



HAL
open science

Stabilité d'une évolution visco-élastique ou visco-plastique

Farid Abed-Meraim

► **To cite this version:**

Farid Abed-Meraim. Stabilité d'une évolution visco-élastique ou visco-plastique. 14e Congrès Français de Mécanique, 1999, Toulouse, France. hal-00117835

HAL Id: hal-00117835

<https://hal.science/hal-00117835v1>

Submitted on 22 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

STABILITÉ D'UNE ÉVOLUTION VISCO-ÉLASTIQUE OU VISCO-PLASTIQUE

Farid ABED MERAÏM

Laboratoire de Mécanique des Solides, UMR CNRS 7649,
École Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex

RÉSUMÉ

L'étude de la stabilité d'une évolution quasi-statique visco-élastique ou visco-plastique est proposée. Cette stabilité au sens des trajectoires est moins classique que celle relative aux équilibres et conduit à des problèmes complexes car non autonomes. Dans le cas d'un potentiel de dissipation quadratique, on montre que la définie positivité de la seconde variation de l'énergie libre totale du système assure l'uniforme et asymptotique stabilité de son évolution. Cette condition suffisante de stabilité sera comparée au critère de non-bifurcation de Hill.

ABSTRACT

We propose to study the stability of a quasi-static visco-elastic or visco-plastic evolution. This stability in the sense of trajectory is less standard than the one relative to equilibrium points and it leads to complex problems because of the non-autonomous character. In the case of a quadratic dissipation potential, we show that the positive definite property of the second order derivative of the total free energy of the system insures the uniform and asymptotic stability of its evolution. This sufficient condition of stability will be compared to Hill's non-bifurcation criterion.

MOTS CLÉS : STABILITÉ / BIFURCATION / VISCO-ÉLASTICITÉ / VISCO-PLASTICITÉ

I. INTRODUCTION

Dans le cadre des matériaux indépendants du temps physique, plusieurs études de stabilité des états d'équilibre d'un solide ont été menées (Hill, 1958 ; Nguyen et Radenkovic, 1975). Cependant, notre approche de stabilité concernant les solides dépendants de la vitesse de déformation est différente. En effet, l'absence d'équilibre pour ces solides visqueux nous amène à étudier la stabilité de leurs évolutions quasi-statiques (Abed Meraim, 1999a, 1999b). Notre approche se distingue des autres études sur le sujet par sa capacité à répondre au problème de stabilité du système réel, non linéaire, et pas simplement du système linéarisé. De plus, l'originalité de ce travail tient au fait qu'il prend en compte le caractère non autonome du problème, et fait clairement le lien avec les procédures mathématiques habituelles de linéarisation des équations différentielles non autonomes.

II. SOLIDES VISCO-ÉLASTIQUES EN TRANSFORMATION FINIE

1. Équations d'évolution

On considère un solide visqueux quelconque en transformation finie. L'adoption du formalisme des matériaux standard généralisés (Halphen et Nguyen, 1975) nous permettra d'identifier automatiquement les variables internes spécifiques à notre étude et d'écrire leur loi d'évolution. L'énergie libre volumique $w(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ du solide traduit son comportement réversible et fournit les relations d'état donnant les forces thermodynamiques associées aux variables d'état :

$$\mathbf{b}^R = w_{,\nabla \mathbf{u}} \quad , \quad \mathbf{A} = -w_{,\boldsymbol{\alpha}} \quad (1)$$

où $\nabla \mathbf{u}$ désigne le gradient lagrangien du déplacement et $\boldsymbol{\alpha}$ représente les variables internes (déformations visco-élastiques ou visco-plastiques). La donnée du potentiel local de dissipation $D(\nabla \dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ détermine complètement le comportement du solide par les lois complémentaires :

$$\mathbf{b}^{IR} = D_{,\nabla \dot{\mathbf{u}}} \quad , \quad \mathbf{A} = D_{,\dot{\boldsymbol{\alpha}}} \quad (2)$$

Ces dernières relations définissent le comportement irréversible du solide en reliant les forces thermodynamiques aux flux des variables dissipatives. En description lagrangienne, l'équilibre du solide sous l'effet de forces volumiques $\mathbf{F}(\lambda)$ et surfaciques $\mathbf{T}(\lambda)$, sur la partie ∂V_T de sa frontière, est donné par le principe des travaux virtuels :

$$\int_V \mathbf{b} : \nabla \delta \mathbf{u} \, dv = \int_V \mathbf{F}(\lambda) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_{\partial V_T} \mathbf{T}(\lambda) \cdot \delta \mathbf{u} \, ds \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3)$$

où $\mathbf{b} = \mathbf{b}^R + \mathbf{b}^{IR}$ est la décomposition du tenseur des contraintes de Boussinesq en parties réversible et irréversible ; $\lambda \in [0, \lambda_M]$ désigne un paramètre de contrôle. Par combinaison des équations (1), (2) et (3), l'évolution du solide peut se mettre sous la forme globale condensée :

$$(\mathbb{W}_{,q} + \mathbb{D}_{,\dot{q}})(\delta \mathbf{q}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (4)$$

dans laquelle on a adopté la notation : $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$, $\mathbb{W}(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda) = \mathbb{W}(\mathbf{q}, \lambda)$ et $\mathbb{D}(\nabla \dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbb{D}(\dot{\mathbf{q}})$. L'énergie potentielle totale $\mathbb{W}(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda)$ du système (fonction du potentiel global d'énergie libre $W(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha})$ et du potentiel des efforts extérieurs $W_{ext}(\mathbf{u}, \lambda)$), ainsi que son potentiel global de dissipation $\mathbb{D}(\nabla \dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$ sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{W}(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}, \lambda) = W(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) - W_{ext}(\mathbf{u}, \lambda) \\ W(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) = \int_V w(\nabla \mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}) \, dv \\ W_{ext}(\mathbf{u}, \lambda) = \int_V \mathbf{F}(\lambda) \cdot \mathbf{u} \, dv + \int_{\partial V_T} \mathbf{T}(\lambda) \cdot \mathbf{u} \, ds \\ \mathbb{D}(\nabla \dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) = \int_V D(\nabla \dot{\mathbf{u}}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \, dv \end{array} \right.$$

En résumé, la formulation globale de l'évolution quasi-statique d'un solide visqueux nous a conduit à l'équation différentielle globale non autonome :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{W}_{,q} + \mathbb{D}_{,\dot{q}})(\delta \mathbf{q}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \end{array} \right. \quad (5)$$

Pour un trajet de charge $\lambda(t) \in [0, \lambda_M]$, la résolution de l'équation différentielle (5) nous fournit une évolution quasi-statique $\mathbf{q}(t) = (\mathbf{u}(t), \boldsymbol{\alpha}(t))$, $t \geq 0$. Dans la suite, on notera par $\mathbf{q}^0(t) = (\mathbf{u}^0(t), \boldsymbol{\alpha}^0(t))$ l'évolution fondamentale dont l'étude de stabilité est en question.

2. Analyse de stabilité

À partir d'un instant arbitraire t_0 , la trajectoire fondamentale $\mathbf{q}^0(t)$ est modifiée par l'introduction d'une légère perturbation $\mathbf{q}^*(t_0)$. Soit $\mathbf{q}^*(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}^0(t)$, $t \geq t_0$, l'écart par rapport à la solution fondamentale. La linéarisation de l'équation différentielle (5) autour de cette solution fondamentale $\mathbf{q}^0(t)$ conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{W}_{,qq} [\delta \mathbf{q}, \mathbf{q}^*] + \mathbb{D}_{,\dot{q}\dot{q}} [\delta \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^*] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \\ \mathbb{W}_{,qq} [\delta \mathbf{q}, \mathbf{q}^*] = \int_V \left[\begin{array}{l} \nabla \delta \mathbf{u} : (w_{,\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}} : \nabla \mathbf{u}^* + w_{,\nabla \mathbf{u} \alpha} : \alpha^*) + \\ \delta \alpha : (w_{,\alpha \nabla \mathbf{u}} : \nabla \mathbf{u}^* + w_{,\alpha \alpha} : \alpha^*) \end{array} \right] dv \\ \mathbb{D}_{,\dot{q}\dot{q}} [\delta \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^*] = \int_V \left[\begin{array}{l} \nabla \delta \mathbf{u} : (D_{,\nabla \dot{\mathbf{u}} \nabla \dot{\mathbf{u}}} : \nabla \dot{\mathbf{u}}^* + D_{,\nabla \dot{\mathbf{u}} \dot{\alpha}} : \dot{\alpha}^*) + \\ \delta \alpha : (D_{,\dot{\alpha} \nabla \dot{\mathbf{u}}} : \nabla \dot{\mathbf{u}}^* + D_{,\dot{\alpha} \dot{\alpha}} : \dot{\alpha}^*) \end{array} \right] dv \end{array} \right. \quad (6)$$

On peut remarquer que la seconde variation de l'énergie potentielle totale $\mathbb{W}_{,qq} [\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{q}]$ s'identifie ici à la variation seconde du potentiel global d'énergie libre. De plus, la positivité stricte de la variation seconde du potentiel de dissipation, supposé convexe par rapport à $\dot{\mathbf{q}} = (\nabla \dot{\mathbf{u}}, \dot{\alpha})$, se traduit par :

$$\mathbb{D}_{,\dot{q}\dot{q}} [\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{q}] \geq c_1 \|\delta \mathbf{q}\|^2 \quad , \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad , \quad (c_1 > 0)$$

Lorsque le potentiel de dissipation $D(\nabla \dot{\mathbf{u}}, \dot{\alpha})$ est quadratique par rapport à $\dot{\mathbf{q}} = (\nabla \dot{\mathbf{u}}, \dot{\alpha})$ (cadre des matériaux visco-élastiques), alors la forme bilinéaire $\mathbb{D}_{,\dot{q}\dot{q}} [\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{q}]$ est indépendante du temps t . Dans ces conditions, on obtient le résultat suivant (Abed Meraim, 1999a, 1999b) :

Pour un potentiel de dissipation quadratique, la définie positivité de la seconde variation de l'énergie potentielle totale du système, $(\mathbb{W}_{,qq}(\mathbf{q}^0(t), \lambda) [\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{q}] \geq c_2 \|\delta \mathbf{q}\|^2, \forall \delta \mathbf{q}, c_2 > 0)$, en tout point de l'évolution, assure l'uniforme et asymptotique stabilité de cette évolution $\mathbf{q}^0(t)$.

Notons que lorsque la déformation $\mathbf{e}(\nabla \mathbf{u})$ est le seul mécanisme dissipatif (cas du modèle visco-élastique de Kelvin), la condition de stabilité précédente s'identifie à la condition de stabilité élastique. Dans ce cas, l'évolution $\mathbf{q}^0(t)$ est uniformément et asymptotiquement stable si la condition de stabilité élastique est satisfaite aux points courants de cette évolution.

3. Critère du module élastique limite

La condition suffisante de stabilité uniforme et asymptotique, ci-dessus établie, porte sur la définie positivité de la seconde variation de l'énergie libre totale écrite par blocs ci-après :

$$\mathbb{W}_{,qq} [\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{q}] = \ll \left[\begin{array}{l} \nabla \delta \mathbf{u} \\ \delta \alpha \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc} w_{,\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}} & w_{,\nabla \mathbf{u} \alpha} \\ w_{,\alpha \nabla \mathbf{u}} & w_{,\alpha \alpha} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} \nabla \delta \mathbf{u} \\ \delta \alpha \end{array} \right] \gg \quad (7)$$

Cette condition de stabilité (7) peut s'écrire sous d'autres formes équivalentes. Par exemple, sous la condition de stabilité élastique ($\mathbb{W}_{,uu} [\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}] \geq c \|\delta \mathbf{u}\|^2, \forall \delta \mathbf{u}, c > 0$), la définie positivité de $\mathbb{W}_{,qq} [\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{q}]$ est équivalente à la définie positivité de la forme quadratique suivante :

$$\mathbb{W}_{,\alpha\alpha}^r [\delta \alpha, \delta \alpha] = (\mathbb{W}_{,\alpha\alpha} - \mathbb{W}_{,\alpha \nabla \mathbf{u}} \cdot \mathbb{W}_{,\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}}^{-1} \cdot \mathbb{W}_{,\nabla \mathbf{u} \alpha}) [\delta \alpha, \delta \alpha] \quad (8)$$

où l'on reconnaît la variation seconde de l'énergie réduite obtenue par élimination de la variable \mathbf{u} . On peut également éliminer la variable α , puisque $\delta \alpha : w_{,\alpha\alpha} : \delta \alpha$ est strictement positive, pour écrire cette condition de stabilité sous la forme équivalente de la définie positivité de :

$$\mathbb{I}(\delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \nabla \delta \mathbf{u} : (w_{,\nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u}} - w_{,\nabla \mathbf{u} \alpha} : w_{,\alpha\alpha}^{-1} : w_{,\alpha \nabla \mathbf{u}}) : \nabla \delta \mathbf{u} dv \quad (9)$$

Cette forme quadratique $\mathbb{I}(\delta \mathbf{u})$ est appelée fonctionnelle élastique limite (Abed Meraim, 1999a, 1999b). En effet, elle correspond à un comportement élastique non linéaire particulier. Ce comportement incrémental est obtenu en écrivant la nullité des vitesses des forces irréversibles, $\dot{\mathbf{b}}^{IR}$ et $\dot{\mathbf{A}}$, conduisant au module élastique limite :

$$\dot{\mathbf{b}} = (w, \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{u}} - w, \nabla_{\mathbf{u}} \alpha : w, \alpha \nabla_{\mathbf{u}}) : \nabla \dot{\mathbf{u}}$$

Pour un solide visqueux à écrouissage cinématique de module h et à élasticité isotrope, la fonctionnelle $\mathbb{I}(\delta \mathbf{u})$ et le module élastique limite s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{I}(\delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V [\delta \mathbf{e} : (w, e e - w, e \alpha : w, \alpha \alpha) : \delta \mathbf{e} + \boldsymbol{\pi} : \nabla^T \delta \mathbf{u} \cdot \nabla \delta \mathbf{u}] dv \\ \dot{\boldsymbol{\pi}} = (w, e e - w, e \alpha : w, \alpha \alpha) : \dot{\mathbf{e}} \end{array} \right.$$

où $\boldsymbol{\pi}$ et \mathbf{e} désignent respectivement le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et la déformation non linéaire de Green-Lagrange. Si l'on adopte pour densité d'énergie libre :

$$\left\{ \begin{array}{l} w(\mathbf{e}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} (\mathbf{e} - \boldsymbol{\alpha}) : \mathbf{E} : (\mathbf{e} - \boldsymbol{\alpha}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} : \mathbf{h} : \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{E} = \lambda \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 + 2\mu \mathbf{I}_4, \quad \mathbf{h} = h \mathbf{I}_4 \end{array} \right.$$

avec λ : constante de Lamé, μ : module de cisaillement, alors le module élastique limite s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\pi}} = \frac{h}{G+h} [\lambda (\text{tr } \dot{\mathbf{e}}) \mathbf{I}_2 + 2\mu \dot{\mathbf{e}}] = \frac{h}{2\mu+h} \mathbf{E} : \dot{\mathbf{e}}$$

Avec les notations : $\mathbf{E}^L = \frac{h}{2\mu+h} \mathbf{E}$, $R_{ijkl} = \pi_{jk} \delta_{il}$, la fonctionnelle élastique limite s'écrit :

$$\mathbb{I}(\delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \nabla \delta \mathbf{u} : [(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}^L \cdot (\nabla^T \mathbf{u} + \mathbf{I}) + \mathbf{R}] : \nabla^T \delta \mathbf{u} dv$$

Si la solution fondamentale vérifie : $\|\nabla \mathbf{u}^0\| \ll 1$, alors cette fonctionnelle $\mathbb{I}(\delta \mathbf{u})$ devient :

$$\mathbb{I}(\delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \nabla \delta \mathbf{u} : (\mathbf{E}^L + \mathbf{S}) : \nabla \delta \mathbf{u} dv$$

où : $S_{ijkl} = \pi_{jl} \delta_{ik}$.

Dans une approche lagrangienne actualisée, cette fonctionnelle élastique se réduit à :

$$\mathbb{I}(\delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{V_t} \text{grad } \delta \mathbf{u} : (\mathbf{E}^L + \mathbf{S}) : \text{grad } \delta \mathbf{u} dv_t = \frac{1}{2} \int_{V_t} \delta u_{i,j} [E_{ijkl}^L + \sigma_{jl} \delta_{ik}] \delta u_{k,l} dv_t$$

Dans cette dernière écriture sur la configuration actuelle V_t , le terme $\delta u_{i,j} = (\text{grad } \delta \mathbf{u})_{ij}$ désigne le gradient eulérien, σ_{ij} est la contrainte de Cauchy.

4. Comparaison avec le critère de non-bifurcation de Hill

On peut remarquer que la condition de stabilité portant sur (7), (8) ou (9), présente une certaine analogie avec la condition de non-bifurcation de Hill (1958). Il suffit pour cela de comparer le module élastique limite donné en (9) avec le module tangent associé au solide élastique de comparaison de Hill. Dans le cas général, la condition de stabilité (7) est plus restrictive que la condition de non-bifurcation de Hill car elle exige la définie positivité sur un espace plus grand de variation des paramètres internes. En effet dans le critère de Hill, la définie positivité de $\mathbb{W}_{,qq}[\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{q}]$ est exigée sur l'ensemble $\delta \mathbf{q} = (\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\alpha}) \in U_d \times \overline{N}_c(\mathbf{A})$. En revanche, dans

le critère de stabilité précédemment établi, l'espace vectoriel $\overline{N}_c(\mathbf{A})$ engendré par le cône des normales extérieures est remplacé par l'espace tout entier. Toutefois, pour des systèmes où l'état de contrainte et de déformation est unidimensionnel, cas des poutres, des modèles rhéologiques ou des monocristaux, la fonctionnelle élastique limite (9) s'identifie au critère de Hill.

III. SOLIDES VISCO-PLASTIQUES EN TRANSFORMATION FINIE

1. Équations d'évolution

On s'intéresse ici au cas où le potentiel de dissipation n'est pas nécessairement quadratique. Cette classe de matériaux visqueux englobe les solides à seuil, comme c'est le cas du modèle de Perzyna, et ceux non linéaires comme pour le modèle de Norton-Hoff. On supposera pour simplifier que la déformation visco-plastique α est le seul mécanisme dissipatif. Les équations d'équilibre et d'évolution écrites au paragraphe II restent valables avec : $D = D(\dot{\alpha})$, $\mathbf{b}^{IR} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{b}^R$. Avec les notations : $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, \alpha)$, $\mathbb{W}(\mathbf{q}, \lambda) = \mathbb{W}(\mathbf{u}, \alpha, \lambda)$ et $\mathbb{D}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbb{D}(\dot{\alpha})$, on obtient comme précédemment la formulation globale du problème d'évolution :

$$\begin{cases} (\mathbb{W}_{,q} + \mathbb{D}_{,\dot{q}})(\delta \mathbf{q}) = 0 & \forall \delta \mathbf{q} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \end{cases}$$

Au lieu de l'équation (2), il est parfois plus pratique d'utiliser le potentiel dual de dissipation $\Omega(\mathbf{A})$, obtenu par la transformation de Legendre-Fenchel, pour écrire l'évolution des paramètres dissipatifs comme :

$$\dot{\alpha} = \Omega_{,A}$$

Dans ce cas, l'évolution quasi-statique du solide peut se mettre de façon équivalente sous la forme de l'équation différentielle globale condensée formée par le système :

$$\begin{cases} \text{Équilibre :} & \mathbb{W}_{,u}(\mathbf{u}, \alpha, \lambda) \cdot \delta \mathbf{u} = 0 & \forall \delta \mathbf{u} \\ \text{Équation d'état :} & \mathbf{A} = -\mathbb{W}_{,\alpha}(\mathbf{u}, \alpha, \lambda) \\ \text{Loi complémentaire :} & \dot{\alpha} = \Omega_{,A}(\mathbf{A}) \\ \text{Donnée initiale :} & \alpha(0) = \alpha_0 \end{cases} \quad (10)$$

On peut écrire cette équation différentielle de façon plus compacte en éliminant la variable \mathbf{u} à partir de l'équilibre et en introduisant l'énergie réduite :

$$\begin{cases} \text{Énergie réduite :} & \mathbb{W}^r(\alpha, \lambda) = \mathbb{W}(\mathbf{u}(\alpha, \lambda), \alpha, \lambda) \\ \text{Équation d'état :} & \mathbf{A} = -\mathbb{W}_{,\alpha}^r(\alpha, \lambda) \\ \text{Loi complémentaire :} & \dot{\alpha} = \Omega_{,A}(\mathbf{A}) \\ \text{Donnée initiale :} & \alpha(0) = \alpha_0 \end{cases} \quad (11)$$

2. Analyse de stabilité

La linéarisation de l'équation différentielle (10) ou (11) autour de la solution fondamentale $\mathbf{q}^0(t)$ donne :

$$\dot{\alpha}^* = -\Omega_{,AA}(\mathbf{A}^0) \cdot \mathbb{W}_{,\alpha\alpha}^r(\alpha^0, \lambda) \cdot \alpha^* \quad (12)$$

où la seconde variation de l'énergie réduite est exprimée en (8). Une condition suffisante de stabilité uniforme et asymptotique de l'évolution est alors donnée par la définie positivité de

la forme $\Omega_{,AA}(\mathbf{A}^0) \cdot \mathbb{W}_{,\alpha\alpha}^r(\boldsymbol{\alpha}^0, \lambda)$. Cette condition de stabilité est plus restrictive que celle portant sur la définie positivité de $\mathbb{W}_{,\alpha\alpha}^r(\boldsymbol{\alpha}^0, \lambda)$ obtenue dans le cas visco-élastique. L'équation linéarisée (12) conduit à la matrice \mathbf{B} écrite par blocs :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} w, \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} & w, \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\alpha} \\ \Omega_{,AA} : w, \alpha \nabla \mathbf{u} & \Omega_{,AA} : w, \alpha \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}$$

La condition suffisante de stabilité, ci-dessus établie, exige alors la définie positivité de la forme quadratique $\mathbf{B}^S[\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{q}]$ dans laquelle \mathbf{B}^S désigne la partie symétrique de \mathbf{B} . Cette condition est aussi équivalente à la définie positivité de la fonctionnelle élastique limite $\mathbb{I}_1(\delta \mathbf{u})$ suivante, lorsque la matrice $(\Omega_{,AA} : w, \alpha \boldsymbol{\alpha} + w, \alpha \boldsymbol{\alpha} : \Omega_{,AA})$ est définie positive :

$$\mathbb{I}_1(\delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \nabla \delta \mathbf{u} : \left[w, \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{2} (w, \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\alpha} + w, \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\alpha} : \Omega_{,AA}) : \right. \\ \left. (\Omega_{,AA} : w, \alpha \boldsymbol{\alpha} + w, \alpha \boldsymbol{\alpha} : \Omega_{,AA})^{-1} : (w, \alpha \nabla \mathbf{u} + \Omega_{,AA} : w, \alpha \nabla \mathbf{u}) \right] : \nabla \delta \mathbf{u} dv$$

Utilisant l'équation linéarisée (6), une autre condition suffisante de stabilité uniforme et asymptotique est déduite. Cette condition exige la définie positivité de la forme quadratique $\left[\mathbb{W}_{,qq} - \frac{d}{dt} \frac{\mathbb{D}_{,q\dot{q}}}{2} \right] (\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{q})$ donnée par blocs ci-après :

$$\ll \begin{bmatrix} \nabla \delta \mathbf{u} \\ \delta \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w, \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} & w, \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\alpha} \\ w, \alpha \nabla \mathbf{u} & w, \alpha \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2} \dot{D}_{,\dot{\alpha}\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla \delta \mathbf{u} \\ \delta \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \gg$$

Lorsque la matrice $\left(w, \alpha \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2} \dot{D}_{,\dot{\alpha}\dot{\alpha}} \right)$ est définie positive, la condition de stabilité ci-dessus est équivalente à la définie positivité de la fonctionnelle élastique limite $\mathbb{I}_2(\delta \mathbf{u})$ suivante :

$$\mathbb{I}_2(\delta \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_V \nabla \delta \mathbf{u} : \left[w, \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} - w, \nabla \mathbf{u} \boldsymbol{\alpha} : \left(w, \alpha \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2} \dot{D}_{,\dot{\alpha}\dot{\alpha}} \right)^{-1} : w, \alpha \nabla \mathbf{u} \right] : \nabla \delta \mathbf{u} dv$$

Dans le cas général, la condition de stabilité portant sur la définie positivité de $\mathbb{I}_1(\delta \mathbf{u})$ est plus restrictive que celle portant sur la définie positivité de la fonctionnelle élastique limite $\mathbb{I}(\delta \mathbf{u})$ trouvée dans le cas visco-élastique.

La condition suffisante de stabilité donnée par la fonctionnelle $\mathbb{I}_2(\delta \mathbf{u})$ montre que pour une faible vitesse de chargement, $\dot{D}_{,\dot{\alpha}\dot{\alpha}}$ devient négligeable devant les autres termes, et l'on retrouve la fonctionnelle $\mathbb{I}(\delta \mathbf{u})$ obtenue pour un potentiel de dissipation quadratique.

RÉFÉRENCES

ABED MERAÏM F. ; 1999, Conditions suffisantes de stabilité pour les solides visqueux, *C. R. Acad. Sci., t. 327, Série II b*, N°(1), pp. 25-31.

ABED MERAÏM F. ; 1999, *Quelques problèmes de stabilité et de bifurcation des solides visqueux*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique.

HALPHEN B., NGUYEN Q.S. ; 1975, Sur les matériaux standard généralisés, *J. de Mécanique*, Vol. 14, N°(1), pp. 39-63.

HILL R. ; 1958, A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. of Mech. Phys. Solids*, Vol. 6, pp. 236-249.

NGUYEN Q.S., RADENKOVIC D. ; 1975, Stability of an equilibrium in elastic plastic solids, *Compte rendu du Symposium IUTAM-IMU*, Marseille.