



HAL
open science

Identification par exploitation de mesures de champs

Marc Bonnet

► **To cite this version:**

Marc Bonnet. Identification par exploitation de mesures de champs. 17e Congrès Français de Mécanique 2005, Aug 2005, Troyes, France. hal-00114507

HAL Id: hal-00114507

<https://hal.science/hal-00114507v1>

Submitted on 27 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Identification par exploitation de mesures de champs

Marc Bonnet

Laboratoire de Mécanique des Solides, CNRS UMR 7649
Département de Mécanique, Ecole Polytechnique, F-91128 Palaiseau cedex
bonnet@lms.polytechnique.fr

Résumé: La caractérisation de la réponse mécanique de matériaux ou structures à l'aide de mesures de champs constitue une approche prometteuse en mécanique expérimentale. Il s'agit d'effectuer et d'exploiter des expériences donnant lieu à des états de déformation hétérogènes. En particulier, on cherche à partir de mesures de champs cinématiques à identifier le maximum de paramètres impliqués dans les mesures. Parmi les avantages potentiels figurent la diminution du nombre de tests et la possibilité de définir des configurations expérimentales optimales, non limitées par une contrainte d'homogénéité. Contrairement au cas homogène, le lien entre les paramètres de comportement (ou autres) et les mesures de champs est implicite, à travers les équations de comportement, de compatibilité et d'équilibre. En pratique, ces équations sont en général utilisées dans une forme faible, avec de nombreuses variantes parmi lesquelles choisir. Plusieurs stratégies spécifiquement destinées à l'identification de paramètres de comportement à partir de mesures de champs cinématiques sont actuellement en cours de développement et d'analyse dans plusieurs équipes françaises. Ces travaux sont fédérés sous l'égide du GDR 2519 du CNRS, cadre dans lequel les équipes impliquées s'emploient actuellement à la classification de ces techniques et à l'étude comparative de leurs performances pour des jeux de données réels. Cette communication a pour but de présenter l'état actuel de cette synthèse et les résultats disponibles au moment de la conférence.

Abstract: The characterization of the mechanical response of materials and structures from full-field measurements is a promising approach in experimental mechanics. The idea is to perform experiments giving rise to heterogeneous strain fields and to extract relevant information on the mechanical response of the specimen. An important issue is to retrieve as many constitutive parameters as possible involved in the measurements. The potential advantage is to reduce the number of tests and to take full advantage of processing heterogeneous fields to design optimal testing configurations. Unlike homogeneous strain fields, full-field measurements are linked in an implicit way to the relevant constitutive parameters through the constitutive, equilibrium and compatibility equations. In practice, these equations are usually considered in a weak form, with many variants available among which to choose. Several strategies specifically aimed at the identification of constitutive parameters from full-field measurement are under development by research groups affiliated to various French institutions. In the framework of a cooperative research project (GDR 2519 of CNRS), the investigators involved in these efforts are currently joining forces in an effort to classify these identification techniques and compare their behavior and performance on sets of real experimental data. This communication aims at presenting the current state of this review of methods and the benchmark results available at the time of the conference.

Mots-clefs: mesures de champs, identification

1 Introduction

Contexte. Le développement récent de caméras CCD à faible coût, ainsi que les progrès accomplis en matière de moyens de traitement d'images, font que les mesures sans contact (telles que la corrélation d'images, l'interférométrie moiré ou speckle et les méthodes de grilles) deviennent de plus en plus attractives. Ainsi, les procédures expérimentales évoluent graduellement de façon à permettre d'utiliser pleinement des données en grande quantité (typiquement 10 000 à 100 000 points de mesure indépendants). La caractérisation de la réponse mécanique de matériaux ou de structures à l'aide de telles mesures constitue un domaine très prometteur. L'idée générale est de procéder à des mesures de complexité croissante de façon à extraire une plus grande quantité d'information fiable à partir d'un petit nombre de tests. De telles

expériences consistent habituellement à mesurer des champs de déplacement ou de déformation dans le but d'identifier d'autres paramètres, souvent associés au comportement du matériau de l'échantillon testé. Cette identification nécessite des méthodes numériques adaptées.

Dans cet article, on considère pour fixer les idées l'identification de propriétés de comportement élastique linéaire en régime statique, dans l'hypothèse des petites perturbations, à partir de mesures de champs. D'autres classes de comportement plus complexes sont par ailleurs abordées dans divers travaux, le lecteur étant renvoyé à des citations. Considérant un solide élastique générique Ω de frontière $\partial\Omega$, les équations de base bien connues sont

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (\text{dans } \Omega) \qquad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{T}} \quad (\text{sur } S_f) \quad (\text{équilibre}) \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \quad (\text{dans } \Omega) \qquad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{sur } S_u) \quad (\text{compatibilité}) \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{dans } \Omega) \qquad (\text{comportement}) \quad (3)$$

où \mathbf{u} est le déplacement, $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur des déformations linéarisées, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy, et \mathbf{n} la normale unitaire sortante à $\partial\Omega$. Les grandeurs $\bar{\mathbf{u}}$ et $\bar{\mathbf{T}}$ sont les valeurs prescrites par les conditions aux limites. Les surfaces S_u et S_f sont telles que $S_u \cup S_f = \partial\Omega$ et $S_u \cap S_f = \emptyset$, de façon à définir des conditions aux limites bien posées. Le tenseur d'élasticité \mathcal{A} peut être constant (matériau homogène) ou fonction du point (matériau hétérogène). Si les propriétés d'élasticité sont isotropes, elles sont décrites en termes de deux modules indépendants, par exemple les constantes de Lamé λ, μ .

Le problème usuel, souvent qualifié de *direct*, consiste à déterminer les champs de déplacement, déformation et contrainte connaissant la géométrie du solide, les paramètres de comportement, et des données aux limites bien posées. Les solutions exactes étant limitées à des classes très particulières de géométries et conditions aux limites, le problème direct est le plus souvent résolu de façon numérique, généralement par la méthode des éléments finis (MEF).

L'identification de paramètres de comportement est un autre type de problème, qualifié d'*inverse*. Une connaissance incomplète de la fonction tensorielle $\mathcal{A}(\mathbf{x})$, ou de modules entrant dans la définition de \mathcal{A} , doit être compensée au moyen de données surabondantes. En d'autres termes, il est nécessaire de disposer d'une information supplémentaire d'origine expérimentale qui vient en complément des données aux limites $\bar{\mathbf{u}}$ et $\bar{\mathbf{T}}$ intervenant dans (1) et (2). De telles données supplémentaires peuvent revêtir des formes variées. Dans cet article, l'accent est mis sur les situations où des mesures *de champs* sont disponibles, soit dans Ω , soit sur $\partial\Omega$. Les deux situations les plus fréquemment rencontrées sont alors :

- (i) On dispose de mesures de champs et des données aux limites bien posées $\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}$ complètes ;
- (ii) On dispose de mesures de champs et de données cinématiques complètes $\bar{\mathbf{u}}$, mais la donnée statique est incomplète, seules des résultantes d'efforts étant connues.

Pour les quelques situations pour lesquelles une solution exacte est disponible (traction simple, flexion 3 ou 4 points...), les paramètres de comportement peuvent être identifiés à l'aide d'un calcul simple. Dans le cas général, les déformations et contraintes ne sont pas homogènes et le lien entre champs mesurés et paramètres à identifier est implicite, à travers les équations (1, 2, 3).

Plusieurs stratégies spécifiquement destinées à l'identification de paramètres de comportement à partir de mesures de champs cinématiques sont actuellement en cours de développement et d'analyse dans plusieurs équipes françaises. Ces travaux sont fédérés sous l'égide du GDR 2519 du CNRS, cadre dans lequel les équipes impliquées s'emploient actuellement à la classification de ces techniques et à l'étude comparative de leurs performances pour des jeux de données réels.

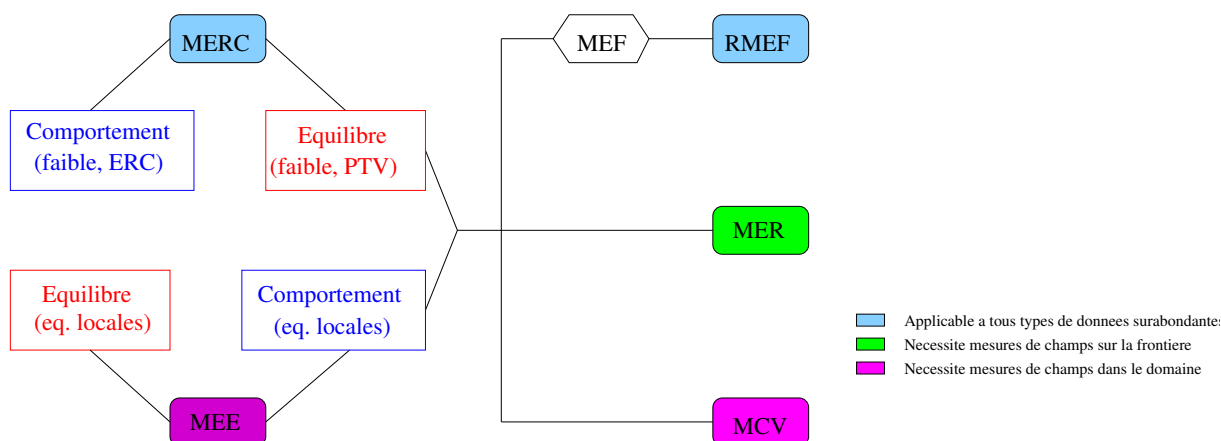


FIG. 1 – Relations entre les méthodes d'identification et les énoncés de base de la mécanique des milieux continus.

Objectif de cette communication. Cette communication a pour but de présenter l'état actuel de cette synthèse et les résultats disponibles au moment de la conférence. Les principaux acteurs (équipes et personnes) actuellement impliqués dans ce travail sont le Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, Montpellier (S. Pagano), le Laboratoire de Mécanique et Ingénierie, Clermont Ferrand (M. Grédiac), le Laboratoire de Mécanique et Procédés de Fabrication, Châlons-en-Champagne (S. Avril et F. Pierron), le Laboratoire de Mécanique des Solides, Palaiseau (M. Bonnet) et le Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan (F. Hild). Les diverses méthodes d'identification développées dans ce cadre sont succinctement décrites dans les sections 2 à 6 :

1. Recalage de modèles éléments finis (RMEF, section 2).
2. Minimisation d'une fonctionnelle à base d'erreur en relation de comportement (MERC, section 3).
3. Méthode des champs virtuels (MCV, section 4).
4. Méthode de l'écart à l'équilibre (MEE, section 5).
5. Méthode de l'écart à la réciprocité (MER, section 6).

Ces méthodes reposent toutes sur la mise en oeuvre de principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus, comme le résume la figure 1. Les méthodes RMEF et MERC ne nécessitent pas strictement des mesures de champs, et peuvent être mises en oeuvre à partir de tout type de données surabondantes. En revanche, les méthodes MCV et MEE présument la possession de mesures de champs de déformations (MCV) ou de déplacement (MEE) sur Ω . Finalement, la méthode MER est définie de façon à permettre l'exploitation de mesures de champs sur la frontière. Ces points sont également résumés sur la figure 1.

2 Le recalage de modèles éléments finis

2.1 Principe

Le principe de cette approche, résumé sur la figure 2, consiste à établir un modèle élément fini de l'échantillon testé, contenant l'information connue ϖ sur la géométrie et les conditions aux limites. Notant m la réponse mesurée (déplacement, déformation, force...) et h la valeur

simulée correspondante, une fonction-coût portant sur l'écart entre \mathbf{m} et \mathbf{h} est construite, par exemple (estimation par moindres carrés pondérés: Hendricks, 1991; Meuwissen, 1998)

$$J(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{m} - \mathbf{h}(\boldsymbol{\varpi}, \boldsymbol{\theta})]^T \mathbf{V} [\mathbf{m} - \mathbf{h}(\boldsymbol{\varpi}, \boldsymbol{\theta})] + [\boldsymbol{\theta}^{(0)} - \boldsymbol{\theta}]^T \mathbf{W} [\boldsymbol{\theta}^{(0)} - \boldsymbol{\theta}] \quad (4)$$

dans laquelle $\boldsymbol{\theta}$ désigne les paramètres à identifier et $\boldsymbol{\theta}^{(0)}$ une estimation initiale de ces paramètres, et \mathbf{V} , \mathbf{W} sont des matrices de pondération définies positives. Ces matrices peuvent être choisies selon divers critères. Si une information sur la statistique des erreurs de mesure est disponible, alors on peut utiliser l'estimateur de Gauss-Markov. Par exemple, si l'erreur expérimentale est de moyenne nulle et de covariance connue $\boldsymbol{\Psi}$, soit

$$E\{\mathbf{e}\} = \mathbf{0}; E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\} = \boldsymbol{\Psi} \quad (5)$$

où $E\{\cdot\}$ désigne l'opérateur d'espérance mathématique, l'estimateur de Gauss-Markov correspond à $\mathbf{V} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}$ et $\mathbf{W} = \mathbf{0}$. Si de plus le modèle $\mathbf{h}(\boldsymbol{\varpi}, \boldsymbol{\theta})$ est linéaire en $\boldsymbol{\theta}$, on obtient l'estimateur sans biais de variance minimale (Beck et Arnold, 1977).

Une grande classe de situations est *a priori* abordable par cette approche. En particulier, il est utile mais pas obligatoire de disposer de données expérimentales sous forme de mesures de champs, tout type de donnée surabondante étant utilisable. De même, d'autres types de fonctions-coût, par exemples basées sur les techniques bayésiennes (Tarantola, 1987), peuvent être considérées en lieu et place des moindres carrés pondérés et pénalisés (4). Enfin, le modèle $\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})$ peut être construit à l'aide d'autres méthodes numériques que celle des éléments finis, par exemple différences finies (Quarteroni et Valli, 1999) ou éléments de frontière (Bonnet, 1999), ou à l'occasion à l'aide de solutions analytiques.

2.2 Applications à des mesures de champs

On décrit maintenant succinctement quelques exemples publiés d'applications du recalage de modèles éléments finis dans des situations où les données expérimentales sont des champs.

Rigidités de flexion de plaques minces anisotropes. Un certain nombre d'études publiées concernent l'identification des rigidités de flexion de plaques minces anisotropes. Par exemple, Mauvoisin (1993) a appliqué une technique de moiré pour mesurer le champ de déplacement de flexion à la surface de plaques composites fléchies, la fonction coût portant sur la comparaison de ce champ mesuré avec sa valeur prédite par le modèle. Malheureusement, l'identification n'a pas entièrement fonctionné, la configuration utilisée (flexion 4 points) n'étant pas sensible à tous les modules à identifier.

Pour pallier cette difficulté, une approche de conception d'expériences fondée sur le calcul de sensibilités par éléments finis a été développée (Arafeh, 1995; Arafeh et al., 1995), de façon à rendre les mesures sensibles à tous les modules d'élasticité présents. Ce travail a aussi montré l'intérêt de définir une fonction-coût portant sur la comparaison des courbures (au moins si les valeurs expérimentales ne sont pas obtenues via deux dérivations successives de la flèche). Cependant, cette étude ne présente pas d'applications expérimentales.

Plus récemment, la mise en oeuvre de tests de flexion définis au moyen de cette approche de conception d'expériences a été réalisée sur des panneaux structuraux à base de bois (Le Magorou, 2002; LeMagorou et al., 2002), la fonction coût portant sur la comparaison des champs de déplacements de flexion mesuré et calculé, intégrée dans le temps pour le cas de l'identification de modules viscoélastiques. Des résultats satisfaisants ont été obtenus pour les modules

élastiques, ceux concernant les modules viscoélastiques étant à un stade plus préliminaire. Cette étude est une des rares à associer les aspects expérimentaux et numériques.

Comportement élasto-plastique plan de métaux. Le recalage de modèles éléments finis a aussi été appliqué à l'identification de paramètres de comportement élastoplastique de métaux (Meuwissen, 1998; Meuwissen et al., 1998). En plus d'une série d'expériences de traction classiques (acier ou aluminium, champs homogènes), des tests de traction sur des échantillons entaillés ou troués, conduisant à des états non homogènes ont été conduits, les déplacements étant mesurés par corrélation d'image. Une fonction-coût classique (comparaison de déplacements mesurés et calculés) a été utilisée, associée à un estimateur de Gauss-Markov. Les conditions aux limites sont définies à partir des mesures de corrélation d'image au voisinage de la frontière de la zone de mesure. Les résultats expérimentaux sont prometteurs.

Autres exemples. L'équipe du prof. Oomens à l'université de technologie d'Eindhoven a démarré des applications de ces techniques dans le domaine de la biomécanique, par exemple sur la peau humaine (Meijer et al., 1997) et sur le comportement orthotrope de la peau de chien *in vitro* (van Ratingen, 1994; Oomens et al., 1993), qui présente la particularité de varier spatialement en raison de l'arrangement de fibres collagènes.

3 Minimisation d'une fonctionnelle à base d'erreur en relation de comportement

L'erreur en relation de comportement mesure la distance entre un champ de contrainte donné $\boldsymbol{\tau}$ et un autre champ de contrainte calculé par application d'une relation de comportement à un champ de déplacement \boldsymbol{v} . Si le modèle de comportement est élastique linéaire, l'erreur en relation de comportement (ERC) entre $\boldsymbol{\tau}$ and \boldsymbol{v} est définie par

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{v}] : \boldsymbol{S} : (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}[\boldsymbol{v}]) \, dV \quad (6)$$

où $\boldsymbol{S} = \mathcal{A}^{-1}$ est le tenseur de souplesse (dont la présence dans l'intégrale confère à $\mathcal{E}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A})$ la dimension physique d'une énergie). L'utilité de la notion d'ERC est illustrée par les remarques suivantes :

- (i) Pour un problème aux limites bien posé tel que celui défini par (1, 2, 3), on définit les espaces \mathcal{C} et \mathcal{S} de champs de déplacements *cinématiquement admissibles* et de contraintes *statiquement admissibles* :

$$\mathcal{C} = \{ \boldsymbol{v} \mid v_i \in H^1(\Omega), \boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{u}} \text{ sur } S_u \} \quad (7)$$

$$\mathcal{S} = \{ \boldsymbol{\tau} \in H(\text{div}), \text{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega, \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{T}} \text{ sur } S_f \} \quad (8)$$

où l'espace $H(\text{div})$ de champs de tenseurs est défini par

$$H(\text{div}) = \{ \boldsymbol{\tau} \mid \tau_{ij} = \tau_{ji}, \tau_{ij} \in L^2(\Omega), \tau_{ij,j} \in L^2(\Omega) \}$$

Alors, la solution $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma})$ du problème aux limites est caractérisée par

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \arg \min_{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{S}} \mathcal{E}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}) \quad \text{and} \quad \mathcal{E}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{A}) = 0 \quad (9)$$

- (ii) Pour un problème d'identification de paramètres de comportement pour lequel (par exemple) le tenseur d'élasticité \mathcal{A} est inconnu, les définitions (7) et (8) d'espaces de champs admissibles peuvent être modifiées de façon à inclure *toutes* informations expérimentales disponibles sur les déplacements et les contraintes. Le tenseur d'élasticité \mathcal{A} peut alors être recherché de façon à minimiser l'erreur en relation de comportement :

$$\mathcal{A} = \arg \min_{\mathcal{A}^*} J(\mathcal{A}^*) \quad \text{with} \quad J(\mathcal{A}^*) = \min_{(v, \tau) \in \mathcal{C} \times \mathcal{S}} \mathcal{E}(v, \tau, \mathcal{A}^*) \quad (10)$$

Cela constitue l'essence de la méthode de minimisation de l'erreur en relation de comportement (MERC). En particulier, cette approche entraîne une méthode de directions alternées pour laquelle une minimisation partielle par rapport à (v, τ) est suivie d'une minimisation partielle par rapport à \mathcal{A}^* .

La MERC est en principe applicable à tout problème d'identification pour lequel des données surabondantes sont disponibles ; en particulier ces dernières ne doivent pas nécessairement être des mesures de champ. De fait, de nombreuses études fondées sur la MERC ont par exemple été accomplies dans le domaine du recalage de modélisation à partir de données vibratoires. D'un autre côté, cette approche est très bien adaptée à l'analyse de mesures de champ. On va maintenant décrire deux variantes de la MERC, en supposant dans les deux cas qu'une mesure \hat{u} du champ de déplacement u est disponible.

Première variante : imposition exacte des mesures cinématiques. Dans cette variante, le champ mesuré \hat{u} est introduit directement dans la fonctionnelle d'ERC, ce qui conduit à rechercher \mathcal{A} comme solution du problème de minimisation

$$\mathcal{A} = \arg \min_{\mathcal{A}^* \in \mathcal{A}} J(\mathcal{A}^*) \quad \text{with} \quad J(\mathcal{A}^*) = \min_{\tau \in \mathcal{S}} \mathcal{E}(\hat{u}, \tau, \mathcal{A}^*) \quad (11)$$

Dans ce cas, l'espace \mathcal{S} des champs de contraintes admissibles est défini par

$$\mathcal{S} = \{ \tau \in H(\text{div}), \text{div} \tau = \mathbf{0} \text{ in } \Omega, \ell_1(\tau \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{g}_1, \dots, \ell_N(\tau \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{g}_N \} \quad (12)$$

au lieu de (8), chaque relation $\ell_k(\tau \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{g}_k$ exprimant une mesure de force (habituellement une résultante sur une partie de la frontière), tandis que l'espace \mathcal{A} des tenseurs d'élasticité admissibles est défini par

$$\mathcal{A} = \{ \mathcal{A}^* \mid A_{ijkl} \in L^2(\Omega), A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}, \\ \varepsilon : \mathcal{A}^* : \varepsilon \geq \alpha \|\varepsilon\|^2, \alpha > 0, \forall \varepsilon, \varepsilon' : \mathcal{A}^* : \varepsilon'' \leq M \|\varepsilon'\| \|\varepsilon''\|, M > 0, \forall \varepsilon', \varepsilon'' \} \quad (13)$$

La minimisation (11) a été accomplie au moyen d'une interpolation par éléments finis Q1 des champs de contraintes admissibles. Si on impose les équations d'équilibre et les mesures de forces contribuant à la définition de \mathcal{S} via des multiplicateurs de Lagrange, le problème variationnel

$$\inf_{\tau \in H(\text{div})} \sup_{\gamma, \lambda_i} \mathcal{E}(\hat{u}, \tau, \mathcal{A}^*) + \int_{\Omega} \gamma \cdot \text{div} \tau \, dV + \sum_i \lambda_i [\ell_i(\tau \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{g}_i], \quad (14)$$

est résolu. La minimisation subséquente de $J(\mathcal{A}^*)$ est alors explicite.

Deuxième variante : imposition des mesures cinématiques par pénalisation. Il n'est pas nécessairement désirable d'imposer exactement les mesures cinématiques, en particulier si elles sont entachées de bruit. Pour cette raison, une variante reposant sur la fonctionnelle

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}^*) = \alpha \mathcal{E}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}^*) + \frac{\beta}{2} \|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{u}}\|^2 \quad (15)$$

(α, β étant des coefficients de pondération positifs) au lieu de $\mathcal{E}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{A}^*)$ a été proposée (Calloch et al., 2002). Dans (15), la distance $\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{u}}\|$ doit être définie de façon à ce que les deux termes de \mathcal{F} aient des ordres de grandeurs comparables. Par exemple, $\|\mathbf{w}\|^2 = E \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}] dV$ si on se concentre sur des cas où \mathcal{A}^* est isotrope (c.à.d. défini en termes du module de Young E et du coefficient de Poisson ν), ou $\|\mathbf{w}\|^2 = \gamma \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ avec un coefficient γ devant être choisi de façon appropriée.

Suivant en cela d'autres méthodes de recalage fondées sur l'ERC (Ladevèze et Reynier, 1989), les deux minimisations partielles sont accomplies avec des valeurs différentes de (α, β). La première minimisation (étape de localisation), avec $\alpha = \beta = 1$, donne $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ avec $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$ pour \mathcal{S} défini à nouveau par (12). Sur le plan numérique, les champs de contraintes $\boldsymbol{\tau}$ ont la représentation $\boldsymbol{\tau} = \mathcal{A}^* : \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{w}]$ en termes de champs de déplacement \mathbf{w} construits par une discrétisation éléments finis et les relations intervenant dans la définition de \mathcal{S} sont imposées de la façon faible associée à la base d'éléments finis. De même que pour la première variante, la deuxième minimisation (phase de correction), effectuée avec $\alpha = 1, \beta = 0$, est explicite par rapport à \mathcal{A}^* .

Autres commentaires. Les fonctionnelles \mathcal{F} de la forme (15) sont convexes sur $\mathcal{C} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A}$. Comme expliqué dans Geymonat et al. (2002) ou Geymonat et Pagano (2003), une autre famille de fonctionnelles $\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{S})$ peut être définie à partir de (15) en termes du tenseur des souplesses \mathcal{S} au lieu du tenseur des rigidités \mathcal{A} :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{S}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{S}^{-1}) \quad (\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}, \mathcal{S}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \quad (16)$$

De telles fonctionnelles $\tilde{\mathcal{F}}$ sont séparément convexes sur $\mathcal{C} \times \mathcal{S}$ et sur \mathcal{A} .

4 La méthode des champs virtuels

Cette approche est applicable aux situations où le champ de déformation est expérimentalement connu dans Ω :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{in } \Omega \quad (17)$$

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ étant connu par mesures de champ, et sans limitation sur les conditions de chargement. On cherche à identifier des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ inconnus intervenant dans un modèle de comportement du matériau testé (par exemple, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\boldsymbol{\theta})$ pour un comportement élastique linéaire) au moyen des mesures de champ utilisées comme données surabondantes. Par exemple, en l'absence de forces de volume et supposant des conditions aux limites de la forme (1, 2), le principe des travaux virtuels (PTV) s'écrit

$$- \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^* dV + \int_{S_f} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}^* dS = \int_V \rho \gamma \cdot \mathbf{u}^* dV \quad (18)$$

\mathbf{u}^* étant un champ de déplacement virtuel arbitraire (mais assujéti à la liaison cinématique $\mathbf{u}^* = \mathbf{0}$ sur S_u), et $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{u}^*]$ est le champ de déformation virtuelle associé. La méthode des

champs virtuels (MCV) consiste alors à exploiter l'identité (18) pour des choix particuliers de champs virtuels adaptés au problème d'identification spécifique considéré (Grédiac, 1989).

Il faut d'abord faire le choix d'un modèle de comportement dépendant de paramètres inconnus θ (par exemple $\sigma = \mathcal{A}(\theta) : \hat{\varepsilon}$ en élasticité linéaire), de façon à pouvoir exprimer σ en fonction de θ et des déformations connues $\hat{\varepsilon}$ dans la première intégrale de (18). Il faut insister sur le fait que la plupart des méthodes de mesures de champs fournissent seulement les composantes planes des déformations dans le plan de la surface externe. Il faut donc définir les spécimens de façon à ce que les déformations dans le corps s'expriment en fonction des déformations en surface, c'est-à-dire par exemple se placer dans des conditions de déformations ou contraintes planes, ou étudier des plaques en flexion. Des études récentes ont porté sur l'identification de paramètres pour les familles suivantes de comportements : élasticité linéaire anisotrope (conditions planes ou flexion de plaques, recherche de modules ou de combinaisons de modules), élasticité anisotrope non-linéaire, et plus récemment viscoélasticité et élastoplasticité. La plupart de ces études ont été effectuées en conditions statiques, le troisième terme de 18 étant alors nul, des propriétés dynamiques ayant été également abordées par Grédiac et al. (1998) et Giraudeau et Pierron (2003).

Ensuite, les champs virtuels sont choisis, chacun d'entre eux produisant à une équation scalaire indépendante via (18). L'ensemble des équations obtenues (dont le nombre doit bien sûr être supérieur ou égal à celui des paramètres à identifier) est alors résolu par rapport à θ . La construction des champs virtuels est une étape clé, pour laquelle trois approches ont pour l'instant été proposées.

- (i) La plus simple consiste à utiliser des expressions analytiques définies sur tout le domaine et prenant en compte les liaisons cinématiques, ce qui est réalisable pour des géométries de forme simple, à l'aide de polynômes algébriques ou trigonométriques par exemple. En utilisant un nombre suffisant de tels champs, on peut alors extraire θ par résolution des équations obtenues via θ . Ces techniques ont été appliquées à des situations variées d'identification de paramètres. De tels champs virtuels ont été utilisés pour l'identification de paramètres de comportements élastiques anisotropes dans des configurations planes (Grédiac et al., 1999; Grédiac et Pierron, 1998) ou de flexion (Grédiac et Vautrin, 1990, 1993; Grédiac, 1989; Grédiac et al., 1998), viscoélastique (Giraudeau et Pierron, 2003) ou plastique (Grédiac et Pierron, 2004).
- (ii) Une amélioration de l'approche précédente consiste en la construction de champs virtuels dits *spéciaux*, définis de façon à ce que l'équation (18) résultant de la substitution d'un tel champ ne fasse intervenir qu'une seule des composantes du vecteur des paramètres θ . Moyennant une normalisation adéquate du champ « spécial », l'équation (18) produit alors directement la valeur de l'un des paramètres. Il existe une infinité de tels champs « spéciaux » pour l'identification d'un paramètre θ_k donné, et des stratégies ont été proposées dans Grédiac et al. (2002) puis dans Avril et al. (2004) pour construire des champs spéciaux qui minimisent la sensibilité au bruit expérimental. De tels champs virtuels ont été utilisés pour l'identification de paramètres de comportements élastique linéaire anisotrope dans des configurations planes (Grédiac et al., 2002) ou de flexion (Grédiac et al., 2003), et élastique non-linéaire anisotrope (Grédiac et al., 2002; Chalal et al., 2004).
- (iii) Enfin, il est possible de construire des champs virtuels par sous-domaines plutôt que sur le domaine entier, selon un procédé inspiré de l'interpolation par éléments finis. Cela permet d'appliquer la MCV à des domaines de forme complexe, et aussi d'éviter l'intervention de polynômes de degré élevé, pour lesquels on a constaté une plus grande sensibilité de

la MCV aux bruits expérimentaux. Cette notion a été appliquée pour l'élasticité linéaire anisotrope (Toussaint et al., 2004).

Il convient pour finir de mentionner deux autres aspects de la méthode des champs virtuels. D'une part, la distribution \bar{T} de chargement externe, qui intervient dans l'identité (18), est en général difficile à mesurer. Puisque par ailleurs il est généralement possible de connaître les résultantes de ces chargements, on a alors intérêt à construire des champs virtuels tels que le travail virtuel de \bar{T} ne dépende que de la résultante, c'est-à-dire dont la restriction sur S_f soit un mouvement rigidifiant. Une autre possibilité consiste à construire des champs virtuels nuls sur S_f . De cette façon, la distribution \bar{T} n'intervienne pas (même par sa résultante) dans l'équation tirée de (18). Cette approche est applicable si l'un des paramètres de comportement est connu à l'avance, ou permet sinon l'identification de rapports de modules. On peut aussi noter que, dans le cas dynamique, il n'est pas nécessaire de faire travailler les efforts extérieurs grâce au terme d'inertie (Grédiac et al., 1998; Giraudeau et Pierron, 2003).

5 Méthode de l'écart à l'équilibre

Cette approche a été développée pour des cas d'hétérogénéité correspondant à un champ d'endommagement scalaire et isotrope $\theta(\mathbf{x})$ (Lemaître et Chaboche, 1990), dans le but d'identifier le champ $\theta(\mathbf{x})$ à partir du champ de déplacement mesuré dans Ω . Ce type de description d'endommagement n'affecte pas le coefficient de Poisson, de sorte que les coefficients de Lamé peuvent s'écrire $\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_0[1 - \theta(\mathbf{x})]$ et $\mu(\mathbf{x}) = \mu_0[1 - \theta(\mathbf{x})]$, où λ_0 et μ_0 correspondent au matériau non endommagé. Il faut noter qu'un endommagement constant sur tout le domaine revient à multiplier λ et μ par une même constante. Une mesure de champ cinématique n'est pas affectée par cela, de sorte qu'on ne pourra reconstruire le paramètre d'endommagement qu'à un facteur multiplicatif près.

Supposant le champ de déplacement disponible sur une grille de mesure, habituellement régulière, un maillage éléments finis est créé de façon à ce que les points de mesure coïncident avec les noeuds. En supposant l'endommagement constant sur un élément fini générique e , l'énergie de déformation de l'élément s'écrit

$$E_{me}(\theta) = \frac{1 - \theta}{2} \{\mathbf{u}_e\}^t [\mathbf{K}_{me}] \{\mathbf{u}_e\}, \quad (19)$$

où $[\mathbf{K}_{me}]$ est la matrice de rigidité élémentaire pour l'élément e non endommagé et $\{\mathbf{u}_e\}$ est le vecteur des déplacements nodaux de l'élément.

La procédure résumée ici s'appuie sur des éléments quadrilatéraux à 8 noeuds, sous l'hypothèse des déformations planes ou des contraintes planes. L'identification de la distribution d'endommagement (supposée constante par élément) repose sur l'utilisation des équations d'équilibre produites par la méthode des éléments finis, associées aux noeuds situés aux milieux des côtés d'éléments, c'est-à-dire communs à seulement deux éléments. En l'absence de tout chargement externe à ces noeuds (désignés ici par 12), ces équations ont la forme explicite

$$(1 - \theta_1)[\mathbf{k}_{m1}]\{\mathbf{u}_1\} - (1 - \theta_2)[\mathbf{k}_{m2}]\{\mathbf{u}_2\} = \mathbf{0}, \quad (20)$$

où θ_1, θ_2 sont les endommagements respectifs des éléments 1 and 2 et $[\mathbf{k}_{m1}], [\mathbf{k}_{m2}]$ sont les sous-matrices extraites des rigidités élémentaires correspondant aux lignes associés au déplacement nodal \mathbf{u}_{12} . L'écriture de toutes les relations de ce type conduit à un système d'équations linéaires

reliant les endommagements inconnus aux déplacements nodaux connus. En pratique, l'ensemble des équations de la forme (20) n'est pas strictement vérifié, car surdéterminé, mais donne lieu à des forces résiduelles \mathbf{F}_r

$$\mathbf{F}_r(\theta_1, \theta_2) = (1 - \theta_1)[\mathbf{k}_{m1}]\{\mathbf{u}_1\} - (1 - \theta_2)[\mathbf{k}_{m2}]\{\mathbf{u}_2\}, \quad (21)$$

que l'on cherche à minimiser en moyenne par rapport à θ , d'où le nom de méthode de l'écart à l'équilibre (Claire, 2002; Claire et al., 2002).

Formulation pratique. L'endommagement étant supposé isotrope, une approche adaptée à cette hypothèse peut être développée. En effet, les équations (20) peuvent compte tenu de (19) être mises sous la forme

$$\ln(1 - \theta_1) - \ln(1 - \theta_2) = q_{k,12} \quad (22)$$

Le changement d'inconnues $d = \ln(1 - \theta)$ permet de satisfaire automatiquement la condition $\theta < 1$. L'ensemble de toutes les équations (22) est redondant (environ $M = 4N$ équations pour un maillage carré de N éléments, voir Claire (2002) et Claire et al. (2002)). Cette redondance conduit à chercher θ via la minimisation d'une fonctionnelle quadratique de la forme

$$J(\{\mathbf{d}\}) = ([\mathbf{M}]\{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{q}\})^t [\mathbf{W}] ([\mathbf{M}]\{\mathbf{d}\} - \{\mathbf{q}\}) \quad (23)$$

avec $\{\mathbf{d}\}^t = \{\ln(1 - \theta_1) \ \ln(1 - \theta_2) \ \dots \ \ln(1 - \theta_N)\}$, la matrice $[\mathbf{M}]$ et le vecteur $\{\mathbf{q}\}$ résultant de l'assemblage des équations (22) et étant fonction des déplacements nodaux mesurés. La matrice de pondération $[\mathbf{W}]$ est choisie de la forme

$$[\mathbf{W}] = \text{Diag}(w_1, \dots, w_M) \quad \text{with } w_k = (|[\mathbf{k}_{m1}]\{\mathbf{u}_1\}| + |[\mathbf{k}_{m2}]\{\mathbf{u}_2\}|)^\eta.$$

la puissance η , ajustée de façon à obtenir les meilleurs résultats sur les cas tests à endommagement connu (Claire et al., 2002), est fixé à $\eta = 1.5$.

La distribution d'endommagement est alors trouvée par résolution des équations normales associées à $J(\{\mathbf{d}\})$. Les endommagements θ étant identifiables à un facteur multiplicatif près, les inconnues \mathbf{d} sont donc définies à une constante additive près. Il faut donc fixer arbitrairement l'une des composantes de \mathbf{d} et chercher les $N - 1$ autres par minimisation. Cette dernière opération a été effectuée par la méthode du gradient conjugué (Press et al., 1992), de façon à tirer parti du caractère creux de $[\mathbf{M}]^t [\mathbf{W}] [\mathbf{M}]$.

Enfin, des indicateurs d'erreur de reconstruction de l'endommagement, dont le détail est décrit par Claire et al. (2002), ont été développés.

6 Méthode de l'écart à la réciprocité

6.1 Principe

Pour des solides tridimensionnels massifs, il est utile de considérer la possibilité de données portant sur des couples $(\hat{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}})$ à la frontière. On peut alors construire à partir du principe des puissances virtuelles une fonction d'écart à la réciprocité. En effet, si \mathbf{u}^* est à l'équilibre élastique sous le chargement \mathbf{T}^* (chaque choix de \mathbf{T}^* définissant un tel champ virtuel \mathbf{u}^*) pour un corps caractérisé par le tenseur d'élasticité \mathcal{A}^* , le principe des travaux virtuels entraîne les deux identités

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathcal{A} : \boldsymbol{\varepsilon}^* \, dV = \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}^* \, dS \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^* : \mathcal{A}^* : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}^* \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dS$$

d'où on tire :

$$\int_{\Omega} \varepsilon : [\mathcal{A} - \mathcal{A}^*] : \varepsilon^* dV = \int_{\partial\Omega} (\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}^* - \mathbf{T}^* \cdot \hat{\mathbf{u}}) dS \equiv R(\mathcal{A}^*, \mathbf{u}^*) \quad (24)$$

Cette relation peut aussi être obtenue comme conséquence du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti.

Pour tout état adjoint $(\mathbf{u}^*, \mathbf{T}^*)$, l'écart à la réciprocité $R(\mathcal{A}^*, \mathbf{u}^*)$ est ainsi explicitement connu en fonction des données $(\hat{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}})$. On doit avoir

$$R(\mathcal{A}, \mathbf{T}^*) = 0 \quad (\forall \mathbf{T}^*) \quad (25)$$

L'équation (24) fournit ainsi, pour chaque choix de \mathbf{T}^* , une équation scalaire indépendante pour la détermination des paramètres définissant \mathcal{A} . En particulier, des études théoriques (Ikehata, 1990; Bui, 1995) sur l'identifiabilité de \mathcal{A} exploitent (24) sous forme linéarisée (i.e. en posant $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^N[\mathcal{A}^*] + o(\|\delta\mathcal{A}\|)$) et avec des champs \mathbf{u}^* judicieusement choisis selon un procédé initialement proposé par Calderon (1980), de façon à faire apparaître au second membre de (24) la transformée de Fourier spatiale de $\delta\mathcal{A}$. Ces concepts ont été étendus à l'identifiabilité des rigidités élastiques dans le cadre des plaques de Love-Kirchhoff ; par exemple il est montré dans Ikehata (1993) que ces rigidités peuvent être identifiées de façon unique à partir de la connaissance de l'application Dirichlet-Neumann.

6.2 Identification de fissures

Considérons maintenant la situation où, le tenseur d'élasticité \mathcal{A} étant connu, on cherche une fissure inconnue Γ dans le corps Ω . Sous les hypothèses d'une fissure de surface libre de contraintes et d'un chargement extérieur $\hat{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}$ ouvrant la fissure on peut reconsidérer l'écart à la réciprocité défini auparavant et on obtient en tenant compte de la nouvelle frontière Γ :

$$\int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\Omega} (\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u}^* - \mathbf{T}^* \cdot \hat{\mathbf{u}}) dS \equiv R(\Gamma, \mathbf{T}^*) \quad (26)$$

Dans le cas d'une fissure plane un certain nombre de travaux (Andrieux et al., 1997; Ben Abda et al., 1999) ont démontré qu'il est possible de choisir des familles de champs adjoints \mathbf{u}^* permettant d'identifier la normale du plan de la fissure, la position de ce plan et enfin l'étendue de cette fissure dans le plan. Un résultat similaire a été obtenu récemment dans le cas élastodynamique (Bui et al., 2004). Il a fait l'objet d'expérimentations numériques, mais n'a pas encore été appliqué à des données expérimentales réelles.

6.3 Conclusion

Les méthodes décrites ci-dessus sont en cours d'application à des données réelles issues de diverses sources. Chaque jeu de données doit dans cette campagne être traité au moyen de plusieurs des méthodes décrites ici, ce qui permettra des comparaisons de performances sur cette base pratique. Les résultats de ces tests ne sont pas encore disponibles, mais devraient l'être, au moins partiellement, à la date de la conférence.

Références

ANDRIEUX S., BEN ABDA A., BUI H.D. (1997). Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II*, 324 :1431–1438.

- ARAFEH M.H. (1995). *Identification de la loi de comportement élastique de matériaux orthotropes*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne.
- ARAFEH M.H., KNOPF-LENOIR C., ROUGER F. (1995). Conception optimale d'essais de flexion de plaques orthotropes et identification. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, II/321 :351–354. Gauthier-Villars.
- AVRIL S., GRÉDIAC M., PIERRON F. (2004). Sensitivity of the virtual fields method to noisy data. *Computational Mechanics*, 34(6) :439–452.
- BECK J.V., ARNOLD K.J. (1977). *Parameter estimation in engineering and science*. John Wiley and Sons.
- BEN ABDA A., BEN AMEUR H., JAOUA M. (1999). Identification of 2D cracks by boundary elastic measurements. *Inverse Problems*, 15 :67–77.
- BONNET M. (1999). *Boundary Integral Equations Methods for Solids and Fluids*. John Wiley and Sons.
- BUI H.D. (1995). Sur quelques problèmes inverses élastiques en mécanique de l'endommagement. In *Deuxième Colloque National de Calcul des Structures*, 26–35. Hermès, France.
- BUI H.D., CONSTANTINESCU A., MAIGRE H. (2004). Numerical identification of linear cracks in 2D elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap. *Inverse Problems*, 20 :993–1001.
- CALDERON A.P. (1980). On an inverse boundary value problem. In *Seminar on Numerical Analysis and its applications to Continuum Physics.*, 65–73. Soc. Brasilien de Matematica, Rio de Janeiro.
- CALLOCH S., DUREISSEIX D., HILD F. (2002). Identification de modèles de comportement de matériaux solides : utilisation d'essais et de calculs. *Technologies et Formations*, 100 :36–41.
- CHALAL H., MERAGHNI F., PIERRON F., GRÉDIAC M. (2004). Direct identification of the damage behaviour of composite materials using the virtual fields method. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 35(7-8) :841–848.
- CLAIRE D. (2002). Identification de propriétés thermomécaniques résolues spatialement. mémoire de DEA, ENS Cachan.
- CLAIRE D., HILD F., ROUX S. (2002). Identification of Damage Fields using Kinematic Measurements. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II*, 330 :729–734.
- GEYMONAT G., HILD F., PAGANO S. (2002). Identification of Elastic Parameters by Displacement Field Measurement. *C.R. Acad. Sci. Paris, série II*, 330 :403–408.
- GEYMONAT G., PAGANO S. (2003). Identification of mechanical properties by displacement field measurement : a variational approach. *Meccanica*, 38 :535–545.
- GIRAUDEAU A., PIERRON F. (2003). Simultaneous identification of stiffness and damping properties of isotropic materials from forced vibrating plates. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(4) :259–264.
- GRÉDIAC M. (1989). Principe des travaux virtuels et identification/Principle of virtual work and identification. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, II/309 :1–5. Gauthier-Villars, in French with Abridged English Version.

- GRÉDIAC M., FOURNIER N., PARIS P.A., SURREL Y. (1998). Direct identification of elastic constants of anisotropic plates by modal analysis : experiments and results. *Journal of Sound and Vibration*, 210(5) :645–659. Academic Press.
- GRÉDIAC M., PIERRON F. (1998). A T-shaped specimen for the direct characterization of orthotropic materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41 :293–309. John Wiley and Sons.
- GRÉDIAC M., PIERRON F. (2004). Application de la méthode des champs virtuels pour l'identification de paramètres pilotant une loi plastique : principe et simulation. In *Photomécanique 2004*. 4-6 mai à Albi.
- GRÉDIAC M., PIERRON F., Y. S. (1999). Novel procedure for complete in-plane composite characterization using a T-shaped specimen. *Experimental Mechanics*, 39(2) :142–149. Society for Experimental Mechanics.
- GRÉDIAC M., TOUSSAINT E., PIERRON F. (2002). Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2- Application to in-plane properties. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :2707–2730. Elsevier.
- GRÉDIAC M., TOUSSAINT E., PIERRON F. (2003). Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 3- Application to the bending rigidities of anisotropic plates. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :2401–2419. Elsevier.
- GRÉDIAC M., VAUTRIN A. (1990). A new method for determination of bending rigidities of thin anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 57 :964–968. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers.
- GRÉDIAC M., VAUTRIN A. (1993). Mechanical characterization of anisotropic plates : experiments and results. *European Journal of Mechanics/A Solids*, 12(6) :819–838. Gauthier-Villars.
- HENDRICKS M.A.N. (1991). *Identification of the mechanical properties of solid materials*. Doctoral dissertation, Eindhoven University of Technology.
- IKEHATA M. (1990). Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. *SIAM J. Appl. Math.*, 50 :1635–1644.
- IKEHATA M. (1993). An inverse problem for the plate in the Love-Kirchhoff Theory. *SIAM J. Appl. Math.*, 53 :942–970.
- LADEVÈZE P., REYNIER M. (1989). A Localization Method of Stiffness Errors for the Adjustment of F.E. Models. In *Proceedings F.E. Modeling and Analysis in Vibrations Analysis Techniques and Applications*, 355–361. ASME.
- LE MAGOROU L. (2002). *Identification de lois de comportement élastique et viscoélastique de panneaux structuraux à base de bois*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.
- LEMAGOROU L., BOS F., ROUGER F. (2002). Identification of constitutive laws for wood-based panels by means of an inverse method. *Composite Science and Technology*, 62(4) :591–596. Elsevier.
- LEMAÎTRE J., CHABOCHE J.L. (1990). *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press.
- MAUVOISIN G. (1993). *Développement et mise en œuvre d'une technique de moiré d'ombre quasi-héérodyne de mesure de relief en vue de la détermination de lois de comportement élastique de matériaux orthotropes*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.

- MEIJER R., DOUVEN L., OOMENS C. (1997). Characterisation of anisotropic and non-linear behaviour of human skin in-vivo. *Comput. Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 1 :13–27.
- MEUWISSEN M. (1998). *An inverse method for the mechanical characterization of metals*. Thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology.
- MEUWISSEN M.H.H., OOMENS C.W.J., BAAIJENS F.P.T., PETTERSON R., JANSSEN J.D. (1998). Determination of the elasto-plastic properties of aluminium using a mixed numerical-experimental method. *Journal of Materials Processing Technology*, 75 :204–211.
- OOMENS C., VAN RATINGEN M., JANSSEN J., KOK J., HENDRIKS M. (1993). A numerical-experimental method for a mechanical characterization of biological materials. *Journal of Biomechanics*, 26(4/5) :617–621.
- PRESS W.H., FLANNERY B.P., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T. (1992). *Numerical recipes : the art of scientific computing (second edition)*. Cambridge press.
- QUARTERONI A., VALLI A. (1999). *Domain decomposition methods for partial differential equations*. Oxford University Press.
- TARANTOLA A. (1987). *Inverse problem theory*. Elsevier.
- TOUSSAINT E., GRÉDIAC M., PIERRON F. (2004). The virtual fields method with piecewise virtual fields. *IJMS*. submitted.
- VAN RATINGEN M. (1994). *Mechanical identification of inhomogeneous solids : a mixed numerical experimental approach*. Thèse de doctorat, Eindhoven University of Technology.