



HAL
open science

Empilements de cercles et modules combinatoires

Peter Haïssinsky

► **To cite this version:**

| Peter Haïssinsky. Empilements de cercles et modules combinatoires. 2006. hal-00121469v1

HAL Id: hal-00121469

<https://hal.science/hal-00121469v1>

Preprint submitted on 20 Dec 2006 (v1), last revised 18 Nov 2009 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

EMPILEMENTS DE CERCLES ET MODULES COMBINATOIRES

par Peter Haïssinsky

Résumé.

Le but cette note est de tenter d'expliquer les liens étroits qui unissent la théorie des empilements de cercles et des modules combinatoires, et de comparer les approches à la conjecture de J.W. Cannon qui en découlent [11, 9, 10, 4, 5, 6].

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	2
1. Empilements de cercles	3
2. Modules combinatoires	4
2.1. Modules dans un graphe	4
2.2. Modules sur une surface	8
2.3. Comparaisons des modules	11
3. Théorème de Riemann combinatoire et empilements de cercles	14
3.1. Théorème de Riemann combinatoire revisité	14
3.2. Paramétrage quasisymétrique de sphères topologiques	20
3.3. Sur les démonstrations des différentes versions du théorème de Riemann	25
4. Applications à la conjecture de Cannon	28
4.1. Approche de Cannon <i>et al.</i>	29
4.2. Approche de Bonk et Kleiner	30
4.3. En guise de conclusion	31
Appendice A. Notions de théorie géométrique des fonctions	32
Appendice B. Discrétisation dans les espaces métriques	36
Appendice C. Convergence et topologie de Hausdorff	41
BIBLIOGRAPHIE	45

Introduction

Plusieurs approches ont été développées pour estimer des modules de courbes dans des espaces topologiques munies de structures très faibles. Les premiers résultats dans ce sens sont certainement dûs à P. Pansu qui généralise la notion de module dans le cadre d'espaces munies de familles (indénombrables) de "boules" [20]. D'autres méthodes ont aussi été développées par J. Heinonen et P. Koskela notamment pour étudier les homéomorphismes quasiconformes et leurs avatars dans des espaces de Carnot, voire dans des espaces métriques plus généraux [16].

L'objet de ce texte est d'unifier autant que possible les approches de J.W. Cannon, W. Floyd et W. Parry et de M. Bonk et B. Kleiner à des problèmes d'uniformisation de surfaces motivés par la conjecture de Cannon. Ces deux approches reposent sur des notions de modules combinatoires légèrement différentes qui conduisent à des résultats apparemment similaires. Le résultat central de cet article est le Théorème 3.1 qui fournit un socle commun pour en déduire d'une part une version faible du théorème de Riemann combinatoire de J.W. Cannon (Corollaire 3.8) et d'autre part les résultats de M. Bonk et B. Kleiner (voir p.ex. le Corollaire 3.11). Le point clef des démonstrations que l'on présente est d'utiliser, à l'instar de M. Bonk et B. Kleiner, les empilements de cercles pour traduire naturellement les données combinatoires en données analytiques.

Pour ce faire, plusieurs variantes de modules combinatoires présentés par ces différents auteurs sont développées dans ce texte, et on établit quelques comparaisons entre elles. Nous adoptons le point de vue du lecteur familier des notions et techniques de théorie géométrique des fonctions pour démontrer les propriétés de ces modules. Ces notions sont rappelées brièvement dans l'Appendice A, où quelques démonstrations sont aussi esquissées pour insister sur le traitement commun de ces deux théories.

Ce texte est organisé en quatre parties et trois appendices. Les deux premières parties fournissent des rappels concernant les empilements de cercles d'une part, et les modules combinatoires de courbes d'autre part. La troisième partie contient les résultats proprement dits de l'article et la comparaison des deux méthodes de discrétisation. La dernière partie contient une discussion sommaire sur les approches à la conjecture de Cannon. L'Appendice A décrit succinctement les notions de théorie géométrique des fonctions qui sont utilisés tout au long du texte, et qui servent de motivation. Dans l'Appendice B, on montre que ces méthodes de discrétisation sont aussi intéressantes dans le cadre d'espaces métriques plus généraux. Enfin, dans l'Appendice C, on établit un critère de convergence pour des fonctions définies sur des sous-ensembles compacts d'un espace compact métrique qui converge au sens de Hausdorff.

Les résultats de ce texte sont essentiellement connus, mais il est espéré qu'ils sont mis en perspective de manière profitable.

REMERCIEMENTS. Je remercie J. Los, L. Reeves et H. Short pour les nombreuses discussions que nous avons eues autour des thèmes abordés dans ce texte, sans lesquelles ce travail n'aurait pu voir le jour. Je remercie aussi Hadrien Larôme qui a relu avec beaucoup d'attention une grande partie de ce texte.

Notations. Dans tout le texte, si a et b sont positifs, on écrit $a \asymp b$ s'il existe une constante universelle $u > 1$ telle que $(1/u) \cdot a \leq b \leq u \cdot a$, $a \lesssim b$ ou $b \gtrsim a$ s'il existe une constante universelle $C > 1$ telle que $a \leq C \cdot b$.

1. EMPILEMENTS DE CERCLES

Un empilement de cercles \mathcal{E} de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ est une collection de disques d'intérieurs deux à deux disjoints telle que les composantes connexes du complémentaire de la réunion de ces disques soient bordées par exactement trois arcs de cercle.

A un empilement \mathcal{E} , on associe son graphe d'incidence $G(\mathcal{E})$ dont les sommets sont les disques et les arêtes sont les paires de disques dont les fermetures s'intersectent. Lorsque \mathcal{E} est fini, il s'agit d'une triangulation que l'on peut voir plongée dans la surface.

Nous énonçons dès maintenant un théorème de représentation conforme pour les empilements qui correspond à une réciproque du fait précédent.

THÉORÈME 1.1 (P. Koebe [19]). — *Soit \mathcal{T} une triangulation de la sphère \mathbb{S}^2 . Il existe un unique empilement de cercles \mathcal{E} de $\widehat{\mathbb{C}}$ de graphe d'incidence isomorphe à \mathcal{T} , à transformation homographique près.*

Une démonstration plus moderne figure dans [12].

W.P. Thurston a proposé de démontrer le théorème de représentation conforme de Riemann en utilisant les empilements de cercles. Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine simplement connexe borné du plan, et $z_1, z_2 \in \Omega$ deux points distincts. Pour $r > 0$, on note \mathcal{T}_r la triangulation de \mathbb{C} par triangles équilatéraux engendrée par $[0, r] \times \{0\}$. On désigne par Ω_r la composante connexe de l'intérieur de la réunion des triangles fermés entièrement contenus dans Ω qui contient z_1 . Si r est assez petit, alors z_2 en fait aussi partie. Soit $\mathcal{T}_r(\Omega) = \mathcal{T}_r \cap \overline{\Omega_r}$. On ajoute à $\mathcal{T}_r(\Omega)$ un sommet (abstrait) et des arêtes qui le relient aux sommets du bord de $\mathcal{T}_r(\Omega)$. On obtient ainsi une triangulation de la sphère, pour laquelle on peut appliquer le Théorème 1.1 afin d'obtenir un empilement de cercles \mathcal{E}_r dont le complémentaire du disque unité $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ est associé au sommet rajouté. On note $f_r : \mathcal{T}_r(\Omega) \rightarrow \mathbb{D}$ l'application simpliciale induite par les triangulations sous-jacentes. Quitte à composer par un automorphisme de \mathbb{D} , on peut supposer que $f_r(z_1) = 0$ et $f_r(z_2) > 0$. Le but est alors de montrer que f_r converge vers l'application de Riemann quand r tend vers 0, ce qu'ont fait B. Rodin et D. Sullivan [21].

THÉORÈME 1.2. — *Le chemin $(f_r)_r$ converge uniformément sur les compacts de Ω vers la transformation conforme $f : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ telle que $f(z_1) = 0$ et $f(z_2) > 0$ lorsque r tend vers 0.*

Un point crucial de leur démonstration est de montrer que la suite est uniformément quasiconforme (voir Appendice A). Cette propriété est une conséquence du lemme suivant.

LEMME 1.3 (du collier). — Il existe une constante $C = C(N) > 0$ telle que si un disque D de rayon r d'un empilement de cercles a N voisins, alors le rayon r' de chaque voisin vérifie $r' > C(N)r$.

Une démonstration figure dans [21].

2. MODULES COMBINATOIRES

La notion classique de modules de courbes est exposée dans l'Appendice A. On s'en inspire pour en développer une théorie combinatoire.

2.1. Modules dans un graphe

Soit G un graphe connexe de sommets \mathcal{S} et d'arêtes \mathcal{A} . On munit ce graphe d'une métrique qui rend chaque arête isométrique au segment $[0, 1]$. Une *courbe* sur le graphe sera un sous-graphe connexe de G , donc ses sommets sont dans \mathcal{S} , et ses arêtes dans \mathcal{A} .

Pour $Q \geq 1$, on note $\mathcal{M}_Q(G)$ l'ensemble des applications $\rho : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $0 < \sum \rho(s)^Q < \infty$ que l'on appelle *métriques admissibles*, ou *Q -admissibles* pour être plus précis.

Soit K un ensemble de sommets de G ; la ρ -longueur de K est par définition

$$\ell_\rho(K) = \sum_{s \in K} \rho(s)$$

et son Q -volume

$$V_{Q,\rho}(K) = \sum_{s \in K} \rho(s)^Q.$$

Lorsque $K = \mathcal{S}$, on notera plus simplement $V_{Q,\rho}(\mathcal{S}) = V_Q(\rho)$.

Si Γ est une famille de courbes dans G et ρ est une métrique Q -admissible, on définit

$$L_\rho(\Gamma, \mathcal{S}) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \ell_\rho(\gamma),$$

et son Q -module combinatoire par

$$\text{mod}_Q(\Gamma, G) = \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q(G)} \frac{V_Q(\rho)}{L_\rho(\Gamma, \mathcal{S})^Q} = \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q(G)} \text{mod}_Q(\Gamma, \rho, \mathcal{S}).$$

On peut remarquer que si $\lambda > 0$, alors $\text{mod}_Q(\Gamma, \lambda\rho, \mathcal{S}) = \text{mod}_Q(\Gamma, \rho, \mathcal{S})$, ce qui permet de normaliser les métriques par des conditions du type $L_\rho(\Gamma, \mathcal{S}) \geq 1$, ou encore $V_{Q,\rho}(G) = 1$.

En supposant \mathcal{S} fini et en normalisant les éléments de $\mathcal{M}_Q(G)$ pour que $\sum \rho(s)^Q = 1$, il n'est pas difficile de montrer l'existence d'une métrique extrémale i.e., pour laquelle l'infimum est atteint. Voici une adaptation au cas discret d'un critère de A. Beurling d'extrémalité (voir l'Appendice A).

PROPOSITION 2.1 (critère de Beurling). — *Soient G un graphe fini et connexe, Γ une famille de courbes et $Q > 1$. Une métrique ρ est extrémale si et seulement si il existe une sous-famille $\Gamma_0 \subset \Gamma$ telle que*

- (1) pour toute $\gamma \in \Gamma_0$, $\ell_\rho(\gamma) = L_\rho(\Gamma, \mathcal{S})$;
- (2) pour toute $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour $\gamma \in \Gamma_0$, $\sum_{s \in \mathcal{S}(\gamma)} h(s) \geq 0$, on ait $\sum_{\mathcal{S}} h(s) \rho(s)^{Q-1} \geq 0$, où $\mathcal{S}(\gamma)$ désigne les sommets $s \in \mathcal{S}$ qui intersectent γ .

De plus, cette métrique est unique à normalisation près.

Il est pratique d'introduire à ce niveau quelques notations et de noter quelques observations. Si $G = (\mathcal{S}, \mathcal{A})$ est un graphe fini et Γ une famille de courbes, on notera $\Gamma(s)$ l'ensemble des courbes de Γ qui contiennent l'élément $s \in \mathcal{S}$; de même, $\mathcal{S}(\gamma)$ désignera l'ensemble des sommets de \mathcal{S} contenus dans la courbe $\gamma \in \Gamma$. Remarquons que si ρ est extrémale, alors pour tout sommet s du support $\text{supp } \rho$ de ρ , il existe une courbe $\gamma \in \Gamma$ telle que $\ell_\rho(\gamma) = L_\rho(\Gamma, \mathcal{S})$, car sinon on pourrait diminuer la valeur de $\rho(s)$, ce qui diminuerait $\text{mod}_Q(\Gamma, \rho, \mathcal{S})$.

Enfin, on considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ muni de sa base canonique $\{e_s\}_{s \in \mathcal{S}}$ et du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ qui rend cette base orthonormée. A chaque courbe $\gamma \in \Gamma$, on associe le vecteur $u_\gamma = \sum_{s \in \mathcal{S}(\gamma)} e_s$. Une métrique σ est donc un vecteur de $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ et si $\gamma \in \Gamma$, alors $\ell_\sigma(\gamma) = \langle u_\gamma, \sigma \rangle$. On définit aussi $v(\sigma) = \sum_{\mathcal{S}} \sigma^Q(s)$ et on note que $v : \mathbb{R}^{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe si $Q > 1$ et linéaire si $Q = 1$.

LEMME 2.2. — Avec les notations ci-dessus et $Q > 1$, si ρ est extrémale, alors il existe une sous-famille $\Gamma_0 \subset \Gamma$ et un vecteur $(\lambda_\gamma) \in (\mathbb{R}_+)^{\Gamma_0}$ tels que

- (1) pour toute $\gamma \in \Gamma_0$, $\ell_\rho(\gamma) = L_\rho(\Gamma, \mathcal{S})$;
- (2) $\nabla_\rho v = \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \lambda_\gamma u_\gamma$.

Ce lemme apparaît dans [9] dans le cas $Q = 2$.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on note Γ_0 l'ensemble des courbes de Γ de longueur minimale, que l'on fixe égale à 1. Notons $\delta = \inf_{\Gamma \setminus \Gamma_0} \ell_\rho(\gamma) - 1$. Puisque l'on a un nombre fini de vecteurs u_γ possibles, on a $\delta > 0$.

On considère l'ensemble Δ des vecteurs $\sigma \in \mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ tels que $\ell_\sigma(\gamma) = 1$ pour toutes les courbes $\gamma \in \Gamma_0$. Il s'agit d'un espace affine, donc la restriction de v à Δ admet un unique minimum en un point ρ_1 car v est strictement convexe. Montrons que $\rho_1 = \rho$ par

l'absurde. Pour $t \in [0, 1]$, on note $\rho_t = \rho + t(\rho_1 - \rho)$. Donc, si $\gamma \in \Gamma_0$ alors $\ell_{\rho_t}(\gamma) = 1$, et sinon

$$\ell_{\rho_t}(\gamma) \geq (1-t)(1+\delta) + t\ell_{\rho_1}(\gamma).$$

Du coup, si t est assez petit, alors on a $L_{\rho_t}(\Gamma, \mathcal{S}) \geq 1$, et par convexité, on devrait avoir $v(\rho_t) < v(\rho)$, ce qui contredit l'extrémalité de ρ . Par suite, ρ est la solution du problème variationnel.

La théorie des extrema liés indique que $\nabla_{\rho}v$ est orthogonal à Δ , autrement dit, il existe des multiplicateurs de Lagrange $(\lambda_{\gamma}) \in \mathbb{R}^{\Gamma_0}$ tels que

$$\nabla_{\rho}v = \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \lambda_{\gamma} u_{\gamma}.$$

Pour conclure, il reste à montrer que l'on peut choisir ces multiplicateurs positifs ou nuls. On procède par l'absurde en montrant que ρ n'est pas extrémal s'il existe un multiplicateur strictement négatif. On note E le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathcal{S}}$ engendré par $\{u_{\gamma}, \gamma \in \Gamma_0\}$ et F l'orthogonal de $\nabla_{\rho}v$ dans E et on définit l'espace affine $A = \nabla_{\rho}v + F$.

L'espace A s'identifie avec un sous-espace de l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ de E . Puisque le produit scalaire des u_{γ} par $\nabla_{\rho}v$ est toujours positif, chaque demi-droite de vecteur directeur u_{γ} coupe F en un point p_{γ} , et on note 0 le point qui correspond à $\nabla_{\rho}v$.

Si $\nabla_{\rho}v$ n'est pas dans le cône engendré par $\{u_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma_0}$, alors 0 n'est pas dans l'enveloppe convexe des points p_{γ} . Du coup, ces points sont dans un demi-espace de A et il existe un vecteur $\sigma \in F$ dont le produit scalaire avec tous les u_{γ} est strictement positif, et même minoré par une constante $\eta > 0$, puisqu'ils sont en nombre fini.

Posons $\rho_t = \rho + t\sigma$ avec $t > 0$. Pour $\gamma \in \Gamma_0$, on a

$$\ell_{\rho_t}(\gamma) = \ell_{\rho}(\gamma) + t\langle u_{\gamma}, \sigma \rangle \geq 1 + t\eta.$$

Et si $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$, $\ell_{\rho_t}(\gamma) \geq 1 + \delta + t\langle u_{\gamma}, \sigma \rangle \geq 1 + t\eta$ si t est assez petit, donc $L_{\rho_t}(\Gamma) \geq 1 + \eta t$ si t est assez petit. Or

$$\begin{aligned} v(\rho_t) &= \sum_{s \in \mathcal{S}} (\rho(s) + t\sigma(s))^Q \\ &= \sum_{s \in \text{supp } \rho} \rho(s)^Q (1 + Qt\sigma(s)\rho(s)^{-1} + o(t)) \\ &= v(\rho) + \sum_{s \in \mathcal{S}} Q\rho(s)^{Q-1}t\sigma(s) + o(t) \\ &= v(\rho) + t\langle \nabla_{\rho}v, \sigma \rangle + o(t) \\ &= v(\rho) + o(t), \end{aligned}$$

car $\nabla_{\rho}v$ et σ sont orthogonaux par définition.

Donc

$$\text{mod}_Q(\Gamma, \rho_t, \mathcal{S}) \leq \frac{v(\rho) + o(t)}{(1 + \eta t)^Q} = \text{mod}_Q(\Gamma, \rho, \mathcal{S})(1 - Q\eta t + o(t)) + o(t)$$

ce qui contredit l'extrémalité de ρ . Donc $\nabla_\rho v$ est dans le cône engendré par $\{u_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma_0}$ et il existe $(\lambda_\gamma) \in (\mathbb{R}_+)^{\Gamma}$ tel que $\nabla_\rho v = \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \lambda_\gamma u_\gamma$. ■

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.1. Supposons que ρ vérifie les conditions de A. Beurling. Soit $\sigma \in \mathcal{M}_Q$ que l'on suppose normalisée pour que $L_\sigma(\Gamma) = L_\rho(\Gamma)$. Du coup, $\ell_\sigma(\gamma) \geq L_\rho(\Gamma) = \ell_\rho(\gamma)$ pour toute $\gamma \in \Gamma_0$. Donc, en posant $h = \sigma - \rho$, on obtient

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} (\sigma - \rho) \rho^{Q-1} \geq 0$$

soit

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \rho^Q \leq \sum_{s \in \mathcal{S}} \sigma \rho^{Q-1} \leq \left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \sigma^Q \right)^{1/Q} \cdot \left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \rho^Q \right)^{1-1/Q}$$

par l'inégalité de Hölder. Du coup, on a $\text{mod}_Q(\Gamma, \rho, \mathcal{S}) \leq \text{mod}_Q(\Gamma, \sigma, \mathcal{S})$. Le cas d'égalité se produit lorsque l'inégalité de Hölder est une égalité, donc si σ^Q et $(\rho^{Q-1})^{Q/(Q-1)}$ sont proportionnelles, soit si $\sigma = \rho$ d'après leurs normalisations.

Réciproquement, supposons que ρ est extrémale et normalisons-la pour que $L_\rho(\Gamma) = 1$. D'après le lemme précédent, il existe $\Gamma_0 \subset \Gamma$ et $(\lambda_\gamma) \in (\mathbb{R}_+)^{\Gamma}$ tels que

- (1) pour toute $\gamma \in \Gamma_0$, $\ell_\rho(\gamma) = L_\rho(\Gamma, \mathcal{S})$;
- (2) $\nabla_\rho v = \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \lambda_\gamma u_\gamma$.

Si $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\sum_{s \in \mathcal{S}(\gamma)} h(s) \geq 0$ pour toute courbe $\gamma \in \Gamma_0$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{s \in \mathcal{S}} h(s) \rho(s)^{Q-1} &= \sum_{s \in \mathcal{S}} h(s) \left(\frac{1}{Q} \sum_{\gamma \in \Gamma_0(s)} \lambda_\gamma \right) \\ &= \frac{1}{Q} \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \lambda_\gamma \left(\sum_{s \in \mathcal{S}(\gamma)} h(s) \right) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Ceci établit la réciproque. ■

Condenseurs dans un graphe. Un condenseur est la donnée de deux ensembles finis de sommets E et F disjoints. On lui associe la famille $\Gamma(E, F)$ des courbes qui joignent E à F et on définit le module, aussi appelé capacité, par

$$\text{mod}_Q(E, F, G) = \text{mod}_Q(\Gamma(E, F), G).$$

La capacité d'un condenseur dépend de manière essentielle des arêtes du graphe. Cependant, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 2.3. — Soient \mathcal{S} un ensemble de sommets et \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 deux familles d'arêtes telles que les graphes associés $G_1 = (\mathcal{S}, \mathcal{A}_1)$ et $G_2 = (\mathcal{S}, \mathcal{A}_2)$ soient connexes. On suppose que $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$, G_2 est de valence bornée par K , et que si $|v_1 - v_2|_1 = 1$ alors $|v_1 - v_2|_2 \leq k$. Alors, pour tout $Q > 1$, pour tout condenseur (E, F) , on a

$$\text{mod}_Q(E, F, G_1) \asymp \text{mod}_Q(E, F, G_2),$$

où les constantes implicites ne dépendent que de k , K et Q .

DÉMONSTRATION. On note $\Gamma_1 = \Gamma_1(E, F)$ la famille de courbes associée à $\{E, F\}$ dans G_1 et $\Gamma_2 = \Gamma_2(E, F)$ dans G_2 .

Tout d'abord, on a $\text{mod}_Q(\Gamma_2, G_2) \leq \text{mod}_Q(\Gamma_1, G_1)$ car il y a plus de chemins dans G_1 .

Réciproquement, on se donne une métrique $\rho_2 : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $L_{\rho_2}(\Gamma_2, G_2) = 1$. On définit $\rho_1 : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $\rho_1(s) = \max\{\rho_2(s'), s' \in B_2(s, k)\}$. Notons N le cardinal maximal d'une boule combinatoire $B_2(s, k)$. Si γ_1 est une courbe de Γ_1 , on lui associe une courbe γ_2 de Γ_2 passant par au moins les mêmes sommets, et dont les détours sont de longueur au plus N . Du coup, pour chaque sommet s de γ_1 , on a $\rho_1(s) \geq (1/N)\ell_{\rho_2}(\gamma_2 \cap B_2(s, k))$ et on en déduit que $L_{\rho_1}(\Gamma_1, G_1) \geq 1/N$.

De même, on a

$$V_Q(\rho_1) \leq \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{v \in B_2(s, k)} \rho_2(v)^Q \leq N \sum_{s \in \mathcal{S}} \rho_2(s)^Q \leq N \cdot V_Q(\rho_2)$$

car chaque v peut apparaître N fois. On en déduit $\text{mod}_Q(\Gamma_2, G_2) \gtrsim \text{mod}_Q(\Gamma_1, G_1)$. ■

DÉFINITION 2.4 (graphes équivalents). — Sous les conditions de la Proposition 2.3, on dira que G_1 contient le graphe équivalent G_2 .

2.2. Modules sur une surface

Soit \mathcal{S} un recouvrement localement fini d'un espace métrique X . Ses éléments seront appelés parfois des pièces, et la maille de \mathcal{S} sera le plus grand diamètre de ses pièces. Le nerf $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ de \mathcal{S} est le graphe dont les sommets sont les éléments de \mathcal{S} et les arêtes sont constituées des paires de pièces qui s'intersectent. On dit qu'un recouvrement est de valence bornée si son nerf est de valence bornée, et l'indice de recouvrement entre deux recouvrements est le nombre maximal de pièces de l'un des recouvrements qui intersectent une même pièce de l'autre. L'indice d'auto-recouvrement est l'indice d'incidence d'un recouvrement par rapport à lui-même. En particulier, un graphe de valence bornée a un indice d'auto-recouvrement fini. On dira dans la suite qu'une suite de recouvrements est de valence bornée si la borne ne dépend pas du recouvrement de la suite.

Par pavage, on entendra un recouvrement localement fini par compacts connexes d'intérieurs deux à deux disjoints.

Une courbe dans un espace topologique X est une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$. On ne distinguera pas en général l'application γ en tant que telle de son image dans X .

Si Γ est une famille de courbes dans X , on lui associe une famille de courbes $\widehat{\Gamma}$ dans $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ comme suit: chaque courbe γ traverse un ensemble de pièces adjacentes $\mathcal{S}(\gamma)$; on associe à γ cet ensemble $\mathcal{S}(\gamma)$, ainsi que les arêtes qui les connectent dans le graphe: cela définit une courbe $\widehat{\gamma}$ de $\mathcal{N}(\mathcal{S})$. On note $\widehat{\Gamma}$ l'ensemble des courbes ainsi obtenues, et on définit

$$\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}) = \text{mod}_Q(\widehat{\Gamma}, \mathcal{N}(\mathcal{S})).$$

De même, on peut associer à chaque courbe γ l'ensemble de ses recouvrements par des pièces de \mathcal{S} . On note $\widehat{\Gamma}'$ l'ensemble des courbes de $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ ainsi définies. On peut alors définir le module réduit de Γ par

$$\text{mod}'_Q(\Gamma, \mathcal{S}) = \text{mod}'_Q(\widehat{\Gamma}', \mathcal{N}(\mathcal{S})).$$

On remarque que chaque chemin de $\widehat{\Gamma}$ contient au moins un chemin de $\widehat{\Gamma}'$, donc

$$\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}) \leq \text{mod}'_Q(\Gamma, \mathcal{S}).$$

Enfin, si (E, F) est un condenseur *i.e.*, E et F sont deux continua disjoints, on définit trois modules. Les deux premiers sont associés à la famille des courbes $\Gamma(E, F)$ qui joignent E à F dans X , et le dernier au condenseur vu dans $\mathcal{N}(\mathcal{S})$: on considère $\widehat{E} = \mathcal{S}(E)$ et $\widehat{F} = \mathcal{S}(F)$ comme sous-ensemble de $\mathcal{N}(\mathcal{S})$.

On définit alors

$$\begin{cases} \text{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}) = \text{mod}_Q(\Gamma(E, F), \mathcal{S}) \\ \text{mod}'_Q(E, F, \mathcal{S}) = \text{mod}'_Q(\Gamma(E, F), \mathcal{S}) \\ \widehat{\text{mod}}_Q(E, F, \mathcal{S}) = \text{mod}_Q(\widehat{E}, \widehat{F}, \mathcal{N}(\mathcal{S})) \end{cases}$$

En général, les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\text{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}) \leq \text{mod}'_Q(E, F, \mathcal{S}) \leq \widehat{\text{mod}}_Q(E, F, \mathcal{S}).$$

REMARQUE 2.5. — Le module le plus maniable est bien sûr $\widehat{\text{mod}}_Q$ puisqu'il ne dépend que du nerf du recouvrement. En revanche, il peut ne pas porter d'information si par exemple on n'a pas de courbes entre les continua ! Du coup, la signification de ce module se fera à travers les autres, qui eux, dépendent plus précisément de la topologie de X .

On suppose dorénavant que X est une surface topologique. Voici l'analogue du Théorème 1.1 (cf. [9, 22]).

THÉORÈME 2.6. — *Soit Q un quadrilatère recouvert par un pavage \mathcal{S} dont le nerf forme une triangulation et soit Γ la famille de courbes qui joint deux côtés opposés donnés. Il existe un rectangle R et un pavage de nerf identique au précédent par carrés qui respecte les sommets. La longueur des arêtes des carrés produit la métrique extrémale pour $\text{mod}_2(\Gamma, \mathcal{S})$.*

REMARQUE 2.7. — Si le pavage ne forme pas une triangulation, alors le pavage par carrés peut avoir un nerf sensiblement différent de l'original si plusieurs pièces de \mathcal{S} s'intersectent en un même point.

DÉFINITION 2.8 (modules combinatoires d'un anneau). — Si A un anneau d'une surface recouverte par \mathcal{S} , on considère Γ_t l'ensemble des courbes qui joignent les bords de l'anneau, et Γ_s la famille des courbes de A qui séparent les composantes de bord. On définit alors

$$\text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}) = \frac{1}{\text{mod}_2(\Gamma_t, \mathcal{S})} \quad \text{et} \quad \text{mod}_{\text{inf}}(A, \mathcal{S}) = \text{mod}_2(\Gamma_s, \mathcal{S}).$$

On définit de même les modules réduits mod'_{sup} et mod'_{inf} . De plus, si on note E et F les composantes du bord de A , on définit aussi $\widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}) = 1/\widehat{\text{mod}}_2(E, F, \mathcal{S})$.

Afin d'énoncer le théorème de Riemann combinatoire de J.W. Cannon, nous introduisons quelques notions supplémentaires.

DÉFINITION 2.9 (tuiles, toiture). — Une tuile est un compact connexe et une toiture est un recouvrement localement fini par tuiles.

DÉFINITION 2.10 (approximation conformément séparante). — C'est une suite de recouvrements $(\mathcal{S}_n)_n$ dont la maille tend vers 0 telle que

- (1) pour tout anneau A bordé par des courbes de Jordan, il existe $m > 0$ et n_0 telle que, pour $n \geq n_0$, on ait

$$\text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}_n) \geq m;$$

- (2) pour tout $x \in X$, tout voisinage V de x et tout $m > 0$, il existe un anneau $A \subset V$ qui sépare x de $X \setminus V$ et n_0 tels que

$$\text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}_n) \geq m$$

pour $n \geq n_0$.

DÉFINITION 2.11 (approximation conforme). — C'est une suite de recouvrements $(\mathcal{S}_n)_n$ dont la maille tend vers 0 telle que

- (1) la suite est une approximation conformément séparante;
 (2) il existe $K \geq 1$ telle que, pour tout anneau A bordé par des courbes de Jordan, il existe $m > 0$ et n_0 telles que, pour $n \geq n_0$,

$$\text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}_n), \text{mod}_{\text{inf}}(A, \mathcal{S}_n) \in [m/K, Km].$$

Avec ces notations, on a

THÉORÈME 2.12 (de Riemann combinatoire [8]). — Si (\mathcal{S}_n) est une approximation conforme de toitures sur une surface topologique, alors celle-ci admet une structure complexe telle que les modules analytiques des anneaux soient comparables à leurs modules combinatoires.

2.3. Comparaisons des modules

Pour terminer ce paragraphe, nous donnons quelques propriétés des modules combinatoires. La première indique qu'il faut suffisamment de pièces dans un recouvrement pour que le module d'une famille de courbes puisse être une quantité assez fine. Les autres résultats sont dûs essentiellement à J.W. Cannon, W. Floyd et W. Parry (voir [9] par exemple).

LEMME 2.13. — Soit Γ une famille de courbes sur un espace X muni d'un recouvrement \mathcal{S} , et soit $Q > 1$. On a

$$\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}) \geq 1/L_1(\Gamma)^{Q-1}$$

où $L_1(\Gamma)$ désigne la plus petite longueur combinatoire des courbes de Γ .

DÉMONSTRATION. Soit ρ une métrique admissible. Pour toute courbe $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} L_\rho(\Gamma) &\leq \sum_{s \in \mathcal{S}(\gamma)} \rho(s) \\ &\leq \ell_1(\gamma)^{1-(1/Q)} \left(\sum_{s \in \mathcal{S}(\gamma)} \rho(s)^Q \right)^{1/Q} \\ &\leq \ell_1(\gamma)^{1-(1/Q)} V_Q(\rho)^{1/Q} \end{aligned}$$

donc

$$\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}) \geq 1/L_1(\Gamma)^{Q-1}.$$

■

Si deux recouvrements sont d'indice fini, alors les modules associés sont comparables :

LEMME 2.14. — Si \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont deux recouvrements de X d'indice fini, alors, pour toute famille de courbes Γ et tout $Q > 1$, on a

$$\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}) \asymp \text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}')$$

où les constantes implicites ne dépendent que de l'indice de recouvrement.

DÉMONSTRATION. Soit K l'indice de recouvrement. Si ρ est une métrique admissible pour \mathcal{S} et l'un des modules, on définit $\sigma : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{R}_+$ par

$$\sigma(s') = \max\{\rho(s), s \in \mathcal{S}, s \cap s' \neq \emptyset\}.$$

Du coup, si γ est une courbe de Γ , alors

$$\ell_\sigma(\gamma, \mathcal{S}') \geq (1/K) \sum_{s' \in \mathcal{S}'(\gamma)} \sum_{s \in \mathcal{S}(s')} \rho(s) \geq (1/K) \sum_{s \in \mathcal{S}(\gamma)} \rho(s)$$

donc $\ell_\sigma(\gamma, \mathcal{S}') \geq (1/K)\ell_\rho(\gamma, \mathcal{S})$. D'autre part,

$$V_Q(\sigma, \mathcal{S}') \leq \sum_{s' \in \mathcal{S}'} \sum_{s \in \mathcal{S}(s')} \rho(s)^Q \leq K \sum_{s \in \mathcal{S}} \rho(s)^Q$$

donc $V_Q(\sigma, \mathcal{S}') \leq KV_Q(\rho, \mathcal{S})$ et on en déduit $\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}') \lesssim \text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S})$. On établit le lemme en inversant les rôles de \mathcal{S} et \mathcal{S}' . ■

LEMME 2.15. — Soit X un espace métrique et \mathcal{S} un recouvrement de valence bornée par K . Alors pour toute famille de courbes Γ , on a

$$\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}) \asymp \text{mod}'_Q(\Gamma, \mathcal{S})$$

où les constantes implicites ne dépendent que de la valence K .

DÉMONSTRATION. Soit ρ une métrique optimale pour $\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S})$. On définit

$$\rho'(s) = \sum_{s' \in B(s,1)} \rho(s'),$$

où la boule $B(s, 1)$ est dans le nerf de \mathcal{S} . Soit $\gamma' \in \widehat{\Gamma}'$. Cette courbe est associée à une courbe $\gamma \in \Gamma$ dont le support est contenu dans le 1-voisinage de $\mathcal{S}(\gamma')$ dans $\mathcal{N}(\mathcal{S})$. Du coup $\ell_{\rho'}(\gamma') \geq \ell_\rho(\gamma)$.

D'autre part, l'inégalité de Hölder implique

$$\rho'(s)^Q \leq (K+1)^{Q-1} \sum_{s' \in B(s,1)} \rho(s')^Q$$

donc

$$V_Q(\rho') \leq (K+1)^{Q-1} \sum_s \sum_{s' \in B(s,1)} \rho(s')^Q \leq (K+1)^Q V_Q(\rho).$$

■

PROPOSITION 2.16. — Soit X un espace métrique propre connexe, localement connexe par arcs recouvert par une toiture \mathcal{S} de valence bornée. Alors pour tout condenseur (E, F) , on a

$$\widehat{\text{mod}}_Q(E, F, \mathcal{S}) \asymp \text{mod}_Q(E, F, \mathcal{S})$$

où les constantes implicites ne dépendent que de la valence.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, notons que sous les conditions de cette proposition, un ouvert connexe de X est aussi connexe par arcs.

On note $\widehat{\Gamma}$ la famille de courbes dans $\mathcal{N}(\mathcal{S})$ qui joignent les deux continua. Si ρ est optimale pour $\text{mod}_Q(E, F, \mathcal{S})$, on définit

$$\widehat{\rho}(s) = \sum_{s' \in B_1(s,1)} \rho(s').$$

Soit $\widehat{\gamma} \in \widehat{\Gamma}$. Notons d'une part F la réunion des pièces qui n'intersectent pas $\mathcal{S}(\widehat{\gamma})$ et d'autre part K la réunion des pièces qui forment le support de $\widehat{\gamma}$. Alors F est fermé car

\mathcal{S} est localement fini, K est un continuum car \mathcal{S} est une toiture, et $K \subset X \setminus F$. Du coup, la composante connexe de $X \setminus F$ qui contient K contient une courbe $\gamma \in \Gamma$. Cette courbe se trouve dans le 1-voisinage de K dans $\mathcal{N}(\mathcal{S})$. Du coup, le même argument que ci-dessus nous permet de conclure : on trouve ainsi $\ell_{\widehat{\rho}}(\widehat{\gamma}) \geq \ell_{\rho}(\gamma)$.

D'autre part, l'inégalité de Hölder implique

$$\widehat{\rho}(s)^Q \leq (K+1)^{Q-1} \sum_{s' \in B(s,1)} \rho(s')^Q$$

donc

$$V_Q(\widehat{\rho}) \leq (K+1)^{Q-1} \sum_s \sum_{s' \in B(s,1)} \rho(s')^Q \leq (K+1)^Q V_Q(\rho).$$

■

REMARQUE 2.17. — Si \mathcal{S} est un pavage par domaines de Jordan dont le nerf forme une triangulation, alors on obtient $\text{mod}_{\text{sup}} = \text{mod}'_{\text{sup}} = \widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}$ et $\text{mod}_{\text{inf}} = \text{mod}'_{\text{inf}} = \widehat{\text{mod}}_{\text{inf}}$.

Enfin, nous donnons une nouvelle démonstration du lemme suivant (*cf.* [9]).

LEMME 2.18. — Si A est un anneau d'une surface X recouverte par \mathcal{S} , alors

$$\text{mod}_{\text{inf}}(A, \mathcal{S}) \leq \text{mod}'_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de trouver une métrique admissible ρ pour laquelle $\text{mod}_2(\Gamma_s, \rho, \mathcal{S}) \leq 1/\text{mod}'_2(\Gamma_t, \rho, \mathcal{S})$. Dans ce sens, nous considérons la métrique extrémale qui nous fournit $\text{mod}'_{\text{sup}}(A, \mathcal{S})$ avec $L'_\rho(\Gamma_t, \mathcal{S}) = 1$. D'après le Lemme 2.2, il existe Γ_0 et des coefficients $(\lambda_\gamma) \in \mathbb{R}^{\Gamma_0}$ tels que, pour toute $s \in \text{supp } \rho$,

$$\rho(s) = (1/2) \sum_{\gamma \in \Gamma_0(s)} \lambda_\gamma.$$

On remarque qu'une courbe $\widehat{\gamma} \in \Gamma_s$ doit couper chaque courbe de Γ_0 , donc la ρ -longueur de $\widehat{\gamma}$ doit être au moins $(1/2) \sum_{\Gamma_0} \lambda_\gamma$ donc

$$L_\rho(\Gamma_s) \geq (1/2) \sum_{\Gamma_0} \lambda_\gamma.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{S}} \rho(s)^2 &= (1/2) \sum_{\mathcal{S}} \rho(s) \sum_{\gamma \in \Gamma_0(s)} \lambda_\gamma \\ &= (1/2) \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \lambda_\gamma \sum_{\mathcal{S}(\gamma)} \rho(s) \\ &= (1/2) \sum_{\gamma \in \Gamma_0} \lambda_\gamma \\ &\leq L_\rho(\Gamma_s). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\frac{V_2(\rho, \mathcal{S})}{L_\rho(\Gamma_s, \mathcal{S})^2} \leq \frac{1}{V_2(\rho, \mathcal{S})}$$

soit

$$\text{mod}_{\text{inf}}(A, \mathcal{S}) \leq \text{mod}_2(\Gamma_s, \rho, \mathcal{S}) \leq \frac{1}{\text{mod}'_2(\Gamma_t, \rho, \mathcal{S})} = \text{mod}'_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}).$$

■

REMARQUE 2.19. — Dans [10], les auteurs vont jusqu'à montrer que dans le cas d'une toiture de valence bornée, on a $\text{mod}_{\text{inf}} = \widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}$. Une version plus faible de ce résultat sera établie au Corollaire 3.6.

3. THÉORÈME DE RIEMANN COMBINATOIRE ET EMPILEMENTS DE CERCLES

Notre objectif ici est de mélanger les approches de J.W. Cannon et de M. Bonk et B. Kleiner pour retrouver l'essentiel de leurs résultats. On commence par une version faible du théorème de Riemann combinatoire qui nous servira ensuite à obtenir des paramétrages quasimétriques de sphères topologiques soumises à des conditions analytiques.

3.1. Théorème de Riemann combinatoire revisité

Le but est de montrer le théorème de Riemann combinatoire en utilisant les empilements de cercles. Notre approche en redonne une démonstration succincte dans un cadre simplifié.

Soit X une surface topologique homéomorphe à \mathbb{S}^2 que l'on suppose métrisée. On suppose que $(\mathcal{S}_n)_n$ est une suite de recouvrements finis dont la maille tend vers 0 et telle que le nerf $\mathcal{N}(\mathcal{S}_n)$ de \mathcal{S}_n contient une triangulation \mathcal{T}_n de \mathbb{S}^2 équivalente au sens de la définition 2.4 pour chaque n .

On remarque que puisque les triangulations sont planaires, on peut aussi définir $\widehat{\text{mod}}_{\text{inf}}(\cdot, \mathcal{T}_n)$ en considérant les courbes de \mathcal{T}_n qui séparent les composantes du bord de l'anneau considéré. Par extension, on définit $\widehat{\text{mod}}_{\text{inf}}(\cdot, \mathcal{S}_n)$ en considérant les courbes de \mathcal{T}_n qui proviennent de $\mathcal{N}(\mathcal{S}_n)$.

On se fixe trois points distincts $a_1, a_2, a_3 \in X$. Pour chaque $n \geq 0$ et chaque $s \in \mathcal{S}_n$, on se donne $p(s) \in s$ et on note \mathcal{P}_n l'ensemble des ces points. On les choisit pour que $p(s) \neq p(s')$ si $s \neq s'$ et pour que $\{a_j\} \subset \mathcal{P}_n$.

Pour chaque n , on considère l'empilement $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}(\mathcal{T}_n)$ donné par le Théorème 1.1 tel que le centre du disque associé à a_1 soit 0, celui associé à a_2 soit 1 et celui associé à a_3 soit le point à l'infini.

On définit l'application $\phi_n : \mathcal{P}_n \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ qui à $p(s)$ associe le centre $c(s)$ du cercle correspondant.

THÉORÈME 3.1. — *Si la suite (\mathcal{S}_n) est de valence bornée et nerveusement séparante i.e.*

- (1) *pour tout anneau A bordé par des courbes de Jordan, il existe $m > 0$ et n_0 telle que, pour $n \geq n_0$, on ait*

$$\widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}_n) \geq m;$$

- (2) *pour tout $x \in X$, tout voisinage V de x et tout $m > 0$, il existe un anneau $A \subset V$ qui sépare x de $X \setminus V$ et n_0 tels que*

$$\widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}_n) \geq m$$

pour $n \geq n_0$;

alors on peut extraire une sous-suite (n_k) telle que (ϕ_{n_k}) converge uniformément vers un homéomorphisme $\phi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tel que

$$\widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}_{n_k}) \asymp \text{mod } \phi(A) \asymp \widehat{\text{mod}}_{\text{inf}}(A, \mathcal{S}_{n_k})$$

pour k assez grand. Autrement dit, la sous-suite est nerveusement conforme.

Dans la suite, il sera pratique d'étendre ϕ_n aux parties de X : étant donné un ensemble $E \subset X$, on peut définir $\phi_n(E)$ comme la réunion des tuiles du pavage associé à \mathcal{E}_n qui intersectent E . On définit de manière similaire ϕ_n^{-1} . On note que pour tout anneau $A \subset X$, on a

$$\widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}_n) \asymp \widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}(A, \mathcal{T}_n) = \widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}(\phi_n(A), \mathcal{E}(\mathcal{T}_n)).$$

La traduction de la séparation conforme se fera à l'aide du Corollaire 3.6 qui suit. On commence par une définition.

Le fait de travailler avec de véritables disques peut en fait être allégé. En général, le point important est de pouvoir contrôler leur masse par leur diamètre, ce qui nous motive à donner les définitions suivantes.

DÉFINITION 3.2 (Rondeur). — *Si $U \subset X$ est un ensemble borné et $x \in U$, alors on définit la rondeur de U par rapport à x comme*

$$\text{Rond}(U, x) = \inf\{R/r, B(x, r) \subset U \subset B(x, R)\}.$$

Par $\text{Rond}(U)$, on entendra la plus petite valeur de $\text{Rond}(U, x)$ quand x parcourt U . De plus, si $K \geq 1$, on dira que U est K -rond si $\text{Rond}(U) \leq K$.

DÉFINITION 3.3 (Quasi-empilement). — *Si X est un espace métrique, on dira qu'un recouvrement \mathcal{S} est un quasi-empilement s'il existe une constante $K \geq 1$ et, pour chaque $s \in \mathcal{S}$, un point x_s de s et une taille $r_s > 0$ tels que*

- (1) $B(x_s, r_s) \subset s \subset B(x_s, K \cdot r_s)$.
- (2) $B(x_s, r_s) \cap B(x_{s'}, r_{s'}) = \emptyset$ dès que $s \neq s'$.

Pavage associé à un empilement de cercles. Si D_1, D_2, D_3 sont trois disques d'intérieurs deux à deux disjoints de \mathbb{D} et sont tangents deux à deux, on désigne par Ω une composante du complémentaire de ces disques bordés par trois arcs de cercles. Cet ouvert Ω est hyperbolique avec trois points marqués, et il existe un unique "centre" *i.e.*, un point c telle que la mesure harmonique de chaque arête vue de c est exactement $1/3$. Découpons Ω en trois parties en considérant les rayons géodésiques issus de c qui aboutissent à chaque point marqué. On associe alors aux disques la partie qui lui est la plus proche. On définit alors $\widehat{D}_j = s_j$ comme la réunion de D_j avec les portions rajoutées par le processus précédent à chaque point de tangence.

Si \mathcal{E} est un empilement de cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$ de diamètre plus petit que π , alors on peut associer un pavage $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{E})$ comme ci-dessus, et étudier les modules combinatoires associés. Le point crucial de cette construction est que $\text{Rond}(\widehat{D}_j, c_j) \leq K$ où K est une constante universelle. Du coup $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ est un quasi-empilement de $\widehat{\mathbb{C}}$.

Dans ce cadre, les modules coïncident.

DÉFINITION 3.4 (anneau empilé). — Soient \mathcal{E} un empilement de cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$ et \mathcal{S} la toiture associée. Un anneau A est un anneau empilé s'il est réunion de tuiles de \mathcal{S} et si chaque composante du complémentaire contient au moins un disque.

LEMME 3.5 (du pont). — Soient \mathcal{E} un empilement de cercles de $\widehat{\mathbb{C}}$ et Γ une famille de courbes. Si pour tout disque s de A et toute courbe $\gamma \in \Gamma$ qui traverse s , on a $\ell(\gamma \cap 2s) \geq \kappa \text{diam } s$, alors il existe une constante $C = C(\kappa) > 1$ telle que

$$\text{mod}_2 \Gamma \leq C \cdot \text{mod}_2(\Gamma, \mathcal{S}).$$

Ici et dans la suite, si s est une boule $B(x, r)$, alors $2s$ désigne $B(x, 2r)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\rho \in \mathcal{M}_2(\mathcal{S})$. On définit la soupe $\widehat{\rho}$ du poids ρ par

$$\widehat{\rho} = \sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \chi_{2s},$$

où χ_{2s} désigne la fonction caractéristique de $2s$. Du coup, si $\gamma \in \Gamma$, alors

$$\begin{aligned} \ell_{\widehat{\rho}}(\gamma) &\geq \sum_{s \in \mathcal{S}(\gamma)} \int_{\gamma \cap 2s} \frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \\ &\geq \kappa \sum_{s \in \mathcal{S}(\gamma)} \rho(s) \\ &\geq \kappa L_\rho(\Gamma, \mathcal{S}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \text{Aire}(\widehat{\mathbb{C}}, \widehat{\rho}) &= \int_{\widehat{\mathbb{C}}} \left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \chi_{2s} \right)^2 \\
 &\lesssim \int_{\widehat{\mathbb{C}}} \left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \chi_s \right)^2 \\
 &\leq \sum_{s \in \mathcal{S}} \int_s \left(\frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \right)^2 \\
 &\lesssim \sum_{s \in \mathcal{S}} \rho(s)^2 \\
 &\leq V_2(\rho).
 \end{aligned}$$

La première inégalité provient d'un lemme classique d'analyse (*cf.* [3] et le Lemme B.3).

On obtient ainsi

$$\text{mod}_2 \Gamma \lesssim \text{mod}_2(\Gamma, \mathcal{S})$$

sous les conditions du lemme. ■

La démonstration de ce lemme s'adapte facilement au cas des quasi-empilements, et le corollaire qui suit reste donc valide dans ce contexte.

COROLLAIRE 3.6. — *Si \mathcal{E} est un empilement de valence bornée et si A est un anneau empilé tel que la distance combinatoire entre les deux bords est au moins 2, alors*

$$\widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}) \asymp \text{mod } A \asymp \widehat{\text{mod}}_{\text{inf}}(A, \mathcal{S}),$$

où les constantes implicites ne dépendent que de la valence.

DÉMONSTRATION. On considère les familles de courbes Γ_t et Γ_s qui relient et séparent les composantes de bord. Le lemme du collier permet de montrer que les hypothèses du Lemme 3.5 sont satisfaites pour un $\kappa > 0$ qui ne dépend que de la valence. De plus, le Lemme 2.18 affirme que $\text{mod}_{\text{inf}} \leq \text{mod}_{\text{sup}}$, donc on obtient

$$\text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}) \lesssim \text{mod } A \lesssim \text{mod}_{\text{inf}}(A, \mathcal{S}) \leq \text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}).$$

Puisque \mathcal{S} est un pavage par domaines de Jordan de nerf une triangulation, on a l'égalité $\widehat{\text{mod}}_*(A, \mathcal{S}) = \text{mod}_*(A, \mathcal{S})$, $*$ = inf, sup, ce qui nous permet de conclure. ■

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1. On suppose que (\mathcal{S}_n) est nerveusement séparante et de valence bornée par une constante N . Du coup, les modules relatifs à \mathcal{S}_n sont comparables à ceux de \mathcal{T}_n en vertu de la Proposition 2.3.

On se fixe $\varepsilon > 0$ et $m > 0$, et on considère $x \in X$. On peut supposer que x est différent de $\{a_1, a_2\}$. Soit alors V un voisinage de x disjoint de $\{a_1, a_2\}$. Comme l'approximation est nerveusement séparante, il existe un anneau $A \subset V$ (bordé par des courbes de Jordan) qui sépare x de $X \setminus V$ tel que, pour n assez grand, on ait $\widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}(A, \mathcal{T}_n) \geq m$. On note A_n l'anneau empilé dans $\widehat{\mathbb{C}}$ par les tuiles de \mathcal{S}_n qui intersectent A . Le Corollaire 3.6 implique

$$\text{mod } A_n \gtrsim \widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}(A, \mathcal{T}_n) \gtrsim m.$$

Or pour n assez grand, une des composantes connexes de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A_n$ contient $\{0, 1\}$, donc le diamètre sphérique de l'autre composante est borné par une constante $C(m)$ qui tend vers 0 quand $m \rightarrow \infty$. On se fixe m assez grand pour que $C(m) \leq \varepsilon$.

Comme la maille des (\mathcal{S}_n) tend vers 0, il existe un voisinage $W \subset V$ de x disjoint de tous les A_n et séparé de $\{a_1, a_2\}$. Du coup, pour tout n assez grand, pour tous $s, s' \subset W$, on a $d(\phi_n(p(s)), \phi_n(p(s'))) \leq C(m) \leq \varepsilon$. Ceci implique que la suite (ϕ_n) est équicontinue, donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (ϕ_n) est convergente vers une application continue $\phi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Nous renvoyons à l'Appendice C pour plus de détails sur cette convergence.

On procède en deux étapes pour montrer que ϕ est injective. Tout d'abord, si $x \notin \{a_j\}$, alors on peut trouver un anneau bordé par des courbes de Jordan qui sépare $\{x, a_1\}$ de $\{a_2, a_3\}$ de module combinatoire uniformément minoré. Par le Corollaire 3.6, on en déduit que $\phi(x) \notin \{1, \infty\}$, sinon le module devrait tendre vers zéro. Par permutation cyclique, on trouve que $\phi(x) \notin \{0, 1, \infty\}$.

Dans un second temps, on considère $x \neq y$. On peut supposer que x, y, a_1, a_2 sont 4 points distincts. En considérant un anneau qui sépare $\{x, a_1\}$ de $\{y, a_2\}$, on montre que $\phi(x) \neq \phi(y)$.

Par conséquent, ϕ est un homéomorphisme de X sur son image qui est une sphère topologique. On en déduit que $\phi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est un homéomorphisme.

La comparaison des différents modules associés à un anneau suit aussi du Corollaire 3.6 (voir aussi le Théorème 7.1 dans [8]). En effet, si $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ et (\mathcal{E}_{n_k}) est la suite d'empilements associée à (\mathcal{T}_{n_k}) , alors (\mathcal{E}_{n_k}) est conforme. En effet, si $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ est un anneau bordé par des courbes de Jordan, on note A_k l'anneau empilé associé à \mathcal{E}_{n_k} . Comme la maille des recouvrements \mathcal{S}_n tend vers 0 et puisque la suite (ϕ_{n_k}) est convergente, on en déduit que la maille des (\mathcal{E}_{n_k}) tend aussi vers 0. Du coup, $\text{mod } A_k \rightarrow \text{mod } A$, et les hypothèses du Corollaire 3.6 sont vérifiées pour $\Gamma_s(A_k)$ et $\Gamma_t(A_k)$. Donc, pour k assez grand, on obtient ainsi

$$\widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}_{n_k}) \asymp \widehat{\text{mod}}_{\text{inf}}(A, \mathcal{S}_{n_k}) \asymp \text{mod } A_k \asymp \text{mod } A.$$

Considérons maintenant un anneau $A \subset X$ bordé par des courbes de Jordan. L'anneau $\phi(A)$ s'obtient donc comme limite d'anneaux empilés A_k donnés par $\phi_{n_k}(A)$ donc $\text{mod } A_k$

tend vers $\text{mod } \phi(A)$. Du coup, puisque la maille des empilements tend vers 0 et (\mathcal{S}_{n_k}) est une suite de toitures, la Proposition 2.16 montre

$$\widehat{\text{mod}}_*(A, \mathcal{S}_{n_k}) = \widehat{\text{mod}}_*(\phi_{n_k}(A), \mathcal{E}_{n_k}) \asymp \text{mod } \phi(A)$$

pour k assez grand, où $*$ \in $\{\text{inf}, \text{sup}\}$. ■

REMARQUE 3.7. — L'équicontinuité de $(\phi_n)_n$ établie dans la démonstration montre notamment que, pour tout anneau A , il existe une constante $K = K(A)$ telle que ses modules combinatoires soient K -comparables entre eux. On peut se demander si cela n'implique pas que la suite soit automatiquement conforme: la réponse est négative. En effet, soit $(\mathcal{E}_n)_n$ une suite d'empilements de valence bornée dont la maille tend vers 0 et de pavage associé (\mathcal{P}_n) ; considérons aussi un homéomorphisme $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ non quasiconforme, et posons $\mathcal{S}_{2n} = \mathcal{P}_n$ et $\mathcal{S}_{2n+1} = h^{-1}(\mathcal{P}_n)$. La suite (\mathcal{S}_n) est bien nerveusement séparante, mais elle n'est pas conforme puisque h n'est pas quasiconforme.

Ceci montre que sous nos hypothèses, deux structures complexes construites par le théorème ne sont pas forcément dans la même classe quasiconforme (si Φ et Ψ sont deux homéomorphismes limites, $\Phi \circ \Psi^{-1}$ n'est pas forcément quasiconforme). Une modification de l'exemple ci-dessus permet aussi de montrer que le fait que toute limite est dans la même classe quasiconforme n'implique pas que la suite est conforme: considérons maintenant une suite d'homéomorphismes quasiconformes (h_k) qui tend uniformément vers l'identité avec une distorsion qui diverge. On construit une suite de pavages en utilisant $h_k^{-1}(\mathcal{P}_n)$, $k, n \in \mathbb{N}$: cette suite sera bien nerveusement séparante, les homéomorphismes limites seront les h_k ou l'identité, mais la suite n'est pas conforme car la suite (h_k) n'est pas uniformément quasiconforme.

On en déduit une version faible du Théorème de Riemann combinatoire.

COROLLAIRE 3.8. — *Si la suite (\mathcal{S}_n) est une suite de toitures de valence bornée conforme, chaque \mathcal{S}_n contenant une triangulation équivalente \mathcal{T}_n , alors on peut extraire une sous-suite (n_k) telle que (ϕ_{n_k}) converge uniformément vers un homéomorphisme $\phi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tel que*

$$\text{mod}_{\text{sup}}(A, \mathcal{S}_n) \asymp \text{mod } \phi(A) \asymp \text{mod}_{\text{inf}}(A, \mathcal{S}_n)$$

pour n assez grand. De plus, si ϕ et ψ sont deux homéomorphismes limites, alors $\phi \circ \psi^{-1}$ est K -quasiconforme où K ne dépend que des données.

Réciproquement, si (ϕ_n) est convergente vers un homéomorphisme alors (\mathcal{S}_n) est conforme.

DÉMONSTRATION. La Proposition 2.16 montre que (\mathcal{S}_n) est aussi nerveusement séparante, donc le Théorème 3.1 s'applique pour montrer la convergence d'une sous-suite ϕ_{n_k} vers un homéomorphisme ϕ . Conjugué à la conformité de la suite, ce théorème fournit aussi les estimations entre les modules, et permet de montrer que si ϕ et ψ sont deux limites, alors

$\phi \circ \psi^{-1}$ préserve les modules à une constante multiplicative uniforme près, autrement dit $\phi \circ \psi^{-1}$ est K -quasiconforme où K ne dépend que des données (cf. appendice A).

Quant à la réciproque, elle découle du même argument que dans la démonstration du Théorème 3.1. ■

3.2. Paramétrage quasisymétrique de sphères topologiques

Dans ce paragraphe, on exhibe des conditions (analytiques) sur une sphère topologique qui permettent de conclure qu'elle est quasisymétrique à la sphère de Riemann. Notre point de départ sera toujours la donnée d'une suite de quasi-empilements, ou de recouvrements uniformément ronds de valence bornée. Nous verrons comment, avec l'approche du paragraphe précédent, établir des résultats de M. Bonk et B. Kleiner.

On se réfère de manière essentielle à l'appendice A pour les définitions, les notations et les propriétés des objets analytiques utilisées dans ce paragraphe.

Le premier résultat nous servira pour conclure que les limites des (ϕ_n) construites au paragraphe précédent sont quasisymétriques.

PROPOSITION 3.9. — *Soient X un espace doublant et (\mathcal{S}_n) une suite de recouvrements qui vérifient les hypothèses du Théorème 3.1. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

- (1) *L'homéomorphisme ϕ est quasisymétrique.*
- (2) *Il existe un homéomorphisme $\psi_1 : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ décroissant tel que pour tout condenseur (E, F) , on ait $\widehat{\text{mod}}_2(E, F, \mathcal{S}_n) \geq \psi_1(\Delta(E, F))$.*
- (3) *L'espace X est linéairement localement connexe et il existe un homéomorphisme $\psi_2 : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ décroissant tel que, pour tout condenseur (E, F) , on a $\widehat{\text{mod}}_2(E, F, \mathcal{S}_n) \leq \psi_2(\Delta(E, F))$.*

DÉMONSTRATION. Une application quasisymétrique contrôle le rapport de distances, en particulier les distances relatives $\Delta(E, F)$ (cf. Lemme 3.2 dans [5]). Donc si ϕ est quasisymétrique, alors il existe des homéomorphismes $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que

$$\chi_1(\Delta(E, F)) \geq \Delta(\phi E, \phi F) \geq \chi_2(\Delta(E, F)).$$

Or, d'une part, sur $\widehat{\mathbb{C}}$, il existe des applications $\widehat{\psi}_1, \widehat{\psi}_2 : \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ décroissantes vers 0 telles que

$$\widehat{\psi}_2(\Delta(E, F)) \geq \widehat{\text{mod}}_2(E, F) \geq \widehat{\psi}_1(\Delta(E, F)),$$

et d'autre part, pour n assez grand,

$$\widehat{\text{mod}}_2(E, F, \mathcal{S}_n) \asymp \text{mod}_2(\phi(E), \phi(F)),$$

donc

$$\begin{cases} \widehat{\text{mod}}_2(E, F, \mathcal{S}_n) \asymp \text{mod}_2(\phi E, \phi F) \geq \widehat{\psi}_1(\Delta(\phi E, \phi F)) \geq \widehat{\psi}_1 \chi_1(\Delta(E, F)) \\ \widehat{\text{mod}}_2(E, F, \mathcal{S}_n) \asymp \text{mod}_2(\phi E, \phi F) \leq \widehat{\psi}_2(\Delta(\phi E, \phi F)) \leq \widehat{\psi}_2 \chi_2(\Delta(E, F)), \end{cases}$$

ce qui montre l'existence des applications ψ_1 et ψ_2 sous la condition que ϕ est quasisymétrique. Notons que la sphère est linéairement localement connexe, et cette propriété est préservée par applications quasisymétriques (cf. [15]).

Pour la réciproque, on note que X étant doublant, il suffit de montrer que ϕ est faiblement quasisymétrique (voir la fin de § A, ou [15]). On se donne $x \in X$ et $r > 0$ et on note $L = L_\phi(x, r)$, $\ell = \ell_\phi(x, r)$, $A = D(\phi x, L) \setminus D(\phi x, \ell)$ et Γ_t la famille des courbes qui joignent les deux composantes de bord de A . Si $L/\ell \leq 2$, alors, on n'a rien à montrer. Sinon, on remarque que $\Delta(A) \asymp (L - \ell)/\ell \asymp L/\ell$, où $\Delta(A)$ désigne la distance relative des deux composantes de bord de A .

D'une part, on a

$$0 < c \leq \psi_1(\Delta(\phi^{-1}(A))) \leq \widehat{\text{mod}}_2(\Gamma_t, \mathcal{S}_n)$$

par hypothèses, et d'autre part, le Lemme 3.5 du pont implique

$$\widehat{\text{mod}}_2(\Gamma_t, \mathcal{S}_n) \lesssim \text{mod}_2(\Gamma_t) \lesssim 1/\log L/\ell,$$

donc les deux inégalités montrent que le rapport L/ℓ est borné indépendamment de x et $r > 0$, donc ϕ est faiblement quasisymétrique.

Quant à l'autre condition, on montre que ϕ^{-1} est quasisymétrique en inversant les rôles. On utilise ici la connexité locale linéaire pour construire des continua dans X qui prendront la place des bords de l'anneau (puisque'on ne sait *a priori* rien sur la topologie des boules de X). ■

REMARQUE 3.10. — La démonstration montre que l'on peut soumettre $\Delta(E, F) \geq M$ pour une constante donnée dans la condition (3).

Nous pouvons directement en déduire ce que M. Bonk et B. Kleiner appellent le résultat principal de leur article [5] (Théorème 11.1) :

COROLLAIRE 3.11 (M. Bonk & B. Kleiner). — *Soit X un espace métrique doublant et linéairement localement connexe homéomorphe à \mathbb{S}^2 . On suppose que l'on a une suite (\mathcal{S}_n) de recouvrements par pièces uniformément rondes dont la maille tend vers zéro et dont les nerfs contiennent des triangulations équivalentes de la sphère de valence bornée. On suppose en outre qu'il existe une constante N telle que $2s$ est contenue dans la boule combinatoire $B(s, N)$.*

S'il existe des constantes $\lambda > 1$ et $C > 0$ telles que

$$\widehat{\text{mod}}_2(B, X \setminus \lambda B, \mathcal{S}_n) \leq C$$

pour toute boule $B \subset X$ et pour n assez grand, alors (\mathcal{S}_n) est conforme et X est quasisymétrique à $\widehat{\mathbb{C}}$.

DÉMONSTRATION. Soient $x \in X$ et $r > 0$ et considérons, comme M. Bonk et B. Kleiner, les anneaux $B(x, \lambda^{-2j}r) \setminus B(x, \lambda^{-(2j+1)}r)$. Par l'inégalité de Grötzsch et nos hypothèses,

on obtient pour n assez grand

$$\widehat{\text{mod}}_{\text{sup}} B(x, r) \setminus B(x, \lambda^{-(2n+1)}r, \mathcal{S}_n) \geq \sum_{j=0}^n \widehat{\text{mod}}_{\text{sup}} B(x, \lambda^{-2j}r) \setminus B(x, \lambda^{-(2j+1)}r, \mathcal{S}_n) \geq n/C.$$

Donc (\mathcal{S}_n) vérifie la condition (2) d'approximation nerveusement séparante qui permet de montrer que la suite (ϕ_n) est équicontinue. Pour montrer qu'une limite $\phi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est injective, on remarque tout d'abord que ϕ , étant limite d'homéomorphismes est monotone (ses fibres sont connexes). Maintenant, s'il y avait une fibre non triviale, alors on pourrait trouver une boule $B \subset X$ telle que les diamètres de $\phi(B)$ et de $\phi(X \setminus \lambda B)$ sont minorés, mais telle $\phi(B) \cap \phi(X \setminus \lambda B) \neq \emptyset$. Par le Corollaire 3.6, ceci contredit $\widehat{\text{mod}}_2(B, X \setminus \lambda B, \mathcal{S}_n) \leq C$ pour n assez grand. Donc les conclusions du Théorème 3.1 sont vérifiées.

La Proposition 3.9 (3) s'applique, ce qui montre que la limite ϕ est quasisymétrique.

Enfin, puisque X est linéairement localement connexe, chaque pièce est contenue dans une tuile de diamètre comparable. Les toitures ainsi obtenues et (\mathcal{S}_n) ont un indice de recouvrement borné d'après la condition portant sur le double des pièces. Par conséquent les modules relatifs à \mathcal{S}_n et à sa toiture associée sont comparables et on peut donc conclure que (\mathcal{S}_n) est conforme. ■

On en déduit (cf. Théorème 10.4 de [5]) :

COROLLAIRE 3.12. — *Si (X, μ) est un espace métrique 2-Ahlfors régulier linéairement localement connexe homéomorphe à \mathbb{S}^2 , et si (\mathcal{S}_n) est une suite de recouvrements par pièces uniformément rondes de valence bornée dont le nerf contient une triangulation équivalente et la maille tend vers 0 alors (\mathcal{S}_n) est conforme et X est quasisymétrique à $\widehat{\mathbb{C}}$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier que les hypothèses du Corollaire 3.11 sont vérifiées. On se fixe $x \in X$, et $r < R = 2^k r < \text{diam } X$, où $k \geq 1$. On définit la métrique $\rho_n : \mathcal{S}_n(B(x, R) \setminus B(x, r)) \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $\rho_n(s) = \text{diam } s / \text{dist}(x, s)$ (cf. Lemme A.9). Alors, en découpant en couronnes diadiques centrées en x , pour toute $\gamma \in \widehat{\Gamma}_t$, on a

$$\ell_{\rho_n}(\gamma) \geq (1/r) \sum_{j=0}^{k-1} 2^{-j} \sum \text{diam } s \gtrsim \sum_{j=1}^k 2^{-j} 2^j \gtrsim k \gtrsim \log R/r.$$

De même, en utilisant la régularité de X , les propriétés de rondeur et de valence bornée, on a

$$\begin{aligned} \sum \rho_n(s)^2 &\lesssim \sum_{j=0}^{k-1} \sum \frac{(\text{diam } s)^2}{(2^j r)^2} \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\mu(B(x, 2^{j+1}r))}{(2^j r)^2} \\ &\lesssim \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(2^{j+1}r)^2}{(2^j r)^2} \\ &\lesssim \log R/r. \end{aligned}$$

Donc $\widehat{\text{mod}}_2(B(x, r), X \setminus B(x, R), \mathcal{S}_n) \lesssim 1/\log R/r$, et le Corollaire 3.11 s'applique. ■

De manière un peu détournée, on peut aussi retrouver une version asymptotique du Théorème 10.1 de M. Bonk et B. Kleiner dans [5]:

THÉORÈME 3.13. — *Soit X un espace métrique Q -Loewner et Q -Ahlfors régulier homéomorphe à \mathbb{S}^2 . On suppose que l'on a une suite de recouvrements de valence bornée par pièces uniformément rondes dont la maille tend vers zéro et dont le nerf contient une triangulation équivalente de la sphère. Alors (\mathcal{S}_n) est conforme, X est quasisymétrique à $\widehat{\mathbb{C}}$ et $Q = 2$.*

DÉMONSTRATION. La condition loewnesque permet de minorer les Q -modules de courbes : elle nous fournit l'existence d'une application décroissante ψ_1 telle que

$$\text{mod}_Q(E, F) \geq \psi_1(\Delta(E, F)).$$

Or, $Q \geq 2$ implique que $\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}_n) \leq \text{mod}_2(\Gamma, \mathcal{S}_n)$ en normalisant les métriques par $L_\rho(\Gamma) = 1$ pour toute famille de courbes ; donc on obtient

$$\psi_1(\Delta(E, F)) \leq \text{mod}_Q(E, F) \lesssim \text{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) \leq \text{mod}_2(E, F, \mathcal{S}_n).$$

De plus, le Corollaire 3.6 et le Lemme A.9 impliquent l'existence d'une autre application décroissante ψ_2 telle que $\text{mod}_2(E, F) \leq \psi_2(\Delta(E, F))$ pour tout condenseur (E, F) de $\widehat{\mathbb{C}}$. En particulier, pour tout condenseur (E, F) de X , et tout n assez grand, on a

$$\psi_1(\Delta(E, F)) \lesssim \psi_2(\Delta(\phi_n E, \phi_n F)).$$

Autrement dit, il existe un homéomorphisme croissant $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout condenseur (E, F) de X , et tout n assez grand, si $\Delta(\phi_n E, \phi_n F) \geq 1/\delta$ alors $\Delta(E, F) \geq 1/\varepsilon$.

On considère $x \in X$, et $r < 2r \leq R < \text{diam } X$. On suppose que R est assez petit pour que deux des trois marqués, p. ex. $\{a_1, a_2\}$, sont hors de $B(x, R)$. On veut montrer qu'il existe une constante C qui ne dépend que de R/r telle que $\text{mod}_2(B(x, r), X \setminus B(x, R), \mathcal{S}_n) \leq$

C. On note $E = B(x, r)$ et $F = X \setminus B(x, R)$. Si R/r est assez grand, alors la connexité locale linéaire de X loewnesque permet de supposer E et F connexes.

L'argument qui suit est inspiré du Lemme 3.3 de [5] : on suppose que $\Delta(\phi_n(E), \phi_n(F)) \leq \delta$, et l'on veut montrer que δ ne peut être trop petit. Si $\Delta(\phi_n(E), \phi_n(F)) \leq \delta$, alors il existe $z \in \phi_n(E)$ et $w \in \phi_n(F)$ tels que $|z - w| \leq \delta \text{diam } \phi_n(E)$. On peut supposer $0 \in \phi_n(F)$ et $|\phi_n(x)| \geq \pi/4$. Du coup, si $|\phi_n(x) - z| \geq \sqrt{\delta} \text{diam } \phi_n(E)$, alors on peut construire deux continua K et L tels que $\{\phi_n(x), 0\} \subset K$ et $\{w, z\} \subset L$ avec $\text{diam } L = |z - w|$. Par suite,

$$\Delta(K, L) \gtrsim \frac{\text{diam } \phi_n(E)}{|z - w|} \gtrsim 1/\sqrt{\delta}.$$

Donc $\Delta(\phi_n^{-1}K, \phi_n^{-1}L) \gtrsim 1/\varepsilon(\sqrt{\delta})$. Or $\phi_n^{-1}K$ est un continuum qui relie x à a_1 , donc de diamètre grand, et $\phi_n^{-1}L$ relie un point de E à un point de F , donc au moins $R/2$. De plus, la distance de x à $\phi_n^{-1}(z)$ est de l'ordre de r si z est pris au bord, donc $\Delta(\phi_n^{-1}K, \phi_n^{-1}L) \lesssim r/R$. Donc on a $r/R \geq 1/\varepsilon$, ce qui n'est possible que si δ n'est pas trop petit.

En revanche, si $|\phi_n(x) - z| \leq \sqrt{\delta} \text{diam } \phi_n(E)$, alors $|\phi_n(x) - w| \leq 2\sqrt{\delta} \text{diam } \phi_n(E)$ et on peut trouver $y \in \partial\phi_n(E)$, deux continua K et L tels que $\{y, 0\} \subset K$ et $\{w, \phi_n(x)\} \subset L$ avec $\text{diam } L = |\phi_n(x) - w|$. Cette fois-ci, on obtient encore

$$\Delta(K, L) \gtrsim \frac{\text{diam } \phi_n E}{|\phi_n(x) - w|} \gtrsim 1/\sqrt{\delta}.$$

On conclut de la même manière que δ ne peut être trop petit. En conclusion, on majore $\widehat{\text{mod}}_2(E, F, \mathcal{S}_n)$ en utilisant la condition de régularité de $\widehat{\mathbb{C}}$. On retrouve, comme dans le Corollaire 3.12, l'équicontinuité de la suite (ϕ_n) et l'injectivité de ses limites. Enfin, on a vu que $\psi_1(\Delta(E, F)) \leq \widehat{\text{mod}}_2(E, F, \mathcal{S}_n)$ dans X , donc la Proposition 3.9 montre encore que ϕ est quasimétrique !

Notons que (\mathcal{S}_n) étant conforme, on a forcément $Q = 2$. Pour $Q > 2$, on aurait $\lim_n \text{mod}_Q(\cdot, \mathcal{S}_n) = 0$. En effet, si (E, F) est un condenseur de X et $\phi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ est l'homéomorphisme donné par le Théorème 3.1, alors on considère $\rho_n(s) = \text{diam } \phi(s)$ pour $s \in \mathcal{S}_n$. Il vient, pour $\gamma \in \Gamma(E, F)$,

$$\ell_{\rho_n}(\gamma) = \sum_{\mathcal{S}_n(\gamma)} \text{diam } \phi(s) \geq \text{dist}(\phi(E), \phi(F))$$

et

$$V_{Q, \rho_n}(X) \lesssim \left(\sup_{\mathcal{E}_n} \text{diam } s \right)^{Q-2} \cdot \sum_{s \in \mathcal{E}_n} (\text{diam } s)^2 \lesssim \left(\sup_{\mathcal{E}_n} \text{diam } s \right)^{Q-2} \text{Aire}(\widehat{\mathbb{C}})$$

qui tend vers 0 dès que $Q > 2$. ■

REMARQUE 3.14. — Ce dernier argument montre qu'en fait, si X est Q -Ahlfors régulier pour un $Q > 2$, et si la suite de recouvrements uniformément ronds est conforme, alors le Q -module de tout condenseur est nul, et les Q -modules combinatoires associés tendent vers 0 par la Proposition B.2. Une condition nécessaire pour avoir la conformité d'une

suite est donc que le Q -module combinatoire de tout condenseur tend vers 0 pour tout $Q > 2$.

Modulo la construction des recouvrements de valence bornée uniformément ronds dont le nerf contient une triangulation équivalente (cf. §4 et §6 dans [5]), on récupère ainsi des résultats de M. Bonk et B. Kleiner (Théorème 1.1 et 1.2 de [5]) :

COROLLAIRE 3.15 (M. Bonk et B. Kleiner). — *Si X est homéomorphe à \mathbb{S}^2 , linéairement localement connexe et Q -régulier, et si on suppose que, ou bien $Q = 2$ ou bien X est Q -loewnesque, alors X est quasisymétrique à $\widehat{\mathbb{C}}$ (et $Q = 2$).*

3.3. Sur les démonstrations des différentes versions du théorème de Riemann

Commençons par comparer l'énoncé du Théorème de Riemann combinatoire original de J.W. Cannon avec le Corollaire 3.8. Tout d'abord, ses hypothèses sont plus générales, puisqu'il ne suppose rien sur la combinatoire des nerfs des recouvrements. La condition de séparation permet de définir des structures complexes compatibles avec des sous-suites des recouvrement. En supposant la conformité, on obtient alors une structure complexe canonique (à homéomorphisme quasiconforme uniforme près). Remarquons que la condition de triangulation peut paraître naturelle puisque son existence découle de la dimension topologique de la surface.

L'outil principal pour J.W. Cannon sont les modules de type mod_{sup} et mod_{inf} . Ce dernier est particulièrement spécifique aux surfaces puisqu'il repose sur les courbes qui *séparent* les composantes de bords de l'anneau. Imposer des conditions sur ces modules signifient notamment qu'il existe beaucoup de courbes sur la surface. C'est une condition difficile à vérifier puisqu'elle demande d'estimer le module par rapport à *toutes* les métriques.

Le tour de force de J.W. Cannon est de construire, pour chaque anneau de la surface, une métrique qui le rend parfaitement isométrique à un cylindre euclidien. Cette distance est obtenue à partir des métriques extrémales associées aux modules combinatoires. Une étape cruciale est de montrer des inégalités de type "2-régulière" (voir aussi [10]). Pour cela, il utilise fortement les hypothèses sur le mod_{inf} qui ne se généralise malheureusement pas au cas d'espaces qui ne sont pas des surfaces. Ensuite, il montre que les changements de cartes sont quasiconformes et il en déduit ainsi une structure quasiconforme sur sa surface compatible avec les modules combinatoires. Un théorème de T. Kuusalo permet alors de conclure. La démonstration du Corollaire 3.8 s'appuie au contraire sur la théorie des empilements de cercles : elle permet de simplifier de nombreux arguments de J.W. Cannon, puisqu'elle nous ramène rapidement à la sphère de Riemann, où les modules combinatoires et analytiques sont déjà équivalents. On obtient ainsi une uniformisation *globale*. De plus la valence bornée des toitures permet de montrer que les conditions sur $\widehat{\text{mod}}_{\text{sup}}$ impliquent aussi l'existence de nombreuses courbes. Ce type de condition est plus facile à

vérifier puisqu'il s'agit de trouver *une seule* métrique qui produira la borne. Ceci permet aussi de nous passer d'hypothèses sur le mod_{inf} .

Dans [10], les auteurs s'intéressent aux toitures de valence bornée, et supposent, en plus de la séparation conforme, l'existence de recouvrements par des anneaux "protégés" ("*buffered rings*" dans le texte). Leurs hypothèses permettent alors de déduire la conformité de la suite des toitures (Théorème 7.1 dans [10]). Des estimations de type 2-régulières tiennent aussi un rôle prépondérant dans leur argumentation.

M. Bonk et B. Kleiner s'appuient plutôt sur des données analytiques. Ces conditions leur permettent de se ramener à des conditions combinatoires et de travailler ensuite sur celles-ci. Ils travaillent sur les modules $\widehat{\text{mod}}_Q$ de condenseurs (uniquement) qui ne dépendent essentiellement que du nerf des recouvrements, mais les hypothèses analytiques (connexité locale linéaire notamment) leur assurent aussi l'existence de nombreuses courbes, ce qui permet de donner un sens géométrico-topologique à ces modules.

Leur brillante idée est d'introduire les empilements de cercles, ce qui simplifie grandement les arguments puisqu'ils se ramènent à des recouvrements très particuliers et maniables. Notons qu'ils adoptent le point de vue, très naturel dans ce contexte, des applications quasimöbius (contrôle des birapports). Ici, l'étude des birapports et de leurs relations avec les modules de courbes a été soigneusement évitée afin d'alléger la longueur de ce manuscrit, bien que les raisonnements soient souvent les mêmes. L'intérêt ici est aussi de s'appuyer sur le théorème de Riemann combinatoire (Théorème 3.1) plutôt que d'en redonner indirectement une démonstration. Des arguments assez classiques d'estimations de modules de courbes remplacent une partie de leurs résultats intermédiaires qui, bien que plus précis et plus généraux que ceux exposés ici – comme dans le cas J.W. Cannon – sont suffisants pour retrouver leurs résultats principaux.

Remarquons enfin que la condition d'être linéairement localement connexe est utilisée deux fois : pour construire les triangulations des surfaces d'une part, et pour montrer que les limites sont quasisymétriques d'autre part.

Comme le soulignent M. Bonk et B. Kleiner, leurs résultats sont purement métriques (hypothèses et conclusions), contrairement à ceux de J.W. Cannon *et al.*. Cependant, les arguments que l'on a présentés permettent de moduler cette opinion et de voir leurs travaux comme une quantification/habillage d'une approche combinatoire : leurs hypothèses analytiques se traduisent d'une part par l'existence de recouvrements uniformément ronds de valence bornée et nerveusement séparants, et d'autre part par des estimations de ces modules combinatoires. Pour voir que l'homéomorphisme limite est bien quasisymétrique, on joue sur les propriétés des recouvrements qui découlent de leur forme et de la géométrie de l'espace étudié (*cf.* Prop. 3.9).

L'approche présentée ici permet de distinguer deux problèmes différents : le premier est de munir la surface considérée d'une structure complexe compatible avec les modules combinatoires, le second est de comparer la structure métrique ainsi obtenue avec l'originale (si jamais elle est fixée).

Les travaux de J.W. Cannon *et al.* s'adressent essentiellement au premier problème, et ceux de M. Bonk et B. Kleiner aux deux, mais sans les dissocier. La raison en est que leur discrétisation sert d'outil pour la construction de l'homéomorphisme quasisymétrique limite, et n'est pas donnée *a priori*. Notons aussi que ces derniers ne construisent pas de toitures, bien qu'elles soient sous-jacentes : leur définition "d'approximation" d'espaces associée à la connexité locale linéaire permet de remplacer leur recouvrement par des toitures de valence bornée et d'indice de recouvrement borné.

Notons enfin que J.W. Cannon *et al.*, en établissant dans [10] la 2-régularité de leur métrique, se ramènent au Corollaire 3.12. Se donner des estimations à la fois sur les mod_{sup} et les mod_{inf} revient à se donner à la fois des majorations et des minoration, donc des propriétés de type loewnesque et de 2-régularité. D'un autre côté, lorsque M. Bonk et B. Kleiner supposent que X est 2-régulier ou se donnent les hypothèses du Corollaire 3.11, ils supposent en fait que les approximations sont conformément séparantes, et se rapprochent ainsi du théorème de Riemann combinatoire.

Dans tous ces résultats, outre l'hypothèse topologique d'être une sphère, on suppose toujours une condition géométrico-combinatoire extrême : dans les hypothèses de séparation ou de conformité, on se donne la combinatoire de la sphère de Riemann, dans l'hypothèse 2-Ahlfors régulière, on se donne une borne supérieure sur la géométrie des modules, et sous la condition loewnesque, on obtient une borne inférieure (qui est ensuite transformée en borne supérieure). De plus, dans les deux approches, les auteurs imposent des estimations uniformes qui impliquent que les structures complexes qu'ils définissent sont à distance quasiconforme bornée les unes des autres.

Dans toutes ces situations, on part donc d'hypothèses qui imposent la présence de nombreuses courbes sur la surface. Ces courbes sont quantifiées grâce à la notion de modules, et ceux-ci sont utilisés pour en déduire des propriétés géométriques de la surface.

Terminons par une question dont la réponse ne semble pas découler de la présente analyse :

QUESTION 3.16. — *Un espace métrique Q -régulier X homéomorphe à \mathbb{S}^2 , $Q > 2$, et muni d'une suite de recouvrements par pièces uniformément rondes, de valence bornée, dont le nerf contient une triangulation équivalente, et conforme, est-il quasisymétrique à $\widehat{\mathbb{C}}$?*

4. APPLICATIONS À LA CONJECTURE DE CANNON

Ces problèmes de discrétisation que nous avons traités jusqu'ici sont motivés par la théorie géométrique des groupes et la géométrisation des variétés de dimension 3 [7].

On définit un espace métrique propre X comme étant *hyperbolique* (au sens de Gromov) s'il a des propriétés proche d'un arbre: il existe une constante $\delta > 0$ telle que, pour tout ensemble fini $F \subset X$ qui a au plus $2^k + 2$, il existe un arbre métrique fini T et une application $\phi : F \rightarrow T$ tels que :

$$\forall x, y \in X, |x - y| - 2k\delta \leq |\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|.$$

Un tel espace admet une compactification naturelle par un bord à l'infini, munie d'une famille toute aussi naturelle de métriques. Toutes ces métriques sont quasisymétriquement équivalentes et forment la *jauge conforme* de ∂X . Un groupe dénombrable G est alors dit *hyperbolique* s'il opère *géométriquement* sur un espace hyperbolique géodésique propre. Autrement dit, cette action est par isométries, proprement discontinue et cocompacte [13, 23]. Etant données deux telles actions de G sur des espaces hyperboliques, les bords et les familles de métriques s'identifient parfaitement, donc, on peut parler du bord ∂G de G . Les exemples élémentaires de tels groupes sont les groupes fondamentaux des variétés hyperboliques compactes et les groupes libres de type fini.

Etant donné un groupe hyperbolique la question de savoir s'il existe une *meilleure* action sur un *meilleur* espace se pose naturellement.

D'autre part, W.P. Thurston propose un programme de géométrisation des variétés topologiques compactes de dimension 3: chaque variété se découpe en morceaux élémentaires, chacun admettant exactement une des 8 géométries homogènes possibles [24]. Un des points délicats est de munir certaines variétés d'une structure hyperbolique. En particulier, sa conjecture de géométrisation impliquerait que le groupe fondamental d'une variété compacte sans bord est hyperbolique si et seulement si la variété peut être munie d'une structure hyperbolique complète.

A l'intersection de ces deux problématiques, J.W. Cannon propose la conjecture suivante dans [7].

CONJECTURE 4.1 (de Cannon). — *Un groupe hyperbolique de bord homéomorphe à \mathbb{S}^2 opère géométriquement sur l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 .*

Un théorème de D. Sullivan permet de reformuler cette conjecture sous une forme plus analytique.

CONJECTURE 4.2. — *Si le bord d'un groupe hyperbolique est homéomorphe à \mathbb{S}^2 , alors il est quasisymétrique à $\widehat{\mathbb{C}}$.*

4.1. **Approche de Cannon** *et al.*

Soit G un groupe hyperbolique au sens de Gromov dont le bord est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 . On se fixe un système fini de générateurs et on lui associe son graphe de Cayley (X, o) , où l'origine o est donnée p.ex. par l'élément neutre de G . On munit X d'une métrique qui rend chaque arête isométrique au segment $[0, 1]$, et on note $|x|$ la distance d'un point $x \in X$ à o . Le groupe G agit sur X géométriquement. Notons par $(\partial X, d)$ le bord de Gromov de X muni d'une métrique visuelle d .

Etant donné un point $x \in X$ et un rayon $R > 0$, on définit l'ombre $\mathcal{U}_o(x, R)$ de la boule $B(x, R)$ portée par une source de lumière en o comme l'ensemble des points a de ∂X pour lesquels il existe un rayon géodésique issu de o qui traverse $B(x, R)$ et aboutit au point a .

Si R est assez grand et fixé, alors il existe une constante C telle que, pour tout $x \in X$, il existe $a \in \partial X$ tel que

$$B(a, (1/C)e^{-\varepsilon|x|}) \subset \mathcal{U}_o(x, R) \subset B(a, Ce^{-\varepsilon|x|}).$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'ensemble $\mathcal{U}_n = \{\mathcal{U}_o(x, R), |x| = n\}$ détermine un recouvrement fini de ∂X . On peut montrer que son nerf est de valence bornée.

J.W. Cannon et E.L. Swenson ont montré qu'un groupe vérifiait la conjecture de Cannon si et seulement si la famille des recouvrements $\{\mathcal{U}_n\}_n$ est conforme [11].

Si l'on suppose que $\{\mathcal{U}_n\}_n$ est conforme, on ne peut pas directement appliquer le théorème de Riemann combinatoire car les recouvrements ne sont pas *a priori* des toitures. La première étape consiste donc à remplacer les \mathcal{U}_n par des toitures \mathcal{S}_n dont les modules combinatoires restent comparables (l'hyperbolicité et le type fini du groupe G permettent de remplacer chaque \mathcal{U}_n par une toiture \mathcal{S}_n dont l'indice de recouvrement est uniformément borné et d'appliquer le Lemme 2.14).

Du coup, (\mathcal{S}_n) est aussi conforme, donc il existe un homéomorphisme $\phi : \partial X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tel que les modules combinatoires de n'importe quel anneau $A \subset \partial X$ sont asymptotiquement comparables au module analytique de $\phi(A)$.

Un point crucial est alors de montrer que l'action du groupe sur le bord à l'infini respecte (à une constante près) les modules combinatoires des anneaux "suffisamment petits". Cela découle p.ex. du fait que l'action de G sur ∂X est localement une dilatation à un facteur près donc on peut comparer les modules combinatoires par le Lemme 2.14. Ceci implique que l'action de G sur $\widehat{\mathbb{C}}$ est uniformément quasiconforme. Du coup, le théorème de Sullivan évoqué plus haut montre que, sous ces hypothèses, le groupe opère géométriquement sur \mathbb{H}^3 .

On récupère après coup que l'homéomorphisme ϕ était en fait quasisymétrique.

Quant à la réciproque, on suppose que G est un groupe kleinéen cocompact qui opère sur \mathbb{H}^3 . Pour montrer que $(\mathcal{U}_n)_n$ est conforme, on peut utiliser que ce sont des recouvrements

de valence bornée par pièces uniformément rondes. Une adaptation directe du Corollaire 3.6 permet alors de conclure.

Ultérieurement, J.W. Cannon, W. Floyd et W. Parry ont affaibli la condition sur $\{\mathcal{U}_n\}$ d'être conforme pour ne supposer que la condition suivante, que l'on définira comme *séparation combinatoire* dans la suite: pour chaque point x du bord et chaque voisinage V de x , il existe un anneau A qui sépare x du complémentaire de V et une constante $m = m(A) > 0$ tels que $\text{mod}_{\text{inf}}(A, \mathcal{U}_n) \geq m$ (Théorème 8.2 de [10]).

Dans un premier temps, les auteurs montrent que l'on peut affaiblir les hypothèses du théorème de Riemann combinatoire en supposant que l'on a affaire à une suite de quasi-empilements de valence bornée conformement séparante et que l'on a suffisamment d'anneaux que l'on contrôle (Théorème 7.1 de [10]). Ensuite, ils utilisent les propriétés dynamiques/combinatoires du groupe pour se ramener à cette version faible du théorème de Riemann combinatoire.

Dans leur approche, ils utilisent qu'on a *a priori* une structure combinatoire à l'infini qui est "la bonne" si jamais le groupe opère géométriquement sur \mathbb{H}^3 . Du coup, nul besoin d'étudier les propriétés de la jauge conforme à l'infini.

4.2. Approche de Bonk et Kleiner

Dans [4, 6], M. Bonk et B. Kleiner travaillent avec des hypothèses de nature analytique. Tout d'abord, il faut savoir que le bord d'un groupe hyperbolique G est toujours Ahlfors-régulier et linéairement localement connexe lorsqu'il est connexe. De plus, l'action des isométries est uniformément quasimöbius sur le bord à l'infini (les birapports de quatre points sont quasi-préservés).

Leur premier résultat, valable en toute dimension ($n \geq 2$), affirme que si ∂G est n -Ahlfors régulier avec ∂G homéomorphe à une sphère \mathbb{S}^n , alors G opère géométriquement sur \mathbb{H}^{n+1} [4]. Dans le cas $n = 2$, on peut voir ce résultat comme une conséquence du Corollaire 3.12.

Plus récemment, M. Bonk et B. Kleiner ont affaibli leurs hypothèses dans le cadre de la conjecture de Cannon en supposant qu'il existe une métrique Ahlfors-régulière de dimension minimale $Q \geq 2$ (parmi les métriques Ahlfors-régulières de la jauge conforme) sur ∂G . Cette condition permet de montrer qu'un espace tangent (faible) T de ∂G admet une famille de courbes de Q -module non nul [18]. Or T est aussi Q -Ahlfors-régulier et quasimöbius équivalent à un époinement de ∂G . Ceci implique que ∂G admet aussi une famille de courbes de Q -module non nul (quasi-invariance du module par transformation quasimöbius [25]).

La dynamique par transformations quasimöbius permet d'exploiter cette famille de courbes pour montrer que ∂G vérifie la condition de Loewner restreinte aux paires de boules de même rayon. M. Bonk et B. Kleiner montrent alors que cette condition est

suffisante pour montrer que ∂G est loewnesque, et ils en déduisent donc la conjecture en appliquant le Corollaire 3.15.

4.3. En guise de conclusion

Dans les deux articles [10] et [6], les auteurs partent d'une condition sur les modules de courbes : il existe une/des famille(s) de courbes de module (combinatoire) non nul : cette hypothèse – très forte – impose la présence d'une quantité importante de courbes. Ensuite, la dynamique est utilisée pour propager cette information à tous les endroits et à toutes les échelles. Cette donnée se traduit par l'existence d'une structure analytique sur ∂G compatible avec ces modules et l'action de G . Enfin, le théorème de Sullivan produit l'action par transformations de Moebius.

On peut tirer la leçon suivante : la dynamique (cocompacte et à distorsion bornée) permet d'obtenir des estimations uniformes à toutes les échelles et dans toutes les positions à partir d'estimations plus qualitatives.

Il semblerait que l'analogie s'arrête ici.

Si l'on part du fait qu'il existe une famille de courbes de Q -module non nul dans un espace Q -régulier ($Q \geq 2$), alors l'argument dynamique de M. Bonk et B. Kleiner évoqué plus haut permet de “balader” cette famille de courbes un peu partout. De plus, le lemme du pont et la monotonie des modules combinatoires en fonction de l'exposant Q montrent que les 2-modules de condenseurs sont minorés, mais cela n'implique pas *a priori* la séparation combinatoire (il s'agit de l'inégalité inverse), ou alors, il faudrait montrer que ces estimations s'appliquent aux familles de courbes qui séparent les condenseurs (*cf.* mod_{inf}).

Réciproquement, si les hypothèses de séparation combinatoire sont vérifiées, on n'a aucune raison d'avoir l'existence d'une famille de courbes de module non nul : il se peut même qu'il n'y ait aucune courbe rectifiable sur la surface ! Néanmoins, si on se donne les hypothèses de séparation combinatoire sur ∂G pour un exposant $Q \geq 2$ et que l'on suppose aussi que ∂G est Q -Ahlfors régulier, alors la Proposition B.2 montre qu'il existe une famille de courbes de module positif : on est donc ramené à [6] ! Mais les hypothèses sont très contraignantes puisque le Q -module combinatoire d'une famille de courbes est toujours plus petit que son 2-module, et tend même vers 0 dans les cas favorables !

En résumé, une première impression indique que l'approche de M. Bonk et B. Kleiner est plus approfondie puisque l'on récupère des propriétés combinatoires (construction de triangulations et contrôle des modules combinatoires associés) à partir de données analytiques, alors que l'approche de J.W. Cannon *et al.* part directement de données combinatoires. En revanche, il est plus raisonnable de considérer des modules combinatoires, puisque l'on ne sait pas en général s'il existe des courbes rectifiables... De plus, il faut bien comprendre que la donnée initiale est celle d'un groupe hyperbolique de bord \mathbb{S}^2 , donc les

données sont plutôt de nature combinatoire et topologique, et les propriétés analytiques ne pourront provenir – comme c’est déjà le cas – que de considérations combinatoires...

Enfin, notons que dans les deux cas, les conditions suffisantes mises en avant (existence quantifiée de courbes) sont *a priori* et en général difficiles – pour ne pas dire quasi-impossibles – à vérifier... ce qui laisse le problème encore ouvert !

En effet, on sait qu’il existe des métriques Q -régulières sur ∂G , pour des exposants $Q > 2$: on sait donc comment majorer les Q -modules de condenseurs, mais comment montrer qu’on a une famille de Q -module positif ? ou que sa dimension est minimale ?? De même, qu’est-ce qui nous permet de contrôler les 2-modules combinatoires ? Comment montrer que l’on peut choisir $Q = 2$ sans répondre aux questions précédentes ?

Appendice A. NOTIONS DE THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES FONCTIONS

Des précisions sur les notions développées dans cet appendice peuvent être trouvées par exemple dans les ouvrages [1, 2, 15].

Nous nous plaçons dans un premier temps sur la sphère de Riemann. Le module est un outil fondamental de l’analyse complexe issu de la méthode *longueur-aire*, et ce, pour au moins deux raisons. Tout d’abord il se traduit souvent par des contraintes géométriques, et ensuite, il se comporte bien par revêtements (ramifiés) holomorphes (ou quasiconformes).

DÉFINITION A.1 (module de courbes). — *Soient Γ une famille de courbes et $Q > 1$. On note \mathcal{M}_Q l’ensemble des fonctions mesurables $\rho : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que $0 < V_Q(\rho) = \int \rho^Q < \infty$. Soit $\rho \in \mathcal{M}_Q$; on définit la ρ -longueur de $\gamma \in \Gamma$ par $\ell_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho$ et $L_\rho(\Gamma) = \inf_\gamma \ell_\rho(\gamma)$. Le Q -module de Γ est par définition*

$$\text{mod}_Q \Gamma = \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q} \text{mod}_Q(\Gamma, \rho) = \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q} \frac{V_Q(\rho)}{L_\rho(\Gamma)^Q}.$$

Une métrique ρ est dite extrémale si elle donne le module de Γ .

Lorsque $Q = 2$, on obtient ainsi un invariant conforme.

On a le critère suivant.

PROPOSITION A.2 (critère de Beurling). — *Soient Γ une famille de courbes. Une métrique ρ est extrémale s’il existe une sous-famille $\Gamma_0 \subset \Gamma$ telle que*

- (1) *pour tout $\gamma \in \Gamma_0$, $\ell_\rho(\gamma) = L_\rho(\Gamma)$;*
- (2) *si $h : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\int_\gamma h \geq 0$ pour toute courbe $\gamma \in \Gamma_0$, alors on a $\int h \rho^{Q-1} \geq 0$.*

De plus, cette métrique est unique à normalisation près.

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma \in \mathcal{M}_Q$ que l'on suppose normalisée pour que $L_\sigma(\Gamma) = L_\rho(\Gamma)$. Du coup, $\ell_\sigma(\gamma) \geq L_\rho(\Gamma) = \ell_\rho(\gamma)$ pour toute $\gamma \in \Gamma_0$ d'après (1). En posant $h = \sigma - \rho$, on obtient par (2)

$$\int (\sigma - \rho) \rho^{Q-1} \geq 0$$

soit

$$\int \rho^Q \leq \int \sigma \rho^{Q-1} \leq \left(\int \sigma^Q \right)^{1/Q} \cdot \left(\int \rho^Q \right)^{1-1/Q}$$

par l'inégalité de Hölder. Du coup, on a $\text{mod}_Q(\Gamma, \rho) \leq \text{mod}_Q(\Gamma, \sigma)$. Le cas d'égalité se produit lorsque l'inégalité de Hölder est une égalité, donc si σ^Q et $(\rho^{Q-1})^{Q/(Q-1)}$ sont proportionnelles, soit si $\sigma = \rho$ d'après leurs normalisations. ■

DÉFINITION A.3 (module d'anneaux, de quadrilatères et de condenseurs). — Si $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ est un anneau, on lui associe la famille Γ_t des courbes qui joignent les composantes de bord, et Γ_s la famille des courbes qui séparent ces composantes. On a (lemme et définition)

$$\text{mod } A = \text{mod}_2 \Gamma_s = \frac{1}{\text{mod}_2 \Gamma_t}.$$

Un quadrilatère Q est un domaine de Jordan avec quatre points marqués sur le bord. Ces points découpent le bord en quatre "côtés" c_1, c_2, c_3, c_4 consécutifs. On peut définir deux modules, selon que l'on considère la famille Γ_{impair} des courbes qui relient c_1 et c_3 ou la famille Γ_{pair} des courbes qui relient c_2 et c_4 . Similairement au cas de l'anneau, on a toujours

$$\text{mod}_2 \Gamma_{\text{impair}} = \frac{1}{\text{mod}_2 \Gamma_{\text{pair}}}.$$

Un condenseur est formé de deux continua E et F disjoints. On note $\Gamma = \Gamma(E, F)$ la famille des courbes qui relient E et F , et on définit

$$\text{mod}_Q(E, F) = \text{mod}_Q \Gamma.$$

REMARQUE A.4. — Il faut faire attention à ce que le module d'un anneau est l'inverse du module du condenseur formé des composantes du complémentaire.

Le critère de Beurling permet de montrer que dans un rectangle, le module est le rapport des longueurs des côtés, et dans le cas d'une couronne $A = \{r \leq |z| < R\}$, $\text{mod } A = (1/2\pi) \log R/r$. En particulier, si un anneau a un très grand module, alors au moins l'une des composantes connexes de son complémentaire a un petit diamètre (cela découle p.ex. du théorème de la couronne de Teichmüller).

Les applications qui sont naturelles dans ce contexte sont les homéomorphismes quasi-conformes. Ils ont la particularité de pouvoir être définis de bien des manières dans \mathbb{C} . Nous en citons quelques unes.

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application et soient $r > 0$ et $z \in \mathbb{C}$; on définit

$$\begin{aligned} L_f(z, r) &= \sup\{|f(z) - f(w)|, |z - w| \leq r\}, \\ \ell_f(z, r) &= \inf\{|f(z) - f(w)|, |z - w| \geq r\}. \end{aligned}$$

DÉFINITION A.5 (homéomorphisme quasiconforme du plan). — *Un homéomorphisme $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est quasiconforme si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.*

[QC] *Il existe $H < \infty$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$,*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{L_f(z, r)}{\ell_f(z, r)} \leq H.$$

[G1] *Il existe $K < \infty$ telle que pour toute famille Γ de courbes rectifiables,*

$$(1/K) \cdot \text{mod}_2(\Gamma) \leq \text{mod}_2(f\Gamma) \leq K \cdot \text{mod}_2(\Gamma).$$

[G2] *Il existe $K < \infty$ telle que pour tout anneau $A \subset \mathbb{C}$,*

$$(1/K) \cdot \text{mod } A \leq \text{mod } f(A) \leq K \cdot \text{mod } A.$$

[QS] *Il existe une fonction continue et croissante $\eta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\eta(0) = 0$, et si z, w_1 et w_2 sont trois points du plan tels que $|z - w_1| \leq t \cdot |z - w_2|$ alors*

$$|f(z) - f(w_1)| \leq \eta(t) \cdot |f(z) - f(w_2)|.$$

[FQS] *Il existe $H < \infty$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $r > 0$,*

$$L_f(z, r) \leq H \cdot \ell_f(z, r).$$

Pour utiliser des techniques similaires dans des espaces métriques, il convient de rajouter quelques restrictions de nature géométrique. Une condition naturelle est celle d'être Ahlfors régulier. Elle est implicite dans les estimations faites sur $\widehat{\mathbb{C}}$.

DÉFINITION A.6 (Ahlfors régularité). — *Si $Q > 0$, un espace métrique X est Q -Ahlfors régulier s'il existe une mesure borélienne μ telle que, pour tout $R < \text{diam } X$, et tout $x \in X$, $\mu(B(x, R)) \asymp R^Q$.*

Dans ce cas, on peut choisir $\mu = \mathcal{H}_Q$ la mesure de Hausdorff Q -dimensionnelle.

On remarque qu'un tel espace est toujours *doublant i.e.*, il existe un naturel N tel que tout ensemble borné peut être recouvert par au plus N ensembles de diamètre moitié.

Une courbe γ dans X est une application continue d'un intervalle compact I de \mathbb{R} dans X . On peut, comme dans les espaces euclidiens, définir la longueur de γ . Si cette longueur $\ell(\gamma)$ est finie, on dira que la courbe est rectifiable. Dans ce cas, on peut paramétrer γ par la longueur d'arc γ_s et pour toute fonction $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$, on définit

$$\int_{\gamma} \rho ds = \int_0^{\ell(\gamma)} \rho \circ \gamma_s(t) dt.$$

DÉFINITION A.7 (module de familles de courbes). — *Soient (X, μ) un espace métrique mesuré, Γ une famille de courbes de X et $Q > 1$ un réel. On définit le Q -module de Γ par*

$$\text{mod}_Q(\Gamma) = \inf \int_X \rho^Q d\mu$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions (dites admissibles) $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$ telles que, pour toute courbe rectifiable $\gamma \in \Gamma$, $\int_{\gamma} \rho ds \geq 1$.

Donnons quelques propriétés élémentaires du module.

- (1) $\text{mod}_Q(\emptyset) = 0$;
- (2) si $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, $\text{mod}_Q \Gamma_1 \leq \text{mod}_Q \Gamma_2$;
- (3) $\text{mod}_Q(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{mod}_Q \Gamma_i$;
- (4) si Γ_1 et Γ_2 sont deux familles de courbes telles que toute courbe γ_1 dans Γ_1 possède une sous-courbe $\gamma_2 \in \Gamma_2$, alors $\text{mod}_Q \Gamma_1 \leq \text{mod}_Q \Gamma_2$.

On conclut ces propriétés par un résultat de S. Keith (Proposition 4.2.1 [17]) qui nous sera utile dans l'appendice suivant.

PROPOSITION A.8 (S. Keith). — Soient (X, μ) un espace métrique compact de masse finie et $Q > 1$. Pour toute famille de courbes Γ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $L_g(\Gamma) = 1$ et

$$\int_X g^Q \leq \text{mod}_Q \Gamma + \varepsilon.$$

Le prochain lemme établit une borne supérieure sur le Q -module dans un espace Q -régulier.

LEMME A.9. — Si (X, μ) est Q -Ahlfors régulier, $x \in X$ et $\ell < L < \text{diam } X$ avec $L \geq 2\ell$, alors

$$\text{mod}_Q(B(x, \ell), X \setminus B(x, L)) \lesssim (1/\log L/\ell)^{1-Q}$$

DÉMONSTRATION. Posons $\rho(y) = 1/\text{dist}(x, y)$. Alors, pour toute courbe $\gamma \in \Gamma_t$ qui joint $B(x, \ell)$ à $X \setminus B(x, L)$, on a

$$\int_{\gamma} \rho ds \geq \int_{\ell}^L \frac{dt}{t} = \log L/\ell$$

Soit k le plus petit entier tel que $2^{k+1}\ell \geq L$. Alors, en découpant en couronnes diadiques centrées en x et en utilisant la régularité de X , on a

$$\begin{aligned} \int_X \rho^Q d\mu &\lesssim \sum_{j=0}^k \frac{\mu(B(x, 2^{j+1}\ell))}{(2^j\ell)^Q} \\ &\lesssim \sum_{j=0}^k \frac{(2^{j+1}\ell)^Q}{(2^j\ell)^Q} \\ &\lesssim \log L/\ell. \end{aligned}$$

On en déduit l'estimation promise. ■

Dans ce lemme, nous avons juste utilisé l'inégalité $\mu(B(R)) \lesssim R^Q$.

L'estimation opposée du module n'est *a priori* pas automatique sous la seule condition de régularité. Son existence provient de ce que l'on appelle la condition de Loewner, qui a été introduite par J. Heinonen et P. Koskela [16] dans un contexte purement métrique. Dans ces espaces, les méthodes de discrétisation sont particulièrement pertinentes.

DÉFINITION A.10 (distance relative). — Si (E, F) est un condenseur dans un espace métrique, on définit leur distance relative par

$$\Delta(E, F) := \frac{\text{dist}(E, F)}{\min\{\text{diam } E, \text{diam } F\}}.$$

DÉFINITION A.11 (espace loewnesque). — Soit (X, μ) un espace métrique, mesuré de dimension de Hausdorff Q . On dit que X est un espace loewnesque s'il vérifie la condition de Loewner suivante : il existe une fonction $\psi :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ telle que, pour tout condenseur (E, F) et pour tout $t \geq \Delta(E, F)$, on ait

$$\text{mod}_Q(E, F) \geq \psi(t).$$

Un espace loewnesque Ahlfors régulier vérifie de nombreuses propriétés similaires aux espaces euclidiens. Par exemple, un tel espace est toujours linéairement localement connexe et quasiconvexe *i.e.*,

DÉFINITION A.12 (connexité locale linéaire). — Un espace métrique X est linéairement localement connexe s'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x \in X$, tout $r > 0$, on ait :

- (1) tout couple de points dans $B(x, r)$ appartient à un continuum contenu dans $B(x, Cr)$;
- (2) tout couple de points dans $X \setminus \bar{B}(x, r)$ appartient à un continuum contenu dans $X \setminus \bar{B}(x, (1/C)r)$.

DÉFINITION A.13 (quasiconvexité). — Un espace métrique X est quasiconvexe s'il existe $C > 0$ telle que, pour tout $x, y \in X$, il existe une courbe γ qui relie x à y telle que $\text{diam } \gamma \leq C|x - y|$.

Dans ce contexte, on peut aussi définir la classes des homéomorphismes quasiconformes en considérant les applications qui vérifient la condition [QC], la classe des homéomorphismes géométriquement quasiconformes qui vérifient [G1] ou [G2], la classe quasisymétrique, qui vérifient la condition [QS], ou faiblement quasisymétriques [FQS]...

Définis sur des espaces doublants et connexes, les homéomorphismes faiblement quasisymétriques sont quasisymétriques. Dans un espace de Loewner Ahlfors régulier, toutes ces définitions sont encore équivalentes (ce n'est pas le cas en général). La condition loewnesque permet notamment de passer du local au global [16].

Appendice B. DISCRÉTISATION DANS LES ESPACES MÉTRIQUES

On étend la notion de modules combinatoires à des espaces métriques plus généraux. Dans cet appendice, on supposera que (X, μ) est un espace métrique connexe compact

localement connexe Q -Ahlfors régulier pour un $Q > 1$ de diamètre 1. L'objectif de ce paragraphe est de montrer que l'on peut discrétiser les modules de manière raisonnable dans ce contexte (voir Proposition B.2).

On se donne une suite de quasi-empilements (\mathcal{S}_n) dont la maille tend vers 0, autrement dit, il existe $K \geq 1$ telle que, pour tout n , et tout $s \in \mathcal{S}_n$ il existe deux boules $B(s) \subset s \subset KB(s)$ telles que les $\{B(s)\}_{s \in \mathcal{S}_n}$ sont deux à deux disjointes. A la place de quasi-empilements, on peut à la place supposer que les recouvrements sont par des pièces uniformément rondes dont le nerf est de valence bornée.

REMARQUE B.1. — On peut procéder ainsi : pour tout $r \in]0, 1]$ on se fixe une famille de boules fermées disjointes de $\mathcal{B}(r) = \{B_i = B(x_i, r/5)\}_i$ de rayon $r/5$ telle que $\widehat{\mathcal{B}}(r) = \{\widehat{B}_i = B(x_i, r)\}$ recouvre X . Puisque X est Ahlfors régulier, il existe une constante $K \in \mathbb{N}$, indépendante de r , telle que chaque boule de $\widehat{\mathcal{B}}(r)$ intersecte au plus K autres boules. En effet, si N est le nombre de boules \widehat{B}_j qui intersectent une boule \widehat{B} donnée, alors on a $B_j \subset 3\widehat{B}$ donc

$$r^Q \gtrsim \mu(3\widehat{B}) \geq \sum_{1 \leq j \leq N} \mu(B_j) \gtrsim Nr^Q.$$

Notons enfin que chaque $\widehat{\mathcal{B}}(r)$ est un quasi-empilement et on peut prendre $\mathcal{S}_n = \widehat{\mathcal{B}}(1/2^n)$ et $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}(1/2^n)$ avec $K = 5$.

Pour chaque n , on définit des modules combinatoires \mathcal{S}_n comme auparavant : on note $\mathcal{M}_Q(\mathcal{S}_n)$ l'ensemble des applications $\rho : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $0 < \sum \rho(s)^Q < \infty$ que l'on appelle *métriques admissibles*.

Soit $K \subset X$; la ρ -longueur de K est par définition

$$\ell_\rho(K) = \sum_{s \cap K \neq \emptyset} \rho(s)$$

et son Q -volume

$$V_{Q,\rho}(K) = \sum_{s \cap K \neq \emptyset} \rho(s)^Q.$$

Si Γ est une famille de courbes dans X et $\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{S}_n)$, on définit

$$L_\rho(\Gamma, \mathcal{S}_n) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \ell_\rho(\gamma),$$

et son Q -module combinatoire par

$$\text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}_n) = \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{S}_n)} \frac{V_{Q,\rho}(X)}{L_\rho(\Gamma, \mathcal{S}_n)^Q} = \inf_{\rho \in \mathcal{M}_Q(\mathcal{S}_n)} \text{mod}_Q(\Gamma, \rho, \mathcal{S}_n).$$

PROPOSITION B.2. — Pour tout condenseur (E, F) et pour n assez grand, on a

$$\text{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) \asymp \text{mod}_Q(E, F)$$

si $\text{mod}_Q(E, F) > 0$ et sinon, $\lim \text{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) = 0$.

Une des inégalités proviendra du lemme du pont qui reste valide dans ce contexte.

Pour l'autre inégalité, nous allons adapter l'argument de la Proposition 3.2.1 de [18]. Dans ce but, on définit une \mathcal{S}_n -approximation d'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ de $\Gamma(E, F)$ comme une suite finie de pièces $\{s_1, \dots, s_k\}$ de \mathcal{S}_n deux à deux distinctes, telle qu'il existe $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_j < \dots < t_k = 1$ qui vérifient $\{\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})\} \subset s_{j+1}$. On note $\ell_n(\gamma) = \sum_{0 \leq j < k} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1}))$ et on définit l'application $a_n(\gamma) : [0, \ell_n(\gamma)] \rightarrow X$, constante par morceaux, par

$$a_n(\gamma) \left(\left[\sum_{0 \leq j < m} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})), \sum_{0 \leq j \leq m} d(\gamma(t_j), \gamma(t_{j+1})) \right] \right) = \gamma(t_m)$$

pour $0 \leq m \leq k - 1$ et $a_n(\gamma)(\ell_n(\gamma)) = \gamma(1)$.

Notons qu'en général il existe plusieurs \mathcal{S}_n -approximations d'une même courbe. Cependant, on a toujours $\ell_n(\gamma) \leq \sum_{\mathcal{S}_n(\gamma)} \text{diam } s$.

Avant de démontrer la Proposition B.2, on rappelle un lemme qui nous sera aussi utile dans sa démonstration.

LEMME B.3. — Soit (X, μ) un espace métrique mesuré qui vérifie la condition de doublement de volume. On considère une famille de boules $B \in \mathcal{B}$ et on associe à chacune un poids $a_B > 0$. Pour tout $p > 1$, pour tout $\lambda \in]0, 1[$, il existe une constante $C = C(p, \lambda) > 0$ indépendante de \mathcal{B} et des poids, telle que

$$\int \left(\sum a_B \chi_B \right)^p d\mu \leq C \int \left(\sum a_B \chi_{\lambda B} \right)^p d\mu.$$

La démonstration de ce lemme utilise les fonctions maximales de Hardy-Littlewood et consiste à estimer la norme de cette fonction en tant qu'élément du dual de L^q , où $(1/p) + (1/q) = 1$ (voir [3] dans le cadre euclidien).

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION B.2. On se fixe un condenseur (E, F) , et on note $\Gamma = \Gamma(E, F)$. Par hypothèses, il existe une constante $K \geq 1$ et pour chaque $s \in \cup \mathcal{S}_n$ une boule $B(s)$ telles que $B(s) \subset s \subset K \cdot B(s)$. Comme la maille de \mathcal{S}_n tend vers 0 et que le module est continu, il existe $\kappa > 0$ tel que, pour tout n , pour toute $\gamma \in \Gamma$ et toute $s \in \mathcal{S}(\gamma)$,

$$\text{diam}(\gamma \cap (2K) \cdot B(s)) \geq \kappa \cdot \text{diam } B(s).$$

On se fixe n et on note $\mathcal{S} = \mathcal{S}_n$. Du coup, à l'instar du lemme du pont, si $\rho \in \mathcal{M}_Q(X, \mathcal{S})$, on définit la soupe $\hat{\rho}$ du poids ρ par

$$\hat{\rho} = \sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{\rho(s)}{\text{diam } B(s)} \chi_{2KB(s)},$$

où $\chi_{2KB(s)}$ désigne la fonction caractéristique de $2KB(s)$. Du coup, si $\gamma \in \Gamma$, alors

$$\begin{aligned} \ell_{\hat{\rho}}(\gamma) &\geq \sum_{s \in \mathcal{S}(\gamma)} \int_{\gamma \cap 2KB(s)} \frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \\ &\geq \kappa \sum_{s \in \mathcal{S}(\gamma)} \rho(s) \\ &\geq \kappa L_{\rho}(\Gamma_t, \mathcal{S}). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} V_Q(\hat{\rho}) &= \int_X \left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \chi_{2KB(s)} \right)^Q \\ &\lesssim \int_X \left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \chi_{B(s)} \right)^Q \end{aligned}$$

par le Lemme B.3. Si \mathcal{S} est un quasi-empilement, alors

$$\left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \chi_{B(s)} \right)^Q = \sum_{s \in \mathcal{S}} \left(\frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \right)^Q \chi_{B(s)}.$$

Sinon, \mathcal{S} est de valence bornée, donc on obtient

$$\begin{aligned} \left(\sum_{s \in \mathcal{S}} \frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \chi_{B(s)}(x) \right)^Q &\lesssim \left(\max \left\{ \frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \chi_{B(s)}(x) \right\} \right)^Q \\ &\leq \sum_{s \in \mathcal{S}} \left(\frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \chi_{B(s)}(x) \right)^Q. \end{aligned}$$

Par conséquent, dans les deux cas, on a

$$\begin{aligned} V_Q(\hat{\rho}) &\lesssim \sum_{s \in \mathcal{S}} \int_{B(s)} \left(\frac{\rho(s)}{\text{diam } s} \right)^Q \\ &\lesssim \sum_{s \in \mathcal{S}} \rho(s)^Q \end{aligned}$$

car $\mu(B(s)) \asymp \text{diam } B(s)^Q$. Donc

$$V_Q(\hat{\rho}) \lesssim V_Q(\rho, \mathcal{S})$$

et on obtient ainsi

$$\text{mod}_Q \Gamma \lesssim \text{mod}_Q(\Gamma, \mathcal{S}_n)$$

pour n assez grand.

Quant à la réciproque, on se fixe $\varepsilon > 0$. D'après la Proposition A.8, il existe une fonction continue $g : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $L_g(\Gamma(E, F)) = 1$ et

$$\int_X g^Q d\mu \leq \text{mod}_Q(E, F) + \varepsilon.$$

On peut supposer $g(x) \geq \delta > 0$ puisque X est compact et $\mu(X) < \infty$. On définit, pour $x \in X$,

$$g_n(x) = \inf\{g(y), y \in s, x \in s, s \in \mathcal{S}_n\}.$$

Puisque g est continue et la maille de \mathcal{S}_n tend vers 0, la suite (g_n) tend uniformément vers g .

Notons $\rho_n(s) := (3/2) \inf_s g \cdot \text{diam } s$, et montrons que $L_{\rho_n}(\Gamma(E, F), \mathcal{S}_n) \geq 1$ pour n assez grand. Si ce n'est pas le cas, alors il existe une sous-suite (n_p) ainsi que des courbes (γ_p) de $\Gamma(E, F)$ telles que $\ell_{\rho_{n_p}}(\gamma_p, \mathcal{S}_{n_p}) < 1$. On se fixe des approximations $a_{n_p}(\gamma_p)$. Ceci implique que d'une part

$$\sum_{\mathcal{S}_{n_p}(\gamma_p)} \text{diam } s \cdot \inf_s g < 1 - (\delta/2) \sum_{\mathcal{S}_{n_p}(\gamma_p)} \text{diam } s,$$

et d'autre part $\ell_{n_p}(\gamma_p) < 1/\delta$.

Notons $L = \sup_p \ell_{n_p}(\gamma_p)$ et étendons $a_{n_p}(\gamma_p)$ à $[0, L]$ en posant $a_{n_p}(\gamma_p)([\ell_{n_p}(\gamma_p), L]) = a_{n_p}(\gamma_p)(\ell_{n_p}(\gamma_p))$.

On obtient ainsi une suite relativement compacte pour la convergence uniforme dont toute limite est une application 1-lipschitzienne (argument similaire au théorème d'Arzela-Ascoli). Soit γ l'une d'elles : il s'agit, par construction, d'une courbe $\gamma \in \Gamma(E, F)$.

On obtient

$$\begin{aligned} \int_\gamma g ds &\leq \liminf \int_0^L g_{n_p} \circ a_{n_p}(\gamma_p) \\ &\leq \liminf \sum_{\mathcal{S}_{n_p}(\gamma_p)} \text{diam } s \inf_s g \\ &\leq 1 - (\delta/2) \limsup \sum_{\mathcal{S}_{n_p}(\gamma_p)} \text{diam } s \\ &\leq 1 - (\delta/2) \ell(\gamma). \end{aligned}$$

Ceci contredit $L_g(\Gamma(E, F)) = 1$.

Du coup, pour n assez grand, on a

$$\begin{aligned}
 \text{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) &\lesssim \sum (\inf_s g)^Q \cdot (\text{diam } s)^Q \\
 &\lesssim \sum (\inf_s g)^Q \cdot \mu(B(s)) \\
 &\leq \sum \int_{B(s)} g^Q d\mu \\
 &\lesssim \int_X g^Q d\mu \\
 &\leq \text{mod}_Q(E, F) + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\text{mod}_Q(E, F) = 0$, on obtient $\text{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) \rightarrow 0$ avec n , et si $\text{mod}_Q(E, F) > 0$, on obtient $\text{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) \lesssim \text{mod}_Q(E, F)$ en prenant *e.g.* $\varepsilon = \text{mod}_Q(E, F)$. ■

Cette proposition permet de donner une nouvelle démonstration qu'une application quasimöbius entre Q -espaces réguliers quasi-préserve les Q -modules de condensateurs quantitativement [25] :

THÉORÈME B.4 (J. Tyson). — *Soient X, Y deux espaces compacts Q -réguliers et $\phi : X \rightarrow Y$ un homéomorphisme quasimöbius. Alors, pour tout condenseur (E, F) , on a*

$$\text{mod}_Q(E, F) \asymp \text{mod}_Q(\phi E, \phi F),$$

où les constantes implicites ne dépendent que des constantes des propriétés évoquées sur X et Y .

DÉMONSTRATION. On se fixe une suite de recouvrements (\mathcal{S}_n) comme pour la Proposition B.2. Une application quasimöbius est localement quasisymétrique (quantitativement) donc l'image des \mathcal{S}_n reste une suite de recouvrements de valence bornée par pièces uniformément rondes dont la maille tend vers 0, donc, en utilisant deux fois la Proposition B.2 pour n assez grand, on obtient

$$\text{mod}_Q(E, F) \asymp \text{mod}_Q(E, F, \mathcal{S}_n) = \text{mod}_Q(\phi E, \phi F, \phi \mathcal{S}_n) \asymp \text{mod}_Q(\phi E, \phi F)$$

ce qui établit le théorème. ■

Appendice C. CONVERGENCE ET TOPOLOGIE DE HAUSDORFF

Cet appendice précise les notions de convergence utilisées notamment dans la démonstration du Théorème 3.1.

Soit Z un espace métrique. Si $X, Y \subset Z$, on note

$$\partial(X, Y) = \sup_{x \in X} d(x, Y).$$

On a $\partial(X, Y) = 0$ si et seulement si $\overline{X} \subset \overline{Y}$.

On définit par

$$d_H(X, Y) = \max\{\partial(X, Y), \partial(Y, X)\}$$

la *distance de Hausdorff* entre X et Y . On dira qu'une suite $(X_n)_n$ de parties de Z tend vers X si $d_H(X_n, X) \rightarrow 0$.

En notant $V_\varepsilon(X) = \{x \in Z, d(x, X) < \varepsilon\}$, cela signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $X_n \subset V_\varepsilon(X)$ et $X \subset V_\varepsilon(X_n)$.

Rappelons que si X un espace métrique propre, alors l'ensemble des compacts non vides de X muni de la distance de Hausdorff est un espace métrique complet.

Dans la démonstration du Théorème 3.1, les ensembles \mathcal{P}_n tendent dans la topologie de Hausdorff vers X .

Dans un premier temps, on réinterprète la convergence au sens de Hausdorff à l'aide de la convergence uniforme de fonctions. Ensuite, on établit un théorème de convergence de fonctions définies sur des sous-espaces convergents. On se place dans un contexte très proche de ce dont on a besoin. Cette approche est inspirée par les travaux de M. Gromov sur la métrique de "Hausdorff-Gromov" dans [14], et nos résultats s'étendent à ce contexte plus général sans problème particulier.

LEMME C.1. — Si Z est un espace métrique compact, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $N(\varepsilon)$ tel que tout compact K de Z peut être recouvert par $N(\varepsilon)$ boules de rayon ε centrées sur K .

DÉMONSTRATION. Si $\varepsilon > 0$ est fixé, on considère un recouvrement fini de Z par des boules de rayon $\varepsilon/2$. On note $N(\varepsilon)$ le nombre de ces boules. Pour chacune de ces boules B , pour chaque $x \in B$, on a $B \subset B(x, \varepsilon)$. Donc, si K est compact, alors il est recouvert par au plus $N(\varepsilon)$ boules. ■

Soit Z un espace métrique compact. On considère la suite $(N_k)_{k \geq 1}$ des entiers obtenus par le lemme précédent en prenant $\varepsilon = 1/2^k$.

On note

$$A_k = \left\{ (n_j)_{1 \leq j \leq k} \in \prod_{1 \leq j \leq k} [1, N_j] \right\} \quad \text{et } p_k : A_{k+1} \rightarrow A_k$$

l'application $(n_j)_{1 \leq j \leq k+1} \mapsto (n_j)_{1 \leq j \leq k}$. On définit

$$A = \varprojlim (A_k, p_k) = \left\{ (a_k) \in \prod_{k \geq 1} A_k, p_k(a_{k+1}) = a_k \right\}.$$

Cet espace est compact, et on peut définir une distance ultra-métrique d_A comme suit.

$$d_A((a_k), (b_k)) = \frac{1}{2^{\min\{j, a_j \neq b_j\}}}.$$

LEMME C.2. — Si K est un compact de Z , alors il existe une application $I : A \rightarrow K$ surjective et 2-Lipschitz.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathcal{B}^1 = \{B_j^1\}_{1 \leq j \leq N_1}$ un recouvrement par N_1 boules de rayon $1/2$. On définit $I_1(n) = x_n$, le centre de B_n^1 .

On suppose que, jusqu'au rang $n \geq 1$, on a construit des applications $I_k : A_k \rightarrow K$ telles que

- (a) $I_k(A_k)$ est une $(1/2^k)$ -approximation de K ;
- (b) Pour chaque k , $I_{k+1}(a) \in B(I_k p_k(a), 1/2^k)$, pour tout $a \in A_{k+1}$.

Pour chaque $a \in A_n$, $B_a = B(I_n(a), 1/2^n)$ est recouvert par N_{n+1} boules

$$\mathcal{B}_a = \{B(x_j^a, 1/2^{n+1})\}_{1 \leq j \leq N_{n+1}}.$$

On définit $I_{n+1}(a, j) = x_j^a$. Par définition, $I_{n+1}(\{a\} \times [1, N_{n+1}])$ est une $1/2^{n+1}$ -approximation de B_a . Puisque ces boules recouvrent K , on obtient (a) pour $k = n + 1$. De même, (b) est vérifié par construction puisque $p_n(a, j) = a$.

D'après (b), si $a = (a_k) \in A$, alors $(I_k(a_k))_k$ est une suite de Cauchy. On définit alors

$$I(a) = \lim I_k(a_k).$$

On note que $I(a) \in B(I_k(a_k), 1/2^k)$ pour chaque k .

D'après (a) et (b), pour tout $x \in K$, on peut trouver une suite de boules dans chaque recouvrement qui contiennent x . Autrement dit, I est surjective.

Soient $a = (a_n)$ et $b = (b_n)$ des points de A . On suppose que $d_A(a, b) = 1/2^k$. Du coup, $a_k = b_k$, et $I(a), I(b) \in B(I_k(a_k), 1/2^k)$, donc $|I(a) - I(b)| \leq 1/2^{k-1} \leq 2d_A(a, b)$. ■

COROLLAIRE C.3. — Si (X_n) est une suite de compacts de Z qui tend vers X , alors, quitte à extraire une sous-suite, la suite (I_n) définie par le Lemme C.2 tend vers une application $I : A \rightarrow Z$ telle que $I(A) = X$.

DÉMONSTRATION. Le lemme précédent nous construit un espace métrique A et une suite d'applications $I^n : A \rightarrow Z$ 2-lipschitziennes telles que $I^n(A) = X_n$. Cette suite est donc équicontinue et le théorème d'Ascoli nous extrait une sous-suite (n_k) de sorte que $(I^{n_k})_k$ est convergente vers une application 2-lipschitzienne $I : A \rightarrow Z$. Il reste à vérifier que $X = I(A)$. Or, on a

$$d_H(X_{n_k}, I(A)) \leq \sup_{a \in A} |I^{n_k}(a) - I(a)|$$

donc $I(A)$ est la limite de Hausdorff de (X_{n_k}) , ce qui établit le corollaire, puisqu'il y a unicité de la limite. ■

Convergence des fonctions. On étudie maintenant les limites de fonctions lorsque les espaces sont convergents.

On utilise la notion de module de continuité pour traduire la notion de continuité uniforme.

DÉFINITION C.4 (module de continuité). — Si $f : X \rightarrow Y$ est continue, un module de continuité est une fonction $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\omega(t) \rightarrow 0$ avec t et, pour tous $x, y \in X$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \omega(|x - y|).$$

On remarque aussi que si une famille de fonctions est uniformément équicontinue, il existe un module de continuité qui ne dépend pas de la fonction de la famille.

DEFINITION. — Soient Z et Y deux espaces métriques compacts, (X_n) une suite de compacts de Z qui converge vers un compact X . Soit $(f_n : X_n \rightarrow Y)$ une suite d'applications continues. On dit que (f_n) converge vers $f : X \rightarrow Y$ si, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $z \in X$, il existe $\alpha > 0$, tel que, pour tout n assez grand, si $z_n \in X_n$ vérifie $d(z_n, z) < \alpha$ alors $d(f_n(z_n), f(z)) < \varepsilon$.

On obtient ainsi

THÉORÈME C.5. — Soient Z et Y deux espaces métriques compacts, (X_n) une suite de compacts de Z qui converge vers un compact X . Soit $(f_n : X_n \rightarrow Y)$ une suite d'applications continues qui admet un module de continuité uniforme.

Il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge vers une application continue $f : X \rightarrow Y$, munie du même module de continuité.

En particulier, si la suite (f_n) est isométrique, L -Lipschitz ou η -quasisymétrique, il en est de même de la limite.

DÉMONSTRATION. Soit ω le module de continuité uniforme de (f_n) . On note A le compact obtenu par le Lemme C.2 pour X_n et on suppose que I^n tend vers I uniformément.

On obtient ainsi une suite d'applications $g_n = f_n \circ I^n : A \rightarrow Y$ uniformément équicontinue.

Le théorème d'Ascoli nous permet d'extraire une sous-suite convergente vers une application $g : A \rightarrow Y$.

Soient $z, w \in X$. Il existe $a, b \in A$ tel que $I(a) = z$ et $I(b) = w$. Du coup,

$$|g(a) - g(b)| = |f_n(I^n(a)) - f_n(I^n(b))| \pm (|g_n(a) - g(a)| + |g_n(b) - g(b)|)$$

donc

$$|g(a) - g(b)| = \lim |f_n(I^n(a)) - f_n(I^n(b))|.$$

Du coup, $g(a) = g(b)$ si $I(a) = I(b)$. Autrement dit, il existe $f : X \rightarrow Y$ telle que $g = f \circ I$. Cette application f a le même module de continuité :

$$|f(z) - f(w)| = \lim |f_n(I^n(a)) - f_n(I^n(b))| \leq \lim \omega(|I^n(a) - I^n(b)|) = \omega(|z - w|).$$

Le reste suit, et est laissé au lecteur. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L.V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, Van Nostrand, 1966.
- [2] L.V. Ahlfors, *Conformal invariants : topics in geometric function theory*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973.
- [3] B. Bojarski, Remarks on Sobolev imbedding inequalities, *Complex analysis*, Joensuu 1987, 52–68, Lecture Notes in Math., 1351, Springer, Berlin-New York, 1988.
- [4] M. Bonk & B. Kleiner, Rigidity for quasimöbius group actions, *J. Differential Geom.* **61** (2002), no. 1, 81–106.
- [5] M. Bonk & B. Kleiner, Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres, *Invent. Math.* **150** (2002), no. 1, 127–183.
- [6] M. Bonk & B. Kleiner, Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary, *Geom. Topol.* **9** (2005), Paper no. 7, 219–246.
- [7] J.W. Cannon, The theory of negatively curved spaces and groups, *Ergodic theory, symbolic dynamics, and hyperbolic spaces (Trieste, 1989)*, 315–369, Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1991.
- [8] J.W. Cannon, The combinatorial Riemann mapping theorem, *Acta Math.* **173** (1994), no. 2, 155–234.
- [9] J.W. Cannon, W.J. Floyd & W.R. Parry, Squaring rectangles: the finite Riemann mapping theorem, *The mathematical legacy of Wilhelm Magnus: groups, geometry and special functions (Brooklyn, NY, 1992)*, 133–212, Contemp. Math., 169, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [10] J.W. Cannon, W.J. Floyd & W.R. Parry, Sufficiently rich families of planar rings, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **24** (1999), no. 2, 265–304.
- [11] J.W. Cannon & E.L. Swenson, Recognizing constant curvature discrete groups in dimension 3, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 2, 809–849.
- [12] Y. Colin de Verdière, Un principe variationnel pour les empilements de cercles, *Invent. Math.* **104** (1991), no. 3, 655–669.
- [13] E. Ghys et P. de la Harpe (éditeurs), *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, 83. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.
- [14] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **53** (1981), 53–73.
- [15] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [16] J. Heinonen & P. Koskela, Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry, *Acta Math.* **181** (1998), no. 1, 1–61.
- [17] S. Keith, Modulus and the Poincaré inequality on metric measure spaces, *Math. Z.* **245** (2003), no. 2, 255–292.

- [18] S. Keith & T. Laakso, Conformal Assouad dimension and modulus, *Geometric and Functional Analysis*, **14** (2004), no. 6, 1278–1321.
- [19] P. Koebe, Kontaktprobleme der konformen Abbildung, *Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-phys* **88** (1936), 141–164.
- [20] P. Pansu, Dimension conforme et sphère à l’infini des variétés à courbure négative. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **14** (1989), no. 2, 177–212.
- [21] B. Rodin & D. Sullivan, The convergence of circle packings to the Riemann mapping, *J. Differential Geom.* **26** (1987), no. 2, 349–360.
- [22] O. Schramm, Square tilings with prescribed combinatorics, *Israel J. Math.* **84** (1993), no. 1-2, 97–118.
- [23] H. Short (éditeur), Notes on word hyperbolic groups, *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, 3–63, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.
- [24] W.P. Thurston, Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **6** (1982), no. 3, 357–381.
- [25] J. T. Tyson, Metric and geometric quasiconformality in Ahlfors regular Loewner spaces, *Conform. Geom. Dyn.* **5** (2001), 21–73.

Peter Haïssinsky

LATP/CMI

Université de Provence

39, rue Frédéric Joliot-Curie

13453 Marseille cedex 13

France

Courriel : phaissin@cmi.univ-mrs.fr