



**HAL**  
open science

# Surface d'écoulement macroscopique des milieux poreux : Modification du critère de Gurson par une approche micromécanique

Nicolas Bilger, Michel Bornert, François Auslender, André Zaoui, Renaud Masson

## ► To cite this version:

Nicolas Bilger, Michel Bornert, François Auslender, André Zaoui, Renaud Masson. Surface d'écoulement macroscopique des milieux poreux : Modification du critère de Gurson par une approche micromécanique. XVe Congrès Français de Mécanique, Sep 2001, Nancy, France. hal-00117729

**HAL Id: hal-00117729**

**<https://hal.science/hal-00117729>**

Submitted on 15 Dec 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# SURFACE D'ÉCOULEMENT MACROSCOPIQUE DES MILIEUX POREUX : MODIFICATION DU CRITÈRE DE GURSON PAR UNE APPROCHE MICROMÉCANIQUE.

Nicolas BILGER<sup>†‡</sup>, Michel BORNERT<sup>†</sup>, François AUSLENDER<sup>†</sup>, André ZAOUTI<sup>†</sup>, Renaud MASSON<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>Laboratoire de Mécanique des Solides  
Ecole Polytechnique  
91128 Palaiseau Cedex

<sup>‡</sup>Electricité de France Pôle industrie Division Recherche et Développement  
Site des Renardières-Route de Sens  
Ecuelles 77818 Moret sur Loing

## Résumé :

*Les techniques d'homogénéisation développées ces dix dernières années permettent d'établir, par une approche entièrement micromécanique, une borne pour la surface d'écoulement plastique d'un matériau poreux à matrice rigide plastique. Celle-ci est obtenue grâce à la construction d'un composite linéaire de comparaison à l'aide de motifs morphologiques représentatifs. L'application d'une telle démarche à un assemblage de Hashin conduit à une borne pour la fonction seuil de plasticité macroscopique. Nous montrons également l'influence de l'hétérogénéité des porosités locales sur la réponse macroscopique du matériau par une approche autocohérente.*

## Abstract :

*Homogenisation techniques, developed these last ten years, permit us to establish new bounds for the macroscopic yield surface of a porous material with a rigid perfectly plastic matrix. There are obtained by the construction of a linear comparison composite described with morphologically representative patterns. Application to Hashin's composite spheres assemblage leads to a new bound for the macroscopic yield surface. Moreover, the influence of the heterogeneity of the local porosity is established by means of a generalised self consistent approach.*

## Mots clés :

**Milieus poreux, Plasticité, Homogénéisation, Non linéaire, Bornes, Motifs Morphologiques, Méthodes sécantes.**

## 1 Représentation d'un matériau hétérogène par Motifs Morphologiques Représentatifs.

Les méthodes d'homogénéisation permettent de déterminer le comportement macroscopique d'un matériau hétérogène, à partir de la connaissance des caractéristiques mécaniques de chaque phase le constituant et de leur distribution spatiale. Pour les composites avec une phase matrice continue et des renforts ou des pores sphériques, Z. Hashin (1962) propose de représenter la microstructure d'un matériau hétérogène par un assemblage de sphères composites homothétiques de même fraction volumique (Figure 1). Pour encadrer les caractéristiques mécaniques homogénéisées d'un tel matériau,  $k^{hom}$  et  $\mu^{hom}$ , il construit des champs admissibles pour les théorèmes variationnels classiques en appliquant des conditions aux limites en déformations homogènes ou en contraintes homogènes au bord de chaque sphère composite. Il est ainsi amené à traiter le problème d'une sphère creuse soumise à des conditions de déformations ou de contraintes homogènes au bord.

Néanmoins, un tel assemblage de sphères composites ne permet pas de décrire la microstructure d'un matériau hétérogène dont les fractions volumiques locales peuvent fluctuer. Pour ce faire, nous avons recours à l'analyse par Motifs Morphologiques Représentatifs (M.M.R.) développée par C. Stolz et A. Zaoui (1991). L'analyse par M.M.R. consiste à remplir tout l'espace occupé par un V.E.R. de volume  $V$  par un assemblage de motifs dont la géométrie rappelle les éléments morphologiques essentiels de la microstructure. Dans notre cas, il s'agit de sphères composites similaires à celles de Hashin, mais contrairement au modèle de ce dernier, toutes les sphères composites n'ont pas forcément la même fraction volumique. On peut ainsi prendre en compte les fluctuations locales de porosité (Figure 2). Le V.E.R. est ainsi décrit par un nombre

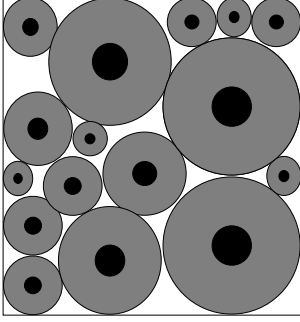


FIG. 1 – Assemblage des sphères composites de Hashin.

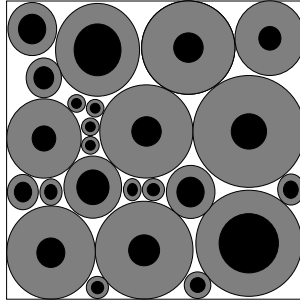


FIG. 2 – Assemblage de sphères composites généralisé.

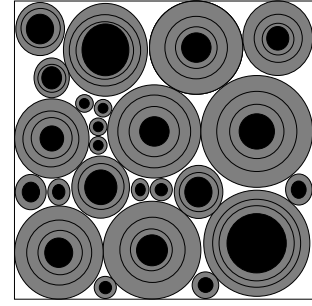


FIG. 3 – Discrétisation de la matrice en couches concentriques.

$N$  de familles de motifs  $k$  de fractions volumiques  $f_k$  en proportions  $c_k$ , tels que la fraction volumique globale  $f$  soit retrouvée selon :  $f = \sum_{k=1}^N f_k c_k$ . Pour construire des bornes pour les modules d'élasticité effectifs, C. Stolz et A. Zaoui (1991) proposent d'étendre l'approche variationnelle de Hashin et Shtrikman à un champ de polarisation constant par points homologues de chaque motif de géométrie identique et non par phase. Sous l'hypothèse de distribution isotrope des centres des motifs, les champs d'essai obtenus satisfont l'équation suivante :

$$\forall \lambda \in [1, N], \quad \forall \mathbf{x} \in D_\lambda, \quad \varepsilon_\lambda^M(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0 - \int_{S_\lambda} \Gamma^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') (\mathbf{L}_\lambda - \mathbf{L}^0) : \varepsilon_\lambda^M(\mathbf{x}') d\omega(\mathbf{x}') \quad (1)$$

où  $\Gamma^0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  représente l'opérateur de Green modifié et  $\varepsilon_\lambda^M(\mathbf{x})$  est la moyenne par points homologues du champ de déformation d'essai à l'intérieur du motif représentatif  $\lambda$ , dont la distribution des modules locaux est donnée par  $\mathbf{L}_\lambda(\mathbf{x})$  sur le domaine  $D_\lambda$  qu'occupe le motif  $\lambda$ . On reconnaît dans (1) l'équation d'une inclusion composite de module  $\mathbf{L}_\lambda(\mathbf{x})$  plongée dans un milieu infini de référence de module  $\mathbf{L}^0$  et soumise à des déformations  $\mathbf{E}_0$  à l'infini. Des opérations de moyennes adéquates sur ces champs conduisent à des bornes supérieures (inférieures) lorsque le milieu de référence est plus raide (plus souple) que toutes les phases. Une estimation autocohérente généralisée (M. Bornert *et al.* (1994)) est obtenue lorsqu'on attribue au milieu de référence les propriétés du milieu homogène équivalent.

## 2 Extension à la non linéarité.

La détermination du comportement macroscopique nécessite la résolution d'un problème local non linéaire sur le V.E.R. où les champs de déformation  $\varepsilon(\mathbf{x})$  et de contrainte et  $\sigma(\mathbf{x})$

sont fortement hétérogènes. La résolution exacte d'un tel problème est très difficile, voire impossible. Afin d'utiliser les connaissances acquises sur les matériaux linéaires, on peut recourir à une linéarisation sécante des relations de comportement locales :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{L}_s(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t) \\ + \text{Conditions aux bords.} \end{cases} \quad (2)$$

$\mathbf{L}_s(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x})$  est le tenseur des modules sécants locaux, fortement hétérogène de par sa dépendance en  $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ . Pour simplifier ce problème, on remplace sur le V.E.R. le champ fortement hétérogène des modules sécants locaux par un champ *homogène par morceaux*, afin d'obtenir un nombre fini de modules sécants à déterminer. Suivant P. Ponte Castañeda (1992), on appelle le milieu linéaire correspondant *Composite linéaire de comparaison*. Le tenseur homogénéisé,  $\mathbf{L}^{hom}$  de ce composite linéaire peut alors être estimé par un modèle d'homogénéisation linéaire connu approprié à la microstructure de ce composite. Le problème à résoudre est donc :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})) = 0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{L}^{(r)} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) \text{ dans la phase } r \\ \mathbf{L}^{(r)} = \mathbf{L}_s^{(r)} \left( \mathbf{E}_{\text{ref}}^{(r)} \right) : \text{Relations complémentaires} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t) \text{ dans } V \\ + \text{Conditions aux bords.} \end{cases}$$

Les modules sécants sont déterminés dans chaque phase  $r$  au travers de relations complémentaires non linéaires, et sont associés à des déformations de référence  $\mathbf{E}_{\text{ref}}^{(r)}$ . La solution de ce problème est une estimation des champs locaux du problème local non linéaire initial ; elle va dépendre du choix des modules sécants locaux, qui doivent rendre compte au mieux de la distribution réelle hétérogène.

L'extension classique, développée par M. Berveiller et A. Zaoui (1979), qui consiste à prendre des modules *homogènes par phases* et à définir les déformations de référence comme les *moyennes* de la déformation sur les phases correspondantes, ignore l'hétérogénéité intra-phase. Pour une meilleure description de cette hétérogénéité, il faut modifier les relations complémentaires déterminant les modules sécants homogènes par phase, de telle sorte qu'une fluctuation du champ local induisant des non linéarités au sein d'une phase, se répercute en une modification des modules sécants de cette phase et donc se traduise sur la réponse macroscopique. L'extension sécante modifiée, pour laquelle la déformation de référence est définie comme la moyenne quadratique de la déformation équivalente locale  $\boldsymbol{\varepsilon}_{eq}(\boldsymbol{x})$  sur la phase correspondante, répond à ce souci. Selon cette approche due à P. Suquet (1995) et qui coïncide avec l'approche variationnelle de P. Ponte Castañeda (1992), les relations complémentaires sont :

$$\mathbf{L}^{(r)} = \mathbf{L}_s^{(r)} \left( \mathbf{E}_{\text{ref}}^{(r)} \right), \quad \mathbf{E}_{\text{ref}}^{(r)} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^2 \rangle_{(r)}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3c^{(r)}} \left( \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbf{L}^{hom}}{\partial \boldsymbol{\mu}^{(r)}} : \mathbf{E} \right)}. \quad (3)$$

Lorsqu'on dispose d'une borne supérieure pour le milieu linéaire de comparaison, le résultat final a aussi le statut de borne supérieure pour le comportement non linéaire. Dans le cas d'un comportement isotrope du milieu linéaire de comparaison, le moment d'ordre 2 s'écrit :

$$3c^{(r)} \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{eq}^2 \rangle_{(r)} = \left( \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{E}) \boldsymbol{\delta} + \operatorname{Dev}(\mathbf{E}) \right) : \left( 3 \frac{\partial \mathbf{k}^{hom}}{\partial \boldsymbol{\mu}^{(r)}} \mathbf{J} + 2 \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^{hom}}{\partial \boldsymbol{\mu}^{(r)}} \mathbf{K} \right) : \left( \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(\mathbf{E}) \boldsymbol{\delta} + \operatorname{Dev}(\mathbf{E}) \right).$$

En tenant compte du taux de triaxialité macroscopique  $\tau = \frac{1}{3} \frac{\text{Tr}(\Sigma)}{\Sigma_{eq}}$  et des relations suivantes :

$$\begin{cases} \text{Tr}(\Sigma) = 3k^{hom}\text{Tr}(\mathbf{E}) \\ \text{Dev}(\Sigma) = 2\mu^{hom}\text{Dev}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{J} : \mathbf{J} = \mathbf{J}, \quad \mathbf{K} : \mathbf{K} = \mathbf{K}, \quad \mathbf{J} : \mathbf{K} = 0 \end{cases}$$

on obtient :

$$\langle \epsilon_{eq}^2 \rangle_{(r)}^{\frac{1}{2}} = E_{eq} \left( \frac{1}{c^{(r)}} \left( 3 \left[ \tau \frac{\mu^{hom}}{k^{hom}} \right]^2 \frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^{(r)}} + \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^{(r)}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

### 3 Modélisation proposée.

L'approche proposée repose sur l'extension sécante modifiée étendue à une *distribution non uniforme* des modules sécants dans la matrice : le milieu linéaire de comparaison est un assemblage de Hashin généralisé formé de sphères composites multicouches (Figure 3). Comme dans l'approche développée par M. Bornert *et al.* (1994) dans le cadre d'une formulation sécante classique, les modules sécants sont pris homogènes dans des couches concentriques autour des pores, mais peuvent varier d'une couche à l'autre afin de mieux décrire l'hétérogénéité locale radiale. L'approche par M.M.R. est utilisée pour traiter le problème linéaire obtenu et la solution semi-analytique de l'inclusion multicouche due à E. Hervé et A. Zaoui (1993) est mise à profit pour résoudre les problèmes auxiliaires auxquels on se ramène. Les déformations de référence sont calculées par itération et la dérivation (4) est menée numériquement. Suivant le choix du milieu de référence  $\mathbf{L}^0$ , on obtient une borne supérieure ou une estimation autocohérente pour la réponse non linéaire du composite. On désigne la borne par HSZNL+ puisqu'elle étend au cas non linéaire et à plusieurs motifs celle due à E. Hervé, C. Stolz et A. Zaoui (1991) pour l'assemblage des sphères composites. Cette démarche améliore les méthodes plus classiques où les modules sont homogènes par phase et coïncide avec ces dernières lorsqu'on ne prend qu'une seule couche. En particulier, avec un seul motif et une seule couche, on retrouve la borne de Hashin et Shtrikman pour les milieux isotropes non linéaires.

### 4 Surface d'écoulement des milieux poreux.

A.L. Gurson (1977) a proposé de décrire la surface d'écoulement macroscopique d'un milieu poreux à matrice rigide plastique (régie par le critère de Von-Mises) par l'équation suivante:

$$\mathbf{F}(\Sigma, \sigma_0, \mathbf{f}) = \left( \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + 2\mathbf{f} \cosh \left( \frac{3}{2} \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right) - 1 - \mathbf{f}^2 = 0. \quad (5)$$

Notons que le critère de Gurson est une borne supérieure rigoureuse pour tout assemblage de sphères composites de Hashin (M. Gărăjeu (1995)). Plusieurs améliorations de ce critère ont depuis été apportées, notamment par V. Tvergaard (1981) qui, pour prendre en compte les interactions entre cavités, a introduit un paramètre  $\mathbf{q}$  dans (5) remplaçant ainsi  $\mathbf{f}$  par  $\mathbf{qf}$ . Cette extension heuristique ne relève pas d'une analyse micromécanique.

Les théories récentes de bornes non linéaires, notamment celles développées par P. Suquet et P. Ponte Castañeda, conduisent à un critère de plasticité elliptique pour les matériaux rigides plastiques poreux (dont les pores sont en distribution spatiale isotrope), de la forme :

$$\left( 1 + \frac{2}{3}\mathbf{f} \right) \left( \frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^2 + \frac{9\mathbf{f}}{4} \left( \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} \right)^2 - (1 - \mathbf{f})^2 = 0. \quad (6)$$

Le critère (6) repose sur la combinaison entre l'approche variationnelle de P. Ponte Castañeda et la borne supérieure de Hashin et Shtrikman linéaire. C'est une borne supérieure rigoureuse pour les surfaces de plasticité macroscopiques des matériaux poreux à distribution de pores isotrope, qui s'applique en particulier à l'assemblage de Hashin isotrope.

A taux de triaxialité nul, ce critère fournit une borne supérieure rigoureuse de la surface de plasticité macroscopique, meilleure que celle de Gurson mais sur-estime cette dernière à taux de triaxialité infini. Dans cette optique, J.C. Michel et P. Suquet (1992) proposent de remplacer dans (6) le coefficient  $\frac{9f}{4}$  par  $\frac{9}{4} \left( \frac{1-f}{\ln(f)} \right)^2$ . Le critère ainsi obtenu fournit une borne rigoureuse pour des taux de triaxialité nuls et infinis mais n'est qu'une estimation pour les autres valeurs.

## 5 Amélioration apportée par l'approche par M.M.R. pour un assemblage de Hashin.

Comme attendu, la borne supérieure proposée (HSZNL+) s'identifie à la borne de Hashin et Shtrikman non linéaire (6) lorsqu'on ne fait appel qu'à un seul module sécant. En revanche, la discrétisation en 20 couches, qui améliore la description de l'hétérogénéité radiale de la déformation plastique, converge vers le modèle de Gurson pour une triaxialité infinie ; la prévision en cisaillement pur n'est pas affectée. La convergence est satisfaisante pour 20 couches et le résultat obtenu est une borne rigoureuse qui s'applique pour tout taux de triaxialité à une microstructure de Hashin en distribution isotrope. L'estimation autocohérente (AC) coïncide avec la borne pour une triaxialité infinie et est très légèrement plus souple pour un cisaillement pur. On note que l'estimation de Michel et Suquet est beaucoup plus souple.

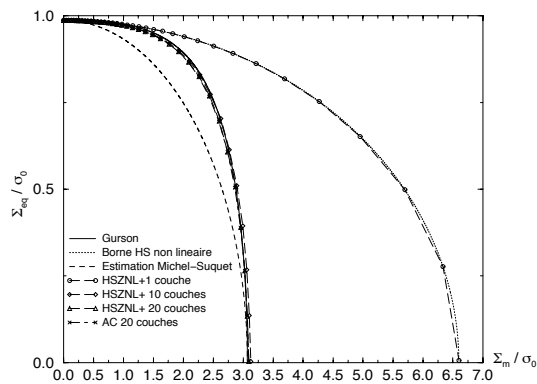


FIG. 4 – Surfaces de plasticité obtenues par les différentes approches pour  $f=1\%$ .

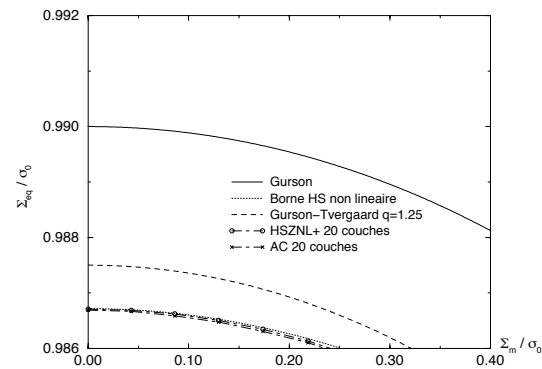


FIG. 5 – Zoom de la figure 4 sur la contrainte critique en cisaillement.

## 6 Amélioration apportée par l'approche par M.M.R. pour un assemblage de Hashin généralisé.

Lorsque la microstructure du matériau hétérogène est représentée à l'aide de 2 motifs ou plus (Figure 6), la surface de plasticité en cisaillement pur, dans une approche autocohérente, est toujours très proche de celle de Michel-Suquet : il n'y a quasiment pas de différence entre les deux représentations de la microstructure (1 motif et 2 motifs) (Voir Figure 7) et la borne HSZNL+ s'identifie à la borne de Michel-Suquet. En revanche, à fort taux de triaxialité, la contrainte d'écoulement macroscopique prévue par l'approche avec deux motifs est plus faible, ce qui établit la sensibilité de la réponse sous chargement hydrostatique à l'hétérogénéité de distribution spatiale des pores (effet d'amas) (Voir Figure 6). Cet affaiblissement est également décrit par le critère de Gurson-Tvergaard, mais de manière heuristique.

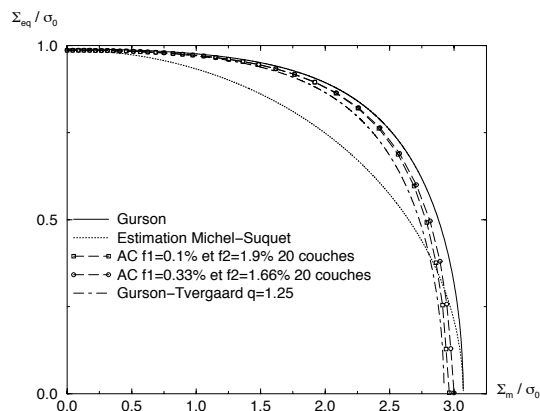


FIG. 6 – Représentation de la "microstructure" avec 2 motifs ; porosité globale 1%.

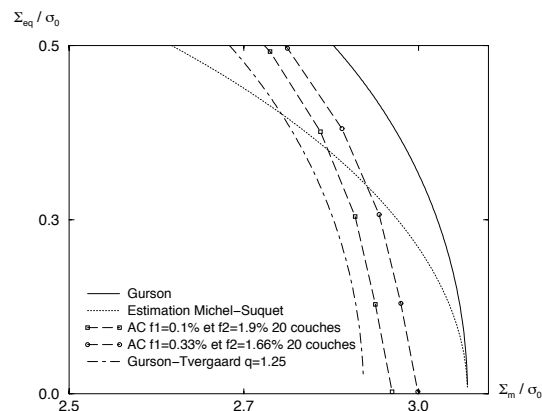


FIG. 7 – Zoom de la figure 6 sur la contrainte critique hydrostatique.

## 7 Conclusion.

L'approche par M.M.R. couplée à l'extension sécante modifiée faisant appel à plusieurs modules sécants, nous a permis d'établir des estimations et des bornes pour la surface de plasticité macroscopique d'un milieu poreux qui s'appliquent pour tout taux de triaxialité. L'influence de l'hétérogénéité de la distribution des porosités locales sur la surface de plasticité macroscopique a également été mise en évidence. Une extension immédiate de l'approche permettrait de prendre en compte une distribution continue de porosités locales, issue de l'expérience.

## Références

- Berveiller, M. et Zaoui, A. 1979 An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, pp 325-344.
- Bornert, M., Hervé, E., Stolz, C. et Zaoui, A. 1994 Self-consistent approaches and strain heterogeneities in two-phase elastoplastic materials, *Appl. Mech. Rev.*, pp 66-76.
- Gărăjeu, M. 1995 Contribution à l'étude du comportement non linéaire de milieux poreux avec ou sans renforts, *Thèse Université Aix-Marseille 2*
- Gurson, A.L. 1977 Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I-Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *J. Eng. Mat. Tech.*, pp 1-15.
- Hashin, Z. 1962 The Elastic Moduli of Heterogeneous Materials, *J. Appl. Mech.*, pp 143-150.
- Hervé, E., Stolz, C. et Zaoui, A. 1991 A propos de l'assemblage des sphères composites de Hashin, *C. R. Acad. Sci.*, **312**, pp 857-862.
- Hervé, E. et Zaoui, A. n-Layered inclusion-based micromechanical modelling, *Int. J. Engng. Sci.*, pp 1-10.
- Michel, J.C. et Suquet, P. 1992 The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials, *J. Mech. Phys. Solids*, pp 783-812.
- Ponte Castañeda, P. 1992 New variational principles in plasticity and their application to composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, pp 1757-1788.
- Stolz, C. et Zaoui, A. 1991 Analyse morphologique et approches variationnelles du comportement d'un milieu élastique hétérogène, *C. R. Acad. Sci.*, **II 312**, pp 143-150.
- Suquet, P. Overall properties of nonlinear composites: a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castañeda nonlinear variational procedure, *C. R. Acad. Sci.*, **320**, pp 563-571.
- Tvergaard, V. Influence of void on shear band instabilities under plane strain conditions, *Int. J. Frac.*, pp 389-407.