



HAL
open science

Une méthode pour l'identification de modèles à temps continu dans un contexte erreurs-en-les-variables

Stéphane Thil, Hugues Garnier, Marion Gilson

► **To cite this version:**

Stéphane Thil, Hugues Garnier, Marion Gilson. Une méthode pour l'identification de modèles à temps continu dans un contexte erreurs-en-les-variables. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2006, May 2006, Bordeaux, France. pp.CDROM. hal-00121128

HAL Id: hal-00121128

<https://hal.science/hal-00121128>

Submitted on 19 Dec 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Une méthode pour l'identification de modèles à temps continu dans un contexte erreurs-en-les-variables

Stéphane THIL, Hugues GARNIER, Marion GILSON

Centre de Recherche en Automatique de Nancy - CRAN UMR 7039 CNRS-UHP-INPL,
Université Henri Poincaré, Nancy 1, BP 239 - 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

{stephane.thil, hugues.garnier, marion.gilson}@cran.uhp-nancy.fr
<https://cifa2006.laps.u-bordeaux1.fr/accueil.php>

Résumé— Cet article¹ traite de l'identification directe de modèles linéaires à temps continu dans un contexte erreurs-en-les-variables. Une méthode fondée sur les statistiques d'ordre supérieur est développée. Sous certaines conditions sur le signal d'entrée et sur les bruits additifs corrompant les données, l'estimateur proposé est consistant. Ses performances sont illustrées à l'aide de simulations de Monte Carlo.

Mots-clés— Identification des systèmes; erreurs-en-les-variables; temps continu; statistiques d'ordre supérieur.

I. INTRODUCTION

L'identification des systèmes à partir de données expérimentales, qui a pour but de déterminer les paramètres de modèles mathématiques de systèmes dynamiques, représente un sujet classique de l'Automatique. Durant les trente dernières années, l'identification des systèmes a connu un développement considérable tant sur le plan de la proposition de nouvelles méthodes que sur le plan des applications. Durant cette période, la théorie de l'identification s'est principalement développée en considérant des modèles à temps discret [1]. En effet, le formidable développement des calculateurs numériques a rendu l'utilisation des modèles à temps discret de plus en plus courante en raison de l'acquisition échantillonnée de signaux, mais aussi grâce à la facilité de mise en œuvre de la commande ou du diagnostic préventif, développés à partir de ces modèles.

L'identification directe de modèles à temps continu à partir de données échantillonnées a connu un regain d'intérêt ces dernières années [2], [3], [4], [5], [6]. La plupart des algorithmes dédiés à l'estimation paramétrique de ces modèles sont à présent disponibles dans la boîte à outils Matlab CONTSID² [7].

Toutefois, la majorité des méthodes d'identification de modèles à temps discret ou continu reposent sur l'hypothèse de bruit additif sur la sortie uniquement, l'entrée du système étant supposée parfaitement maîtrisée. Or, dans de nombreux cas pratiques, l'entrée est également mesurée et donc entachée de bruits de mesure, et il s'avère que l'utilisation des méthodes classiques ne prenant pas en compte

les bruits sur l'entrée conduit à des estimations biaisées.

On traite ici de l'identification de modèles à partir de mesures bruitées des signaux d'entrée et de sortie. Ce problème d'identification dans un contexte *erreurs-en-les-variables* a été l'objet de travaux récents dans le cas de modèles à temps discret. On peut diviser ces travaux en deux classes : ceux exploitant les statistiques de second ordre [8], [9], [10], [11], [12], et ceux utilisant les statistiques d'ordre supérieur (à deux) [13], [14], [15]. En revanche, ce problème n'a été que très peu traité dans le cadre de l'identification de modèles à temps continu et, à notre connaissance, uniquement à l'aide de statistiques d'ordre deux [16].

Cet article présente une méthode fondée sur les statistiques d'ordre supérieur pour l'identification directe de modèles linéaires à temps continu dans un contexte erreurs-en-les-variables. A l'instar des méthodes proposées par J.M.M. Anderson [17], [18], [19], elle s'appuie sur la méthode d'estimation paramétrique de Steiglitz-McBride [20].

Ce document est organisé comme suit : la seconde partie expose le contexte du problème et en troisième partie sont rappelées les bases des statistiques d'ordre supérieur. Dans la quatrième partie on s'intéresse à la méthode d'identification, tandis qu'en cinquième partie se voient explicités quelques points clés de la mise en œuvre de l'algorithme. Enfin, avant la conclusion, un exemple de simulation permet d'illustrer les performances de l'algorithme proposé.

II. POSITION DU PROBLÈME

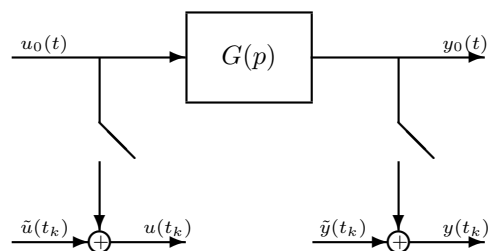


Fig. 1. Système avec données d'entrée/sortie bruitées

¹Ce rapport technique est en relation avec l'article présenté à la Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'06, Bordeaux, mai 2006)

²<http://www.cran.uhp-nancy.fr/contsid>

Soit un système linéaire à temps continu invariant dans

le temps représenté sur la figure 1. On a

$$y_0(t) = G(p)u_0(t) = \frac{B(p)}{A(p)}u_0(t) \quad (1)$$

où p est l'opérateur de différentiation et

- $G(p)$: opérateur de transfert du vrai système ;
- $u_0(t), y_0(t)$: signaux d'entrée et de sortie non bruités ;
- $\tilde{u}(t), \tilde{y}(t)$: bruits de mesure sur l'entrée et sur la sortie ;
- $u(t), y(t)$: signaux d'entrée et de sortie mesurés.

Les polynômes $A(p)$ et $B(p)$ sont définis par

$$A(p) = a_0 + a_1p + \dots + a_{n_a-1}p^{n_a-1} + p^{n_a} \quad (2)$$

$$B(p) = b_0 + b_1p + \dots + b_{n_b}p^{n_b} \quad (3)$$

On suppose que les signaux d'entrée et de sortie sont échantillonnés avec un pas constant égal à T_e et corrompus par des bruits de mesure (à temps discret) ; les données disponibles sont ainsi

$$u(t_k) = u_0(t_k) + \tilde{u}(t_k) \quad (4)$$

$$y(t_k) = y_0(t_k) + \tilde{y}(t_k) \quad (5)$$

où $t_k = kT_e$ désigne l'instant d'échantillonnage. Outre les conditions susdites, il est nécessaire de poser les hypothèses suivantes

- H1 $A(s) \neq 0$ pour $\Re(s) \geq 0$ et $A(s), B(s)$ sont premiers entre eux (s est la variable de Laplace) ;
- H2 le signal d'entrée non bruité $u_0(t_k)$ est un processus aléatoire tel que $E[u_0^3(t_k)] \neq 0$;
- H3 $\tilde{u}(t_k)$ et $\tilde{y}(t_k)$ sont de moyenne nulle et de densité de probabilité symétrique, et respectivement indépendants de $u_0(t_k)$ et $y_0(t_k)$.

REMARQUE 1

La condition H1 regroupe les hypothèses classiques de stabilité et d'identifiabilité du système. On suppose en outre que le système (1) est en opération depuis assez longtemps pour que la sortie y_0 soit stationnaire au sens large, c'est-à-dire que ses propriétés statistiques sont invariantes par translation de temps.

Les hypothèses H2 et H3 sont liées à certaines propriétés des statistiques d'ordre supérieur, et se verront justifiées par la suite. \square

Étant donné N échantillons de données d'entrée/sortie $[u(t_k)]_{k=1}^N$ et $[y(t_k)]_{k=1}^N$, l'objectif est d'estimer les coefficients des polynômes A et B , regroupés dans le vecteur des paramètres θ

$$\theta^T = [a_0 \dots a_{n_a-1} \ b_0 \dots b_{n_b}] \quad (6)$$

L'approche d'identification développée s'appuie sur les statistiques d'ordre supérieur. Les principales définitions et propriétés utilisées dans cet article sont rappelées dans le paragraphe suivant. Une information plus complète sur les statistiques d'ordre supérieur peut être trouvée dans les ouvrages [21], [22].

III. STATISTIQUES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Le cumulants d'ordre 3 d'un signal aléatoire (à temps discret) $x(t_k)$ stationnaire à valeurs réelles est défini par

$$C_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = \text{Cum}[x(t_k), x(t_k + \tau_1), x(t_k + \tau_2)] \quad (7)$$

$$= E[x(t_k)x(t_k + \tau_1)x(t_k + \tau_2)] \quad (8)$$

où $E[\cdot]$ représente l'espérance mathématique. Les cumulants d'ordre supérieur à 2 ont de nombreuses propriétés parmi lesquelles nous ne citons ici que celles utilisées.

Soient \mathbf{x} et \mathbf{y} deux vecteurs aléatoires.

P1 Multilinéarité : si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont liés par la relation linéaire $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, où \mathbf{A} est une matrice quelconque, alors les cumulants de \mathbf{y} sont des fonctions linéaires de chacune des composantes A_{ij} . Par exemple, on a

$$\begin{aligned} \text{Cum}[y(t_i), y(t_j), y(t_k)] \\ = \sum_{a,b,c} A_{ia}A_{jb}A_{kc} \text{Cum}[x(t_a), x(t_b), x(t_c)] \end{aligned}$$

P2 Additivité : si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont *indépendants*, le cumulants de leur somme est égal à la somme de leurs cumulants

$$\begin{aligned} \text{Cum}[x(t_1) + y(t_1), \dots, x(t_n) + y(t_n)] \\ = \text{Cum}[x(t_1), \dots, x(t_n)] + \text{Cum}[y(t_1), \dots, y(t_n)] \end{aligned}$$

P3 Le cumulants d'ordre 3 d'une variable aléatoire ayant une densité de probabilité symétrique (incluant donc les lois gaussiennes) est nul.

On voit maintenant la justification des hypothèses H2 et H3 : si l'on considère le cumulants d'ordre 3 du signal d'entrée bruité (4), en utilisant les propriétés P2 et P3 on obtient

$$C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) = C_{u_0u_0u_0}(\tau_1, \tau_2) + C_{\tilde{u}\tilde{u}\tilde{u}}(\tau_1, \tau_2) \quad (9)$$

$$= C_{u_0u_0u_0}(\tau_1, \tau_2) \quad (10)$$

De la même manière pour le signal de sortie bruité (5) on a

$$C_{yyy}(\tau_1, \tau_2) = C_{y_0y_0y_0}(\tau_1, \tau_2) \quad (11)$$

L'utilisation des cumulants d'ordre supérieur à deux permet donc de s'affranchir naturellement de tout bruit entachant le signal utile, sous les conditions H2-H3.

IV. APPLICATION À L'IDENTIFICATION DE MODÈLES À TEMPS CONTINU

PROPOSITION 1

Le cumulants croisés d'ordre 3 entre les signaux d'entrée/sortie disponibles vérifie

$$C_{uyu}(\tau_1, \tau_2) = \frac{B(p)}{A(p)}C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) \quad (12)$$

où l'opérateur différentiel p représente $\frac{\partial}{\partial \tau_1}$.

PREUVE

Voir l'annexe A. \blacksquare

Ce résultat est le point de départ de la méthode d'identification : l'équation différentielle du système est vérifiée par les cumulants d'ordre 3.

À l'instar de l'approche proposée pour le cas de l'identification de modèles à temps discret [17], [18], [19], la technique développée ici s'appuie sur la méthode de Steiglitz-McBride [20].

A partir de l'équation (12) on définit l'erreur de sortie

$$e(\tau_1, \tau_2, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^{n_a}}{\partial \tau_1^{n_a}} C_{uyu}(\tau_1, \tau_2) - \frac{B(p)}{A(p)} C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) \quad (13)$$

Cette erreur est non linéaire en les paramètres. Pour éviter de recourir à des méthodes de programmation non linéaire, réécrivons l'erreur de sortie précédente sous la forme

$$e(\tau_1, \tau_2, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{A(p)} \left(A(p) C_{uyu}(\tau_1, \tau_2) - B(p) C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) \right) \\ = A(p) C_{uyu}^f(\tau_1, \tau_2) - B(p) C_{uuu}^f(\tau_1, \tau_2) \quad (14)$$

où C_{uuu}^f et C_{uyu}^f sont les cumulants filtrés par $1/A(p)$. On a ainsi une erreur d'équation linéaire en les paramètres. Ces derniers peuvent alors facilement être estimés par la méthode des moindres carrés, comme exposé plus loin.

Comme $A(p)$ est inconnu, on procède de façon itérative pour transformer cette erreur d'équation en l'erreur de sortie (13). Soit $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ l'estimée de $\boldsymbol{\theta}$ à l'itération i . A chaque itération, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1}$ est calculé par la méthode des moindres carrés en utilisant les cumulants filtrés par $1/\hat{A}_i(p)$. Dans la mesure où les paramètres convergent vers une valeur constante, on a

$$\frac{\hat{A}_{i+1}(p)}{\hat{A}_i(p)} \longrightarrow 1 \quad (15)$$

$$\frac{\hat{B}_{i+1}(p)}{\hat{A}_i(p)} \longrightarrow \frac{\hat{B}_{i+1}(p)}{\hat{A}_{i+1}(p)} \quad (16)$$

L'erreur d'équation (14) tend donc vers l'erreur de sortie (13). La convergence de cette méthode est très rapide : typiquement quelques itérations suffisent [23].

L'erreur d'équation (14) peut être réécrite sous la forme d'une régression linéaire

$$e(\tau_1, \tau_2, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial^{n_a}}{\partial \tau_1^{n_a}} C_{uyu}^f(\tau_1, \tau_2) - \Phi^T(\tau_1, \tau_2) \boldsymbol{\theta} \quad (17)$$

où le vecteur de régression est donné par

$$\Phi^T(\tau_1, \tau_2) = \left[-C_{uyu}^f(\tau_1, \tau_2) \quad -\frac{\partial}{\partial \tau_1} C_{uyu}^f(\tau_1, \tau_2) \quad \dots \quad -\frac{\partial^{n_a-1}}{\partial \tau_1^{n_a-1}} C_{uyu}^f(\tau_1, \tau_2) \right. \\ \left. C_{uuu}^f(\tau_1, \tau_2) \quad \frac{\partial}{\partial \tau_1} C_{uuu}^f(\tau_1, \tau_2) \quad \dots \quad \frac{\partial^{n_b}}{\partial \tau_1^{n_b}} C_{uuu}^f(\tau_1, \tau_2) \right]$$

On choisit le critère quadratique suivant

$$J(\tau_2, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{M} \sum_{\tau_1=0}^{M-1} \frac{1}{2} e(\tau_1, \tau_2, \boldsymbol{\theta})^2 \quad (18)$$

où M est un hyper-paramètre à choisir. Spécifiant $\tau_2 = 0$ et minimisant $J(\tau_2, \boldsymbol{\theta})$ on obtient

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(M) = \left[\frac{1}{M} \sum_{\tau_1=0}^{M-1} \Phi(\tau_1, \tau_2) \Phi^T(\tau_1, \tau_2) \right]^{-1} \\ \left[\frac{1}{M} \sum_{\tau_1=0}^{M-1} \Phi(\tau_1, \tau_2) \frac{\partial^{n_a}}{\partial \tau_1^{n_a}} C_{uyu}^f(\tau_1, \tau_2) \right] \quad (19)$$

REMARQUE 2

Bien que d'autres critères soient possibles, notamment

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{M^2} \sum_{\tau_1=0}^{M-1} \sum_{\tau_2=0}^{M-1} \frac{1}{2} e(\tau_1, \tau_2, \boldsymbol{\theta})^2$$

On ne s'intéresse dans cet article qu'au critère (18). \square

Après l'étape d'initialisation, l'algorithme itératif d'identification peut se résumer ainsi

1. Calcul des cumulants filtrés C_{uuu}^f et C_{uyu}^f et de leurs dérivées à partir des données et l'estimée du vecteur des paramètres $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i(M)$ obtenue à l'itération précédente;
2. Calcul de la nouvelle estimée $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1}(M)$ du vecteur des paramètres par (19);
3. Répéter les étapes 1. et 2. jusqu'à convergence.

V. MISE EN ŒUVRE DE L'ALGORITHME

Une estimation du cumulants d'ordre 3 à l'aide de N données disponibles peut être obtenue par

$$\hat{C}_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(t_k) x(t_k + \tau_1) x(t_k + \tau_2) \quad (20)$$

La mise en œuvre de l'estimateur fondé sur les statistiques d'ordre supérieur présenté dans la partie précédente nécessite de discuter trois points importants.

A. Calcul des cumulants filtrés et leurs dérivées

Les cumulants filtrés C_{uuu}^f et C_{uyu}^f se sont pas calculés par filtrage des cumulants eux-mêmes, mais par calcul à partir des signaux d'entrée/sortie filtrés. En effet, si l'on applique un filtre linéaire $F_m(p)$ à un cumulants, la propriété de multilinéarité P1 permet d'écrire

$$C_{xxx}^f(\tau_1, \tau_2) = F_m(p) C_{xxx}(\tau_1, \tau_2) = C_{xxfx}(\tau_1, \tau_2) \quad (21)$$

Les dérivées du cumulants filtrés sont données par

$$\frac{\partial^m}{\partial \tau_1^m} C_{xxx}^f(\tau_1, \tau_2) = \frac{\partial^m}{\partial \tau_1^m} C_{xxfx}(\tau_1, \tau_2) \quad (22)$$

$$= \frac{\partial^m}{\partial \tau_1^m} E[x(t_k) x^f(t_k + \tau_1) x(t_k + \tau_2)] \quad (23)$$

$$= E \left[x(t_k) \left(\frac{\partial^m}{\partial \tau_1^m} x^f(t_k + \tau_1) \right) x(t_k + \tau_2) \right] \quad (24)$$

Les dérivées des signaux filtrés apparaissant ci-dessus seront obtenues en sortie d'un banc de filtres

$$\frac{\partial^m}{\partial \tau_1^m} x^f(t + \tau_1) = f_m(t) * x(t + \tau_1) \quad (25)$$

où $*$ représente l'opérateur de convolution et

$$f_m(t) = \mathcal{L}^{-1} [F_m(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^m}{A(s)} \right] \quad (26)$$

où \mathcal{L} symbolise la transformée de Laplace. On ramène donc le filtrage des cumulants au filtrage des signaux d'entrée/sortie, cadre bien connu de l'identification de modèles à temps continu par les méthodes de l'erreur d'équation [3].

B. Initialisation de l'algorithme

Pour initialiser l'algorithme et déterminer $\hat{A}_1(p)$, on aura recours au filtre traditionnel des variables d'état [3] : les dérivées des signaux d'entrée/sortie seront obtenues en passant ces signaux par le banc de filtres suivant

$$F_m(s) = s^m \left(\frac{\alpha}{s + \alpha} \right)^{n_a} \quad 1 \leq m \leq n_a \quad (27)$$

où α est un hyper-paramètre représentant la pulsation de coupure du filtre et doit être choisi en fonction de la bande fréquentielle d'intérêt.

Pour les itérations suivantes on disposera d'une estimée $\hat{\theta}_i$, et il sera donc possible d'utiliser

$$F_m(s) = \frac{s^m}{\hat{A}_i(p)} \quad 1 \leq m \leq n_a \quad (28)$$

C. Choix de l'hyper-paramètre M

Il n'y a pas de règle pour fixer cet hyper-paramètre [13], ou du moins reste-t-elle à déterminer : il est fixé de manière empirique. Une étude de son influence est réalisée dans l'exemple de simulation qui suit.

VI. EXEMPLE DE SIMULATION

On considère le système du second ordre suivant

$$G(p) = \frac{3}{p^2 + 4p + 3} \quad (29)$$

Le signal d'entrée non bruité u_0 est un bruit blanc exponentiel de paramètre $\lambda = 1$: on a donc $E[u_0^3(t_k)] = 2$. L'hypothèse H2 de non nullité du cumulante d'ordre 3 est vérifiée.

S'inspirant des conditions de simulation de l'article [13], on définit les bruits corrompant les signaux d'entrée/sortie comme suit :

– en entrée :

$$\tilde{u}(t_k) = (1 - 2.33q^{-1} + 0.75q^{-2} + 0.5q^{-3} + 0.3q^{-4} - 1.4q^{-5}) e(t_k) \quad (30)$$

où $e(t_k)$ est un bruit blanc gaussien de variance unité et q désigne l'opérateur avance ;

– en sortie :

$$\tilde{y}(t_k) = (1 + 0.2q^{-1} - 0.3q^{-2} + 0.4q^{-3}) \tilde{u}(t_k) \quad (31)$$

Les bruits en entrée et en sortie sont donc *colorés* et *corrélés*. Dans de telles conditions, on sait que le système n'est pas identifiable par des méthodes fondées sur les moments de second ordre [24].

La période d'échantillonnage est fixée à $T_e = 0.1s$.

A. Influence de l'hyper-paramètre M

Dans un premier temps, étudions l'influence de l'hyper-paramètre M sur la qualité des estimées. Pour ce faire, l'algorithme proposé a été utilisé pour identifier le système (29), avec des valeurs de M comprises entre 5 et 50. Une simulation de Monte Carlo de $n_{mc} = 200$ réalisations a été effectuée. Le rapport signal sur bruit (RSB) a été fixé à 5 dB en entrée comme en sortie, et le nombre de données

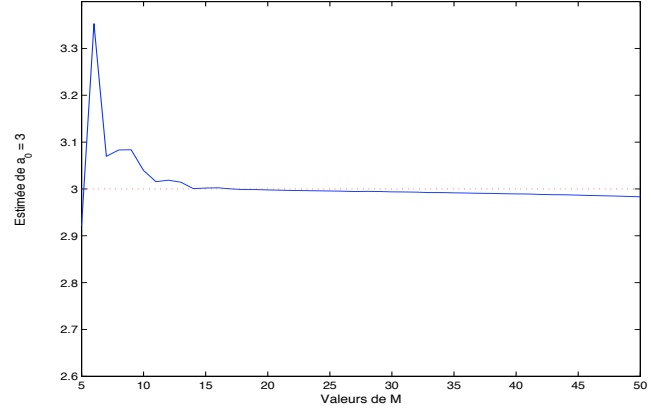


Fig. 2. Evolution de la moyenne de l'estimée de a_0 en fonction de M

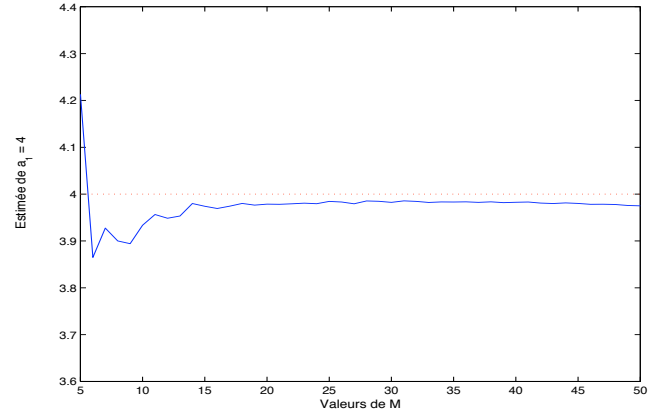


Fig. 3. Evolution de la moyenne de l'estimée de a_1 en fonction de M

disponibles a été fixé à $N = 5000$. Sur les figures 2, 3 et 4 est représentée l'évolution de la moyenne des estimées des trois paramètres en fonction des valeurs de M .

Les remarques suivantes peuvent être formulées

- choisir M trop petit nuit (logiquement) à la qualité des estimées ;
- à partir d'un certain moment, lorsque M augmente un biais apparaît qui va s'augmentant lui aussi.

Les "meilleures" valeurs de M dépendent du système et des conditions expérimentales (type du signal d'entrée, des signaux de bruit, RSB, etc) d'une manière qui reste encore à déterminer. Néanmoins, pour cet exemple, la plage de

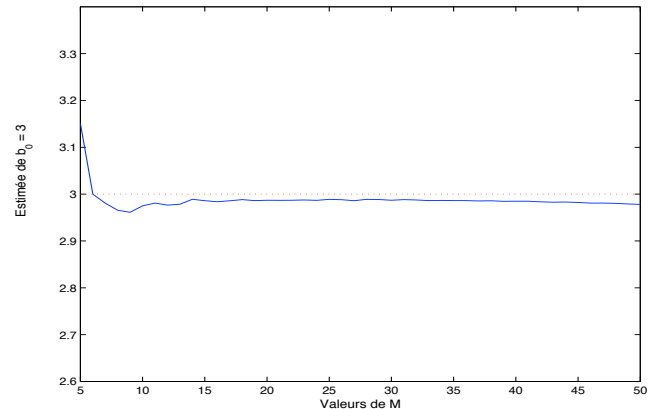


Fig. 4. Evolution de la moyenne de l'estimée de b_0 en fonction de M

valeurs à conseiller est $15 \leq M \leq 25$.

Dans le comparatif qui suit, nous avons donc utilisé l'algorithme avec trois valeurs de M différentes, à savoir 15, 20 et 25.

B. Analyse comparative des performances

Nous allons maintenant comparer les performances de l'algorithme proposé, baptisé **csmhos** (pour *Continuous-time Steiglitz-McBride algorithm with Higher Order Statistics*), avec celles des méthodes **srivc** (*Simplified Refined Instrumental Variable for Continuous-time models*) et **ivsvf** (*Instrumental Variable based State Variable Filter*), toutes deux disponibles au sein de la boîte à outils CONTSID [7]. Bien que ces méthodes ne soient pas spécifiquement développées pour prendre en compte le fait que le signal d'entrée soit bruité, elles ont fait preuve (notamment la méthode **srivc**) d'une certaine robustesse vis-à-vis de ces perturbations. L'étape de filtrage inhérente à ces deux méthodes peut expliquer cette robustesse : le filtrage des signaux est connu comme un moyen d'améliorer l'efficacité statistique des estimateurs [1]. En effet, le filtre permet de spécifier la plage fréquentielle dans laquelle on recherche l'adéquation entre le système et le modèle, et doit ainsi correspondre au mieux à celle du système à identifier.

Une autre simulation de Monte Carlo de $n_{mc} = 200$ réalisations a été effectuée, les bruits perturbant l'entrée et la sortie étant définis de la même manière qu'auparavant. La table I contient, pour un RSB de 5 dB en entrée et en sortie, les moyennes et les écarts-types des paramètres estimés, ainsi que l'erreur quadratique moyenne sur les paramètres, définie par

$$\text{EQM} \triangleq \frac{1}{n_{mc}} \sum_{j=1}^{n_{mc}} \|\hat{\theta}^j - \theta\|_2 \quad (32)$$

où $\|\cdot\|_2$ représente la norme euclidienne et $\hat{\theta}^j$ l'estimée obtenue à la j^{e} réalisation de la simulation de Monte Carlo.

| Méthode | M | $a_1 = 4$ | $a_0 = 3$ | $b_0 = 3$ | EQM |
|---------------|-----|----------------------|----------------------|----------------------|-----|
| ivsvf | — | 3.531 ± 0.092 | 2.713 ± 0.057 | 2.488 ± 0.057 | 75% |
| srivc | — | 3.726 ± 0.084 | 2.832 ± 0.050 | 2.700 ± 0.050 | 44% |
| csmhos | 15 | 3.976 ± 0.222 | 3.007 ± 0.095 | 2.984 ± 0.127 | 23% |
| | 20 | 3.994 ± 0.177 | 2.999 ± 0.083 | 2.991 ± 0.112 | 19% |
| | 25 | 3.990 ± 0.153 | 2.997 ± 0.083 | 2.988 ± 0.101 | 17% |

TABLE I

RÉSULTATS DE LA SIMULATION POUR RSB=5dB

La table I nous révèle plusieurs choses : tout d'abord elle confirme la robustesse de la méthode **srivc** et dans une moindre mesure celle de la méthode **ivsvf** face au bruit entachant l'entrée du système, puisque leurs estimées restent acceptables alors que le RSB en entrée est de 5 dB.

Ensuite, on constate que l'algorithme proposé permet une nette amélioration au niveau de la moyenne des estimées : alors que les méthodes **srivc** et **ivsvf** exhibent un biais apparent, la méthode **csmhos** fournit quant à elle des estimées très proches des vraies valeurs.

Toutefois, ce gain de précision se fait au détriment de la variance sur les estimées : il est bien connu que les estimateurs fondés sur les statistiques d'ordre supérieur délivrent une plus grande variance que ceux fondés sur les statistiques de second ordre. Cela se voit confirmé : la variance sur les paramètres estimés par **csmhos** est en moyenne deux fois plus grande que celle délivrée par **srivc** et **ivsvf**.

Enfin, si l'on désire comparer les performances de l'algorithme **csmhos** suivant les trois valeurs de M choisies, il ne faut pas se laisser abuser par les valeurs de l'EQM : le fait qu'elle diminue à mesure que M augmente ne fait que traduire que la variance sur les estimées diminue elle aussi à mesure que M augmente. Le biais sur les estimées augmente lui aussi, si bien que les meilleurs résultats ont été obtenus dans ce cas pour $M = 20$.

Afin de mettre en exergue les bonnes performances de la méthode proposée, une dernière simulation a été réalisée, pour laquelle le RSB en entrée et en sortie a été diminué jusqu'à -1 dB. Les résultats de cette simulation ont pour écrien la table II. On voit qu'aucune des méthodes **ivsvf** et **srivc** ne fournit de résultat convenables tandis que la méthode proposée fournit encore des résultats acceptables en terme de biais et de variance.

| Méthode | M | $a_1 = 4$ | $a_0 = 3$ | $b_0 = 3$ | EQM |
|---------------|-----|----------------------|----------------------|----------------------|------|
| ivsvf | — | 2.280 ± 0.169 | 1.749 ± 0.109 | 1.158 ± 0.105 | 281% |
| srivc | — | 3.527 ± 2.150 | 2.696 ± 1.078 | 2.269 ± 1.159 | 144% |
| csmhos | 15 | 3.784 ± 0.536 | 2.986 ± 0.255 | 2.894 ± 0.332 | 64% |
| | 20 | 3.850 ± 0.440 | 2.946 ± 0.223 | 2.916 ± 0.302 | 52% |
| | 25 | 3.835 ± 0.398 | 2.930 ± 0.219 | 2.901 ± 0.280 | 49% |

TABLE II

RÉSULTATS DE LA SIMULATION POUR RSB=-1dB

VII. CONCLUSION

Une méthode pour l'identification de modèles à temps continu dans un contexte erreurs-en-les-variables a été proposée dans cet article. La méthode de Steiglitz-McBride a été utilisée en conjonction avec les statistiques d'ordre supérieur, aboutissant à un algorithme simple utilisant la méthode des moindres carrés et les techniques qui en sont dérivées. Sous certaines conditions sur le signal d'entrée et sur les bruits perturbant les signaux d'entrée/sortie, l'estimateur proposé est consistant. Une simulation numérique a permis de confirmer les résultats théoriques.

APPENDIX

I. PREUVE DE LA PROPOSITION

Notons $g(t)$ la réponse impulsionnelle du système (1). Le cumulants croisés d'ordre 3 entre les signaux d'entrée/sortie mesurés $u(t)$ et $y(t)$ s'écrit

$$C_{uyu}(\tau_1, \tau_2) = C_{u_0y_0u_0}(\tau_1, \tau_2) \quad (33)$$

$$= Cum[u_0(t), y_0(t + \tau_1), u_0(t + \tau_2)] \quad (34)$$

$$= E\left[u_0(t) \left(\int_{\mathbb{R}} g(\tau) u_0(t + \tau_1 - \tau) d\tau \right) u_0(t + \tau_2) \right] \quad (35)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u_0(t) g(\tau) u_0(t + \tau_1 - \tau) u_0(t + \tau_2) d\tau \right) dt \quad (36)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(\tau) \left(\int_{\mathbb{R}} u_0(t) u_0(t + \tau_1 - \tau) u_0(t + \tau_2) dt \right) d\tau \quad (37)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(\tau) E[u_0(t) u_0(t + \tau_1 - \tau) u_0(t + \tau_2)] d\tau \quad (38)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(\tau) C_{u_0u_0u_0}(\tau_1 - \tau, \tau_2) d\tau \quad (39)$$

$$= \frac{B(p)}{A(p)} C_{u_0u_0u_0}(\tau_1, \tau_2) \quad (40)$$

$$= \frac{B(p)}{A(p)} C_{uuu}(\tau_1, \tau_2) \quad (41)$$

L'interversion des intégrales entre (36) et (37) se justifie par le théorème de Fubini.

RÉFÉRENCES

[1] L. Ljung. *System Identification : Theory for the User*. Prentice Hall, 2nd edition, 1999.

[2] Rao G.P. et H. Garnier. Numerical illustrations of the relevance of direct continuous-time model identification. *15th IFAC World Congress on Automatic Control*, Barcelona, Spain, July 2002.

[3] H. Garnier, M. Mensler, et A. Richard. Continuous-time model identification from sampled data. Implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, 76(13) :1337–1357, 2003.

[4] L. Ljung. Initialisation aspects for subspace and output–error identification methods. *European Control Conference*, Cambridge - UK, 2003.

[5] M. Fliess et H. Sira-Ramírez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, 9 :151–168, 2003.

[6] J.C. Trigeassou et T. Poinot. *Identification des systèmes*, chapitre Identification des systèmes à représentation continue, pages 177–212. Hermes, I.D. Landau and A. Besançon-Voda edition, 2001.

[7] H. Garnier, M. Gilson, et E. Huselstein. Developments for the matlab CONTSID toolbox. *13th IFAC Symposium on System Identification*, pages 1007–1012, Rotterdam - Netherlands, 2003.

[8] T. Söderström, U. Soverini, et K. Mahata. Perspectives on errors-in-variables estimation for dynamic systems. *Signal Processing*, 82 :1139–1154, 2002.

[9] S. Van Huffel. *Total least squares and errors-in-variables modeling*. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[10] K. Mahata. *Identification of dynamic errors-in-variables models*. Licentiate thesis, Uppsala University, 2002.

[11] W.X. Zheng. A bias correction method for identification of linear dynamic errors-in-variables models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7) :1142–1147, July 2002.

[12] S. Thil, M. Gilson, et H. Garnier. Méthodes de compensation de biais pour l'identification de modèles erreurs-en-les-variables. *JDMACS 2005*, Septembre 2005.

[13] A. Delopoulos et G.B. Giannakis. Consistent identification of stochastic linear systems with noisy input-output data. *Automatica*, 30(8) :1271–1294, 1994.

[14] J.K. Tugnait. Stochastic system identification with noisy input using cumulant statistics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(4) :476–485, April 1992.

[15] M. Deistler et B.D.O. Anderson. Linear dynamic errors-in-variables models. *Journal of Econometrics*, 41 :39–63, 1989.

[16] K. Mahata et H. Garnier. Direct identification of continuous-time errors-in-variables models. *16th World Congress of the IFAC*, Prague, Czech Republic, July 2005.

[17] J.M.M. Anderson et G.B. Giannakis. Noisy input/output system identification using cumulants and the Steiglitz-McBride algorithm. *25th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, CA, October 1991.

[18] J.M.M. Anderson et G.B. Giannakis. Noisy input/output system identification using cumulants and the Steiglitz-McBride algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(2) :407–409, May 1996.

[19] J.M.M. Anderson et W. Edmondson. System identification with noisy input/output data using cumulant-based Steiglitz-McBride algorithm. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing*, 44(5) :1021–1024, February 1997.

[20] K. Steiglitz et L.E. McBride. A technique for the identification of linear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(10) :2386–2397, October 1965.

[21] J.-L. Lacoume, P.-O. Amblard, et P. Comon. *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*. Masson, 1997.

[22] D.R. Brillinger. *Time Series, Data Analysis and Theory*. Holden Day, 1981.

[23] E. Walter et L. Pronzato. *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson, 1994.

[24] B.D.O. Anderson et M. Deistler. Identifiability in dynamic errors-in-variables models. *Journal of Time Series Analysis*, 5(1) :1–13, 1984.