

# Plan de la communication

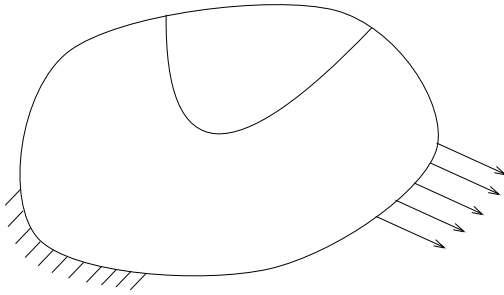
1. Définition du cadre de l'étude,
2. Discrétisation temporelle,
3. Modèle élastoplastique E.F.F.,
4. Algorithme général E.F.F.,
5. Intérêts d'une approche variationnelle,
6. Approche variationnelle régularisée,
7. Résultats numériques,
8. Conclusions et perspectives.

## Définition du cadre de l'étude

- Ouvert borné  $\Omega \in C^{0,1}$  de frontière  $\partial\Omega$ .

$$\partial\Omega = \bar{S}_u \cup \bar{S}_t \quad S_u \cap S_t = \emptyset$$

$$\text{Soit } \Omega_p \in \Omega \quad \rightarrow \quad \varepsilon^p$$



- **Description du modèle élastoplastique**

- ◇ Ecriture du problème en vitesse,
- ◇ Potentiel d'écroutissage  $\Theta$ ,
- ◇ Surface de charge  $\phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{q})$ ,
- ◇ Utilisation du critère de Von Mises.

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\beta}, p) = \| \boldsymbol{s} - \boldsymbol{\beta} \| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_0 + hp)$$

# Discrétisation temporelle

## Schéma d'intégration *implicite*

- Equations de champ,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \rho \mathbf{F}_{n+1} = 0 \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \nabla^s \mathbf{u}_{n+1} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_{n+1}) \quad (4)$$

- Conditions aux limites,

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{n+1}^0 \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_{n+1}^0 \quad (6)$$

- Lois d'écoulement plastique.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \lambda_{n+1} \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1} = \boldsymbol{\alpha}_n - \lambda_{n+1} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) \quad (8)$$

$$\lambda_{n+1} \phi(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1}) = 0 \quad (9)$$

# Modèle élastoplastique E.F.F. (1/2)

*Résolution classique  $\Rightarrow$  MEFD*

- **MEFD**
  - ◇ satisfaire "certaines" CLs,
  - ◇ vérifier les équations de champ "au mieux".
- **MEFF**
  - ◇ satisfaire "certaines" équations de champ,
  - ◇ vérifier les CLs "au mieux".

$\Rightarrow$  Notion de *représentation intégrale*.

*Inversion de  $\text{div}[C : (\epsilon(\cdot) - \epsilon^p)]$ ,*  
 *$\epsilon^p$  : inclusion initiale.*

$\Rightarrow$  Utilisation du déplacement fondamental de Kelvin  
 $U(r)$ .

*déplacement créé par une force ponctuelle unitaire  
 appliquée en 0.*

$$U(r) = O(r^{-1})$$

# Modèle élastoplastique E.F.F. (2/2)

- Représentation intégrale du déplacement,

$$\begin{aligned}
 u_k^{(n+1)}(\mathbf{x}) = & \int_S \tilde{t}_i^{(n+1)}(y) U_i^k(y - \mathbf{x}) dS(y) - \\
 & \int_S \Sigma_{ij}^k(y - \mathbf{x}) n_j(y) \tilde{u}_i^{(n+1)}(y) dS(y) + \\
 & \int_{\Omega_P} \Sigma_{ij}^k(y - \mathbf{x}) \varepsilon_{ij}^{p,(n+1)}(y) dV(y)
 \end{aligned}$$

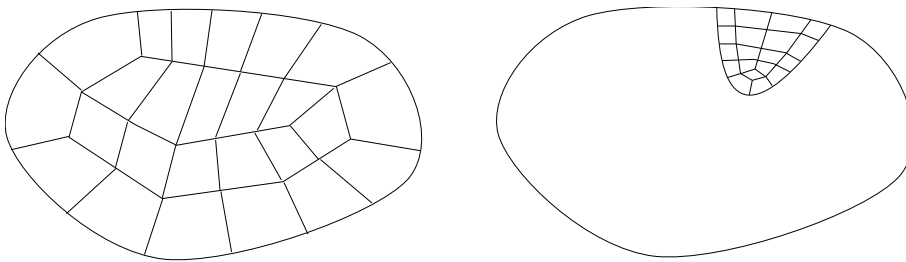
- Représentation intégrale du gradient du déplacement.

$$\begin{aligned}
 u_{k,l}^{(n+1)}(\mathbf{x}) = & \int_S \Sigma_{ij,l}^k(y - \mathbf{x}) n_j(y) \tilde{u}_i^{(n+1)}(y) dS(y) - \\
 & \int_S \tilde{t}_i^{(n+1)}(y) U_{i,l}^k(y - \mathbf{x}) dS(y) - \\
 & \int_{\Omega_P} \Sigma_{ij,l}^k(y - \mathbf{x}) [\varepsilon_{ij}^{p,(n+1)}(y) - \varepsilon_{ij}^{p,(n+1)}(\mathbf{x})] dV(y) - \\
 & \varepsilon_{ij}^{p,(n+1)}(\mathbf{x}) \int_S \Sigma_{ij}^k(y - \mathbf{x}) n_l(y) dS(y)
 \end{aligned}$$

# Algorithme général E.F.F. (1/2)

Interpolation "classique" continue de toutes les grandeurs.

- Densités surfaciques inconnues  $\mathbf{y} = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}})$ ,
- Déformation totale  $\varepsilon$ ,
- Déformation plastique  $\varepsilon^p$ ,
- Variables d'écrouissage  $\beta, p$ .



⇒ **Non-linéarités confinées.**

Contact non-linéaire, rupture ductile, endommagement, ...

## Algorithme général E.F.F. (2/2)

- ◇ **CLs du problème,**

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p$$

- ◇ **Représentation intégrale des déformations,**

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{G}_{n+1} + \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{\Xi} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p$$

- ◇ **Loi d'évolution,**

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{E}_n^p, \boldsymbol{\beta}_n, p_n)$$

Algorithme de Retour Radial piloté en déformation.

⇒ **Equation non-linéaire en  $\mathbf{E}_{n+1}$ .**

Schéma de Newton-Raphson + OTC (Bonnet & Mukherjee 1996)

$$\mathbf{E}_{n+1} \rightarrow \mathbf{E}_{n+1}^p, \boldsymbol{\beta}_{n+1}, p_{n+1} \rightarrow \mathbf{Y}_{n+1}$$

# Intérêts d'une approche variationnelle

## *Pourquoi une approche variationnelle ?*

- **Domaine très actif en MEFF,**  
*176 publications référencés (Bonnet, Maier & Polizzotto 1998) → 80 % après 1990.*
- **Point-selle d'une fonctionnelle,**
  - Résultats mathématiques existants
    - \* stabilité,
    - \* convergence,
    - \* bon conditionnement.
  - Matrices d'influence → signification physique (*matrices associées à des énergies*)
- **Couplage MEFF/MEFD.**  
*Stationnarité de la même fonctionnelle.*



# Approche variationnelle régularisée (1/2)

## Écriture des équations sous forme faible.

- CLs du problème,

$$\begin{aligned} a_{uu}(\delta\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) + a_{ut}(\delta\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}) &= \ell_u(\delta\tilde{\mathbf{u}}) + a_{u\varepsilon}(\delta\tilde{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ a_{tu}(\delta\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}) + a_{tt}(\delta\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}) &= \ell_t(\delta\tilde{\mathbf{t}}) + a_{t\varepsilon}(\delta\tilde{\mathbf{t}}, \boldsymbol{\varepsilon}^p) \end{aligned}$$

- Représentation des déformations,

$$\int_{\Omega_p} \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} dV = \ell_\varepsilon(\delta\boldsymbol{\varepsilon}) + a_{\varepsilon u}(\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{u}_{n+1}) + a_{\varepsilon t}(\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{t}_{n+1}) - a_{\varepsilon\varepsilon}(\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p)$$

## Propriétés :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{uu}(\delta\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}) = a_{uu}(\tilde{\mathbf{u}}, \delta\tilde{\mathbf{u}}) \\ a_{tt}(\delta\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}) = a_{tt}(\tilde{\mathbf{t}}, \delta\tilde{\mathbf{t}}) \\ a_{ut}(\delta\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{t}}) = a_{tu}(\delta\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{u}}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{\varepsilon u}(\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\mathbf{u}}) = a_{u\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}) \\ a_{\varepsilon t}(\delta\boldsymbol{\varepsilon}, \tilde{\mathbf{t}}) = a_{t\varepsilon}(\tilde{\mathbf{t}}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}) \end{array} \right.$$

- Lois d'évolution aux nœuds du maillage de  $\Omega_p$ .

# Approche variationnelle régularisée (2/2)

Régularisation  $\Rightarrow$  Noyaux intégrables.

*Collocation* (Bonnet 94), *Galerkin* (Nedelec 82, Holzer 94, Bonnet 95)

**Avantages d'une formulation régularisée ?**

- Facilités de mise en œuvre numérique,  
 $\Rightarrow$  Intégration classique par points de Gauss. Exemple

$$a_{tt}(\delta\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{t}}) = \int_{S_t} \int_{S_t} \delta\tilde{\mathbf{t}}(x) \cdot U(y-x) \cdot \tilde{u}(y) dS(y) dS(x)$$

$$\forall x \in S_t, \quad U(y-x) \in L^1(y, S_t)$$

- Atténuation du caractère singulier de l'intégrande.  
 $\rightarrow$  Gain de temps CPU.

# Algorithme élastoplastique GBEM

- CLs du problème,

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p, \quad \mathbf{K}^t = \mathbf{K}$$

- Représentation intégrale des déformations,

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{G}_{n+1} + \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{\Xi} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p, \quad \mathbf{\Xi}^t = \mathbf{\Xi}$$

- Loi d'évolution,

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_{n+1}^p = \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_n^p + \Psi(\mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{E}_n^p, \boldsymbol{\beta}_n, p_n)$$

Elimination de  $\mathbf{Y}_{n+1}$  et de  $\mathbf{E}_{n+1}^p$ .

$$\mathbf{R}_{n+1}(\mathbf{E}_{n+1}) \equiv \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{G}'_{n+1} -$$

$$\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{\Xi}' \cdot \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_n^p + \Psi(\mathbf{E}_{n+1}, \mathbf{E}_n^p, \boldsymbol{\beta}_n, p_n)) = 0$$

$$\text{avec } \mathbf{\Xi}' = \mathbf{\Xi} - \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{Q}$$

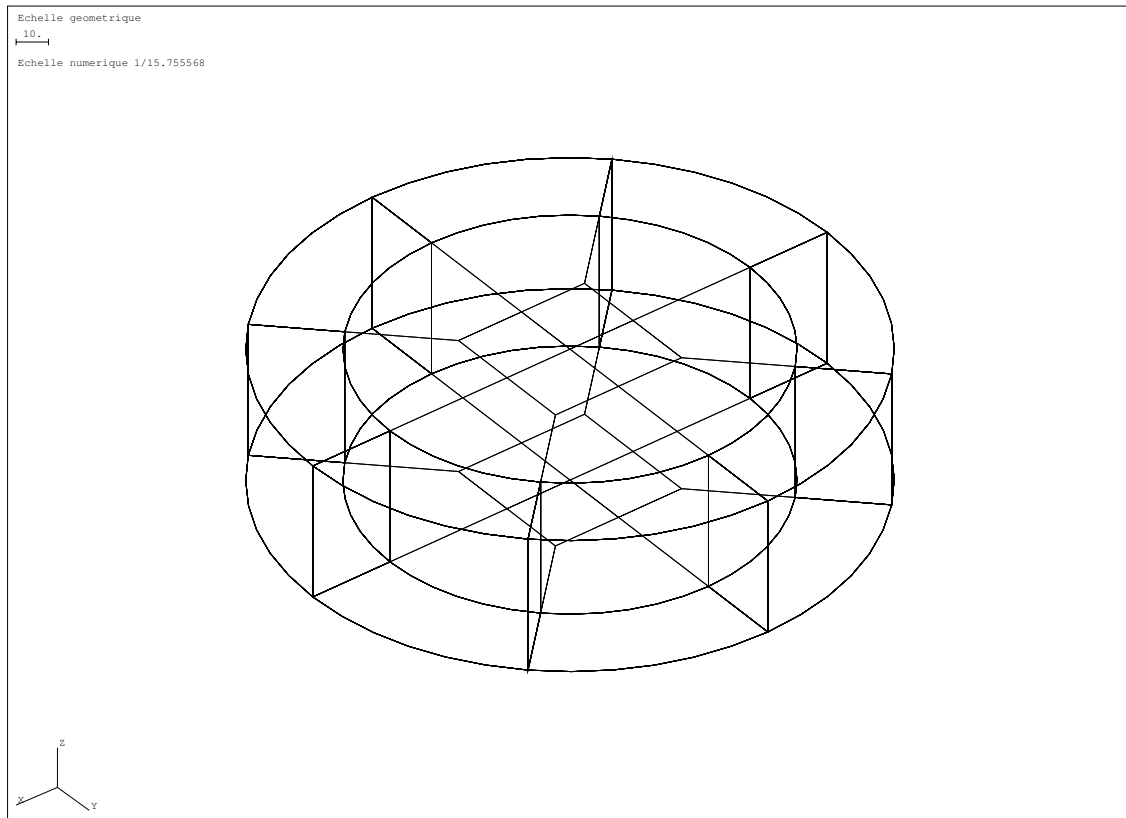
$$\mathbf{G}'_{n+1} = \mathbf{G}_{n+1} + \mathbf{Q}^t \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{n+1}$$

$$\partial \Psi_{\mathbf{E}}(\mathbf{E}_{n+1}) \equiv \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_{n+1}^p}{\partial \mathbf{E}_{n+1}} = 2G \int_{\Omega_p} \mathbf{N}^t(\mathbf{x}) \frac{\partial(\lambda_{n+1} \hat{\mathbf{n}}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}} \mathbf{N}(\mathbf{x}) \, dV$$

**Newton-Raphson avec OTC symétrique. Numériquement le schéma résultant utilise un OTC réduit non-symétrique.**

# Résultats numériques (1/3)

- Description du cas-test  
⇒ **Cylindre en torsion.**



- Conditions aux limites.
  - Surface supérieure : torsion d'angle  $\theta/2$ ,
  - Surface inférieure : torsion d'angle  $-\theta/2$ ,
  - Surface latérale libre.

## Résultats numériques (2/3)

- Valeurs numériques,
  - $E = 200000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0,3$  et  $\sigma_0 = 240 \text{ MPa}$ ,
  - rayon  $r = 100 \text{ mm}$  et hauteur  $h = 50 \text{ mm}$ ,
- Modèle numérique.
  - 8 EF volumiques de type H27 (194 nœuds),
  - 48 EF surfaciques de type Q9 (144 nœuds).

### ⇒ Résultats obtenus

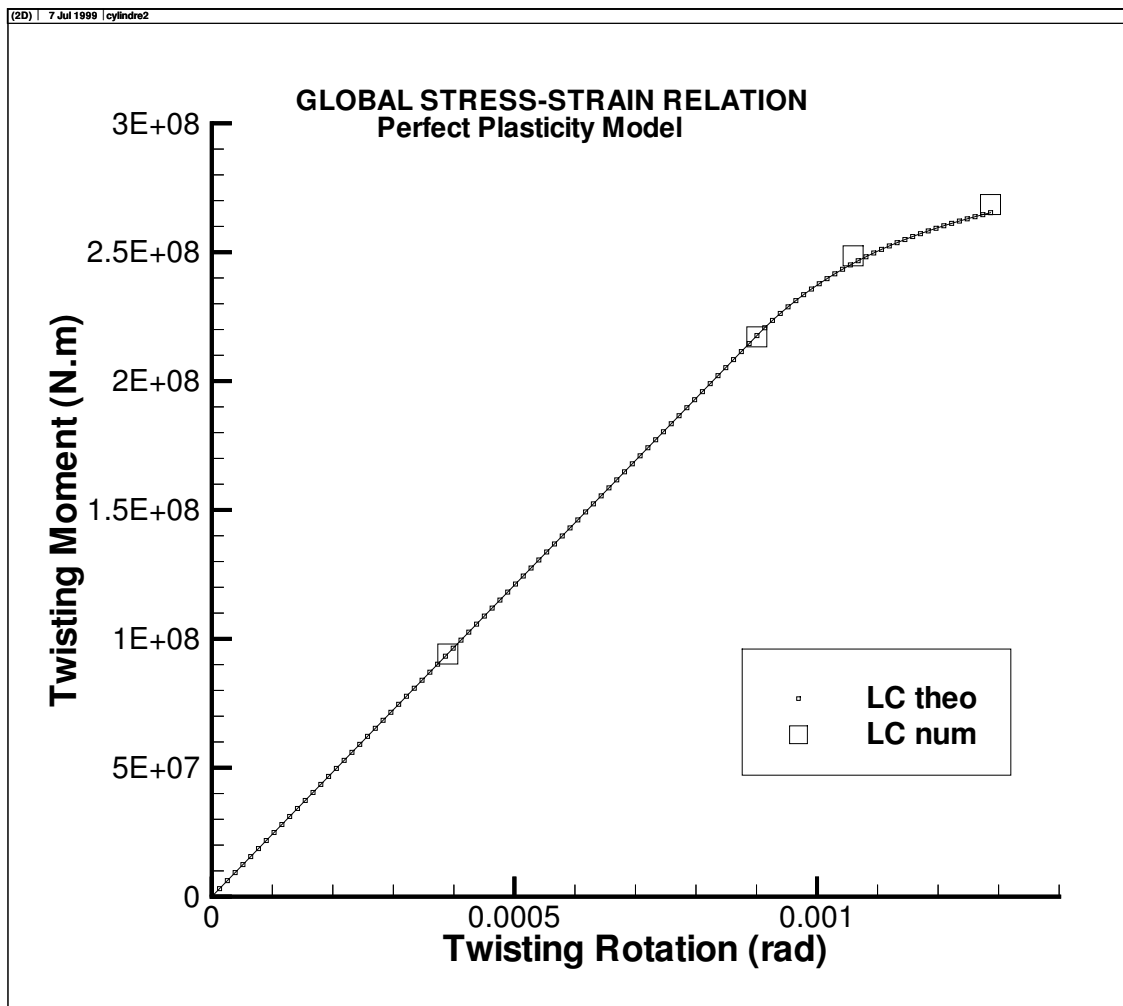
- Bonne évaluation du vecteur-contrainte,  
Ecart de 0,5 %.
  - Bonne évaluation des contraintes dans  $\Omega_p$ ,  
Ecart de 0,8 %.
- Validation de  $K, F, Q$  et  $G$ .

Validation de  $\Xi \Rightarrow$  Tenseur d'Eshelby sur une boule  
(*en cours*).

## Résultats numériques (3/3)

⇒ Résultats obtenus par une méthode de collocation.

*Mêmes équations à résoudre.*



## Conclusions et perspectives

- Implémentation de toute loi quasistatique viscoplastique endommageable,
- Intégration numérique → symétrie des domaines,
- Calcul direct d'indicateurs d'erreurs locaux,  
⇒ Principe à trois champs.
- Parallélisation du calcul,
  - ◇ Trois phases de calcul découplées,
  - ◇ Calcul des matrices d'influence,
  - ◇ Evolution des variables internes.
- Couplage MEFF/MEFD.