



HAL
open science

Linéarisation et homogénéisation en viscoélasticité

Ahmad Pouya, André Zaoui

► **To cite this version:**

Ahmad Pouya, André Zaoui. Linéarisation et homogénéisation en viscoélasticité. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, 1999, 327 (4), pp.365-370. 10.1016/S1287-4620(99)80076-3 . hal-00111615

HAL Id: hal-00111615

<https://hal.science/hal-00111615v1>

Submitted on 9 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

Linéarisation et homogénéisation en viscoélasticité

Ahmad POUYA^a, André ZAOUT^b

^aG3S, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

^bLMS, École polytechnique, CNRS, 91128 Palaiseau cedex, France

On exprime une loi de comportement viscoélastique non linéaire par un opérateur causal faisant correspondre une fonction de réponse à une histoire de sollicitation. On définit alors, en vue d'homogénéisation, la loi linéaire tangente par l'opérateur dérivé du précédent au sens de Fréchet. On montre ensuite comment, pour les matériaux hétérogènes viscoélastiques non linéaires et non vieillissants, cette définition permet de concevoir un traitement pas à pas pour déterminer leur comportement homogénéisé.

viscoélasticité non linéaire / homogénéisation

1. Introduction

Les méthodes d'homogénéisation du comportement non linéaire des matériaux hétérogènes ont fréquemment recours à la linéarisation du comportement des phases constitutives, notamment à travers l'utilisation de modules « sécants » ou « tangents » [1–6]... Le cas de la viscoélasticité non linéaire (ou de l'élastoviscoplasticité) pose, de ce point de vue, une difficulté spécifique à cause de l'intervention simultanée dans la loi de comportement de dérivées d'ordres différents des contraintes et des déformations. Dans ce cas, Rougier et al. [7] ont proposé une méthode de linéarisation simplifiée permettant d'utiliser la transformation de Laplace–Carson pour la définition de modules tangents et la résolution du problème d'homogénéisation, méthode étendue depuis à la prise en compte de variables internes [8] et d'une élasticité non linéaire (dite « plasticité instantanée » [9]).

Nous proposons ici une approche plus générale et une définition plus large de la linéarisation en viscoélasticité en partant d'une écriture fonctionnelle et en nous appuyant sur l'utilisation d'histoires de chargement « voisines », dans un sens qui sera précisé. Nous montrons que cette définition permet de poser plus complètement le problème d'homogénéisation et, pour des matériaux non vieillissants, de retrouver les propositions antérieures comme approximations définies de la présente approche.

2. Définition d'une loi linéaire tangente

Considérons une loi de comportement rhéologique reliant la contrainte $\sigma(t)$ à l'instant t à l'histoire de la déformation $\varepsilon(\tau)$ ($\tau \in]-\infty, t[$) par une fonctionnelle non linéaire notée \mathcal{F} :

$$\sigma(t) = \mathcal{F}[\varepsilon(\tau)]_{-\infty}^t, (-\infty \leq \tau \leq t) \quad (1)$$

Notons plus simplement désormais σ et ε de telles histoires de contrainte et de déformation, fonctions de l'intervalle $] -\infty, \infty[$ dans l'espace des tenseurs 3×3 symétriques, et notons \mathbf{E} l'espace vectoriel de ces fonctions. La loi (1) définit une application de \mathbf{E} dans \mathbf{E} , ou un *opérateur*, que nous désignons par la même lettre \mathcal{F} en écrivant :

$$\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon) \quad (2)$$

L'écriture (1) ne recouvre cependant pas l'ensemble des opérateurs de \mathbf{E} dans \mathbf{E} : elle se réduit aux opérateurs *causals*, i.e. pour lesquels la réponse $\sigma(t)$ à un instant t donné ne dépend que des valeurs prises par la sollicitation ε aux instants τ antérieurs à t .

Considérons maintenant une histoire particulière de déformation $\bar{\varepsilon}$ et soit :

$$\bar{\sigma} = \mathcal{F}(\bar{\varepsilon}) \quad (3)$$

la réponse associée. Nous supposons l'opérateur \mathcal{F} dérivable au sens de Fréchet en $\bar{\varepsilon}$: il existe donc un opérateur linéaire noté C tel que, pour toute histoire $\Delta\varepsilon$, on puisse écrire :

$$\mathcal{F}(\bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon) = \mathcal{F}(\bar{\varepsilon}) + C(\Delta\varepsilon) + \|\Delta\varepsilon\| \alpha(\Delta\varepsilon) \quad (4)$$

avec $\lim \|\alpha(\Delta\varepsilon)\| = 0$ quand $\|\Delta\varepsilon\| \rightarrow 0$, où $\|\cdot\|$ est une norme dans \mathbf{E} (par exemple la norme absolue, définie à partir d'une norme $|\cdot|_{3 \times 3}$ dans l'espace des tenseurs 3×3 symétriques par : $f \in \mathbf{E}, \|f\| = \sup_{t \in]-\infty, \infty[} |f(t)|_{3 \times 3}$).

On peut montrer (et l'on admettra pour la suite) que l'opérateur dérivé C d'un opérateur causal \mathcal{F} est lui-même causal. Nous appelons alors *loi tangente en $\bar{\varepsilon}$ à la loi associée à \mathcal{F}* , la loi rhéologique associée à l'opérateur causal C . Cette définition est en accord avec les définitions habituelles pour les lois rhéologiques usuelles : viscoélasticité linéaire, où C se confond avec \mathcal{F} ; élasticité non linéaire, où $\mathcal{F}[\varepsilon(\tau)]_{-\infty}^t = \mathcal{F}[\varepsilon(t)]$; viscosité non linéaire, où $\mathcal{F}[\varepsilon(\tau)]_{-\infty}^t = \mathcal{F}[\varepsilon(t)]$.

Considérons maintenant une histoire de déformation ε « voisine » de $\bar{\varepsilon}$, c'est-à-dire telle que $\delta\varepsilon = \varepsilon - \bar{\varepsilon}$ soit infiniment petit au sens de la norme définie précédemment, et notons $\delta\sigma = \sigma - \bar{\sigma}$, où σ est l'histoire de contrainte correspondant à ε . On peut alors négliger dans la relation (4) le dernier terme $\|\delta\varepsilon\| \alpha(\delta\varepsilon)$, infiniment petit d'ordre supérieur à $\delta\varepsilon$, et approcher cette relation par :

$$\delta\sigma(t) = C[\delta\varepsilon(\tau)]_{-\infty}^t \quad (5)$$

La relation (5) définit le *modèle linéaire tangent en $\bar{\varepsilon}$* au modèle associé à \mathcal{F} . La linéarité de C permet d'écrire également la relation :

$$\sigma(t) = C[\varepsilon(\tau)]_{-\infty}^t + \bar{\sigma}(t) - C[\bar{\varepsilon}(\tau)]_{-\infty}^t \quad (6)$$

qui définit alors le *modèle affine tangent en $\bar{\varepsilon}$* au modèle associé à \mathcal{F} . Notons que l'opérateur C intervenant dans ces relations ne dépend que des histoires $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$.

Dans la suite, le symbole \otimes représentera l'action d'un opérateur linéaire et causal sur une histoire de contrainte ou de déformation, en écrivant par exemple (5) sous la forme :

$$\delta\sigma = C \otimes \delta\varepsilon \quad (7)$$

Si l'opérateur C est inversible et si son inverse, noté S , est également causal, ce dernier n'est également fonction que des histoires $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ et permet d'écrire :

$$\delta\varepsilon = S \otimes \delta\sigma \quad (8)$$

ou encore :

$$\varepsilon = S \otimes \sigma + \varepsilon^I \quad \text{avec} \quad \varepsilon^I \equiv \bar{\varepsilon} - S \otimes \bar{\sigma} \quad (9)$$

où ε^I , qui s'apparente à une déformation initiale [7], est indépendante de l'histoire σ .

3. Homogénéisation

Considérons maintenant l'homogénéisation d'un volume élémentaire représentatif de matériau hétérogène dont les constituants satisfont à des lois de la forme (2). Le problème consiste, par exemple, à trouver, à partir de la détermination des histoires locales $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$, l'histoire de contrainte macroscopique $\bar{\Sigma}$ répondant à un chargement macroscopique \bar{E} . Les champs locaux doivent vérifier les relations de comportement et être reliés aux grandeurs macroscopiques par des relations de localisation des contraintes ou des déformations, ainsi que par des relations de moyenne. Le traitement linéarisé du problème d'homogénéisation consiste à considérer de petites variations des histoires locales et globales autour d'un état donné et à supposer qu'elles sont liées entre elles par les lois de comportement linéarisées, ainsi que par les relations de localisation correspondant à ces comportements linéarisés.

Plus précisément, considérons une histoire de déformation E proche de \bar{E} . Sous cette sollicitation macroscopique, chaque phase subit une histoire de déformation ε proche de $\bar{\varepsilon}$ et une histoire de contrainte σ proche de $\bar{\sigma}$; la réponse macroscopique Σ sera proche de $\bar{\Sigma}$. Notons respectivement s et S les opérateurs associés aux modèles linéaires tangents locaux et au modèle global respectivement. Le problème linéarisé porte sur les petites variations $(\varepsilon - \bar{\varepsilon})$, $(\sigma - \bar{\sigma})$, $(E - \bar{E})$ et $(\Sigma - \bar{\Sigma})$; il est régi par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon - \bar{\varepsilon} &= s \otimes (\sigma - \bar{\sigma}) \quad \text{et} \quad E - \bar{E} = S \otimes (\Sigma - \bar{\Sigma}) \\ \varepsilon - \bar{\varepsilon} &= A \otimes (E - \bar{E}) \\ \langle \varepsilon - \bar{\varepsilon} \rangle &= E - \bar{E} \quad \text{et} \quad \langle \sigma - \bar{\sigma} \rangle = \Sigma - \bar{\Sigma} \end{aligned} \quad (10)$$

où le symbole $\langle . \rangle$ représente la moyenne spatiale prise sur tout le volume élémentaire représentatif. L'opérateur A est l'opérateur de *localisation de la déformation* qui doit être calculé à partir de s et S selon des hypothèses complémentaires définissant le modèle choisi. La relation de localisation correspondante est écrite sous réserve de l'unicité de la solution de ce problème [10]. L'opérateur A , calculé à partir de s et S , est causal comme ces opérateurs et ne dépend que des histoires $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\sigma}$, \bar{E} et $\bar{\Sigma}$.

Les formules (10) permettent de construire la réponse du matériau à des histoires proches de $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\sigma}$, \bar{E} et $\bar{\Sigma}$ quand on connaît celles-ci. Mais, dans un problème d'homogénéisation, on ne connaît qu'une des deux histoires $\bar{\Sigma}$ ou \bar{E} , selon que le chargement est donné en contrainte ou en déformation macroscopique imposée, et les histoires $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ sont également inconnues. On peut cependant considérer, dans le cadre d'un traitement pas à pas, qu'elles sont connues sur un intervalle

$] - \infty, T]$: il faut alors déterminer la façon de les prolonger dans un voisinage à droite de T pour élaborer de cette façon une méthode de calcul pas à pas permettant de les déterminer pour tout t . C'est ce que nous examinons maintenant sous l'hypothèse supplémentaire selon laquelle les comportements considérés sont *non vieillissants*. Cela implique que, si l'on considère alors l'histoire E_θ définie par une translation θ dans le temps de l'histoire \tilde{E} connue sur $] - \infty, \infty[$, soit :

$$E_\theta(t) = \tilde{E}(t + \theta) \quad (11)$$

les déformations et contraintes dans les différentes phases ainsi que la contrainte macroscopique correspondant à E_θ s'obtiennent alors également par la même translation θ dans le temps de $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\Sigma}$ (soit ε_θ , σ_θ et Σ_θ).

4. Méthode de calcul pas à pas

Pour une valeur (positive) petite de θ et moyennant une régularité suffisante de \tilde{E} , les histoires \tilde{E} et E_θ définies précédemment sont proches. En effet, supposons par exemple que $\dot{\tilde{E}}$ soit bornée sur $] - \infty, \infty[$, et soit $m = \sup_{t \in] - \infty, \infty[} |\dot{\tilde{E}}|_{3 \times 3}$ où l'on aurait défini la norme $|\cdot|_{3 \times 3}$ par : $|\varepsilon|_{3 \times 3} = \max_{i,j} |\varepsilon_{ij}|$. On peut alors écrire :

$$\forall t, |E_\theta(t) - \tilde{E}(t)|_{3 \times 3} \leq m\theta \quad \text{ou encore} \quad \|E_\theta - \tilde{E}\| \leq m\theta$$

Ainsi, en choisissant θ suffisamment petit, les histoires E_θ et \tilde{E} sont aussi proches que l'on veut au sens de la norme $\|\cdot\|$ adoptée précédemment pour définir la dérivée de Fréchet. Les formules (10) sont alors valables si l'on y remplace ε , σ , E et Σ respectivement par ε_θ , σ_θ , E_θ et Σ_θ .

La relation de localisation des déformations s'écrit en particulier :

$$\varepsilon_\theta = A \otimes E_\theta + \tilde{\varepsilon} - A \otimes \tilde{E} \quad (12)$$

Cela permet de proposer la méthode de calcul pas à pas suivante : considérons connues les histoires $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\sigma}$, \tilde{E} et $\tilde{\Sigma}$ sur un intervalle $] - \infty, T]$; supposons que la restriction sur cet intervalle des opérateurs s , S et A intervenant dans les relations (10) soit déterminée par l'ensemble des valeurs de $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\sigma}$, \tilde{E} et $\tilde{\Sigma}$ sur cet intervalle. Les opérateurs s , S et A sont donc aussi connus sur cet intervalle. La résolution du problème d'homogénéisation linéarisé – relations (10) – permet alors de calculer ε_θ , σ_θ , E_θ et Σ_θ sur $] - \infty, T[$. Par exemple, si le chargement macroscopique est donné en déformation, \tilde{E} et donc E_θ sont connues sur $] - \infty, T]$ et le second membre de (12) sera connu sur $] - \infty, T]$, ce qui permet de calculer ε_θ sur cet intervalle et ensuite σ_θ et Σ_θ par les lois de comportement et les relations de moyenne.

Or la connaissance de ε_θ , σ_θ , E_θ et Σ_θ sur $] - \infty, T[$ équivaut, d'après la définition de ces quantités, à celle de $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\sigma}$, \tilde{E} et $\tilde{\Sigma}$ sur $] - \infty, T + \theta]$ et permet ainsi de prolonger les valeurs de ces grandeurs jusqu'à $(T + \theta)$. Quant au point de départ de ce calcul pas à pas, il peut être l'état naturel (contraintes et déformations nulles). On peut supposer qu'un tel état règne sur $] - \infty, 0]$: sur cet intervalle, $\tilde{\Sigma}$, $\tilde{\varepsilon}$ et $\tilde{\sigma}$ seront identiquement nulles, \tilde{E} démarrant à l'instant zéro.

5. Forme différentielle des relations d'homogénéisation linéarisées

Les trois premières relations (10) sont vraies au premier ordre par rapport à l'infiniment petit $\|\delta\varepsilon\|$ qui intervient dans la définition de la dérivée de Fréchet. Quand on remplace, dans ces relations, ε par ε_θ en supposant que toutes les histoires intervenant dans ces équations sont régulières, donc en particulier à dérivées bornées, l'infiniment petit $\|\delta\varepsilon\|$ est de l'ordre de θ , comme montré précédemment. En remplaçant alors $\varepsilon_\theta - \tilde{\varepsilon}$, $\sigma_\theta - \tilde{\sigma}$, $\Sigma_\theta - \tilde{\Sigma}$ et $E_\theta - \tilde{E}$ respectivement par $\dot{\varepsilon}\theta$, $\dot{\sigma}\theta$, $\dot{\Sigma}\theta$ et $\dot{E}\theta$, on

obtient des équations intégro-différentielles portant sur les histoires $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\sigma}$, $\dot{\tilde{E}}$ et $\dot{\tilde{\Sigma}}$. La relation de localisation des déformations s'écrit en particulier :

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = A \otimes \dot{\tilde{E}} \quad (13)$$

expression qui peut être considérée comme la forme générale de relation de localisation pour un problème d'homogénéisation viscoélastique linéarisé. On peut, en particulier, vérifier qu'elle généralise les relations de localisation des cas déjà traités cités dans l'introduction.

La méthode de résolution pas à pas de ces équations intégro-différentielles non linéaires n'est autre que la méthode présentée dans le paragraphe précédent. Il faut cependant noter que la détermination de l'opérateur A ou de l'opérateur linéaire tangent S à partir des opérateurs s des différentes phases n'est pas en général chose aisée. Nous ne disposons pas actuellement d'une méthode numérique générale de résolution de ce problème. Mais nous pouvons procéder par approximations successives selon une méthode illustrée dans l'exemple qui suit.

Considérons un matériau dont les constituants ont un comportement défini par l'équation suivante, portant sur les valeurs à l'instant t de la contrainte et de la déformation et de leurs dérivées successives jusqu'aux ordres m et n respectivement :

$$\phi(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dots, \varepsilon^{(n)}, \sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(m)}) = 0 \quad (14)$$

où la fonction ϕ est en général non linéaire. Soient $(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\sigma})$, un couple d'histoires liées par cette équation et $(\delta\varepsilon, \delta\sigma)$ de petites variations au voisinage de ce couple. En notant dans toute la suite $\partial\phi/\partial\tilde{\varepsilon} = \frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}(\tilde{\varepsilon})$, ces petites variations vérifient l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \delta\phi = & (\partial\phi/\partial\tilde{\varepsilon}) : \delta\varepsilon + (\partial\phi/\partial\dot{\tilde{\varepsilon}}) : \delta\dot{\varepsilon} + \dots + (\partial\phi/\partial\tilde{\varepsilon}^{(n)}) : \delta\tilde{\varepsilon}^{(n)} + \dots \\ & \dots + (\partial\phi/\partial\tilde{\sigma}) : \delta\sigma + (\partial\phi/\partial\dot{\tilde{\sigma}}) : \delta\dot{\sigma} + \dots + (\partial\phi/\partial\tilde{\sigma}^{(m)}) : \delta\tilde{\sigma}^{(m)} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Pour une histoire $\delta\varepsilon$ donnée, cette équation différentielle linéaire d'ordre m portant sur $\delta\sigma$ permet de calculer cette réponse. Cela définit l'opérateur C de la relation (7). À l'inverse, si l'on se donne $\delta\sigma$, cette équation différentielle linéaire d'ordre n permet de calculer l'histoire $\delta\varepsilon$ et définit ainsi l'opérateur S de la relation (8). Les conditions initiales pour ces équations différentielles se déduisent de la condition de l'état naturel sur $]-\infty, 0]$, soit $\delta\varepsilon = \delta\sigma = 0$ sur cet intervalle, ainsi que des conditions de continuité nécessaires pour les histoires $\delta\varepsilon$ et $\delta\sigma$.

6. Exemple d'application

Il est intéressant de comparer cette méthode de linéarisation à celle proposée par Rougier et al. [7] pour le matériau « élasto-viscoplastique » à élasticité linéaire défini par :

$$\dot{\varepsilon} = b : \dot{\sigma} + g(\sigma) \quad (16)$$

Dans ce cas, la méthode de linéarisation que nous proposons conduit à :

$$\delta\dot{\varepsilon} = b : \delta\dot{\sigma} + m(\tilde{\sigma}) : \delta\sigma, \quad \text{où } m(\tilde{\sigma}) = \partial g/\partial\tilde{\sigma} \quad (17)$$

Pour se rapprocher de la forme (9), en tenant compte des conditions initiales $\delta\varepsilon = \delta\sigma = 0$ à $t = 0$, on peut écrire plus explicitement :

$$\varepsilon(t) = b : \sigma(t) + \int_0^t m(\tilde{\sigma}) : \sigma \, d\tau + \int_0^t [g(\tilde{\sigma}) - m(\tilde{\sigma}) : \tilde{\sigma}] \, d\tau \quad (18)$$

où le dernier terme intégral définit la « déformation initiale », indépendante de σ . Au contraire, la méthode de linéarisation proposée par Rougier et al. [7] pour traiter l'intervalle de temps entre T et $T + dt$ consistait à écrire, pour $t \leq T$:

$$\varepsilon(t) = b : \sigma(t) + m(T) : \int_0^t \sigma \, d\tau + \int_0^t [g(\bar{\sigma}) - m(T) : \bar{\sigma}] \, d\tau \quad (19)$$

où $m(T) = m(\bar{\sigma}(T))$. Les deux lois linéaires (18) et (19) fournissent donc la même réponse $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ pour $\sigma = \bar{\sigma}$ sur $[0, T]$; elles expriment cependant des modèles de comportement entièrement différents : le modèle associé à (19) peut s'interpréter comme l'approximation de (18) selon laquelle on remplacerait la fonction $m(\bar{\sigma})$ par une constante fixée par la valeur prise par cette fonction à l'instant $t = T$. Cela équivaut à remplacer $m(\bar{\sigma})$ par $m(T)$ dans la relation (17). L'avantage de cette simplification est, bien sûr, d'avoir alors à traiter une équation différentielle à *coefficients constants*, la méthode de la transformation de Laplace–Carson, par exemple, permettant de convertir commodément le problème d'homogénéisation correspondant en un problème symbolique en élasticité linéaire. Mais ce n'est qu'une approximation du traitement général.

Cette approximation peut cependant, dans notre optique, être améliorée et cela à un ordre quelconque. Dérivons en effet l'équation (17) par rapport au temps. On obtient :

$$\delta \dot{\varepsilon} = b : \delta \dot{\sigma} + m(\bar{\sigma}) : \delta \dot{\sigma} + n(\bar{\sigma}, \dot{\bar{\sigma}}) : \delta \sigma, \quad n(\bar{\sigma}, \dot{\bar{\sigma}}) = (\partial m / \partial \bar{\sigma}) : \dot{\bar{\sigma}} \quad (20)$$

En remplaçant alors dans cette équation les fonctions m et n par leurs valeurs prises à l'instant T , on obtient un modèle de comportement mieux approché que la relation (19), mais s'exprimant encore par une équation différentielle à *coefficients constants* et pouvant donc se prêter au traitement numérique proposé par Rougier et al. [7]. La remarque vaut bien sûr pour une dérivation à tout ordre et débouche sur une méthode pratique de mise en œuvre de la procédure générale de linéarisation proposée ici.

Références bibliographiques

- [1] Hill R., Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids* 13 (1965) 89–101.
- [2] Hutchinson J.W., Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials, *Proc. Roy. Soc. London A348* (1976) 101–127.
- [3] Berveiller M., Zaoui A., An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids* 26 (1979) 325–344.
- [4] Molinari A., Canova G.R., Ahzi S., A self-consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity, *Acta Metall. Mater.* 35 (1987) 2983–2994.
- [5] Tandon G.P., Weng G.J., A theory of particle-reinforced plasticity, *J. Appl. Mech.* 55 (1988) 126–135.
- [6] Suquet P., Overall properties of nonlinear composites: a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castañeda's nonlinear variational procedure, *C. R. Acad. Sci., Paris, série IIb* 320 (1995) 563–571.
- [7] Rougier Y., Stolz C., Zaoui A., Self-consistent modelling of elastic-viscoplastic polycrystals, *C. R. Acad. Sci., Paris, série II* 318 (1994) 145–151.
- [8] Navidi P., Rougier Y., Zaoui A., Self-consistent modelling of elastic-viscoplastic multiphase materials, in : Pineau A., Zaoui A. (Eds.), *Micromechanics of Plasticity and Damage of Multiphase Materials*, Kluwer Academic Pub., The Netherlands, 1996, pp. 123–130.
- [9] Beurthey S., Modélisations du comportement d'alliages de polymères, thèse de doctorat, École polytechnique, Palaiseau, 1997, 172 pp.
- [10] Suquet P., Plasticité et homogénéisation, thèse de doctorat d'État, université Paris-VI, Paris, 1982, 334 pp.