mechanics*, D.E. Beskos, editor, North Holland, 1987.

Géophysique et géodynamique

COCHARD R., MADARIAGA R. – Dynamic faulting under rate-dependent friction. PAGEOPH **142**, 419-445, 1994.

KARABALIS D.L. – A simplified 3-D time-domain BEM for dynamic soil-structure Interaction problems. *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **8**, *139-145, 1991.*

SANCHEZ-SESMA F.J., CAMPILLO M. – Diffraction of P, SV and Rayleigh waves by topographic features: a boundary integral formulation. *Bull. Seism. Soc. Am.* **81**, *2234-2253, 1991.*

Elasticité

BEZINE G. – Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mech. Res. Commun.* **5**, *197-206, 1978.*

CRUSE T.A. – Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. *Int. J. Solids Struct.* **5**, *1259-1274, 1969.*

RIZZO F.J. – An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quart. Appl. Math.* **25**, *83-95, 1967.*

RIZZO F.J., SHIPPY D.J. – An advanced boundary integral equation method for three-dimensional elasticity. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **11**, *1753-1768, 1977.*

STERN M. – A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *Int. J. Solids Struct.* **15**, *769-782, 1979.*

Mécanique des fluides

ABOUSLEIMAN Y., CHENG A. H.-D. – Boundary element solution for steady and unsteady Stokes flow. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* **117**, *1-13, 1994.*

HU H. – Study of integral equation methods for transonic flow calculations. *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **11**, *101-107, 1993.*

ONISHI K., KUROKI T., TANAKA M. – Boundary element method for laminar viscous flow and convective diffusion problems. In *Topics in boundary element research*, vol. 2, pp. 209-229, C.A. Brebbia editor, Springer Verlag, 1984.

POWER H., PARTRIDGE P.W. – The use of Stokes' fundamental solution for the boundary only element formulation of the three-dimensional Navier-Stokes equations for moderate Reynolds numbers. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **37**, *1825-1840, 1994.*

VAN DER WEIDEN R., DE HOOP A.T. – Boundary integral equations for the computational modeling of three-dimensional groundwater flow problems. *Comp. Mech.* **4**, *283-291, 1989.*

WU J.C., WAHBAH M. – Numerical solution of viscous flow equations using integral representations. *Lecture notes in Physics, vol. 59 pp. 448-453, Springer-Verlag, New York, 1976.*

Méthodes mathématiques et numériques

BETTESS P. – Operation Counts for Boundary Integral and Finite Element Methods. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **17**, *306-308, 1981.*

BONNET M. – On the use of geometrical symmetry in the boundary element methods for 3D elasticity. In *Boundary element technology VI*, C.A. Brebbia, editor, pp. 185–201 Computational Mechanics Publications / Elsevier, Southampton, Boston, 1991.

BUI H.D. – New trends in BIE methods. In *Computational Mechanics '86*, Tokyo 1986, Springer Verlag, vol 2, pp XI.3-8.

COSTABEL M., ONISHI K., WENDLAND W.L. – A boundary element collocation method for the Neumann problem of the heat equation. In "Inverse and ill-posed problems"; H.W. Engl and C.W. Groetsch editors, Academic Press, 1987.

GAUTESEN A.K., DUNDURS J. – On the solution to a Cauchy principal value integral equation which arises in fracture mechanics. *SIAM J. Appl. Math.* **47***, 109-116, 1987.*

GIRAUD G. – Equations à intégrales principales, étude suivie d'une application. Ann. Ec. Normale, (3), LI, fasc. 4, 1936, Paris.

GUIGGIANI M. – Non-residual type accuracy estimates and adaptive refinement in Boundary Element analysis. In *Boundary element techniques : applications in engineering*, C.A. Brebbia and N.G. Zamani, editors, pp. 323-340 Computational Mechanics Publications, Southampton, 1989.

GUIGGIANI M. – Error indicators for adaptive mesh refinement in the Boundary Element Method, a new approach. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **29***, 1247-1269, 1990.*

GUY J., MANGEOT B. – Use of group theory in various integral equations. *SIAM J. Appl. Math.* **40***, 390-399, 1981.*

HAYAMI K., MATSUMOTO H. – A numerical quadrature for nearly singular boundary element integrals. *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **13***, 143-154, 1994.*

INGBER M.S., MITRA A.K. – Grid redistribution based on measurable error indicators for the direct boundary element method. *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **9***, 13-19, 1992.*

KANE J.H., KEYES D.E., GURU PRASAD K. – Iterative solution techniques in boundary element analysis. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **31***, 1511-1536, 1991.*

KUTT H.R. – The numerical evaluation of principal value integrals by finite-part integration. *Numerische Mathematik* **24***, 205-210, 1975.*

LACHAT J.C., WATSON J.O. – Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **10***, 991-1005, 1976.*

LUTZ E. – Exact gaussian quadrature methods for near-singular integrals in the boundary element method. *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **9***, 233-245, 1992.*

LYNESS J.N., JESPERSEN D. – Moderate degree symmetric quadrature rules for the triangle. *J. Inst. Math. Appl.,* **15***, pp. 19-32, 1975.*

MANOLIS G.D., BANERJEE P.K. – Conforming versus non-conforming boundary elements in three-dimensional elastostatics. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **23***, 1885-1904, 1986.*

MULLEN R.L., RENCIS J.J. – Iterative methods for solving boundary element equations. *Computers and Structures* **25***, 713-723, 1987.*

NOWAK A.J., BREBBIA C.A. – The multiple-reciprocity method. A new approach for transforming BEM domain integrals to the boundary. *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **6***, 164-168, 1989.*

PATTERSON C., SHEIKH M.A. – Interelement continuity in the boundary element method. In *Topics in boundary element research*, vol. 1, C.A. Brebbia, editor, Springer Verlag, 1984.

RANK E. – Adaptive $h-$, $p-$, and $hp-$ versions for boundary integral element methods. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **28**, *1335-1349, 1989.*

SLADEK V., SLADEK J. – Why use double nodes in BEM? *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **8**, *109-112, 1991.*

TELLES J.C.F. – A self-adaptive coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **24**, *959-973, 1987.*

WATSON J.O. – Hermitian cubic boundary elements for plane problems of fracture mechanics. *Res Mechanica,* **4**, *pp. 23-42, 1982.*

WENDLAND W.L. – Asymptotic accuracy and convergence for point collocation methods. In *Topics in boundary element research*, vol. 2, C.A. Brebbia editor, Springer Verlag, 1984.

WENDLAND W.L. – Mathematical properties and asymptotic error estimates for elliptic boundary element methods. In *Advanced boundary element methods*, T.A. Cruse, editor, pp. 475-489, Springer-Verlag, 1988.

ZIENKIEWICZ O.C., KELLY D.W., BETTESS P. – The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **11**, *355-375, 1977.*

Régularisation

BONNET M. – Regularized boundary integral equations for three-dimensional bounded or unbounded elastic bodies containing curved cracks of arbitrary shape under dynamic loading. In *Boundary element techniques : applications in engineering*, C.A. Brebbia, N.G. Zamani, editors, pp. 171–189, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1989.

BONNET M., BUI H.D. – Regularization of the displacement and traction BIE for 3D elastodynamics using indirect methods. In *Advances in Boundary Element Techniques*, J.H. Kane, G. Maier, N. Tosaka, S.N. Atluri, editors, Springer-Verlag, 1993.

BUI H.D., LORET B., BONNET M. – Régularisation des équations intégrales de l'élastostatique et de l'élastodynamique. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II* **300**, *633-636, 1985.*

BUI H.D., BONNET M. – Regular BIE for three-dimensional cracks in elastodynamics. In *IUTAM symposium on advanced boundary element methods : applications in solid and fluid mechanics*, T.A. Cruse, editor, Springer Verlag, 1987.

GUIGGIANI M., GIGANTE A. – A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method. *ASME J. Appl. Mech.* **57**, *906-915, 1990.*

GUIGGIANI M. , KRISHNASAMY G. , RUDOLPHI T.J., RIZZO F.J. – A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *ASME J. Appl. Mech.* **59**, *604-614, 1992.*

GUIGGIANI M. – Hypersingular formulation for boundary stress evaluation. *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **14**, *169-180, 1994.*

KRISHNASAMY G., RIZZO F.J., RUDOLPHI T.J. – Hypersingular boundary integral equations: their occurrence, interpretation, regularization and computation. In *Developments in Boundary Element Methods*, vol. 7: Advanced Dynamic Analysis, chap. 7, P.K. Banerjee and S. Kobayashi, editors., Elsevier, 1992.

LEBLOND J.B. – Equations intégrales régularisées pour un corps bidimensionnel contenant une fissure de forme quelconque. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II* **303**, *1521-1524, 1986.*

LIU Y., RIZZO F.J. – A weakly singular form of the hypersingular boundary integral equation applied to 3D acoustic wave problems. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* **96**, *271-287, 1992.*

NISHIMURA N., GUO Q.C., KOBAYASHI S. – Boundary integral equation method for elastodynamic crack problems. In *Boundary Elements IX*, Brebbia, Wendland, Kuhn, editors, vol.2 pp.279-291, Springer-Verlag, 1987.

NISHIMURA N., KOBAYASHI S. – A regularized boundary integral equation method for elastodynamic crack problems. *Comp. Mech.* **4**, *319-328, 1989.*

RIZZO F.J., SHIPPY D.J., REZAYAT M. – A boundary integral equation method for radiation and scattering of elastic waves in three dimensions. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **21**, *115-129, 1985.*

SLADEK J., SLADEK V. – Three-dimensional curved crack in an elastic body. *Int. J. Solids Struct.* **19**, *425-436, 1983.*

SLADEK V., SLADEK J. – Non-singular boundary integral representation of stresses. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **33**, *1481-1499, 1992.*

TOH K.C., MUKHERJEE S. – Hypersingular and finite part integrals in the boundary element method. *Int. J. Solids Struct.* **31**, *2299-2312, 1994.*

Problèmes avec non-linéarités

BONNET M., MUKHERJEE S. – The consistent tangent operator and BEM formulations of regular and sensitivity problems in elasto-plasticity. NUMIFORM'95, *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pp. 33-38, Shan-Fu Shen and Paul Dawson, editors, A.A.Balkema, 1995.

BUI H.D. – Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations. *Int. J. Solids Struct.* **14**, *935-939, 1978.*

KONTONI D.P.N., BESKOS D.E. – Application of the DR-BEM to inelastic dynamic problems. In *Boundary Elements XIV*, C.A. Brebbia, J. Dominguez and F. Paris, editors, Computational Mechanics Publications, 1992.

MAIER G., MICCOLI S., NOVATI G., SIRTORI S. – A Galerkin symmetric boundary-element method in plasticity: formulation and implementation. In *Advances in Boundary Element Techniques*, J.H. Kane, G. Maier, N. Tosaka, S.N. Atluri, editors, Springer-Verlag, 1992.

MUKHERJEE S., CHANDRA A. – A boundary element formulation for design sensitivities in problems involving both geometric and material nonlinearities. *Mathl. Comput. Modelling.* **15**, *245-255, 1991.*

TELLES J.C.F., BREBBIA C.A. – Boundary elements: new developments in elastoplastic analyses. *Appl. Math. Modelling* **5**, *376-382, 1981.*

TELLES J.C.F., CARRER J.A.M. – Implicit procedures for the solution of elastoplastic problems by the boundary element method. *Mathl. Comput. Modelling.* **15**, *303-311, 1991.*

TELLES J.C.F., CARRER J.A.M. – Static and transient dynamic nonlinear stress analysis by the boundary element method with implicit techniques. *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **14**, *65-74, 1994.*

WEI X., LEU L.J., CHANDRA A., MUKHERJEE S. – Shape optimization in elasticity and elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.* **31**, *533-550, 1994.*

ZHANG Q., MUKHERJEE S., CHANDRA A. – Design sensitivity coefficients for elasto-viscoplastic problems by boundary element methods. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **34**, *947-966, 1992a.*

ZHANG Q., MUKHERJEE S., CHANDRA A. – Shape design sensitivity analysis for geometrically and materially nonlinear problems by the boundary element method. *Int. J. Solids Struct.* **29**, *2503-2525, 1992b.*

Problèmes inverses, domaines variables

ANGELL T.S., KLEINMAN R.E., KOK B., ROACH G.F. – A Constructive Method for Identification of an Impenetrable Scatterer. *Wave Motion* **11**, *185-200, 1989.*

BARONE M.R., YANG R.J. – A Boundary Element Approach for Recovery of Shape Sensitivities in Three dimensional Elastic Solids. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* **74**, *69-82, 1989.*

BONNET M. – Shape identification using acoustic measurements: a numerical investigation using BIE and shape differentiation. In *Inverse problems in engineering mechanics*, pp. 191-200, M. Tanaka, H.D. Bui, editors, Springer Verlag, 1993.

BONNET M. – BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems. *Engng. Anal with Bound. elem., 1995 (à paraître).*

BONNET M. – Regularized BIE formulations for first- and second-order shape sensitivity of elastic fields. *Computers and Structures, special issue, S. Saigal, editor, 1995 (à paraître).*

BURCZYNSKI T., FEDELINSKI P. – Shape sensitivity analysis of natural frequencies of structures using boundary elements. *Struct. Optim.* **2**, *47-54, 1990.*

BURCZYNSKI T., FEDELINSKI P. – Boundary elements in shape design sensitivity analysis and optimal design of vibrating structures. *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **9**, *195-201, 1992.*

CHOI J.O., KWAK B.M. – Boundary Integral Equation Method for Shape Optimization of Elastic Structures. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **26**, *1579-1595, 1988.*

DE HOOP A.T., STAM H.J. – Time-domain reciprocity theorems for elastodynamic wave fields with relaxation and their application to inverse problems. *Wave Motion* **10**, *479-489, 1988.*

KANE J.H., ZHAO G., WANG H., GURU PRASAD K. – Boundary formulations for three-dimensional continuum structural shape sensitivity analysis. *ASME J. Appl. Mech.* **59**, *827-834, 1992.*

KASSAB A., MOSLEHY F.A., DARYAPURKAR A.B. – Nondestructive evaluation of cavities by an inverse elastostatics boundary element method. *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **13**, *45-55, 1994.*

KIRSCH A., KRESS R. – A numerical method for an inverse scattering problem. In *Inverse and ill-posed problems*, pp. 279-289, Academic Press, 1987.

LEU L.J., MUKHERJEE S. – Sensitivity analysis and shape optimization in nonlinear solid mechanics. *Engng. Anal. with Bound. Elem.* **12**, *251-260, 1993.*

MERIC R.A. – Shape optimization of thermoelastic solids. *J. Therm. Sc.* **11**, *187-206, 1988.*

MERIC R.A. – Differential and integral sensitivity formulations and shape optimization by BEM. *Engng. Anal. with Bound. Elem., 1995 (à paraître).*

NISHIMURA N, KOBAYASHI S. – A boundary integral equation method for an inverse problem related to crack detection. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **32**, *1371-1387, 1991.*

NISHIMURA N, KOBAYASHI S. – Determination of cracks having arbitrary shape with boundary integral method. *Engng. Anal. with Bound. Elem., 1995 (à paraître).*

TANAKA M., YAMAGIWA K. – A boundary element method for some inverse problems in elastodynamics. *Appl. Math. Modelling* **13**, *307-312, 1989.*

ZHANG Q., MUKHERJEE S. – Second-order design sensitivity analysis for linear elastic problems by the derivative boundary element method. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* **86**, *321-335, 1991.*

Fissures, mécanique de la rupture

BONNET M. – Equations intégrales variationnelles pour le problème en vitesse de propagation de fissures en élasticité linéaire. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II* **318**, *429-434, 1994.*

BONNET M., XIAO H. – Computation of energy release rate along a crack front using material differentiation of elastic BIE. *Engng. Anal with Bound. elem., 1995 (à paraître).*

BONNET M. – Regularized direct and indirect symmetric variational BIE formulations for three-dimensional elasticity. *Engng. Anal. with Bound. Elem., 1995 (à paraître).*

BUI H.D. – An Integral Equation Method for Solving the Problem of a Plane Crack of Arbitrary Shape. *J. Mech. Phys. Solids* **25**, *29-39, 1977.*

BUI H.D. – A boundary integral equation approach to fracture mechanics in three-dimensional and related problems. *6th National Japonese Conf. on Boundary Elements Methods., Tokyo , December 1989.*

LE VAN A., ROYER J. – Integral equations for three-dimensional problems. *Int. J. Fract.* **31**, *125-142, 1986.*

MI Y., ALIABADI M.H. – Dual boundary element method for analysis of 3-D crack problems. In *Boundary Elements XIV*, C.A. Brebbia, J. Dominguez and F. Paris, editors, pp. 315-329, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1992.

POLCH E.Z., CRUSE T.A., HUANG C.J. – Traction BIE solutions for flat cracks. *Comp. Mech.* **2**, *253-267, 1987.*

PORTELA A., ALIABADI M.H., ROOKE D.P. – Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. In *Advances in BEM for fracture mechanics*, M.H. Aliabadi, C.A. Brebbia, editors, Computational Mechanics Publications, Elsevier, 1992.

SLADEK J., SLADEK V. – Dynamic stress-intensity factors studied by boundary integro-differential equations. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **23**, *919-928, 1986.*

SLADEK J., SLADEK V. – Three-dimensional crack analysis for an anisotropic body. *Appl. Math. Modelling* **6**, *374-380, 1982.*

WEAVER J. – Three-dimensional crack analysis. *Int. J. Solids Struct.* **13**, *321-330, 1977.*

Dynamique

AHMAD S., BANERJEE P.K. – Inelastic Transient elastodynamic analysis of three-dimensional problems by BEM. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **29**, *371-390, 1990.*

AHMAD S., BANERJEE P.K. – Time-domain Transient elastodynamic analysis of 3-d solids by BEM. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **26**, *1709-1728, 1988.*

BECACHE E. – A variational boundary integral equation method for an elastodynamic antiplane crack. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **36**, *969-993, 1993.*

BUDRECK D.E., ACHENBACH J.D. – Scattering from three-dimensional planar cracks by the boundary integral equation method. *ASME J. Appl. Mech.* **55**, *405-412, 1988.*

BURRIDGE R. – The numerical solution of certain integral equations with non-integrable kernels arising in the theory of crack propagation and elastic wave diffraction. *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **A-265**, *353-381, 1969.*

COLE D.M., KOSLOFF D.D., MINSTER J.B. – A numerical boundary integral equation method for elastodynamics I. *Bull. Seism. Soc. Am.* **68**, *1331-1357, 1978.*

DEMIREL V., WANG S. – An efficient boundary-element method for two-dimensional transient wave propagation problems. *Appl. Math. Modelling* **11**, *411-416, 1987.*

DOHNER J.L. , RAHMATALLAH S., BERNHARD R.J. – Transient analysis of three-dimensional wave propagation using the boundary element method. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **24**, *621-634, 1987.*

GALLEGO R., DOMINGUEZ J. – Dynamic crack propagation analysis by moving singular boundary elements. *ASME J. Appl. Mech.* **59**, *S158-S162, 1992.*

HIROSE S., ACHENBACH J.D. – Time-domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **28**, *629-644, 1989.*

ISRAIL A.S.M., BANERJEE P.K. – Advanced development of boundary element method for two-dimensional dynamic elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.* **29**, *1433-1451, 1992.*

KLEINMAN R.E., ROACH G.F., SCHUETZ L.S., SHIRRON J. – An iterative solution to acoustic scattering by rigid objects. *J. Acoust. Soc. Am.* **84**, *385-391, 1988.*

KOBAYASHI S. – Fundamentals of boundary integral equations methods in elastodynamics. In *Topics in boundary element research*, vol. 2, C.A. Brebbia editor, Springer Verlag, 1984.

KOLLER M.G., BONNET M., MADARIAGA R. – Modelling of dynamical crack propagation using time-domain boundary integral equations. *Wave Motion* **16**, *339-366, 1992.*

KRISHNASAMY G. , SCHMERR L.W. , RUDOLPHI T.J., RIZZO F.J. – Hypersingular boundary integral equations: some applications in acoustic and elastic wave scattering. *ASME J. Appl. Mech.* **57**, *404-414, 1990.*

MANOLIS G.D., BESKOS D.E. – Dynamic stress concentration studies by boundary integrals and Laplace transform. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **17**, *573-599, 1981.*

MANOLIS G.D. – A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **19**, *73-91, 1983.*

MANSUR W.J., BREBBIA C.A. – Further developments on the solution of the transient scalar wave equation. In *Topics in boundary element research*, vol. 2, C.A. Brebbia ed., Springer Verlag, 1985.

MANSUR W.J., CASTRO A. – Numerical solution of Kirchhoff integral equation by boundary elements. In *Boundary elements VIII*, Springer Verlag, 1986.

MITZNER K.M. – Numerical solution for transient scattering from a hard surface of arbitrary shape – retarded potential technique. *J. Acoust. Soc. Am.* **42**, *391-397, 1967.*

REZAYAT M. , SHIPPY D.J., RIZZO F.J. – On time-harmonic elastic wave analysis by the boundary element method for moderate to high frequencies. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* **55**, *349-367, 1986.*

ROKHLIN V. – Solution of acoustic scattering problems by means of second kind integral equations. *Wave Motion* **5**, *257-272, 1983.*

SHAW R.P. – Diffraction of acoustic pulses by obstacles of arbitrary shape with a Robin condition – part A. *J. Acoust. Soc. Am.* **41**, *855-859, 1962.*

SCHENCK H.A. – Improved integral equation formulation for acoustic radiation problem. *J. Acoust. Soc. Am.* **44**, *41-58, 1968.*

VON ESTORFF O. , PAIS A.L., KAUSEL E. – Some observation on time-domain and frequency domain boundary elements. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **29**, *785-800, 1990.*

WANG C., TAKEMIYA H. – Analytical elements of time-domain BEM for two-dimensional scalar wave problems. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **33**, *1737-1754, 1992.*

WANG H.-C., BANERJEE P.K. – Axisymmetric free-vibration problems by boundary element method. *ASME J. Appl. Mech.* **55**, *437-442, 1988.*

Formulations variationnelles intégrales

BALAKRISHNA C., GRAY L.J., KANE J.H. – Efficient analytical integration of symmetric Galerkin boundary integrals over curved elements: elasticity formulation. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* **117**, *157-179, 1994.*

BAMBERGER A., HA DUONG T. – Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé de la diffraction d'une onde acoustique (I). *Math. Meth. in Appl. Sc.* **8**, *405-435, 1986.*

BAMBERGER A., HA DUONG T. – Formulation variationnelle pour le calcul de la diffraction d'une onde acoustique par une surface rigide. *Math. Meth. in Appl. Sc.* **8**, *598-608, 1986.*

BUI H.D. – On the variational boundary integral equations in elastodynamics with the use of conjugate functions. *J. Elast.* **28**, *247-256, 1992.*

MAIER G., DILIGENTI M., CARINI A. – A variational approach to boundary element elastodynamic analysis and extension to multidomain problems. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* **92**, *193-213, 1991.*

NEDELEC J.C. – Integral equations with non integrable kernels. *Integral equations and operator theory*, vol. 5, pp 562-572, 1982.

PARREIRA P., GUIGGIANI M. – On the implementation of the Galerkin approach in the boundary element method. *Computers and Structures* **33**, *269-279, 1989.*

POLIZZOTTO C. – An energy approach to the boundary element method. Part I: elastic solids. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.* **69**, *167-184, 1988.*

SIRTORI S., MAIER G., NOVATI G., MICCOLI S. – A Galerkin symmetric boundary element method in elasticity: formulation and implementation. *Int. J. Num. Meth. in Eng,.* **35**, *255-282, 1992.*

Rapports internes et documents techniques

BAMBERGER A., CHAVENT G., LAILLY – *Etude de schémas numériques pour les équations de l'élastodynamique linéaire.* Rapport INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) no. 41, 1980.

BESKOS D.E. – *Numerical Methods in Dynamical Fracture Mechanics.* Report, ISPRA European Research Centre, 1987.

BONNET M., VOLDOIRE F. – Résolution par équations intégrales du problème de deux fissures parallèles en milieu plan soumis à une traction uniforme. Note interne no. HI 73/5795, Electricité de France, Direction des Etudes et Recherches, 1987.

C.E.T.I.M. (CENTRE TECHNIQUE DES INDUSTRIES MÉCANIQUES) – Application de la méthode des équations intégrales à la mécanique. *Rapport interne, 1978, Senlis, France.*

HA DUONG T. – *La méthode de Schenck pour la résolution de problèmes de radiation acoustique.* Bulletin DER/EDF, série C, $n^0 2$, pp. 15-50, 1979.

NEDELEC J.C. – *Le potentiel de double couche pour les ondes élastiques.* Rapport interne n^0 99, CMAP Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 1983.

NEDELEC J.C. – *Approximation des équations intégrales en physique et en mécanique.* Cours Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 1977.

Ouvrages d'intérêt général

Cette section liste quelques références générales qui ne sont pas à strictement parler consacrés au sujet mais, traitant de sujets périphériques (mécanique, méthodes mathématiques et numériques, algorithmes classiques...), se révèlent utiles.

ABRAMOWITZ M., STEGUN I. – *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publications, New York, 1972.

ACHENBACH J.D. , GAUTESEN A.K., MCMAKEN H. – *Ray Methods for Waves in Elastic Solids.* Pitman, 1982.

BATOZ J.L., DHATT G. – *Modélisation des structures par éléments finis.* Hermes, Paris, 1990.

BETTESS P. – *Infinite elements.* Penshaw Press, 1992.

BUI H.D. – *Mécanique de la rupture fragile.* Masson, 1978.

CIARLET P.G. – *Analyse numérique matricielle et optimisation.* Masson, Paris, 1982.

COURANT R., HILBERT D. – *Methods of mathematical physics.* Interscience, 1953 (2 volumes).

DAUBECHIES I. – *Ten lectures on wavelets.* SIAM Publications, Philadelphia, USA, 1992.

DAVIS J.J., RABINOWITZ P. – *Methods of numerical integration.* Academic Press, 1975.

DONGARRA J.J., BUNCH J.R., MOLER C.B., STEWART G.B. – *LINPACK users'guide.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1979.

ERINGEN A.C., SUHUBI E.S. – *Elastodynamics (vol II - linear theory.* Academic Press 1975.

FLETCHER R. – *Practical Methods of Optimization*, J. Wiley & Sons, 1987.

GRADSHTEYN I.S., RYZHIK I.M. – *Tables of integrals, series and products.* Academic Press, 1980.

HAUG G.J., CHOI K.K., KOMKOV V. – *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems,* Academic Press, 1986.

METIVET B. – *Résolution spectrale des équations de Navier-Stokes par une méthode de sous-domaines courbes.* Thèse d'Etat, Université Paris VI, 1987.

MURA T. – *Micromechanics of Defects in Solids.* Martinus Nijhoff, 1982.

PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T. – *Numerical recipes: the art of scientific computing.* Cambridge press, 1986.

SALENÇON J. – *Mécanique des milieux continus.* Presses de l'Ecole Polytechnique, 1992.

STROUD A.H., SECREST D. – *Gaussian quadrature formulas.* Prentice-Hall, 1966.

TIKHONOV A.N., ARSENIN V.Y. – *Solutions to ill-posed problems.* Winston-Wiley, New York, 1977.

WING G.M. – *A primer on integral equations of the first kind.* SIAM Publications, Philadelphia, USA, 1991.

WASHIZU K. – *Variational methods in elasticity and plasticity.* Pergamon Press, 1975.

Index

θ-intégrale (Méthode –), 267

Abramowitz, 163
Achenbach, 159
Acoustique, 10
Ahmad, 158, 159
Aliabadi, 262
Allgower, 208
Alternative de Fredholm, 125
Arsenin, 224

Banerjee, 43, 158, 159, 276, 282
Base naturelle, 40, 41, 54, 289
Batoz, 2, 46
Becache, 205
Bendali, 205
Benitez, 67, 75
Beskos, 158, 276
Bettess, 29, 75, 78
Bezine, 90
Bonnet, 114, 175, 178, 267, 276
Bossavit, 207, 208, 220
Brebbia, 57, 280
Brebbia, 96
Broche, 208
Bui, 205, 256, 259, 273
Burczinski, 238

Castro, 90
Cellules d'intégration, 58
Cetim, 87
Chandra, 276, 279, 282
Chen, 160
Ciarlet, 46
Clouteau, 180
Collocation (méthode de), 43
Collocation (point de), 37
    continuité au –, 43, 115
Condition de radiation, 139, 165
    élastodynamique, 157, 175
Continuité
    au sens de Hölder, 24
Contrainte initiale, 271
Convolution, 132, 148
    discrète, 143
Cortey-Dumont, 205
Cruse, 1, 117, 250

Déformation initiale, 271
Dérivée lagrangienne, 225
    au second ordre, 232
    d'éléments différentiels, 225
    d'intégrales curvilignes, 226
    d'intégrales de surface, 226
    d'intégrales de volume, 226
Dérivation par rapport au domaine, 235
Dangla, 75
Daubechies, 146
Davis, 47
Dhatt, 2, 46
Discontinuités de vecteur-contrainte, 80

Elastoplasticité en petites transformations, 276
    formulation incrémentale pour l'–, 276
Electromagnétisme, 11
Element de frontière
    avec nœud au quart, 261
Equation
    de Helmholtz, 11, 161
    de l'élastodynamique linéaire, 146
    de la diffusion, 8, 183
    de la diffusion, vectorielle, 12
    de Laplace, 9, 101
    de Maxwell, 11
    de Navier, 13
    de Navier-Stokes, 10, 185
    de Poisson, 8, 11, 17
    de Stokes, 186
    des ondes, 10, 131
    des ondes, vectorielle, 11
Equation intégrale
    dérivée, 229

au second ordre, 233
de Fredholm, 179
de deuxième espèce, 26, 31, 125
de première espèce, 26, 30, 126
en traction, 254, 257, 258
indirecte, 30, 111, 166, 168, 175
en élasticité, 113
problème extérieur, 28, 29, 77, 78, 87
singulière, 25
pour l'élasticité, 73
ERINGEN, 133, 139, 146–148, 151, 157, 175, 176, 220
Eshelby (tenseur d'–), 275
Extérieur (problème –), 26, 76

Facteur d'intensité de contraintes, 260
FEDELINSKI, 238
Fissure, 249, 259, 262–264, 267
Fluides (écoulements de), 9, 185
Fonctions de forme, 39, 40
pour le quadrangle, 293–295
pour le segment, 292
pour le triangle, 292, 293
réduites, 53, 116
pour le quadrangle, 293, 295, 296
pour le segment, 292
pour le triangle, 292, 294
Forces de volume, 78, 83
conversion en intégrales de frontière, 83
d'origine gravitationnelle, 84
d'origine inertielle, 84
d'origine thermique, 84
méthode de réciprocité multiple, 84

Galerkin
tenseur de –, 13, 83, 84, 90
GRADSHTEYN, 163
Groupe de symétrie, 207
représentation irréductible d'un, 211, 213
symétrie cyclique, 211
symétrie plane, 211
GUIGGIANI, 23, 53, 57, 73, 87, 99, 114, 115, 205
GUNTHER, 1, 115

HALPERN, 165
HAMDI, 205
HAUG, 224
HAYAMI, 52
HELLEN, 265
HIROSE, 159
HUANG, 117

Identité de réciprocité, 5
de Maxwell-Betti, 64
en élastodynamique, 147
pour l'équation de Poisson, 18
identité de réciprocité
formule de Green, 18
Inclusion, 275
équivalente (méthode de l'–), 275
INGBER, 101
Intégrale
élémentaire, 38, 44, 116, 142, 216
quasi-singulière, 47, 50
régulière, 47
singulière, 53, 116
Interpolation
conforme, 42, 115
en temps, 141
linéaire, 141
par ondelettes, 146
spectrale, 145
isoparamétrique, 43
non conforme, 43, 115
du vecteur contrainte, 80
partiellement non conforme, 81
IRWIN, 262
ISRAIL, 158, 282
ITOH, 268

Jacobien, 41, 116
JESPERSEN, 49, 296

KANE, 46
KARABALIS, 145
KELLOGG, 1
KENNETT, 151, 171, 182
KOBAYASHI, 204, 205
KOLLER, 264
KONTONI, 276
KRISHNASAMY, 114, 115
KUPRADZE, 2, 22, 104, 114, 115, 126, 127

Lamé (constantes de –), 13
Lamé (potentiels de –), 147
LE VAN, 263
Liapounov-Tauber (théorème de –), 115
LIGGETT, 185, 186
LOBRY, 208

Lyness, 49, 296

Méthode des images, 20, 133
Madariaga, 264
Maier, 279
Manolis, 43, 158
Mi, 262
Mialon, 226, 266
Mitra, 101
Mroz, 224, 226
Mukherjee, 276, 279, 282
Mullen, 46
Mura, 93, 95, 275
Métivet, 145

Nedelec, 196, 205
Newman, 268
Nishimura, 204, 205
Nowak, 57

Paris, 262
Parks, 265
Parreira, 205
Pas à pas (méthode –), 141
Patterson, 81
Petryk, 224, 226
Pham, 67, 127
Points de Gauss, 47
  choix du nombre de – (dynamique), 169
  choix du nombre de – (statique), 49
  formule-produit pour le carré, 48
  pour le segment, 296
  pour le triangle, 296
  pour les formulations variationnelles intégrales, 201, 202
  pour une singularité logarithmique, 296
  propriétés, 48
Poisson (coefficient de –), 13
Polch, 117
Potentiel
  élastique
    de double couche, 112
    de simple couche, 112
  de double couche, 29, 111, 166
  de Lamé, 147
  de simple couche, 29, 111, 166
Pradeilles-Duval, 266

Réciprocité multiple (méthode de)
  en élasticité, 84
Régularisation, 24, 71, 136, 153, 164, 174
  au premier ordre, 105, 108, 136, 153
  au second ordre, 102, 107
Rabinowitz, 47
Raju, 268
Rencis, 46
Représentation intégrale, 6, 184
  avec déformations ou contraintes initiales, 273, 274
  de la pression, 187
  discrétisée, 81
  du champ de vitesses, 187
  du déplacement, 68, 151, 174
  du gradient de déplacement
    à la frontière, 107, 110, 154
  du gradient de potentiel, 21, 164
    à la frontière, 103, 106, 137
    variante intégrée par parties, 22
  du potentiel, 21, 134, 164
    variante intégrée par parties, 135
  du tenseur des contraintes, 69, 152, 174
    à la frontière, 110
    variante intégrée par parties, 69
  extérieure, 21
  potentiel de double couche, 29, 166
  potentiel de simple couche, 29, 166
  pour les problèmes extérieurs, 28, 78
  problèmes extérieurs, 139
    élastodynamique, 157
Rezayat, 49, 169
Rizzo, 1, 176
Rongved, 97
Rosakis, 67, 75
Ryzhik, 163

Salençon, 63, 224
Secrest, 47
Shaw, 1
Sheikh, 81
Sih, 160
Simo, 277
Simon, 224, 235, 236
Singularité, 20, 21, 65, 66, 68, 132, 150
  dynamique et statique (égalité de la –), 133, 150, 162
Singularité
  dynamique et statique (égalité de la –), 172, 173
Sirtori, 193, 205
Sladek, 22, 104, 114, 160

SNYDER, 250
Solution élémentaire, 5
de l'équation de diffusion, 183
en variable de Laplace, 185
de l'équation de Helmholtz, 162
problèmes plans, 163
de l'équation de Stokes, 186
du bilaplacien, 35
du laplacien, 18
demi-espace, 20
fonction de Green, 20
milieu anisotrope, 35
problèmes plans, 32
en élasticité, 64
de Kelvin, anisotrope, 67, 90
de Kelvin, déformations planes, 86
de Kelvin, isotrope, 65, 90
de Mindlin (demi-espace), 67, 95
de Mindlin (demi-plan), 96
tenseur de Green, 127
en élastodynamique, 148
de Stokes, 149
impulsionnelle, 151
pour l'élastodynamique stationnaire, 171
de Helmholtz, 171
de Helmholtz (déformations planes), 172
pour l'équation des ondes, 132
impulsionnelle, 133
SOMIGLIANA, 1
Stationnarité (condition de –), 198, 203
STEGUN, 163
STERN, 90
STROUD, 47
SUHUBI, 133, 139, 146–148, 151, 157, 175, 176, 220

TADA, 262
TANAKA, 268
Taux de restitution d'énergie, 265
TAYLOR, 277
TELLES, 51, 96, 280
Tenseur de conductivité hydraulique, 10
Tenseur de conductivité thermique, 8
Tenseur de Hooke, 12
Tenseur des contraintes, 12
à la frontière, 110
par dérivation du déplacement, 82
Terme libre, 73, 103, 106, 109, 121, 122
TIKHONOV, 224
Transformation, 224, 231, 237
vitesse de –, 224, 231, 237
Transformation de Kirchhoff, 9
TRICOMI, 2, 26, 30, 125

Valeur principale de Cauchy, 73, 273
Valeurs propres fictives, 167
Variationnelle (formulation intégrale –), 192, 196, 200
VIRIEUX, 264
Voisinage d'exclusion, 23, 71, 73, 101, 106, 114
forme du –, 66, 73

WAHBAH, 186
WEAVER, 256
WEI, 240
WENDLAND, 205
WILLIS, 92
WING, 180
WROBEL, 96
WU, 186

XIAO, 267

Young (module d'–), 13