



HAL
open science

Identification inverse des lois de comportement standard généralisées sans écrouissage par indentation

Nicolas Tardieu, Andrei Constantinescu, Said Taheri

► **To cite this version:**

Nicolas Tardieu, Andrei Constantinescu, Said Taheri. Identification inverse des lois de comportement standard généralisées sans écrouissage par indentation. 4e colloque national en calcul des structures, May 1999, Giens, France. pp.863-868. hal-00116544

HAL Id: hal-00116544

<https://hal.science/hal-00116544v1>

Submitted on 15 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Identification inverse de lois de comportement standards généralisées sans écouissage par indentation

Nicolas TARDIEU, Andrei CONSTANTINESCU, Said TAHERI *

Laboratoire de Mécanique des Solides
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau

* Département Mécanique et Modèles Numériques
Electricité de France
1 Av. du G^{al} de Gaulle
92141 Clamart Cedex

Résumé

L'identification des paramètres d'une loi de comportement standard généralisée sans écouissage à partir d'essais d'indentation est abordée par une approche inverse. La méthode de l'état adjoint est utilisée pour obtenir explicitement le gradient de la fonctionnelle coût. Un exemple numérique vient illustrer l'étude théorique.

1 Introduction

L'indentation est un essai mécanique qui consiste à presser un poinçon contre un échantillon de matériau en mesurant en continu la force et l'enfoncement. La simplicité de cet essai a motivé de nombreuses recherches, particulièrement dans le domaine de l'identification de paramètres de lois de comportement. On recense ainsi des formules semi-empiriques [5], souvent limitées à des lois de comportement simples, et quelques études sous le formalisme des problèmes inverses, dont la résolution est basée sur des *essais-corrections* [4].

Notre but est ici de nous placer sous ce même formalisme mais de résoudre le problème inverse en utilisant les propriétés du contrôle optimal [1], et, plus particulièrement, la méthode de l'état adjoint [2]. Malgré la présence de contact, qui amène quelques difficultés mathématiques, il a été montré dans la cadre de l'élasticité linéaire [3] que cet obstacle pouvait être contourné par régularisation des conditions de contact. Nous allons montrer ici que cette méthode est applicable pour des matériaux standards généralisés sans écouissage en exprimant les conditions de contact à l'aide de multiplicateurs de Lagrange.

2 Le problème direct (\mathcal{P})

On considère un corps occupant dans sa configuration de référence un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, de frontière régulière $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F \cup \Gamma_C$ où déplacement, traction nulle (surface libre) et conditions de contact sont respectivement imposés (voir figure (1)) en l'absence de force de volume. n et t sont les vecteurs normal et tangent à la frontière Γ . On vient presser sur ce corps un indenteur rigide générant un contact sans frottement. L'indentation est pilotée par le déplacement U du poinçon sur toute la durée $[0, T]$ de l'essai. La modélisation est axisymétrique et fait l'hypothèse des petites perturbations.

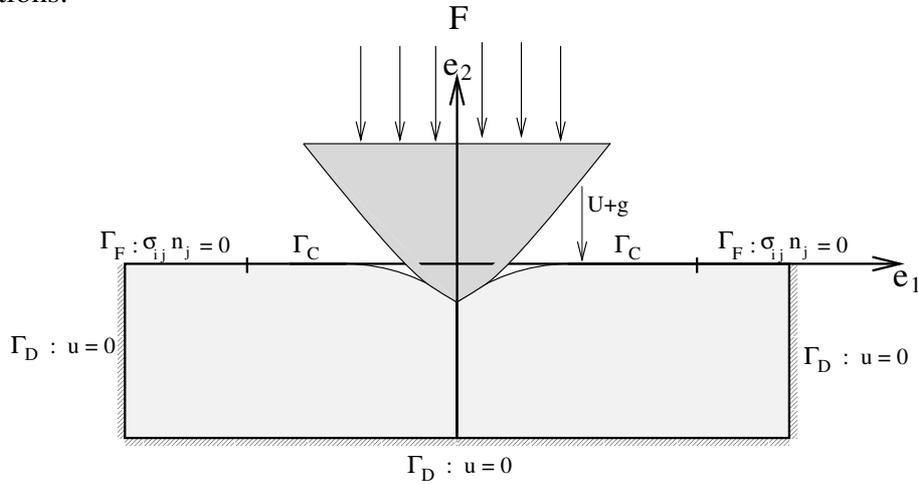


FIG. 1 - Le problème direct

On introduit le convexe fermé $N = \{q \in (H^{1/2}(\Gamma_C))' \mid q \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\}$. L'intervalle d'étude est subdivisé en I sous-intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de longueur Δt . On note $u^i = u(t_i)$, $\varepsilon(u^i) = \varepsilon(u(t_i))$, $\varepsilon_i^p = \varepsilon^p(t_i)$, $\sigma^i = \sigma(t_i)$ les déplacements, déformations linéarisées, déformations plastiques et contraintes dans Ω à l'instant t_i . Ces grandeurs sont reliées par la loi de comportement élastique $\sigma^i = S^{-1} : (\varepsilon(u^i) - \varepsilon_i^p)$. De plus, g^i désigne l'écart à $t = t_i$ entre le poinçon et la surface potentielle de contact et c est le vecteur des paramètres matériaux (module d'Young, limite d'élasticité, viscosité, ...) évoluant dans Q , convexe fermé de \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) et que l'on cherche à identifier. A ce titre, on a $S = S(c)$.

Loi de comportement

La loi de comportement utilisée s'inscrit dans le cadre des matériaux standards généralisés. Nous faisons en plus l'hypothèse que le matériau ne s'écrouit pas et que le pseudo-potential $\Phi = \Phi(\sigma, c)$ est deux fois différentiable par rapport à σ . Après linéarisation par incréments, la loi de comportement du problème direct est donnée par :

$$\varepsilon(\Delta u) = S : \Delta \sigma + \Delta \varepsilon^p \text{ avec } \Delta \varepsilon^p = \frac{\partial \Phi(\sigma^{i+1}, c)}{\partial \sigma} \Delta t \text{ pour } t = t_i \quad (1)$$

En introduisant le multiplicateur de Lagrange $p \in N$ pour exprimer les conditions de contact, les équations de (P) s'écrivent après linéarisation:

Equations linéarisées de (P) :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \Delta \sigma &= 0 \text{ dans } \Omega & (\Delta u_n - g^i - \Delta U)(q^{i+1} - p^{i+1}) &\geq 0 \quad \forall q^{i+1} \in N \\ \varepsilon(\Delta u) &= S:\Delta \sigma + \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \Delta t \text{ dans } \Omega & \sigma_{nn}^{i+1} &= \sigma^{i+1}.n.n = p^{i+1} \\ \Delta \sigma.n &= 0 \text{ sur } \Gamma_F & \sigma_{nt}^{i+1} &= (\sigma^{i+1}.n - \sigma_{nn}^{i+1}.n).t = 0 \\ \Delta u &= 0 \text{ sur } \Gamma_D \end{aligned} \right\} \text{sur } \Gamma_C \quad (2)$$

Conditions initiales :

$$\begin{aligned} \sigma(t=0) &= 0 \text{ dans } \Omega & \sigma.n(t=0) &= 0 \text{ sur } \Gamma_F \\ u(t=0) &= 0 \text{ sur } \Gamma_D & \sigma.n(t=0) &= 0 \text{ sur } \Gamma_C \end{aligned} \quad (3)$$

3 Problème inverse (P^{-1})

On peut classiquement exprimer un problème inverse en tant que problème de minimisation d'une fonctionnelle coût bien choisie. Dans la mesure où l'on dispose ici de la mesure de la force de réaction expérimentale $F_i^{\text{exp}} = F^{\text{exp}}(t_i)$ de l'échantillon et que l'on cherche à identifier le vecteur des paramètres matériaux c , on se pose donc la résolution :

Trouver $c^{\text{reel}} \in Q$ tel que:

$$\begin{aligned} J(p(c^{\text{reel}})) &= \min_{c \in L} J(p(c)) = \min_{c \in L} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^I (F_i^{\text{calc}} - F_i^{\text{exp}})^2 \right) \\ &= \min_{c \in L} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=0}^I \left(\int_{\Gamma_C} p^i(c) d\Gamma - F_i^{\text{exp}} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

où la notation $p(c)$ rappelle que la dépendance de J vis-à-vis de c se fait au travers de la résolution du problème direct, qui permet la détermination du multiplicateur de Lagrange p . En considérant cette minimisation comme une minimisation sous contrainte (celle de la résolution du problème direct), on introduit pour chaque instant t_i le Lagrangien suivant où l'on note par une * les variables adjointes et où toutes les variables sont supposées indépendantes de c (d'où la notation p^i et non $p^i(c)$).

$$\begin{aligned} L_i(\sigma^i, \Delta \sigma, u^i, \Delta u, p^i, \Delta p, \sigma^{i*}, u^{i*}, p^{i*}, c) &= \frac{1}{2} \left(\int_{\Gamma_C} p^i d\Gamma - F_i^{\text{exp}} \right)^2 + \int_{\Omega} \operatorname{div} \Delta \sigma . u^i * d\Omega - \\ &\int_{\Gamma_F} \Delta \sigma . n . u^i * d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \Delta u . \sigma^{i*} . n d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\Delta u_n - \Delta U - g^i) . p^i * d\Gamma - \end{aligned} \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} (\varepsilon(\Delta u) - S:\Delta \sigma - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \Delta t) : \sigma^{i*} d\Omega - \int_{\Gamma_C} (\Delta p - \Delta \sigma . n . n) . u_n^i * d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \Delta \sigma . n . t . u_t^i * d\Gamma$$

Alors, en étudiant les conditions de stationnarité de L_i , on montre les résultats [6] :

Résultat 1 :

Si (σ^i, u^i, p^i) et $(\sigma^{i*}, u^{i*}, p^{i*})$ sont respectivement solutions des problèmes incrémentaux direct (P) et adjoint (P^{adj}) défini ci-dessous, alors le Lagrangien L_i est stationnaire pour tout $i \in [0, I]$.

Equations linéarisées de (P^{adj}) :

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \Delta \sigma^* &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \varepsilon(\Delta u^*) &= S : \Delta \sigma^* - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} : \sigma^{i*} \text{ dans } \Omega \\ \Delta \sigma^* \cdot n &= 0 \text{ sur } \Gamma_F \\ \Delta u^* &= 0 \text{ sur } \Gamma_D \end{aligned} \right\} \text{sur } \Gamma_C^{eff} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_n^* &= (F_{i+1}^{calc} - F_{i+1}^{exp}) \\ p^{i+1*} &= \sigma_{nm}^{i+1*} \\ \sigma_{nt}^{i+1*} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

où Γ_C^{eff} est la surface de contact effective du problème direct à l'instant considéré.

Conditions finales :

$$\left. \begin{aligned} \text{div}(\sigma^*(t=T)) &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \varepsilon(u^*(t=T)) &= S : \sigma^*(t=T) \text{ dans } \Omega \\ p^*(t=T) &= \sigma_{nm}^*(t=T) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} u^*(t=T) &= 0 \text{ sur } \Gamma_D \\ \sigma^* \cdot n(t=T) &= 0 \text{ sur } \Gamma_F \\ u_n^*(t=T) &= 0 \text{ sur } \Gamma_C \end{aligned} \quad (7)$$

Résultat 2 :

Si (σ^i, u^i, p^i) et $(\sigma^{i*}, u^{i*}, p^{i*})$ sont respectivement solutions de (P) et (P^{adj}) , alors le gradient de la fonctionnelle coût J est donné par :

$$\nabla_c J = \sum_{i=0}^I \left(\int_{\Omega} \Delta \sigma : \frac{\partial S}{\partial c} : \sigma^{i*} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma \partial c} \Delta t : \sigma^{i*} d\Omega \right) \quad (8)$$

Ces propositions appellent les remarques suivantes :

- Le potentiel Φ doit être deux fois différentiable pour permettre le calcul de la loi de comportement adjointe.
- Le problème adjoint est rétrograde en temps, son état final correspondant à un problème d'élasticité bien posé.
- Sa loi de comportement est, à chaque instant, du type viscoélastique linéaire. En effet, si l'on fait formellement le changement de variables $i' \rightarrow I-i$, on obtient : $\varepsilon(\Delta u^*) = S : \Delta \sigma^* + M : \sigma^{i'+1*}$ où M est un tenseur d'ordre 4 tel que

$$M = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2}.$$

- La solution du problème adjoint dépend implicitement de la solution du problème direct au travers de la dépendance à chaque instant de M vis à vis de σ .
- La méthode de l'état adjoint permet donc le calcul du gradient de J à l'aide d'un calcul direct et d'un calcul adjoint uniquement, ce dernier étant toujours linéaire. De plus, dans un cadre Eléments Finis, problème adjoint et direct utilisent la même

matrice de rigidité, seul le second membre diffère. Ces deux remarques confirment bien l'intérêt de cette méthode.

4 Illustration numérique

On se place dans le cas simple d'un matériau viscoélastique de type Maxwell. Pour ces derniers, le potentiel Φ est de la forme $\Phi(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma : M : \sigma$ où M est un tenseur d'ordre 4 indépendant de σ . Le grand intérêt de cette loi est d'être quadratique et donc autoadjointe. Ainsi la loi de comportement du problème adjoint est-elle la même que celle du problème direct.

Dans le présent exemple, on suppose que M est fonction de la viscosité η de telle manière que la loi à identifier est de la forme :

$$\varepsilon(\Delta u) = S : \Delta \sigma + \Delta \varepsilon^p \quad \text{avec} \quad \Delta \varepsilon^p = \frac{\tilde{\sigma}^{i+1}}{\eta} \quad (9)$$

où $\tilde{\sigma}^{i+1}$ désigne le déviateur de σ^{i+1} .

On cherche donc à identifier $c = (E, \eta)$ à partir de la connaissance de la courbe d'indentation correspondant à un trajet de chargement connu U , simulé par Eléments Finis avec le code de calcul CASTEM2000[®]. Ce calcul a été réalisé avec trois modélisations (figure (2)) : petites déformations (courbe la plus « grande »), grands déplacements (courbe intermédiaire) et grandes déformations (courbe la plus « petite »). Ceci nous a permis de valider, en première approximation, le choix de la modélisation petites perturbations.

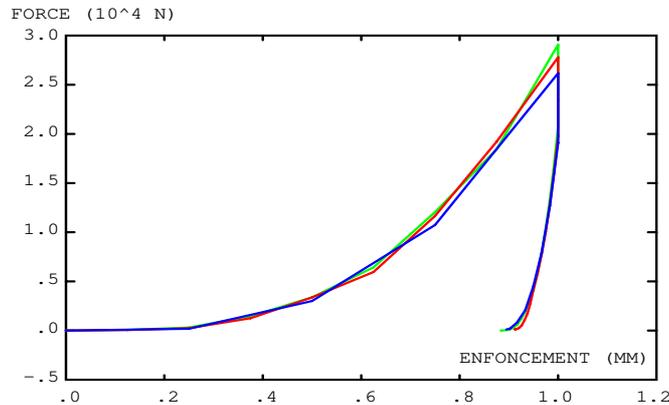


FIG. 2 - Comparaison petites déformations-grands déplacements-grandes déformations

La fonctionnelle coût J choisie est celle donnée dans (4). Son gradient est calculé par la méthode de l'état adjoint et la minimisation est réalisée avec l'algorithme de quasi-Newton BFGS. Les valeurs à identifier sont $E = 20000$ MPa et $\eta = 30000$ MPa/s. Les résultats d'identification pour différents points de départ sont présentés dans le tableau ci-dessous. On constate la bonne qualité des résultats obtenus qui, vu la distance entre les points de départ et le point à atteindre, tend à confirmer l'existence d'un minimum unique. La figure (3), où est tracé le trajet de l'algorithme sur les isovaleurs de la fonctionnelle coût, va dans le même sens.

(E^{ini}, η^{ini}) (MPa, MPa/s)	$(E^{identifie}, \eta^{identifie})$ (MPa, MPa/s)
(4000.0, 70000.0)	(20002.1, 30003.8)
(60000.0, 10000.0)	(20001.5, 30008.8)
(10000.0, 5000.0)	(20002.5, 30005.7)
(60000.0, 90000.0)	(19998.6, 29998.8)

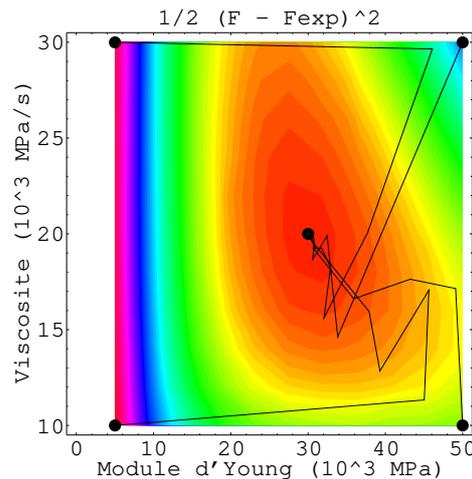


FIG. 3 - Trajet de l'algorithme

4 Conclusion

Le problème d'identification posé a été résolu par la méthode de l'état adjoint. Théoriquement parlant, cette méthode permet d'obtenir explicitement une caractérisation du minimiseur de la fonctionnelle coût ; numériquement parlant, elle fournit le gradient de la fonctionnelle coût au prix d'un calcul direct et d'un calcul adjoint, toujours linéaire. Ces derniers aspects la rendent préférable à la méthode de différences finies ou de différentiation directe (dans la mesure où le nombre de paramètres est supérieur au nombre de fonctionnelles coûts).

Références

- [1] L. BOURGEOIS - « *Contrôle optimal et problèmes inverses en plasticité* », Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique, 1998.
- [2] H.D. BUI - « *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux* », Eyrolles, 1993.
- [3] A. CONSTANTINESCU, N. TARDIEU - « *The adjoint state method applied to material identification through indentation tests* », Advances in Finite Element Procedures and Techniques, ed. B.H.V. Topping, Civil Comp Press, 1998.
- [4] A. HASANOV, Z. SEYIDMAMEDOV - « *The solution of an axisymmetric inverse elastoplastic problem using penetration diagrams* », Int. J. Non-Linear Mech., Vol. 30, 1995.
- [5] K.L. JOHNSON - « *Contact mechanics* », Cambridge University Press, 1985.
- [6] N. TARDIEU, S. TAHERI - « *Identification inverse de lois de comportement par indentation* », note EDF HI-74/98/037/A, à paraître.