



HAL
open science

Marche aléatoire sur un immeuble affine de type \tilde{A}_r et mouvement brownien de la chambre de Weyl

Bruno Schapira

► **To cite this version:**

Bruno Schapira. Marche aléatoire sur un immeuble affine de type \tilde{A}_r et mouvement brownien de la chambre de Weyl. 2006. hal-00114681v1

HAL Id: hal-00114681

<https://hal.science/hal-00114681v1>

Preprint submitted on 17 Nov 2006 (v1), last revised 25 May 2009 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Marche aléatoire sur un immeuble affine de type
 \tilde{A}_r et mouvement brownien de la chambre de
Weyl

Bruno Schapira

17 novembre 2006

*Université d'Orléans,
Fédération Denis Poisson, Laboratoire MAPMO
B.P. 6759, 45067 Orléans cedex 2, France .*

*Université Pierre et Marie Curie,
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires,
4 place Jussieu,
F-75252 Paris cedex 05, France.*

Résumé

Dans cet article nous exhibons une chaîne de Markov sur un immeuble affine, dont la partie radiale convenablement renormalisée converge vers le mouvement brownien de la chambre de Weyl (pour le type A). C'est une nouvelle discrétisation de ce processus, alternative à celle de Biane [4]. Les ingrédients principaux de la preuve sont une formule combinatoire sur l'immeuble, ainsi que l'estimation du noyau de la chaleur récemment obtenue dans [2]. Par ailleurs notre résultat met en évidence une correspondance au niveau probabiliste entre les espaces symétriques riemanniens de type non compact G/K [1], la théorie de Heckman-Opdam [22], et les immeubles affines. Celle-ci avait déjà été observée en rang 1 par Bougerol et Jeulin [10].

Mots clés : Marche aléatoire, immeuble affine, système de racines, processus GUE.

Classification A.M.S. : 05C25, 60B10, 60B15, 60C05, 60J10, 60J25, 60J35, 60J60.

e-mail : bruno.schapira@univ-orleans.fr

1 Introduction

Le mouvement brownien de la chambre de Weyl, ou MB intrinsèque, considéré par Biane dans [3] a connu assez récemment un intérêt grandissant du fait de son apparition dans de nombreuses branches des probabilités. Par exemple en dimension 1 c'est le Bessel-3 dont on connaît déjà bien l'importance. Mais plus généralement il apparaît entre autres en théorie des matrices aléatoires, des systèmes de particules, des files d'attente, des tableaux de Young, en percolation orientée (voir par exemple [17] pour un panorama général), ou encore dans la théorie des processus sur les espaces symétriques riemanniens [1], et plus récemment dans la théorie des processus de Dunkl et de Heckman-Opdam (cf [15] et [22] et les références citées). C'est un processus à valeurs dans une chambre de Weyl \mathfrak{a}_+ , c'est-à-dire grossièrement un cône de \mathbb{R}^r dont les bords sont délimités par certains hyperplans. Une façon élémentaire de le définir est de considérer le mouvement brownien tué au bord de la chambre de Weyl, et conditionné à ne jamais toucher le bord (cf partie préliminaire pour plus de précisions).

Une question de base est de trouver une version discrète naturelle de ce processus, c'est-à-dire une marche aléatoire qui, convenablement renormalisée, converge vers ce processus. Un exemple de telle marche a été introduit et étudié par Biane [4] [5] [6], puis Biane, Bougerol et O'Connell [7]. On peut la définir de manière analogue, en considérant la marche aléatoire simple sur le réseau des poids d'un système de racines, tuée au bord de la chambre de Weyl, et conditionnée à ne jamais toucher les bords. Disons simplement que le réseau des poids en question est un réseau dont les vecteurs de base engendrent les directrices du cône \mathfrak{a}_+ . On peut alors calculer explicitement son noyau de transition, à l'aide notamment du principe de réflexion, et montrer sa convergence vers le MB intrinsèque [7]. En fait [4] [6] cette marche apparaît aussi naturellement en cristallisant une marche aléatoire quantique sur le dual d'un groupe de Lie compact.

Dans cet article nous étudions une discrétisation alternative du MB intrinsèque, lorsque la chambre de Weyl est associée à un système de racines de type A (cf partie suivante). Dans ce cas le MB intrinsèque s'identifie au processus des valeurs propres d'une matrice hermitienne de trace nulle dont les coefficients sont des mouvements browniens complexes (dit aussi processus GUE). Notre discrétisation est obtenue à partir d'une certaine marche aléatoire au plus proche voisin ($X_n, n \geq 0$), sur (l'ensemble des sommets d') un immeuble affine de type \tilde{A}_r . Pour simplifier disons qu'un immeuble affine est un graphe contenant plusieurs sous-graphes, appelés appartements, isomorphes au réseau des poids. Une fois que l'on s'est fixé un appartement, disons P , et une partie positive P^+ , on définit la partie radiale d'un sommet x de l'immeuble, comme sa projection \bar{x} sur P^+ (cf partie suivante). Soit A l'opérateur de transition de ($X_n, n \geq 0$). Notons F_0 une certaine fonction propre positive de A au bas du

spectre (F_0 sera définie précisément dans la suite). Soit $(Y_n, n \geq 0)$ la F_0 -marche relativisée au sens de Doob. Soit $(Y_t^N, t \geq 0)$ la suite de F_0 -marches radiales renormalisées, définie par $Y_t^N = \frac{Y_{t(Nt)}}{\sqrt{N}}$, pour tout $N \geq 0$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$. Alors le principal résultat de cet article est que la suite de processus $(Y_t^N, t \geq 0)$ converge en loi, dans l'espace des trajectoires, vers le MB intrinsèque, lorsque N tend vers l'infini.

L'idée de ce résultat remonte à l'étude de Bougerol et Jeulin [10], qui le démontrent dans le cas des arbres homogènes, qui sont des immeubles de rang 1. En même temps ils démontrent également un résultat tout à fait analogue sur les espaces symétriques riemanniens de type non compact de rang 1 (en particulier sur tous les espaces hyperboliques réels ou complexes), qui sont des versions continus des arbres homogènes. Ils l'ont ensuite étendu avec Anker à tous les espaces symétriques riemanniens de rang supérieur [1] [9]. L'auteur l'a également montré dans le cadre général de la théorie de Heckman-Opdam [22]. On voit donc, et c'est là un autre intérêt de notre travail, que le résultat décrit plus haut est universel. Il établit une correspondance au niveau probabiliste entre les espaces symétriques riemanniens de type non compact, ou plus généralement la théorie de Heckman-Opdam, et les immeubles affines (de type \tilde{A}_r). Signalons quand même qu'une telle correspondance n'est pas surprenante, puisque les immeubles affines, excepté certains de type \tilde{A}_2 , sont aussi des (représentations géométriques d') espaces symétriques de type p -adique. En particulier il est bien connu que les théories analytiques ou géométriques (e.g. compactifications) sur ces espaces sont très similaires. Nous renvoyons aussi le lecteur à [13] ou [20] pour d'autres résultats probabilistes sur les immeubles (en particulier loi des grands nombres et théorème central limite).

Nous décrivons maintenant le plan de cet article. Dans la partie 2 nous rappelons certaines définitions et propriétés importantes des objets étudiés. Dans la partie suivante nous introduisons les F_0 -marches aléatoires, et montrons qu'elles apparaissent naturellement comme limites de ponts de longueur N , lorsque N tend vers l'infini. Puis dans la partie 4, nous donnons des formules explicites pour les probabilités de transition des parties radiales des marches aléatoires au plus proche voisin. Ceci nous permet dans la partie 5, de démontrer le résultat décrit précédemment, lorsque l'on renormalise le point de départ de $(X_n, n \geq 0)$ de façon à converger vers le MB intrinsèque partant d'un point à l'intérieur de la chambre de Weyl. On s'appuie pour cela sur un critère de Ethier et Kurtz [14] sur la convergence uniforme des générateurs. Enfin dans la dernière partie nous montrons la convergence vers le MB intrinsèque partant de 0. Ce dernier résultat est beaucoup plus difficile à obtenir, car on ne peut plus appliquer directement le critère de Ethier et Kurtz. On a en plus besoin d'un contrôle de la norme des processus en temps petit. Ceci s'obtient grâce aux estimations du noyau de la chaleur démontrées récemment dans [2]. Cependant ces estimations ne concernent qu'une marche aléatoire bien particulière, dite marche aléatoire simple (excepté pour $r = 2$, où les estimations sont démontrées pour toutes les marches symétriques au plus proche voisin). Notre dernier résultat se restreint

donc (sauf pour $r = 2$) à ce cas particulier.

2 Préliminaires

Le système de racines : Soit \mathfrak{a} un espace euclidien de dimension r , muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{a} + i\mathfrak{a}$ sa complexification. Soit $\mathcal{R} \subset \mathfrak{a}$ un *système de racine de type A_r* . On peut le définir (cf e.g. [11]) comme l'ensemble des vecteurs $e_i - e_j$, pour $1 \leq i \neq j \leq r+1$, où les e_i , $1 \leq i \leq r+1$, sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^{r+1} , et où \mathfrak{a} est l'hyperplan $\{\langle x, e_1 + \dots + e_{r+1} \rangle = 0\}$. Un sous-ensemble de *racines positives* \mathcal{R}^+ est défini ainsi : on choisit d'abord arbitrairement $u \in \mathfrak{a}$ tel que $\langle u, \alpha \rangle \neq 0$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$. Puis on pose $\mathcal{R}^+ = \{\alpha \in \mathcal{R} \mid \langle \alpha, u \rangle > 0\}$. La *chambre de Weyl positive* associée \mathfrak{a}_+ est définie par

$$\mathfrak{a}_+ = \{x \in \mathfrak{a} \mid \langle \alpha, x \rangle > 0, \forall \alpha \in \mathcal{R}^+\}.$$

On note $\overline{\mathfrak{a}_+}$ son adhérence, et $\partial\mathfrak{a}_+$ sa frontière. On note W_0 le groupe de Weyl, c'est-à-dire le sous-groupe fini de $\mathcal{O}(\mathfrak{a})$ engendré par les réflexions orthogonales r_α par rapport aux hyperplans orthogonaux aux racines $\alpha \in \mathcal{R}$. On note $\Pi := \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ une base (les éléments de Π sont appelés *racines simples*) de \mathcal{R}^+ , c'est-à-dire un sous-ensemble de \mathcal{R}^+ tel que pour tout $\alpha \in \mathcal{R}^+$, il existe des entiers positifs n_1, \dots, n_r tels que $\alpha = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$. On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ la base duale, i.e. $\forall i \neq j, \langle \alpha_i, \lambda_j \rangle = \delta_{i,j}$. Les éléments de la base duale sont appelés *poids fondamentaux*. Le *réseau des poids P* est par définition le \mathbb{Z} -réseau engendré par les poids fondamentaux. On note P^+ le sous-ensemble des poids positifs, i.e. appartenant à $\overline{\mathfrak{a}_+}$, et P^{++} celui des poids positifs réguliers, i.e. appartenant à \mathfrak{a}_+ . On note \tilde{W} le groupe de Weyl affine étendu (essentiellement engendré par W_0 et les translations par des éléments de P , cf [11]). On peut définir (cf [18]) une fonction $w \mapsto q_w$ sur \tilde{W} telle que, si t_λ est la translation de vecteur $\lambda \in P$, alors

$$q_{t_\lambda} = q^{\sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \langle \alpha, \lambda \rangle}.$$

Si $\lambda \in P^+$, et si $\lambda = \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i$, alors sa longueur est définie par $|\lambda| = \sum_{i=1}^r n_i$.

L'immeuble affine : Soit \mathcal{X} l'ensemble des sommets d'un immeuble affine de type \tilde{A}_r et de paramètre q . Plutôt que de donner une définition précise, ce qui serait relativement fastidieux, nous avons choisi de ne présenter ici que quelques propriétés importantes des immeubles utiles à la compréhension de cet article (cf e.g. [21] [12] ou [19] pour plus de détails). Nous rappelons donc qu'un immeuble affine est un complexe simplicial. Les simplexes de dimension 0 sont appelés les *sommets*, et ceux de dimension maximale r sont appelés les *chambres*. Signalons tout de suite pour éviter toute ambiguïté que les chambres de l'immeuble (appelées aussi parfois *alcoves*), qui sont des simplexes compacts, n'ont rien à voir avec la chambre de Weyl positive, qui est une chambre du système de racines, et en particulier un cône ouvert non borné de \mathfrak{a} .

Les simplexes de dimension $r - 1$ sont appelés les *faces*. On dit que deux chambres de l'immeuble sont voisines si elles sont distinctes, et ont une face en commun. On appelle galerie toute suite de chambres (C_1, \dots, C_n) telle que pour tout $i \leq n - 1$, C_i et C_{i+1} soient voisines. On appellera n la longueur de la galerie. On appelle aussi distance entre deux chambres, la longueur minimale d'une galerie allant d'une chambre à l'autre. Soit C une chambre et F une de ses faces. Par définition, q est le nombre de chambres voisines de C qui contiennent F . En particulier ce nombre ne dépend ni de C ni de F . Pour $r = 1$ par exemple, \mathcal{X} est un arbre homogène, où chaque sommet a $q + 1$ voisins.

Par définition \mathcal{X} contient plusieurs sous-complexes, appelés appartements, isomorphes au complexe simplicial dont les sommets sont les points de P (cf e.g. [21] pour plus de détails). De plus si l'on fixe un sommet O de \mathcal{X} et un appartement P (identifié ici au réseau des poids) contenant O , alors pour tout autre sommet x de \mathcal{X} il existe un unique isomorphisme qui fixe O et qui envoie x sur un sommet \bar{x} de P^+ . On appelle \bar{x} la coordonnée ou partie radiale de x (que l'on identifie à un poids positifs). Lorsque $r = 1$ par exemple, P^+ est l'ensemble des entiers \mathbb{N} , et \bar{x} est la distance de x à l'origine. Pour $\lambda \in P^+$, on note $V_\lambda(0)$ l'ensemble des sommets de coordonnée λ , et on l'appelle *sphère de rayon λ centrée en O* . De même, pour tout couple de sommets x et y il existe un unique isomorphisme envoyant x en 0 , et y en un sommet de P^+ . On note alors $V_\lambda(x)$ l'ensemble des sommets y qui sont envoyés sur $\lambda \in P^+$ par cet isomorphisme. Pour tout $\lambda \in P^+$, $V_\lambda(x)$ est un sous-ensemble fini de \mathcal{X} , dont le cardinal N_λ est indépendant de x . Pour $\lambda \in P$, soit $W_{0\lambda}$ le stabilisateur de λ sous l'action de W_0 . On a la formule suivante :

$$N_\lambda = \frac{W_0(q^{-1})}{W_{0\lambda}(q^{-1})} q_{t_\lambda},$$

où $V(q^{-1}) = \sum_{w \in V} q_w^{-1}$ pour tout sous-groupe V de W_0 . On définit enfin la fonction π sur P par

$$\pi(\lambda) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \langle \alpha^\vee, \lambda \rangle.$$

Les polynômes de Macdonald : Les fonctions \mathbf{c} et h sont définies pour $z \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ par

$$\mathbf{c}(z) = \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \frac{1 - q^{-1} e^{-\langle \alpha^\vee, z \rangle}}{1 - e^{-\langle \alpha^\vee, z \rangle}},$$

et

$$h(z) = \sum_{i=1}^r \sum_{\lambda \in W_0 \lambda_i} e^{\langle \lambda, z \rangle}.$$

On notera aussi $\tilde{h} = \frac{h}{h(0)}$. Les polynômes de Macdonald sont définis (cf par exemple [12] ou [18]) pour $\lambda \in P^+$ et $z \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ par

$$P_\lambda(z) = \frac{q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}}}{W_0(q^{-1})} \sum_{w \in W_0} \mathbf{c}(w^{-1}z) e^{\langle w\lambda, z \rangle}. \quad (1)$$

On définit également la fonction F_0 sur P^+ par

$$F_0(\lambda) = P_\lambda(0).$$

On rappelle l'estimation dans P^+ (cf [2]) :

$$F_0(\lambda) \asymp q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}} \prod_{\alpha \in \mathcal{R}^+} (1 + \langle \alpha, \lambda \rangle), \quad (2)$$

et lorsque $\langle \alpha, \lambda \rangle \rightarrow +\infty$ pour tout $\alpha \in \mathcal{R}^+$,

$$F_0(\lambda) \sim q_{t_\lambda}^{-\frac{1}{2}} \pi(\lambda). \quad (3)$$

Marche aléatoire symétrique au plus proche voisin : Par définition, c'est une chaîne de Markov $(X_n, n \geq 0)$ sur \mathcal{X} , dont les probabilités de transition sont égales à

$$p(x, y) = \begin{cases} p_i & \text{si } y \in V_{\lambda_i}(x), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les p_i satisfont la condition $\sum_{i=1}^r p_i N_{\lambda_i} = 1$. Soit

$$\tilde{\rho} = \sum_{i=1}^r p_i q_{t_{\lambda_i}}^{\frac{1}{2}} |W_0 \lambda_i|,$$

le *rayon spectral*. La *marche radiale* est par définition la chaîne de Markov $(\overline{X}_n, n \geq 0)$ sur P^+ . On notera \bar{p} son noyau de transition. Un cas particulier important qui sera étudié dans cet article est la *marche aléatoire simple*. Ses probabilités de transition sont définies par

$$p_i = \frac{q_{t_{\lambda_i}}^{-\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^r q_{t_{\lambda_i}}^{-\frac{1}{2}} N_{\lambda_i}}, \quad (4)$$

pour tout $i \leq r$. Pour cette marche on dispose d'une formule intégrale relativement simple pour le noyau de transition (cf [2]), ce qui explique d'ailleurs son nom : si

$$U = \{\theta \in \mathfrak{a} \mid \forall w \in W_0, \forall i \leq r, \quad |\langle w \alpha_i, \theta \rangle| \leq \pi\},$$

et si $p^n(0, x)$ est la probabilité, partant de 0, d'arriver au sommet $x \in V_\lambda(0)$ en n pas, alors

$$p^n(0, x) = \text{const} \cdot \tilde{\rho}^n \int_U \tilde{h}^n(i\theta) P_\lambda(i\theta) \frac{d\theta}{|c(i\theta)|^2}. \quad (5)$$

Le mouvement brownien de la chambre de Weyl : Ce processus est aussi appelé parfois le mouvement brownien intrinsèque. Il existe de nombreuses définitions et interprétations de ce processus, dont nous ne mentionnerons ici que

certaines. Une façon élémentaire de le définir (cf Biane [3], ou Anker, Bougerol et Jeulin [1]) est de considérer le π -processus au sens de Doob du mouvement brownien standard dans \mathfrak{a} tué au bord de \mathfrak{a}_+ . En fait, comme l'a noté Biane, π étant l'unique (à une constante multiplicative près) fonction harmonique positive qui s'annule sur $\partial\mathfrak{a}_+$, on peut l'interpréter comme le mouvement brownien standard partant d'un point de \mathfrak{a}_+ , tué au bord de \mathfrak{a}_+ , et conditionné à ne jamais toucher les bords de la chambre. C'est donc de ce point de vue une généralisation naturelle du Bessel-3 en dimension plus grande que 1. Pour d'autres propriétés de ce processus qui renforcent cette idée, nous renvoyons à l'article de Biane, Bougerol et O'Connell [7]. Il y est en particulier démontré qu'il s'obtient par une transformation du mouvement brownien qui généralise celle classique de Pitman $2S - B$ en dimension 1. On peut aussi le définir comme le processus de Dunkl de paramètre 1 (cf [15]). En particulier c'est un processus de Feller de générateur D (cf [22]) défini pour f régulière et W_0 -invariante par

$$Df(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x) + \langle \nabla \log \pi, \nabla f \rangle(x),$$

pour tous $x \in \overline{\mathfrak{a}_+}$. Enfin la loi de ce processus partant de 0 a pour densité (cf [1])

$$p_t(0, x) = \text{const} \cdot \frac{1}{t^{|\mathcal{R}_+| + \frac{r}{2}}} \pi(x)^2 e^{-\frac{|x|^2}{2t}},$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathfrak{a}_+$.

Remerciements : Ce travail fait partie de ma thèse. Je remercie chaleureusement mes directeurs Jean-Philippe Anker et Philippe Bougerol de m'avoir suggéré d'étudier ce problème.

3 La F_0 -marche aléatoire

Soit $(X_n, n \geq 0)$ une marche symétrique au plus proche voisin, de noyau de transition p . La fonction F_0 est fonction propre de son opérateur de transition (cf [18]) :

$$\sum_{y \in \mathcal{X}} p(x, y) F_0(\bar{y}) = \tilde{\rho} F_0(\bar{x}),$$

pour tout $x \in \mathcal{X}$. La F_0 -marche aléatoire $(Y_n, n \geq 0)$ est alors la chaîne de Markov sur \mathcal{X} dont le noyau de transition q est défini par

$$q(x, y) = p(x, y) \frac{F_0(\bar{y})}{F_0(\bar{x})} \tilde{\rho}^{-1}.$$

On note $(X_n^{N,0}, n \geq 0)$ le pont de longueur N autour de 0, i.e. la marche aléatoire partant de 0 et conditionnée à revenir en 0 au temps N . La proposition qui suit montre que la F_0 -marche peut être vue comme la première moitié d'un

lacet de longueur infinie autour de 0. C'est l'analogie d'un résultat sur les espaces symétriques G/K [1], étendu ensuite à la théorie de Heckman-Opdam [22].

Proposition 3.1 *Lorsque $N \rightarrow +\infty$, $(X_n^{N,0}, n \geq 0)$ converge en loi vers $(Y_n, n \geq 0)$.*

Preuve : Soit \mathbb{P} la loi de $(X_n, n \geq 0)$ et $\mathcal{F}_n := \sigma(X_k, k \leq n)$ sa filtration naturelle. Soit $\mathbb{P}^{N,0}$ la loi de $(X_n^{N,0}, n \geq 0)$. On a la relation d'absolue continuité suivante :

$$\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_n}^{N,0} = \frac{p^{N-n}(0, X_n)}{p^N(0, 0)} \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_n}, \quad (6)$$

pour tout $n \geq 0$. Supposons maintenant pour simplifier un peu, que $(X_n, n \geq 0)$ soit la marche simple. Alors d'après (5), pour tout $\lambda \in P^+$ et tout $x \in V_\lambda(0)$,

$$\frac{p^{N-n}(0, x)}{p^N(0, 0)} = \tilde{\rho}^{-n} \frac{\int_U \tilde{h}^{N-n}(i\theta) P_\lambda(i\theta) \frac{d\theta}{|c(i\theta)|^2}}{\int_U \tilde{h}^N(i\theta) P_0(i\theta) \frac{d\theta}{|c(i\theta)|^2}}.$$

On effectue dans les deux intégrales précédentes, les changements de variables respectifs $\theta \rightarrow \frac{\theta}{\sqrt{N-n}}$ et $\theta \rightarrow \frac{\theta}{\sqrt{N}}$. On remarque ensuite que

$$\tilde{h}^N\left(i \frac{\theta}{\sqrt{N}}\right) \rightarrow e^{-\text{const} \cdot \sum_{\lambda \in \lambda, \theta >^2},}$$

lorsque $N \rightarrow +\infty$. De plus $\frac{1}{c(i\theta)}$ est équivalent (à une constante près) à $\pi(i\theta)$ en 0. On obtient donc la convergence suivante :

$$\frac{p^{N-n}(0, x)}{p^N(0, 0)} \rightarrow \tilde{\rho}^{-n} \frac{P_\lambda(0)}{P_0(0)},$$

lorsque $N \rightarrow +\infty$, ce qui avec la relation (6) prouve la proposition pour la marche simple. Dans le cas général, \tilde{h} doit être remplacé par une certaine somme d'exponentielles, mais dont les coefficients ne sont pas nécessairement tous égaux (cf [19]). Néanmoins la preuve reste inchangée. ■

4 Probabilités de transition de la marche radiale

Dans cette partie nous donnons des formules explicites pour les probabilités de transition d'une marche radiale au plus proche voisin. Elles seront utilisées dans la partie suivante pour démontrer le théorème 5.1. Ces formules se ramènent en fait à un calcul combinatoire sur l'immeuble (proposition 4.1 ci-dessous), qui peut aussi être intéressant en soi. On peut trouver un résultat similaire dans [13], et dans la thèse de Parkinson [19] pour tous les immeubles de rang 2.

Proposition 4.1 *Pour tout $\lambda \in P^{++}$, tout sommet $x_\lambda \in V_\lambda(0)$, tout $w \in W_0$ et tout $i \in \{1, \dots, r\}$,*

$$|V_{\lambda+w\lambda_i}(0) \cap V_{\lambda_i}(x_\lambda)| = q_{\lambda_i}^{\frac{1}{2}} q_{t_w\lambda_i}^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve : Fixons $\lambda \in P^{++}$ et $x_\lambda \in V_\lambda(0)$. Soit w' de longueur maximale tel que $w'\lambda_i = w\lambda_i$. Comme la formule recherchée ne change pas quand on remplace w par w' , on peut supposer que $w = w'$. Maintenant par définition de q , on sait que chaque fois que l'on fixe une face F de dimension $r - 1$ contenant x_λ , il y a $q + 1$ chambres qui contiennent F . Autrement dit à chaque fois que l'on fixe une chambre C et une de ses faces F , il y a exactement q sommets x de l'immeuble, tels que (F, x) définisse une chambre différente de C . Notons C_+ et C_- les chambres (dans $\overline{\mathfrak{a}_+}$) contenant λ et tous les poids $\lambda + \lambda_i$, respectivement $\lambda - \lambda_i$, pour $i = 1, \dots, r$. On notera aussi $C_w := wC_+$. On sait (cf [19]) que pour tout i ,

$$|V_{\lambda-\lambda_i}(0) \cap V_{\lambda_j}(x_\lambda)| = 1,$$

si $-\lambda_i \in W_0\lambda_j$. Autrement dit il existe une unique chambre dans l'immeuble, que l'on notera aussi C_- , qui contienne x_λ et dont les sommets aient pour coordonnées $\lambda, \lambda - \lambda_1, \dots, \lambda - \lambda_r$. De même pour tout sommet x de l'immeuble, il existe une unique chambre C_x de l'immeuble contenant x , et à distance minimale de C_- . On en déduit que

$$|V_{\lambda+w\lambda_i}(0) \cap V_{\lambda_i}(x_\lambda)| = q^{l_w},$$

où l_w est la longueur d'une galerie de longueur minimale allant de C_- à (une chambre dont la partie radiale est) C_w . En effet d'une part, d'après la discussion précédente, il existe q^{l_w} telles galeries, et pour chacune d'entre elle, il existe $x \in V_{\lambda+w\lambda_i}(0) \cap V_{\lambda_i}(x_\lambda)$ tel que C_x soit la dernière chambre de la galerie. D'autre part deux galeries distinctes peuvent avoir les mêmes premières chambres, mais à partir d'un moment elles n'ont plus aucune chambre en commun (c'est immédiat par récurrence sur la longueur de la galerie), et elles aboutissent donc nécessairement à deux points x et x' distincts. Il est maintenant bien connu que, si l'on note $l(w)$ la longueur de w , alors

$$l_w = |W_0| - l(w) = |\mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+|.$$

De plus, vu le choix de w que l'on a fait, on a

$$|\mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+| = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+} \langle \alpha, \lambda_i \rangle.$$

En effet, pour tout $\alpha \in \mathcal{R}^+$, $\langle \alpha, \lambda_i \rangle$ est égal à 0 ou 1. Mais s'il existe $\alpha \in \mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+$ tel que $\langle \alpha, \lambda_i \rangle = 0$, alors déjà en décomposant α dans la base Π , on s'aperçoit que l'on peut supposer $\alpha \in \Pi$. Par ailleurs $r_\alpha\lambda_i = \lambda_i$, donc $wr_\alpha\lambda_i = w\lambda_i$. Enfin puisque $\alpha \in \Pi$, r_α établit une bijection entre

$\mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+ \setminus \{\alpha\}$ et $\mathcal{R}^+ \cap (wr_\alpha)^{-1}\mathcal{R}^+$. Donc $l(wr_\alpha) = l(w) + 1$, et l'on a une absurdité. Pour conclure il suffit de remarquer la formule élémentaire

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+ \cap w^{-1}\mathcal{R}^+} \langle \alpha, \lambda_i \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \langle \alpha, \lambda_i \rangle + \sum_{\alpha \in \mathcal{R}^+} \langle \alpha, w\lambda_i \rangle \right\},$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. \blacksquare

On peut déduire de la proposition précédente les probabilités de transition d'une marche aléatoire radiale :

$$\bar{p}(\lambda, \lambda + w\lambda_i) = q_{t\lambda_i}^{\frac{1}{2}} q_{t_w\lambda_i}^{\frac{1}{2}} p_i,$$

pour tout $\lambda \in P^{++}$. En particulier pour la marche aléatoire simple, elles sont données d'après (4) par

$$\bar{p}(\lambda, \lambda + w\lambda_i) = \frac{q_{t_w\lambda_i}^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^r q_{t\lambda_i}^{-\frac{1}{2}} N_{\lambda_i}}.$$

5 Convergence vers le MB intrinsèque partant d'un point intérieur

Soit $x \in \mathcal{X}$ et soit $(X_n^x, n \geq 0)$ une marche aléatoire symétrique au plus proche voisin partant de x . Notons $(Y_n^x, n \geq 0)$ la F_0 -marche aléatoire partant de x .

Si $a \in \mathfrak{a}_+$, on notera $[a]$ un des poids (peu importe lequel) de P^+ qui est à distance minimale de a . Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $(Y_t^{N,a}, t \geq 0)$ la F_0 -marche radiale renormalisée partant de a . Elle est définie pour $t \in \mathbb{R}^+$ par

$$Y_t^{N,a} = \frac{Y_{[Nt]}^{[\sqrt{N}a]}}{\sqrt{N}}.$$

Nous pouvons maintenant déduire des formules de la partie précédente le

Théorème 5.1 *Lorsque $N \rightarrow \infty$, la suite de processus $(Y_t^{N,a}, t \geq 0)$ converge en loi dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \bar{\mathfrak{a}}_+)$ vers le mouvement brownien intrinsèque partant de a .*

Preuve : Rappelons que le mouvement brownien intrinsèque partant de $a \in \mathfrak{a}_+$ est à trajectoires dans \mathfrak{a}_+ . Il en résulte que c'est un processus de Feller de générateur D , dont un core est $C_c^\infty(\mathfrak{a}_+)$, l'espace des fonctions C^∞ à support compact inclus dans \mathfrak{a}_+ . D'autre part, d'après les calculs de la partie 4, le générateur A^N de $(Y_t^{N,a}, t \geq 0)$ est défini pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_+)$ par

$$A_N f(\lambda) = \tilde{\rho}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^r q_{t\lambda_i}^{\frac{1}{2}} p_i \sum_{w \in W_0 \lambda_i} q_{t_w\lambda_i}^{\frac{1}{2}} \frac{F_0(\sqrt{N}\lambda + w\lambda_i)}{F_0(\sqrt{N}\lambda)} f\left(\lambda + \frac{w\lambda_i}{\sqrt{N}}\right) \right\} - f(\lambda),$$

pour tous $\lambda \in \frac{P^+}{\sqrt{N}}$. De plus, tout polynôme homogène W_0 -invariant de degré 2 est proportionnel à $|\cdot|^2$. En particulier, quitte à bien normaliser \mathcal{R} , et d'après (3), on obtient que pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{a}_+)$, $A_N f$ converge uniformément vers Df sur \mathfrak{a}_+ . On en déduit le théorème d'après les théorèmes 6.1 p. 28 et 2.5 p. 167 dans [14]. ■

6 Le cas de la marche aléatoire simple

On souhaite maintenant obtenir un résultat de convergence vers le mouvement brownien intrinsèque partant de 0. C'est en fait plus compliqué à démontrer que le théorème 5.1, puisque dans ce cas le critère de Ethier et Kurtz ne s'applique pas directement. En effet, un core du MB intrinsèque partant de 0, contient a priori des fonctions continues non nulles en 0. Or, pour ces fonctions, il n'est pas du tout clair, si la suite $A_N f$ converge uniformément vers Df sur $\overline{\mathfrak{a}_+}$. Par contre, comme le MB intrinsèque est à valeurs dans \mathfrak{a}_+ pour $t > 0$, le critère s'applique pour $t \geq \eta$ pour tout $\eta > 0$. Il ne reste alors plus qu'à obtenir un bon contrôle de ce qui se passe en temps petit. Un moyen pour cela est d'avoir de bonnes estimations du noyau de la chaleur. Or, sauf pour $r = 2$, les seules estimations suffisamment précises dont on dispose ne sont connues que pour la marche aléatoire simple sur les immeubles de type \tilde{A}_r (cf [2]). C'est pourquoi dans le résultat qui suit, on se restreindra à ce cas particulier.

On note $(Y_t^N, t \geq 0)$ la F_0 -marche simple radiale renormalisée partant de 0, et $(I_t, t \geq 0)$ le MB intrinsèque partant de 0.

Théorème 6.1 *La suite $(Y_t^N, t \geq 0)$ converge en loi dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \overline{\mathfrak{a}_+})$ vers $(I_t, t \geq 0)$, lorsque $N \rightarrow +\infty$.*

Preuve : La preuve se divise en deux étapes. On montre d'abord la convergence en loi unidimensionnelle (lemme 6.1 ci-dessous), ce qui permet d'après le critère de Ethier et Kurtz, d'en déduire la convergence en loi sur $[\eta, +\infty)$, pour tout $\eta > 0$. Puis on montre un résultat de tension, ce qui permet de conclure la preuve par des théorèmes généraux.

Lemme 6.1 *Pour tout $t \geq 0$, Y_t^N converge en loi vers I_t , lorsque $N \rightarrow \infty$.*

Preuve du lemme : Soit $f = 1_K$ la fonction indicatrice d'un compact K de \mathfrak{a}_+ , et soit $q^n(0, \cdot)$ le noyau de transition de $(Y_n, n \geq 0)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(Y_t^N)] &= \sum_{\lambda \in P^+} q^{[Nt]}(0, \lambda) N_\lambda f\left(\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\right) \\ &= \frac{1}{N^{\frac{r}{2}}} \sum_{u \in \frac{P^+}{\sqrt{N}} \cap K} N^{\frac{r}{2}} q^{[Nt]}(0, \sqrt{N}u) N_{\sqrt{N}u}. \end{aligned}$$

Signalons maintenant que pour tout $u \in \overline{\mathfrak{a}_+}$,

$$|u|^2 := \frac{1}{h(0)} \sum_{i=1}^r \sum_{\lambda \in W_0 \lambda_i} \langle \lambda, u \rangle^2,$$

est égal (à une bonne normalisation de \mathcal{R}^+ près) à la norme euclidienne au carré de u . Nous allons montrer que pour tout $u \in \frac{P^{++}}{\sqrt{N}}$,

$$N^{\frac{\varepsilon}{2}} q^{[Nt]}(0, \sqrt{N}u) N_{\sqrt{N}u} \rightarrow \text{const} \cdot \frac{\pi(u)^2}{t^{|\mathcal{R}^+| + \frac{\varepsilon}{2}}} e^{-\frac{|u|^2}{2t}}, \quad (7)$$

lorsque $N \rightarrow \infty$. La limite étant justement la densité de la loi de I_t , on en déduira le lemme par un argument classique d'approximation d'une intégrale par une série, et le lemme de Sheffé. Déjà rappelons que

$$q^n(0, \lambda) = p^n(0, \lambda) \frac{F_0(\lambda)}{F_0(0)} \tilde{\rho}^{-n},$$

pour tout $\lambda \in P^+$ et tout $n \geq 0$. De plus d'après (5), et par W_0 -invariance de h , on a

$$p^n(0, \lambda) = \text{const} \cdot \tilde{\rho}^n q_{t\lambda}^{-\frac{1}{2}} \int_U \tilde{h}^n(i\theta) e^{i\langle \lambda, \theta \rangle} \frac{d\theta}{c(-i\theta)}.$$

En faisant le changement de variable $\theta \rightarrow \frac{\theta}{\sqrt{[Nt]}}$ dans l'intégrale, et en utilisant (3), on obtient

$$N^{\frac{\varepsilon}{2}} q^{[Nt]}(0, \sqrt{N}u) N_{\sqrt{N}u} \sim \text{const} \cdot \frac{\pi(u)}{t^{\frac{|\mathcal{R}^+| + \varepsilon}{2}}} \int e^{-\frac{1}{2}|\theta|^2 + i\langle \theta, \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{[Nt]}}u \rangle} \pi(-i\theta) b\left(-\frac{i\theta}{\sqrt{[Nt]}}\right) d\theta,$$

où b est la fonction continue, non nulle en 0, définie par $\pi b = \frac{1}{c}$. On effectue alors le changement de variables $\theta \rightarrow \theta + i\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{[Nt]}}u$, et on obtient l'équivalent

$$\text{const} \cdot \frac{\pi(u)}{t^{\frac{|\mathcal{R}^+| + \varepsilon}{2}}} e^{-\frac{|u|^2}{2t}} \int e^{-\frac{1}{2}|\theta|^2} \pi(-i\theta + \frac{u}{\sqrt{t}}) d\theta.$$

Pour conclure, remarquons que le polynôme défini pour $x \in \mathfrak{a}$ par

$$r(x) := \int e^{-\frac{1}{2}|\theta|^2} \pi(-i\theta + x) d\theta.$$

est anti W_0 -invariant, et de degré exactement $|\mathcal{R}^+|$. Il est donc égal (à une constante multiplicative près) à π (cf [16]), ce qui prouve (7). La preuve du lemme est terminée. \blacksquare

Montrons maintenant le résultat de tension suivant :

Proposition 6.1 *Soient $\alpha > 0$ et $\epsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que*

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\sup_{t \leq \eta} |Y_t^N| \geq \alpha \right] \leq \epsilon.$$

Preuve de la proposition : L'idée de la preuve est tirée de Billingsley [8]. Soit

$$A = \left\{ \sup_{k \leq [N\eta]} |Y_k| \geq \alpha\sqrt{N} \right\}.$$

On commence par écrire A comme la réunion disjointe suivante

$$A = \prod_{k=1}^{[N\eta]} A_k,$$

où

$$A_k = \left\{ |Y_1| < \alpha\sqrt{N}, \dots, |Y_{k-1}| < \alpha\sqrt{N}, |Y_k| \geq \alpha\sqrt{N} \right\}.$$

Maintenant pour $K > 0$ et $\eta > 0$ tel que $\frac{\alpha}{\eta} > K$, soit

$$B = \left\{ |Y_{[N\eta]}| \geq \left(\frac{\alpha}{\eta} - K\right)\sqrt{N\eta} \right\}.$$

D'après la propriété de Markov, on a

$$\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B] + \sum_{k=1}^{[N\eta]} \mathbb{P}[A_k] \mathbb{P}\left[|Y_{[N\eta]} - Y_k| \geq K\sqrt{N\eta}\right]. \quad (8)$$

Nous avons maintenant besoin du lemme suivant

Lemme 6.2 *On a*

$$\sup_{l \geq 0} \mathbb{P}\left[|Y_l| \geq K\sqrt{l}\right] \rightarrow 0,$$

lorsque $K \rightarrow \infty$.

Preuve du lemme : D'après les estimations de [2], il existe des constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que

$$q^l(0, x)N_{\bar{x}} \leq C \frac{|x|^{2|\mathcal{R}^+|}}{l^{|\mathcal{R}^+| + \frac{r}{2}}} e^{-c\frac{|x|^2}{l}},$$

pour tout $x \neq 0$ et tout $l \geq |x|$. On en déduit que

$$\sum_{|x| \geq K\sqrt{l}} q^l(0, x)N_{\bar{x}} \leq \frac{C}{l^{|\mathcal{R}^+| + \frac{r}{2}}} \int_{|u| \geq K\sqrt{l}} |u|^{2|\mathcal{R}^+|} e^{-c\frac{|u|^2}{l}} du.$$

En faisant le changement de variable $u \rightarrow \sqrt{l}u$, on en déduit le lemme. \blacksquare

D'après le lemme

$$\mathbb{P}\left[|Y_{[N\eta]} - Y_k| \geq K\sqrt{N\eta}\right] \leq \mathbb{P}\left[|Y_{[N\eta]}| \geq \frac{K}{2}\sqrt{N\eta}\right] + \mathbb{P}\left[|Y_k| \geq \frac{K}{2}\sqrt{N\eta}\right] \leq \frac{1}{2},$$

pour K assez grand. Alors d'après (8)

$$\mathbb{P}[A] \leq 2\mathbb{P}[B],$$

si K est suffisamment grand. Par ailleurs toujours d'après le lemme $\mathbb{P}[B]$ tend vers 0 lorsque η tend vers 0, ce qui prouve la proposition. ■

Le théorème 6.1 résulte maintenant de théorèmes généraux (cf par exemple [8] ou le théorème 7.2 p. 128 dans [14]). ■

Remarque 6.1 Comme mentionné précédemment, lorsque $r = 2$ les estimations de [2] sont valides pour toutes les marches aléatoires symétriques au plus proche voisin. Le théorème 6.1 est donc aussi valable pour ces marches dans le cas $r = 2$.

Références

- [1] **Anker J-Ph., Bougerol Ph., Jeulin T.** : *The infinite Brownian loop on a symmetric space*, Rev. Mat. Iberoamericana 18 (2002), 41–97.
- [2] **Anker J-Ph., Schapira Br., Trojan B.** : *Heat kernel and Green function estimates on affine buildings of type \tilde{A}_r* , en préparation.
- [3] **Biane Ph.** : *Quelques propriétés du mouvement Brownien dans un cône*, Stochastic Proc. Appl. 53 (1994), 233–240.
- [4] **Biane Ph.** : *Quantum random walk on the dual of $SU(n)$* , Probab. Th. Rel. Fields 89, (1991), 117–129.
- [5] **Biane Ph.** : *Minuscule weights and random walks on lattices*, Quantum probability and related topics, QP-PQ, VII, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (1992), 51–65.
- [6] **Biane Ph.** : *Équation de Choquet-Deny sur le dual d'un groupe compact*, Probab. Th. Rel. Fields 94, (1992), 39–51.
- [7] **Biane Ph., Bougerol Ph., O'Connell N.** : *Littelmann paths and Brownian paths*, Duke Math. J. 130 (2005), 127–167.
- [8] **Billingsley P.** : *Convergence of Probability measures*, Wiley Series in Probability and Statistics, a Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, Inc., New York, (1999).
- [9] **Bougerol Ph., Jeulin T.** : *Brownian bridge on Riemannian symmetric spaces*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333 (2001), 785–790.
- [10] **Bougerol Ph., Jeulin T.** : *Brownian bridge on hyperbolic spaces and on homogeneous trees*, Probab. Th. Rel. Fields 115, (1999), 95–120.
- [11] **Bourbaki N.** : *Groupes et algèbres de Lie*, Ch. 4-6, Hermann, Paris, (1968); Masson, Paris, (1981).
- [12] **Cartwright D.I.** : *Spherical harmonic analysis on buildings of type \tilde{A}_n* , Monatsh. Math. 133, (2001), 93–109.

- [13] **Cartwright D. I., Woess W.** : *Isotropic random walks in a building of type \tilde{A}_d* , Math. Z. 247, (2004), 101–135.
- [14] **Ethier N., Kurtz G.** : *Markov processes. Characterization and convergence*, Wiley Series in Probab. Math. Stat. (1986).
- [15] **Gallardo L., Yor M.** : *Some new examples of Markov processes which enjoy the time-inversion property*, Probab. Th. Rel. Fields 132, (2005), 150–162.
- [16] **Helgason S.** : *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press, (1984).
- [17] **O’Connell N.** : *Random matrices, non-colliding processes and queues*, Sémin. Probab. XXXVI, LNM 1801, Springer, (2003), 165–182.
- [18] **Parkinson J.** : *Spherical harmonic analysis on affine buildings*, Math. Z. 253, (2006), 571–606.
- [19] **Parkinson J.** : *Buildings and Hecke Algebras*, Ph.D. thesis, University of Sydney, (2005).
- [20] **Parkinson J.** : *Isotropic random walks on affine buildings*, à paraître aux Annales de l’Institut Fourier.
- [21] **Ronan M.** : *Lectures on buildings*, Perspectives in Mathematics 7, Academic Press, Boston, MA, (1989).
- [22] **Schapira Br.** : *The Heckman-Opdam Markov processes*, arxiv : math.PR/0605020.