



**HAL**  
open science

# Introduction à la diffraction inverse en acoustique et élasticité

Marc Lambert, Marc Bonnet, Dominique Lesselier

► **To cite this version:**

Marc Lambert, Marc Bonnet, Dominique Lesselier. Introduction à la diffraction inverse en acoustique et élasticité. M. Bruneau, C. Potel. Matériaux et acoustique, Hermes, pp.82-101, 2006, 2-7462-1363-X. hal-00112511

**HAL Id: hal-00112511**

**<https://hal.science/hal-00112511v1>**

Submitted on 16 Sep 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Chapitre 1

## Méthodes d'étude expérimentales et numériques



Cette version est la dernière avant les corrections suggérées par les éditeurs de :

- M. LAMBERT, M. BONNET et D. LESSELIER. « Introduction à la diffraction inverse en acoustique et élasticité ». *Matériaux et acoustique*. Sous la dir. de M. BRUNEAU et C. POTEL. T. 2. Hermes, 2006, p. 82-101. ISBN : 2-7462-1450-4 & 2-7462-1363-X. URL : <https://hal.science/hal-00112511>

### 1.4 Introduction à la diffraction inverse en acoustique et élasticité

*Marc Lambert, Marc Bonnet, Dominique Lesselier*

Cette section d'introduction aux problèmes inverses des ondes (acoustiques, élastiques) ne se veut pas une présentation exhaustive de leurs difficultés théoriques et numériques ni de leurs solutions en œuvre dans les multiples champs applicatifs d'intérêt — dont ceux de l'évaluation et du contrôle non destructif de structures artificielles ou de la caractérisation du corps humain, deux sujets importants parmi ceux traités en profondeur dans d'autres chapitres du présent livre. Nous souhaitons seulement mettre en avant des éléments généraux, éléments que l'on imagine pouvoir être retrouvés de manière pertinente dans nombre de problèmes inverses effectivement affrontés. Peut-être plus encore, nous souhaitons aussi signaler au lecteur intéressé des pistes de réflexion ou de recherche, le tout en s'appuyant pour ce faire sur une poignée de publications de la littérature internationale récente, en donnant en sus en exemple des travaux auxquels les auteurs contribuent en identification topologique acoustique et élastique, investigation que nous croyons révélatrice à ce propos.

#### 1.4.1 Le cadre général de travaux

S'appuyant ici de manière rapide sur l'analyse de haute volée menée dans [Sab00], le problème qui se pose à nous peut être résumé de la façon suivante : soit un ensemble de paramètres caractéristiques d'un système matériel, artificiel ou naturel,  $\mathcal{P}$  (densité, paramètres de Lamé, célérités d'ondes de compression ou de cisaillement, ou tout autre élément pertinent) lié à un ensemble d'observables  $\mathcal{O}$  (déplacement, pression, ...) par l'intermédiaire de « lois de la nature »  $\mathcal{L}$ . Soit un modèle mathématique  $\mathcal{M}$  plus ou moins sophistiqué permettant de décrire au mieux ces « lois de la nature » à l'aide d'équations ou systèmes d'équations (différentielles, intégrales, aux dérivées partielles et combinaisons) et de conditions aux limites et/ou initiales appropriées. Alors la résolution du « problème direct » revient à calculer  $\mathcal{O}$  à partir de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{P}$  connus, tandis que celle du « problème inverse » consiste à remonter aux paramètres  $\mathcal{P}$  à partir de la connaissance de mesures  $\mathcal{O}$  et des lois  $\mathcal{M}$ .

$$\mathcal{O} = \mathcal{L}(\mathcal{P}) \simeq \mathcal{M}(\mathcal{P}) \quad [1.4.1]$$

Ainsi énoncé, les champs d'application en sont nombreux et variés, tels en

- géophysique et génie civil et environnemental [FB93; Hoo95], où la question est peu ou prou celle de l'identification de structures naturelles ou artificielles enfouies à partir de mesures élastiques (sismiques) acquises en surface ou en puits de forage (des situations voisines, et multiples, d'acoustique sous-marine sont d'intérêt évident aussi);

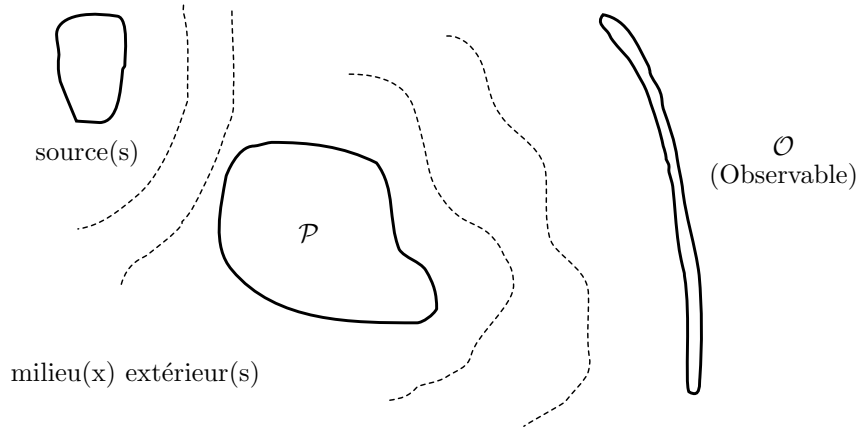


FIGURE 1.4.1 – Le problème type de diffraction des ondes

- contrôle non-destructif [LMH02; SSS02; Kun03] où l'on vise à préciser des défauts (fissures, inclusions ou corrosions, délaminages, brûlures, ...) affectant une pièce ou un ensemble de pièces métalliques ou composites, et pouvant en modifier le comportement nominal ou en affecter la sûreté de fonctionnement ;
- imagerie de milieux biologiques [Sch02], particulièrement au sein du corps humain afin de détecter des anomalies variées (inclusions) l'affectant ou de préciser via des cartes de paramètres élastiques un comportement anormal de tissus ou autres éléments significatifs ;
- caractérisation de matériaux [Kun03], où l'on se préoccupe de l'évaluation de propriétés mécaniques de ces derniers à partir de la réponse qu'ils fournissent à une sollicitation connue.

Mais la lecture de ce qui précède montre déjà que l'on affronte un immense sujet, ce dont a témoigné [Sab00], ainsi que [Bon99] (une très rare référence de langue française) à l'issue d'un travail de réflexion commun. Aussi nous ne considérons ci-après que la situation très particulière de l'identification, la caractérisation et/ou l'imagerie d'objets complexes passifs et au repos, celle de sources actives ou corps vibrants (acoustique et vibro-acoustique) étant dorénavant exclue.

### 1.4.2 Problème inverse de diffraction des ondes

Le problème générique de diffraction des ondes tel qu'envisagé dans la suite peut être présenté comme suit (figure 1.4.1). Soit un ou plusieurs objets ou obstacles (on pourrait parler aussi d'hétérogénéités, d'inclusions, de défauts, etc.) d'extension spatiale limitée et de paramètres caractéristiques  $\mathcal{P}$  présents au sein d'un milieu hôte fini, semi-infini ou infini particulier connu (ou de paramètres estimés par un moyen ou un autre), de configuration simple ou complexe. L'ensemble est excité par une ou plusieurs sources dont les caractéristiques sont connues. Les champs ou les déplacements dits secondaires ou diffractés ou d'anomalie (l'observable  $\mathcal{O}$  en référence à l'équation [1.4.1]) résultant de l'interaction entre l'onde et l'ensemble milieu hôte et obstacles sont alors recueillis par des récepteurs appropriés. Nous nous plaçons ici dans le cadre de l'acoustique ou de l'élasticité aux petites variations, pour lequel les perturbations induites par les objets sont linéaires vis-à-vis de l'excitation.

De fait, l'information concernant les propriétés recherchées de ces objets (emplacements, tailles, formes, paramètres des matériaux constitutifs, etc.) apparaît présente sous une forme codée dans le ou les signaux acquis par les récepteurs. Leur « décodage », la résolution du *problème inverse*, permet d'extraire de ce signal les paramètres d'intérêt des objets, avec l'idée certes parfois un peu maximaliste de rechercher une caractérisation quantitative de ces derniers, ou, à un moindre degré de complexité souvent, de seulement produire des images qui soient suffisamment représentatives de ces objets.

Dans l'idéal la connaissance des « lois de la nature inverse » que nous noterons ici  $\mathcal{L}^{-1}$  (et de son modèle mathématique approché  $\mathcal{M}^{-1}$ ) devrait permettre de remonter directement aux paramètres d'intérêt  $\mathcal{P}$  en appliquant une relation similaire à [1.4.1] donnée par

$$\mathcal{P} = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{O}) \simeq \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{O}). \quad [1.4.2]$$

Or dans la pratique l'existence même de  $\mathcal{M}^{-1}$  n'est pas garantie (par exemple le même observable  $\mathcal{O}$  peut être obtenu pour plusieurs valeurs de  $\mathcal{P}$ ) et l'obtention explicite de  $\mathcal{M}^{-1}$ , s'il existe, n'est possible que dans un nombre très restreint de cas, ce qui en limite l'utilisation. C'est pourquoi d'autres schémas ont été mis en œuvre pour contourner cette difficulté. L'idée la plus souvent retenue est de résoudre l'équation [1.4.2] à l'aide d'un

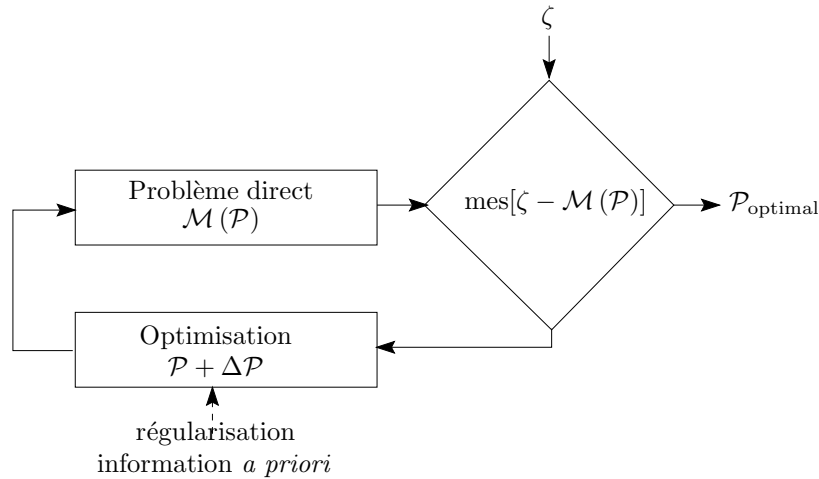


FIGURE 1.4.2 – Schéma de résolution du problème inverse par optimisation de l'adéquation aux données

schéma itératif d'optimisation (figure 1.4.2), ce qui revient à résoudre « au mieux » sans jamais calculer explicitement  $\mathcal{M}^{-1}$ . Ce schéma permet de déterminer un ensemble de paramètres optimaux,  $\mathcal{P}_{\text{optimal}}$ , tel que l'écart entre les mesures  $\zeta$  et la solution  $\mathcal{O} = \mathcal{M}(\mathcal{P})$  soit minimal :

$$\mathcal{P}_{\text{optimal}} = \arg \min_{\mathcal{P}} (\text{mes} [\zeta - \mathcal{M}(\mathcal{P})]), \quad [1.4.3]$$

où  $\text{mes}[\cdot]$  est une mesure judicieusement choisie de cet écart (ce terme d'adéquation aux données est souvent appelé fonction coût, fonction objectif, ...), son choix dépendant bien entendu de la solution recherchée, de l'application envisagée, etc.

Les différentes étapes du processus d'inversion sont alors les suivantes : (i) choix d'un ensemble de paramètres  $\mathcal{P}$  de départ ; (ii) résolution du problème direct ; (iii) mesure de l'écart entre les données  $\zeta$  et la solution du problème direct, sachant que si cet écart est jugé suffisamment petit en regard d'un critère choisi, le processus s'arrête et la solution  $\mathcal{P}_{\text{optimal}}$  correspondante est obtenue, tandis que, dans le cas contraire, le processus se poursuit ; (iv) processus d'optimisation dans lequel une correction est effectuée sur l'ensemble des paramètres de sorte que l'écart diminue. À ce stade du processus, des contraintes sur les corrections peuvent être incorporées de façon à privilégier certaines solutions à l'aune d'informations *a priori*. Puis le processus revient à l'étape (ii) et se répète.

Ces problèmes inverses sont en toute hypothèse non linéaires, les champs observés ne dépendant pas linéairement des paramètres des objets. Ils sont également mal posés : sans en discuter la notion avec le détail qui serait clairement requis [TA74], existence, unicité et continuité par rapport aux données de la solution inverse ne peuvent être assurées simultanément, ce qui d'un point de vue pratique fait notamment que des petites perturbations des données peuvent conduire à de larges variations des paramètres reconstruits. À ces obstacles théoriques s'ajoutent ceux, plus classiques, liés aux imperfections des données elles-mêmes (erreurs aléatoires ou systématiques) et des modèles.

Ainsi, nous approchons, par le modèle choisi, une situation réelle, et l'inversion elle-même peut par exemple se faire en négligeant une partie significative des phénomènes d'interaction survenant entre l'hôte et les objets, telles des diffractions multiples. Dans le cadre de telles approximations, des modèles linéaires peuvent s'appliquer avec fruit. C'est par exemple souvent le cas quand les longueurs d'ondes sont soit grandes soit petites devant une taille pertinente des objets, ce sur quoi nous reviendrons.

Prenant en compte ce qui précède, l'idée prégnante est la construction et la mise en œuvre de méthodes de résolution de ces problèmes inverses qui conduisent à des solutions :

- qui soient suffisamment précises pour être utiles et stables vis-à-vis des erreurs, tant des modèles que des données, ce qui se fait grâce à des régularisations (typiquement opérant sur la norme des solutions, de leurs dérivées, ou de celles de fonctions résultant de l'application d'opérateurs particuliers sur ces solutions), et l'incorporation au départ et/ou au cours de l'inversion d'information *a priori* sur les objets (compacité, positivité, connexité, amplitudes bornées, etc.) ;
- qui puissent être obtenues assez rapidement, notamment dans le cas de structures complexes ou de tailles importantes (ce qui dépend bien sûr des ordinateurs utilisés et des méthodes numériques choisies), et

dont le mode de construction prenne au mieux en compte la forme et les limitations des données tout en étant assez général pour rester utile dans des situations rencontrées, non nécessairement nominales.

### 1.4.3 Problème direct

La résolution des problèmes directs correspondants est une première étape indispensable pour toute étude de problèmes inverses. Elle permet :

- une validation de la formulation des grandeurs (champs, déplacements, ou toutes fonctions associées, potentiels notamment) acoustiques ou élastiques choisies par comparaison avec des résultats synthétiques (décrits dans la littérature par exemple) ou des résultats expérimentaux, ces derniers pouvant avoir été obtenus alors soit en situation contrôlée en laboratoire (une étape clé en pratique) soit sur le terrain (avec toutes les contraintes du monde réel) ;
- l’acquisition de données synthétiques qui fourniront une large variété de tests de faisabilité, robustesse, ou précision des inversions (on parlera souvent d’expérimentation numérique) ;
- une meilleure compréhension des phénomènes d’interaction mis effectivement en jeu, avec, dans les meilleures situations, la mise en évidence des paramètres clés des objets (et de ceux de leurs hôtes), paramètres dont on peut s’attendre à ce qu’ils soient ceux devant être recherchés par inversion ou ceux pouvant seuls être atteints.

En sus, un tel travail conduit notamment à l’obtention de modules de calcul rapides utilisables au cours des inversions, puisqu’une difficulté significative des solutions des problèmes inverses réside fréquemment dans l’obligation de calculs répétitifs —souvent coûteux— des grandeurs modélisées pour des environnements donnés.

Notons à ce propos que les formulations fortes sont celles que l’on peut estimer être le plus fréquemment employées comme point de départ commun au problème direct et au problème inverse — avec les cas immédiats d’approximation du type Born, et autres séries de Neumann ou extensions (parfois vues dans le cadre de la théorie basse-fréquence [DK00]) ou du type Kirchhoff (haute-fréquence) [LMM02]. Elles reposent sur la mise en avant de fonctions de Green, scalaires (milieux fluides acoustiques) ou tensorielles (milieux solides élastiques), qui s’établissent en tant que solutions de systèmes différentiels convenables, avec l’application de conditions aux limites aux frontières (des objets eux-mêmes, de l’espace hôte, avec ses interfaces et naturellement à distance infinie), et elles conduisent à la formulation du phénomène de diffraction par le biais de formulations intégrales souvent dites de Lippman-Schwinger.

Bien entendu, la réalité des calculs directs repose aussi sur des formulations faibles qui nous conduisent à des méthodes d’éléments finis et leurs multiples variantes et extensions, en notant que les travaux classiques de [Hoo95] ont mis en évidence les équivalences des deux types de représentations et les similarités des techniques traditionnelles qui en sont issues, méthodes de moments et éléments finis.

Il est important de souligner ici que rien n’empêche l’utilisation de techniques telles que les différences finies et leurs variantes et/ou extensions, notamment dans le cas où les environnements des obstacles sont tels (en géométrie, en distribution des paramètres électromagnétiques ou élastiques) que les fonctions ou tenseurs de Green sont inconnus ou trop compliqués à élaborer, ou que les éléments finis se révèlent trop coûteux à mettre en œuvre ou inadaptés.

### 1.4.4 Optimisations

Loin de prétendre à l’exhaustivité sur les méthodes d’optimisation nous nous limiterons ici à en exposer les grandes familles avec leurs avantages et inconvénients et à renvoyer le lecteur à des références que nous estimons illustratives.

Rappelons ici que le but de l’optimisation dans une inversion est de trouver, dans un espace de recherche décrit par l’ensemble des solutions possibles, celle qui est telle que le critère d’adéquation aux données (la fonction coût) soit minimal — naturellement, plus le problème est complexe et plus cette solution optimale risque d’être difficile à trouver.

Une méthode possible est de parcourir l’ensemble du domaine de recherche, de calculer pour chaque solution possible la fonction coût correspondante (ce qui nécessite la résolution du problème direct à chaque fois), puis de ne retenir que la solution donnant la fonction coût la plus faible. Il devient vite évident que cette méthode est coûteuse du point de vue du temps de calcul et devient irréaliste dans les cas de problèmes de grandes tailles ou d’espaces de paramètres  $\mathcal{P}$  de dimension élevée.

C’est pourquoi des techniques d’optimisation ont été développées, qui peuvent au moins approximativement être divisées en deux familles classiquement appelées optimisations  $\mathbb{J}$  globales  $\mathcal{L}$  et  $\mathbb{J}$  locales  $\mathcal{L}$ , que nous allons décrire rapidement.

- Optimisation locale : Ces méthodes se basent sur l'idée que, partant d'une solution initiale bien choisie, le choix de la direction de déplacement dans l'espace des solutions pour estimer une meilleure solution s'effectue à partir de l'estimation du gradient de la fonction coût par rapport aux paramètres. Une convergence assez rapide du processus en résulte souvent, ce qui se paye cependant par deux limitations majeures, (i) une contrainte sur le choix de la fonction coût, qui se doit notamment d'être dérivable par rapport aux paramètres, (ii) le risque traditionnel que cette recherche aboutisse dans un minimum local dont l'algorithme ne pourra nous extraire, empêchant ainsi d'atteindre le minimum global souhaité. Parmi les nombreux ouvrages consacrés à l'optimisation, citons [Bon+97].
- Optimisation globale : Une des méthodes les plus anciennes est celle de Monte Carlo avec laquelle un tirage aléatoire est effectué dans l'espace des solutions, puis la fonction coût correspondante évaluée et comparée à la meilleure solution déjà obtenue, en gardant la nouvelle solution si celle-ci fournit un coût plus petit, le processus se répétant jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait. Une telle méthode a le désavantage de proposer à chaque tirage une solution indépendante de tous les tirages précédents; c'est pourquoi d'autres méthodes permettant de prendre en compte les informations précédemment acquises pour proposer une nouvelle solution ont été développées. Les plus connues sont sans doute le recuit simulé, basé sur la théorie de la thermodynamique, et l'algorithme génétique qui fait appel à la théorie de l'évolution d'une population dans un espace, avec de multiples variantes et adaptations de l'un ou de l'autre [Mic97].

Bien entendu, des approches combinant à la fois une optimisation globale et une optimisation locale ont été proposées, alliant alors la capacité de parcourir l'espace des paramètres de l'une à la rapidité de convergence de l'autre.

À cette décomposition en deux grandes familles des algorithmes de minimisation peut se superposer une décomposition selon le choix des informations attendues par l'utilisateur.

- Cartographie : le domaine de recherche est divisé en pixels en 2-D ou voxels en 3-D — dorénavant nous nous réduirons au vocable  $\text{ii}$  pixel  $i,i$  par souci de simplification — où les paramètres physiques sont supposés constants. Les algorithmes de gradient vont ainsi estimer la valeur de chaque paramètre dans chaque pixel et produire ainsi une carte de variation des propriétés physiques de la scène proposée. Une présentation qui demeure d'actualité des méthodes de gradient utilisées en inversion acoustique et électromagnétique est proposée dans [vK97]. Si la plupart de ces algorithmes résolvent un problème non-linéaire par la résolution successive de problèmes linéaires (méthode de Newton-Kantorovich et ses équivalences ou variantes, telles méthode de Born distordu et méthode de Born itératif), certaines sont directement développées afin de prendre en compte la non-linéarité du problème (méthode du gradient conjugué, du gradient modifié, et celle de contraste de source, pour se référer aux plus connues de la littérature spécialisée actuelle, chacune bien entendu avec des ajouts spécifiques, et son pour et contre).
- Reconstruction de contour : à la différence de la cartographie, les méthodes de reconstruction de contour (une ligne en 2-D, une surface en 3-D) visent à la détermination de la frontière d'obstacles supposés homogènes ou homogènes par morceaux. Ces frontières évoluent dans l'espace grâce aux calculs de gradients de forme qui s'obtiennent, dans la majorité des cas, à partir de la solution d'un problème dit  $\text{ii}$  adjoint  $i,i$  judicieusement choisi. Ce sont alors les méthodes devenues classiques basées sur des formalismes électromagnétiques ou élastiques en intégrales de contour pour lesquelles les inconnues sont des coefficients décrivant la frontière du ou des obstacles inconnus, Une des limitations majeures tient cependant au fait que le nombre d'obstacles à reconstruire (ou à tout le moins une borne supérieure de ce nombre) doit être connu par avance. C'est pourquoi de nouvelles méthodes ont été développées afin de permettre, si nécessaire et de façon naturelle, l'apparition ou la disparition d'obstacles. Typiques sont ainsi les méthodes d'évolution contrôlées d'ensembles de niveaux qui combinent en pratique deux approches. La première est basée sur les travaux que décrit par exemple [Set99] conduisant à représenter le contour d'un obstacle de topologie non connue via le niveau zéro d'un ensemble de niveaux, [San96] en étant une utilisation pionnière pour les problèmes inverses de diffraction. La seconde est basée sur des travaux sur les méthodes de vitesse largement considérées dans la conception optimale de formes [DZ01; SZ92]. Au total, on peut faire évoluer le contour, via l'évolution globale de l'ensemble de niveaux, impliquant des dérivations topologiques dans tout le domaine de recherche, de façon à en optimiser sa forme vis-à-vis d'un critère d'adéquation aux données (complémenté par exemple par des contraintes judicieuses sur le périmètre ou la surface, l'aire ou le volume de ou des obstacles que le contour définit.).

Le choix des paramètres à rechercher est une des difficultés majeures de la résolution des problèmes inverses. Ce choix repose sur un équilibre entre la rapidité attendue et/ou espérée des algorithmes, la complexité du modèle utilisé et la précision sur la solution souhaitée. Si une grande partie du travail effectué ici concerne la caractérisation complète (peu ou pas d'approximations), plusieurs chemins conduisant à des solutions approchées

peuvent être suivis :

- Recherche d'un obstacle équivalent : l'obstacle recherché est remplacé par un obstacle canonique équivalent (cylindre circulaire, ellipsoïde et ses formes dégénérées, la sphère étant fréquemment seule considérée, ou d'autres formes adaptées à l'application visée), obstacle dont la position, les paramètres physiques et les descripteurs géométriques pertinents sont alors à déterminer de façon plus ou moins élaborée, ce qu'illustre par exemple [Wir02] et références citées.
- Recherche de sources équivalentes : l'obstacle recherché est remplacé par un jeu de sources discrètes équivalentes ou par une distribution de sources équivalentes dont positions et amplitudes, contiennent, sous des formes plus ou moins élaborées, des informations électromagnétiques ou élastiques et géométriques sur l'obstacle à caractériser, ce dont témoigne une abondante littérature en y notant, entre autres contributions pionnières, [AJK97], tandis que l'on pourra se référer aussi à [LL00] pour une application d'acoustique sous-marine en petits fonds.

### 1.4.5 Autres approches

À ces techniques s'attachant à résoudre le problème inverse non linéaire s'ajoutent les techniques de tomographie par diffraction ou rétropropagation filtrée et autres dénominations, dont il existe de nombreuses et actuelles références — nous ne mentionnerons ici que [PGM96; Lan02]. Ces techniques s'appuient sur des versions linéarisées des équations à traiter. Cette linéarisation des équations s'effectue le plus souvent à travers l'approximation de Born dans le cas de diffracteurs ayant un faible contraste de paramètres avec le milieu environnant (peu diffringents) et avec celle de Kirchhoff (également approximation de l'optique physique) dans le cas de diffracteurs qu'on peut considérer impénétrables (contraste de paramètres très important avec le milieu environnant). Ces formulations conduisent à des algorithmes rapides de résolution, le plus souvent impliquant des transformées de Fourier rapides (cas de lignes de mesure droites ou de surfaces de mesure planes).

Récemment dans [CK96] a été proposée une méthode originale de reconstruction de la frontière des obstacles intitulée *linear sampling*. Initialement proposée pour le cas de la reconstruction de la frontière d'obstacles impénétrables à partir de la mesure du champ diffracté lointain, elle se base sur une relation linéaire entre le champ lointain et une fonction indicatrice dont la norme tend vers l'infini sur le contour des obstacles, le but étant alors de trouver l'ensemble des points pour lesquels cette norme est infinie. De nombreuses extensions ont suivi ce travail princeps (dont les méthodes de factorisation), notamment dans le cas de problèmes inverses en champ proche [FG04]. En lien avec ce qui précède, ainsi que souligné de manière originale par [Che01], nous noterons aussi que peut être abordé le cas de la localisation de diffracteurs supposés assez petits vis-à-vis de la longueur d'onde de leur exploration, avec de nombreux travaux établis ou se développant notamment en retournement temporel (on mentionnera un récent tutorial [FP01]) et/ou à propos d'approches impliquant l'algorithme MUSIC (*MUltiple Signal Classification*), ce qu'illustre alors [Kir02] et [AIL05].

Enfin, le cas de milieux bornés pour lesquels des données aux limites complètes (Dirichlet-Neumann) sont disponibles peut être abordé au moyen de la méthode de *l'écart à la réciprocité*. Celle-ci repose sur le fait que deux états acoustiques sont liés par une identité de réciprocité faisant intervenir des intégrales sur toutes les frontières du milieu considéré. En l'absence d'obstacle, cette identité est vérifiée pour les mesures externes et tout état (dit *adjoint*) satisfaisant les équations de champ, et un écart à sa vérification signale donc l'existence d'un objet (simple ou multiple) à identifier. Un choix judicieux d'état adjoint permet dans certains cas d'extraire par des calculs explicites des informations sur l'obstacle. Par exemple, un développement récent [BCM04] a montré que l'enveloppe convexe de l'obstacle peut être calculée à partir d'évaluations de l'écart à la réciprocité instantané pour des champs adjoints du type onde plane propagative bien choisis.

### 1.4.6 Configuration générique

Il est utile de mentionner que nombre d'études de l'inversion se limitent de fait à une configuration générique, cette dernière étant souvent choisie comme une idéalisation locale plus ou moins significative de la structure sous test, ou servant à affirmer des concepts dont l'application viendra dans un temps ultérieur.

Le milieu hôte est en effet fréquemment supposé homogène par morceaux, tel un empilement de strates homogènes d'interfaces parallèles planes, le cas de tubes cylindriques circulaires voire de cavités ou blocs sphériques étant pertinent aussi. Les sources qui créent l'éclairement (nous sommes, rappelons-le, dans une situation active) peuvent être, comme déjà indiqué, planes et générées à l'infini ou localisées. Lignes et autres points sources et dipôles simplifient considérablement l'analyse, mais des dispositifs rayonnants plus élaborés, tels des réseaux linéiques ou surfaciques, sont d'un abord nécessaire. Elles sont placées soit sur ou à distance finie de la première interface (avec la possibilité qu'elles soient directement en contact avec elle), soit dans le milieu hôte, à l'intérieur

d'une strate par exemple. Les récepteurs, en nombre limité, donnent accès au champ diffracté, qui est donc lié aux objets enfouis de cet hôte, et ils sont également placés soit à la surface soit au sein même du milieu hôte.

Les données ainsi obtenues sont qualifiées dans la littérature *d'aspect limité* : il n'est pas possible, en résumé, de tourner tout autour de l'obstacle. Pour compenser partiellement la perte d'information qui en résulte, les mesures sont effectuées, dans la mesure du possible, à plusieurs fréquences en régime harmonique (dans une certaine bande passante en régime impulsionnel) et pour plusieurs géométries de sources et de récepteurs, conduisant à des montages mono-, bi- ou multi-statiques, avec des couvertures en espace et fréquence plus ou moins particulières.

Entre autre impact de cet aspect limité, insistons sur le fait que les théorèmes d'unicité des inversions — ces derniers, en règle générale se préoccupant en acoustique d'unicité à partir de diagrammes de diffraction associés aux obstacles [CK98], avec des extensions délicates et actuellement objets de débats en élasticité, et les deux cas fondamentaux de la fissure et de l'inclusion de section droite ou de volume fini — ne sont connus que dans les configurations non restreintes d'objets diffractants en espace homogène (libre), ce qui aggrave la complexité d'interprétation des résultats des inversions. Le cas d'un hôte stratifié au lieu d'un demi-espace homogène essentiellement augmente, quant à lui, la complexité mathématique et de calcul numérique des fonctions ou tenseurs de Green sur lesquels reposent les formulations intégrales fortes le plus souvent introduites.

### 1.4.7 Illustrations

#### Évolution contrôlée d'ensembles de niveaux

La description qui suit est inspirée de celle effectuée en [Ram+02b], tandis qu'on pourra se référer, pour une analyse plus élaborée, à des publications de fond telle [Ram+02a] et les abondantes références qui y sont citées.

Soit un objet cylindrique homogène  $\Omega$  de section droite quelconque non nécessairement connexe mais de frontières assez douces, supposé enfoui en totalité au sein d'un domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace (libre, demi-espace, lame) et illuminé par des sources opérant en régime harmonique. Le champ est recueilli par des récepteurs appropriés, nous procurant sur un ensemble  $\mathcal{S}$  des valeurs de champ  $\zeta$ .

L'analyse vaut sur les cas de polarisation TM ou TE de l'électromagnétisme, et en acoustique des fluides, alors dans le cas de variations de célérité des ondes de compression (ou de compressibilité), en introduisant un contraste  $\chi$  de la quantité appropriée à possible valeur complexe, nul en dehors de l'objet, les conditions de frontière étant des conditions de transmission (un objet impénétrable sera modélisé via l'introduction de fortes pertes). Des équations intégrales de domaine, rigoureuses et établies par l'application de théorèmes de Green, lient en conséquence les champs diffractés, notés  $U_d$ , du domaine de mesure  $\mathcal{S}$  aux champs  $U$  existant dans le domaine  $\mathcal{D}$  (équation d'observation) et ces derniers à eux-mêmes (équation d'état) de type Lippman-Schwinger.

La recherche proprement dite est implicite, et s'effectue sur un maillage cartésien fixe en espace (permettant le pré-calcul des fonctions de Green discrètes, les calculs numériques étant menés après application d'une méthode de moments aux équations intégrales des champs) et en temps (avec de possibles choix adaptatifs de ce dernier paramètre). Elle voit l'évolution en le temps  $t$  d'une fonction d'ensemble de niveaux  $\phi$  dont le niveau 0 définit dorénavant la frontière  $\Gamma_t$ , et dont les valeurs négatives sont associées aux points intérieurs, les valeurs positives aux points extérieurs du domaine  $\Omega_t$  acquis au temps  $t$ .

L'existence d'un champ de vitesse  $V$  de déformation de  $\Omega_t$  normal à cette frontière  $\Gamma_t$  (l'objet ou les parties de l'objet sont closes, seules comptent les vitesses normales) signifie alors que  $\phi$  satisfait une équation d'évolution de Hamilton-Jacobi [Set99] en espace  $\mathbf{x}$  et temps  $t$  :

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, \mathbf{x}) + V(t, \mathbf{r}) |\nabla\phi(t, \mathbf{x})| = 0, \mathbf{r} \in \mathcal{D}. \quad [1.4.4]$$

Il reste à construire une (la) vitesse  $V$  qui transforme un domaine  $\Omega_0$  initial en un  $\Omega_t$  plus satisfaisant, i.e., la fonctionnelle objectif  $J(\Omega_t)$  faite de la norme  $\|U_d - \zeta\|_{\mathcal{S}}^2$  de l'écart aux données sur  $\mathcal{S}$  voit son amplitude diminuer, ou est telle que  $dJ/dt$  est négatif aux incertitudes numériques et erreurs de discrétisation près. Des termes de pénalisation de l'aire et du périmètre peuvent être incorporés dans la fonctionnelle objectif, et induisent des changements convenables de la vitesse  $V$ . Cette construction produit la dérivée de  $J$  à  $t$  via la construction d'un minimum-maximum d'un lagrangien  $\mathcal{L}$ , évitant une lourde dérivation du champ vis-à-vis de la déformation du domaine. La théorie du contrôle, e.g., [SZ92; DZ01] montre en effet que la dérivée cherchée est la dérivée partielle de ce lagrangien en son point selle (prouvé unique dans le cas de notre intérêt), celle-ci appelant à un gradient de forme,  $g$ , défini originellement sur le contour puis étendu à tout l'espace de recherche. Cette extension s'est effectuée de manière heuristique à l'origine mais a été validée ultérieurement à travers la



notion de *dérivation topologique*, notion de bonne actualité tant en électromagnétisme qu'en élasticité, comme l'illustrera d'ailleurs la section suivante.

Ainsi, dans le cas de contrastes de célérité des ondes de compression entre le milieu fluide et l'objet qui y est inséré (conditions de transmission),  $g$  se réduit simplement sur la frontière au produit  $\chi \Re(U_p)$ ,  $\Re$  désignant la partie réelle,  $U$  étant l'état direct, i.e., la solution du problème direct de diffraction posé, et  $p$  étant l'état adjoint, qui satisfait les mêmes équations de propagation et de transmission que l'état direct mais dont la source est constituée de la distribution complexe conjuguée de l'écart entre les données et les champs associables à l'objet reconstruit à l'instant considéré,  $U_d - \zeta$ , sur  $\mathcal{S}$ .

On montrerait alors que la quantité  $(J(\Omega + \Omega_\varepsilon) - J(\Omega)) / \text{mes}(\Omega_\varepsilon)$  a elle-aussi comme valeur  $\chi \Re(U_p)$  en tout point  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{D}$ , en ayant défini pour ce faire  $\Omega_\varepsilon$  comme étant un domaine de contraste  $\chi$  de  $\mathcal{D}$  simplement connexe et de contour assez régulier, et dont la mesure,  $\text{mes}(\Omega_\varepsilon)$ , tend vers 0 et qui s'écrase en le point  $\mathbf{x}$  quand le paramètre réel  $\varepsilon$  tend vers 0, et en ayant noté respectivement  $J(\Omega + \Omega_\varepsilon)$  et  $J(\Omega)$  la valeur de la fonctionnelle  $J$  avec cette perturbation  $\Omega_\varepsilon$  ou sans celle-ci.

Le point délicat de la nature des gradients de forme  $g$  lors de l'apparition ou la disparition de domaines n'est par contre pas abordé : en bref, les changements de topologie, par exemple par fusion ou fission de domaines, les normales étant en particulier indéfinies aux points de collage ou rupture, posent un problème pour l'essentiel encore ouvert de définition d'espaces fonctionnels, et d'écriture appropriée de l'équation d'évolution, mais la pratique numérique est valide comme de multiples exemples l'ont montré.

L'application de ce qui précède est illustrée par la reconstruction de deux obstacles fluides de tailles différentes (l'un fait environ  $\lambda \times \lambda$ , l'autre  $\lambda/3 \times \lambda$ ) plongés dans un milieu homogène également fluide,  $\lambda$  étant ici la longueur d'onde dans le milieu environnant donnée par  $c/f$  où  $c$  est la célérité (1470 m/s) et  $f$  la fréquence d'émission des sources (1 MHz), les obstacles étant de même célérité 1800 m/s. L'ensemble est éclairé par 4 lignes sources équ réparties sur un cercle de rayon  $2\lambda$  et le champ diffracté est mesuré sur 32 récepteurs également équ réparties sur ce même cercle. Les données synthétiques sont obtenues numériquement par résolution du problème direct et ne sont donc pas affectées par un quelconque bruit de mesure. Notons que le domaine dans lequel les obstacles sont recherchés est placé au centre du système et possède une taille de  $5\lambda/3 \times 5\lambda/3$ .

Sur la figure 1.4.3 sont présentées les deux meilleures reconstructions (au sens des solutions ayant la fonction coût la plus faible) obtenues avec deux variantes différentes de la méthode d'évolution d'ensemble de niveaux, toutes deux initialisées par un obstacle carré unique (figure 1.3(a)). Dans la première approche (figure 1.3(b)) le contraste est connu et fixé, la frontière étant alors la seule inconnue ; dans la seconde (figure 1.3(c)) la frontière et le contraste de l'obstacle sont inconnus, cette situation se réglant quant à elle par alternance du processus d'évolution et d'une évaluation à domaine fixé du contraste (la célérité de l'obstacle initial a été prise ici de valeur 2000 m/s) qui est menée par un algorithme non-linéaire de Levenberg-Marquardt, en s'insérant comme de nécessaire dans un formalisme lagrangien pour exprimer de manière rigoureuse la dérivation vis-à-vis du contraste [Ram+03].

## Dérivée topologique

Considérons l'identification d'un obstacle rigide (ou d'un ensemble de tels obstacles) dans un milieu acoustique tridimensionnel (borné ou non) excité par des sources ponctuelles unitaires appliquées successivement aux points  $\mathbf{x}_i^S$  ( $1 \leq i \leq N$ ). Le champ  $u$  diffracté par les objets est supposé mesuré en des récepteurs  $\mathbf{x}_j^m$  ( $1 \leq j \leq M$ ). Ce problème se ramène à celui de la reconstruction du contour  $\Gamma$  de l'obstacle de domaine  $\Omega$ , obstacle simple ou multiple. Il est alors naturel de former la fonction coût

$$\mathcal{J}(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^M \left\| u_{\Omega}^{(i)}(\mathbf{x}_j^m) - \xi^{(i)}(\mathbf{x}_j^m) \right\|^2 \right\}$$

où  $u_{\Omega}^{(i)}$  désigne le champ acoustique diffracté pour la source  $\mathbf{x}_i^S$  et une configuration donnée  $\Omega$  de l'obstacle et  $\xi^{(i)}$  le champ diffracté mesuré correspondant (le domaine  $\Omega$ , ou de manière équivalente la surface  $\Gamma$ , joue donc le rôle du paramètre  $\mathcal{P}$  dans (1.4.3)).

La minimisation de  $\mathcal{J}(\Omega)$  par des méthodes traditionnelles requiert un choix de configuration initiale  $\Omega^{(0)}$ , qu'il est souhaitable de ne pas faire de façon aveugle. Si  $\mathcal{D}$  désigne le milieu sans obstacle, il est intéressant de chercher à évaluer l'influence sur la fonction coût de la présence d'un petit obstacle  $\Omega_\varepsilon(\mathbf{x}^o)$  de forme spécifiée (par exemple sphérique), de taille caractéristique  $\varepsilon$  et de volume  $\varepsilon^3 V$ , centré en un point  $\mathbf{x}^o$  de  $\mathcal{D}$ . On peut établir que, dans la situation présente, la fonction coût admet un développement de la forme

$$\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon(\mathbf{x}^o)) - \mathcal{J}(\emptyset) = \varepsilon^3 V \mathcal{T}(\mathbf{x}^o) + o(\varepsilon^3)$$

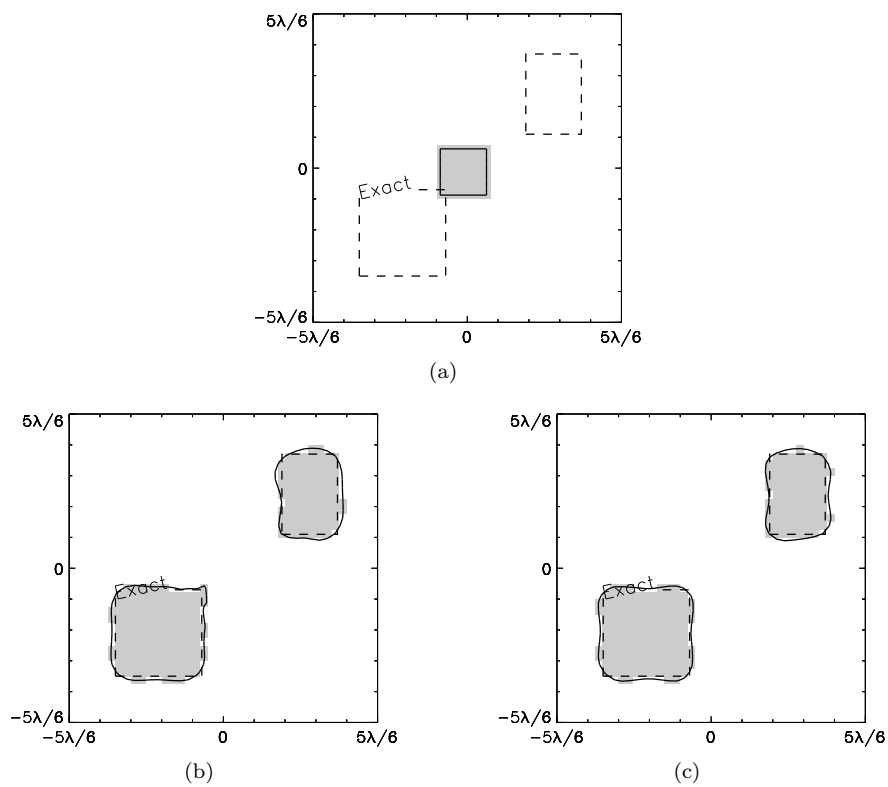


FIGURE 1.4.3 – Reconstruction d'un objet constitué de deux parties disjointes de même contraste. Initialisation du processus (a), meilleure solution obtenue (b) par la méthode d'évolution d'ensembles de niveaux, (c) par sa combinaison avec une méthode de reconstruction de contraste. La frontière exacte est en tirets, celle reconstruite en trait plein (le niveau zéro de l'ensemble de niveaux), la zone grisée précise l'intérieur de l'objet

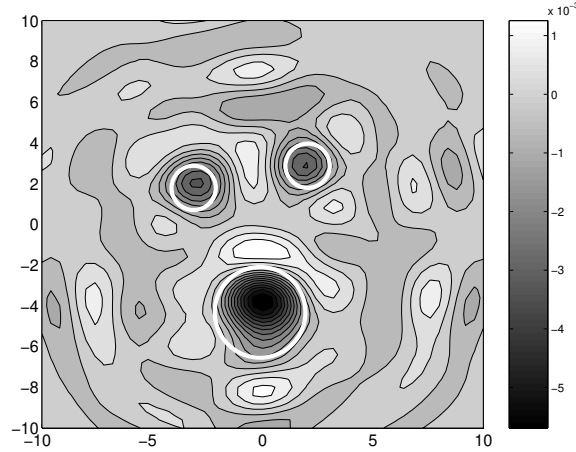


FIGURE 1.4.4 – Identification d'un ensemble de trois objets sphériques rigides (centres  $(-3, 2, -3)$ ,  $(2, 3, -3)$  et  $(0, -4, -4)$ , rayons 1, 1 et 2, représentés par des cercles blanche) dans un demi-espace acoustique  $x_3 \leq 0$  : distribution de  $\mathcal{T}$  dans le plan  $x_3 = -3$

où  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^\circ)$ , la dérivée topologique de  $\mathcal{J}$  en  $\mathbf{x}^\circ$ , est donnée, en fonction des champs incidents  $u^{(i)}$  associés à chaque source et des champs adjoints  $v^{(i)}$  créés par la superposition des sources dont les intensités sont les complexes conjugués de l'écart  $u_\Omega^{(i)}(\mathbf{x}_j^m) - \xi^{(i)}(\mathbf{x}_j^m)$  appliquées aux récepteurs, par

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}^\circ) = \sum_{i=1}^N \left[ \nabla u^{(i)} \cdot \mathbf{A} \cdot \nabla v^{(i)} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} u^{(i)} v^{(i)} \right] (\mathbf{x}^\circ) \quad [1.4.5]$$

où le tenseur du second ordre  $\mathbf{A}$  ne dépend que de la forme choisie pour  $\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}^\circ)$  (pour une forme sphérique, on montre que  $A_{ab} = (3/2)\delta_{ab}$ ). Dans l'optique d'une minimisation de  $\mathcal{J}(\Omega)$ , les régions « intéressantes » de l'espace sont alors celles pour lesquelles la dérivée topologique  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^\circ)$  est négative ; on peut par exemple, de façon heuristique, considérer ces dernières comme première approximation de l'obstacle recherché. Cette approche est actuellement en cours d'exploration pour le problème inverse homologue en élastodynamique [BG04].

A titre d'illustration, considérons le problème de l'identification d'un ensemble de trois objets sphériques rigides (centres  $(-3, 2, -3)$ ,  $(2, 3, -3)$  et  $(0, -4, -4)$ , rayons 1, 1 et 2, en unités arbitraires) dans un demi-espace acoustique  $x_3 \leq 0$  tel que la longueur d'onde est  $\lambda = (2\pi/1, 1)$ . On considère  $N = 4$  sources ponctuelles situées aux points  $\mathbf{x}^S = (\pm 5, \pm 5, 0)$  de la surface  $\{x_3 = 0\}$ , sur laquelle une condition de vitesse nulle est par ailleurs supposée, ainsi que  $M = 9$  récepteurs  $\mathbf{x}^m = ((0, \pm 5), (0, \pm 5), 0)$ . La figure 1.4.4 montre le champ de dérivée topologique  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^\circ)$  calculée sur une grille de points  $\mathbf{x}^\circ$  situés dans le plan  $x_3 = -3$ . Les valeurs négatives les plus basses de  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^\circ)$  correspondent à l'emplacement horizontal des objets, et le minimum absolu de  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^\circ)$  indique le plus grand objet.

Il est important de noter que le calcul numérique du champ de dérivée topologique  $\mathcal{T}(\mathbf{x}^\circ)$  est facile et peu coûteux en regard du coût numérique d'un algorithme d'optimisation pour le même problème inverse. Le champ  $u$  est de toute manière nécessaire à l'évaluation de la valeur initiale de la fonction coût. Les champs adjoints sont évalués soit par des formules explicites (représentations intégrales), soit par résolution d'un problème aux limites adjoint dont l'opérateur a alors déjà été construit et factorisé pour le calcul de  $u$ . La formule (1.4.5), ou ses variantes dans d'autres contextes, est d'évaluation rapide. De nombreuses extensions de la notion de dérivée topologique, initialement introduite pour l'optimisation topologique de structures [EKS94] et dont l'application aux problèmes inverses n'est qu'à ses débuts, sont à l'étude.

## 1.5 Bibliographie

- [AIL05] H. AMMARI, E. IAKOVLEVA et D. LESSELIER. « A MUSIC algorithm for locating small inclusions buried in a half space from the scattering amplitude at a fixed frequency ». *Multiscale Modeling & Simulation* 3 (2005), p. 597-628.
- [AJK97] T. S. ANGELL, J. JIANG et R. E. KLEINMAN. « A distributed source method for inverse acoustic scattering ». *Inverse Problems* 13 (1997), p. 531-346.

- [BCM04] H. D. BUI, A. CONSTANTINESCU et H. MAIGRE. « Numerical identification of linear cracks in 2D elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap ». *Inverse Problems* 20 (2004), p. 993-1001.
- [BG04] M. BONNET et B. B. GUZINA. « Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative ». *Int. J. Num. Meth. Engng* 61 (2004), p. 2344-2373.
- [Bon+97] F. BONNANS, J. C. GILBERT, C. LEMARÉCHAL et C. SAGASTIZABAL. *Optimisation Numérique — Aspects Théoriques et Pratiques*. Berlin : Springer Verlag, 1997.
- [Bon99] M. BONNET, éd. *Problèmes Inverses : de l'Expérimentation à la Modélisation*. Tec & Doc. T. 22. Arago. Observatoire Français des Techniques Avancées (OFTA), 1999.
- [Che01] M. CHENEY. « The linear sampling method and the MUSIC algorithm ». *Inverse Problems* 17 (2001), p. 591-595.
- [CK96] D. COLTON et A. KIRSCH. « A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region ». *Inverse Problems* 12 (1996), p. 383-393.
- [CK98] D. COLTON et R. KRESS. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering, 2nd. ed.* Berlin : Springer Verlag, 1998.
- [DK00] G. DASSIOS et R. E. KLEINMAN. *Low Frequency Scattering*. Oxford : Oxford University Press, 2000.
- [DZ01] M. C. DELFOUR et J.-P. ZOLÉSIO. *Shapes and Geometries: Analysis, Differential Calculus and Optimization*. Philadelphie : SIAM, 2001.
- [EKS94] H. A. ESCHENAUER, V. V. KOBELEV et A. SCHUMACHER. « Bubble method for topology and shape optimization of structures ». *Structural Optimization* 8 (1994), p. 42-51.
- [FB93] J. FOKKEMA et P. M. van den BERG. *Seismic Applications of Acoustic Reciprocity*. Amsterdam : Elsevier, 1993.
- [FG04] S. N. FATA et B. B. GUZINA. « A linear sampling method for near-field inverse problems in elastodynamics ». *Inverse Problems* 20 (2004), p. 713-736.
- [FP01] M. FINK et C. PRADA. « Acoustical time-reversal mirrors ». *Inverse Problems* 17 (2001), R1-R38.
- [Hoo95] A. T. de HOOP. *Handbook of Radiation and Scattering of Waves: Acoustic Waves in Fluids, Elastic Waves in Solids, Electromagnetic Waves*. San Diego : Academic Press, 1995.
- [Kir02] A. KIRSCH. « The MUSIC algorithm and the factorisation method in inverse scattering theory for inhomogeneous media ». *Inverse Problems* 18 (2002), p. 1025-1040.
- [Kun03] T. KUNDU. « Preface to the Special I2M Issue on Ultrasonic Methods for Material Characterization ». *Instrumentation, Mesure, Métrologie* 3 (2003), p. 1775-1794.
- [Lan02] K. J. LANGENBERG. « Linear scalar inverse scattering ». *Scattering - Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*. Sous la dir. de R. PIKE et P. SABATIER. London: Academic Press, 2002, p. 121-141.
- [LL00] M. LAMBERT et D. LESSELIÉRE. « Distributed source method for retrieval of the cross-sectional contour of an impenetrable cylindrical obstacle immersed in a shallow water waveguide ». *ACUSTICA - Acustica united with Acta Acustica* 86 (2000), p. 15-24.
- [LMH02] K. R. LEONARD, E. V. MALYARENKO et M. K. HINDERS. « Ultrasonic Lamb waves tomography ». *Inverse Problems* 18 (2002), p. 1795-1808.
- [LMM02] K. J. LANGENBERG, R. MARKLEIN et K. MAYER. « Applications to nondestructive testing with ultrasound ». *Scattering - Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*. Sous la dir. de R. PIKE et P. SABATIER. London: Academic Press, 2002, p. 594-617.
- [Mic97] Z. MICHAŁEWICZ. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*. Berlin : Springer Verlag, 1997.
- [PGM96] F. PEYRIN, L. GARNERO et I. MAGNIN. « Introduction à l'imagerie tomographique 2D et 3D reposant sur une propagation en ligne droite. Cas de la tomographie par rayon X, par émission et par ultrasons ». *Traitement du Signal* 13.4 (1996), p. 381-440.

- [Ram+02a] C. RAMANANJAONA, M. LAMBERT, D. LESSELIER et J.-P. ZOLÉSIO. « On novel developments of controlled evolution of level sets in the field of inverse shape problems ». *Radio Sci.* 37 (2002). DOI : 10:1029/2001RS002567.
- [Ram+02b] C. RAMANANJAONA, J.-P. ZOLÉSIO, M. LAMBERT et D. LESSELIER. « Nonlinearized inversion of buried scatterers: fast marching, topology-free solution methods ». *Proc. Journées Internationales de Nice sur les Antennes, Mini-Symposium on Inverse Scattering 2* (2002), p. 13-18.
- [Ram+03] C. RAMANANJAONA, M. LAMBERT, D. LESSELIER et J.-P. ZOLÉSIO. « Linear scalar inverse scattering ». *Acoustics, Mechanics, and the Related Topics of Mathematical Analysis*. Sous la dir. d'A. WIRGIN. London: World Scientific, 2003, p. 243-250.
- [Sab00] P. C. SABATIER. « Past and future of inverse problems ». *J. Math. Phys.* 41.6 (2000), p. 4082-4124.
- [San96] F. SANTOSA. « A level-set approach for inverse problems involving obstacles ». *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* 1 (1996), p. 17-33.
- [Sch02] G. SCHMITZ. « Ultrasound in medical diagnosis ». *Scattering - Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*. Sous la dir. de R. PIKE et P. SABATIER. London: Academic Press, 2002, p. 162-174.
- [Set99] J. A. SETHIAN. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. 2nd. Cambridge : Cambridge University Press, 1999.
- [SSS02] L. W. SCHMERR JR, S.-J. SONG et A. SEDOV. « Ultrasonic flaw sizing inverse problems ». *Inverse Problems* 18 (2002), p. 1775-1794.
- [SZ92] J. SOKOLOWSKI et J.-P. ZOLÉSIO. *Introduction to Shape Optimization. Shape Sensitivity Analysis*. Berlin : Springer, 1992.
- [TA74] A. TIKHONOV et V. ARSÉNINE. *Méthodes de Résolution de Problèmes Mal Posés*. Moscou : MIR, 1974.
- [vK97] P. M. VAN DEN BERG et R. E. KLEINMAN. « Gradient methods in inverse acoustic and electromagnetic scattering ». *Large-Scale Optimization with Applications*. Sous la dir. de G. CHAVENT et P. C. SABATIER. Berlin: Springer, 1997, p. 143-158.
- [Wir02] A. WIRGIN. « Acoustical imaging: classical and emerging methods for applications in macrophysics ». *Scattering - Scattering and Inverse Scattering in Pure and Applied Science*. Sous la dir. de R. PIKE et P. SABATIER. London: Academic Press, 2002, p. 95-120.