



HAL
open science

Comparaison des énergies dépensées en flambage plastique

Quoc Son Nguyen

► **To cite this version:**

Quoc Son Nguyen. Comparaison des énergies dépensées en flambage plastique. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, 1998, 326, pp.353-358. 10.1016/S1251-8069(98)80412-0. hal-00111595

HAL Id: hal-00111595

<https://hal.science/hal-00111595v1>

Submitted on 17 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comparaison des énergies dépensées en flambage plastique

Quoc Son NGUYEN

Laboratoire de mécanique des solides, UMR CNRS 7649 École polytechnique,
91128 Palaiseau, France

Résumé. La comparaison du niveau d'énergie après bifurcation est un problème classique du flambage élastique. Cette comparaison est encore envisageable en flambage plastique à travers la notion de l'énergie dépensée, qui étend l'expression de l'énergie potentielle totale aux systèmes dissipatifs. La difficulté principale concerne le cas pathologique d'un point de bifurcation obéissant aux hypothèses du module tangent et de charge totale. Le système peut bifurquer avec ou sans l'apparition et l'extension d'une zone de décharge évanescente. On montre que, dans tous les cas, la différence de l'énergie dépensée entre la branche fondamentale et la branche bifurquée est d'ordre 3 par rapport à la composante modale, d'une façon analogue aux résultats obtenus en bifurcation élastique sous charge croissante. Par ailleurs, la branche bifurquée a un niveau plus bas sous une certaine condition de symétrie.

bifurcation / flambage plastique / énergie dépensée

Energy comparison in plastic buckling

Abstract. *The comparison of energy levels is a classical problem in elastic buckling. In plastic buckling, this comparison can also be done through the notion of energy expense, which is an extension of the potential energy of conservative systems to dissipative systems. The difference of the energy expenses associated with the fundamental and the bifurcated branches just after bifurcation is discussed here in standard plasticity. The principal difficulty concerns bifurcation points satisfying the conditions of tangent modulus and total loading. In this particular situation, bifurcation may occur with or without elastic unloading. It is established in all cases that, as in elastic bifurcation with increasing load, the difference of energy expenses is of order 3 with respect to the modal component and that bifurcated branch has a lower energy expense under a certain condition of symmetry.*

bifurcation / plastic buckling / energy expense

Abridged English Version

The comparison of energy levels is an important problem in stability and bifurcation analysis. The theory of elastic buckling provides the general answer available for conservative systems which states that at a same load the bifurcated branch of increasing load has a lower energy level and the difference of the total potential energy is of order 3 with respect to the modal component [5].

In incremental plasticity, for a solid under conservative loading controlled by a load parameter λ , it is well known that the notion of energy expense can be introduced and extends the notion of total

energy potential to dissipative systems [1]. This energy represents the energy furnished by the external world to deform the system and to maintain the control setup. At a bifurcation point, the difference of energy is generically of order 2 with respect to the modal component and this difference can be obtained from the values of Hill functional associated with the fundamental rate and the bifurcated rate of displacement. However, at a bifurcation point satisfying the assumption of tangent modulus (also called in plastic buckling as the assumption of elastic comparison solid), second order terms are identical for both branches and the computational of the difference of energy must involve higher order terms.

A discussion based on Hutchinson's results on post-bifurcation analysis is given here for generalized standard models of plasticity. This framework gives a convenient and large description on the evolution of the current incremental modulus which plays an important role in the post-bifurcation behaviour. In particular, symmetry property [equation (4)], which plays an important role in post-bifurcation analysis and in various energy estimates, will be used here for all energy comparisons. This assumption is fulfilled when the plastic criterion, expressed in terms of thermodynamic forces, does not depend on the present internal state. It is just satisfied by all usual models of plasticity, in particular in all examples of elastic-plastic beams. Although not necessary, this assumption permits a quick answer to the energy comparisons.

The two possibilities of bifurcation, with or without unload zones, are considered in the light of Hutchinson's analysis. The associated energy expenses are computed. For bifurcation without unload zone, the difference of energy expense, compared to the fundamental response, is of order 3 with respect to modal component and the bifurcated branch has lower energy if bifurcation takes place with increasing load. For bifurcation with unload zone, Hutchinson's results lead also to a difference of energy expenses of order 3 with respect to modal component. This result is available for solids of arbitrary form near the unloaded zone, in contrast with the dependence of the exponent β of the asymptotic expansion on the local geometry. Thus for all beams of arbitrary section for example, the energy difference is of order 3 although β may be 1/3 or 2/5 in the case of circular or rectangular sections. Energy expense is also lower for the bifurcated branch within the assumption of symmetry [equation (4)]. The obtained results are thus very similar to classical results in the theory of elastic bifurcation when bifurcation takes place under increasing load.

1. Préliminaires

En plasticité incrémentale, on peut introduire la notion d'énergie dépensée associée à une évolution statique ou dynamique quelconque d'un solide partant d'un état initial (instant 0) à un état final (instant ξ), [1] :

$$E^\xi = \int_0^\xi \int_V b : \nabla \dot{u} \, dV \, d\tau - \lambda(\xi) \{F, u(\xi)\} + \lambda(0) \{F, u(0)\} \quad (1)$$

La somme de cette énergie avec l'énergie cinétique représente l'énergie fournie par l'extérieur pour déformer le système de l'état initial à l'état final, et pour maintenir le contrôle sous la forme donnée lorsque le solide est soumis à des déplacements imposés et des forces de volume et de surface F , pilotés par un paramètre de contrôle λ . Dans cette expression, b désigne la contrainte nominale de Boussinesq, V est le volume de référence en description lagrangienne du solide. L'énergie dépensée se réduit à l'énergie potentielle totale pour un solide élastique.

La comparaison de l'énergie dépensée après bifurcation plastique est l'objet de cette note. En effet, on peut comparer les dépenses d'énergie associées à deux trajets différents partant d'un même état

initial, comme c'est le cas en un point de bifurcation. Dans le cadre des matériaux standard généralisés, on rappelle que la loi de comportement s'écrit commodément à partir des expressions de l'énergie libre volumique W et du critère de plasticité f , qui dépendent de l'état de déformation et d'état interne $(\nabla u, \chi)$:

$$b = W_{,\nabla u}, \quad A = -W_{,\chi}, \quad \dot{\chi} = \mu f_{,A}, \quad \mu \geq 0, \quad f(A, \chi) \leq 0, \quad \mu f = 0 \quad (2)$$

Il en résulte le comportement incrémental :

$$\begin{cases} \dot{b} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \nabla \dot{u}}(\nabla \dot{u}), \quad \mathcal{U}(\nabla \dot{u}) = \frac{1}{2} \nabla \dot{u} : \mathcal{L}^e : \nabla \dot{u} - \frac{1}{2} M : \nabla \dot{u} >^2, \\ \mathcal{L}^e = W_{,\nabla u \nabla u}, \quad M = \frac{-f_{,A} \cdot W_{,\chi \nabla u}}{(f_{,A} \cdot W_{,\chi \chi} \cdot f_{,A} - f_{,\chi} f_{,A})^{1/2}} \end{cases}$$

soit, en charge plastique $\dot{b} = \mathcal{L}^i : \nabla \dot{u}$ avec :

$$\mathcal{L}^i = \mathcal{L}^e - M \otimes M, \quad \dot{\chi}(\nabla \dot{u}) = \frac{M : \nabla \dot{u}}{(f_{,A} \cdot W_{,\chi \chi} \cdot f_{,A} - f_{,\chi} f_{,A})^{1/2}} f_{,A} \quad (3)$$

En remarquant que \mathcal{L} dépend de ∇u et de χ , on peut écrire sa variation sous la forme $\partial \mathcal{L}[\nabla v] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla u} \cdot \nabla v + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} \cdot \dot{\chi}(\nabla v)$. On peut en particulier énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 1. – *La propriété de symétrie suivante est vérifiée :*

$$\nabla \dot{u} : \partial \mathcal{L}[\nabla u^*] : \nabla v = \nabla u^* : \partial \mathcal{L}[\nabla \dot{u}] : \nabla v \quad (4)$$

lorsque le critère de plasticité ne dépend pas de l'état actuel.

En effet, cette propriété s'obtient à partir de l'expression explicite de \mathcal{L}^i et de \mathcal{L}^e . Pour \mathcal{L}^e , c'est très simple car $\nabla \dot{u} : \partial \mathcal{L}^e[\nabla u^*] : \nabla v = W_{,\nabla u \nabla u \nabla u}[\nabla \dot{u}, \nabla v, \nabla u^*]$. Pour \mathcal{L}^i , le calcul est plus complexe. Il suffit par exemple de vérifier que $\partial M[\nabla u^*] : \dot{u} = \partial M[\nabla \dot{u}] : \nabla u^*$. Cette vérification est fastidieuse mais ne pose pas de difficulté particulière, la présence du terme $\frac{\partial f}{\partial \chi}$ détruit a priori cette symétrie.

La proposition 1 est satisfaite par la plupart des modèles de plasticité utilisés en petite déformation–grand déplacement, en particulier par les modèles bilinéaires. La condition de symétrie annoncée, triviale dans le cadre de l'(hyper)-élasticité, est entièrement originale dans le cadre de la plasticité. Elle permettra de simplifier certaines expressions de l'analyse postcritique.

Soit C_a et C , deux branches de réponse quasi statique se coupant en un point de bifurcation (λ_c, u_c) . Chaque branche est associée à une solution en vitesse au point de bifurcation \dot{u} , \dot{u}_a et à une zone plastique active V_+^p , V_{a+}^p . On rappelle que, par définition, la zone plastique active associée à une solution en vitesse \dot{u} est $V_+^p = \{x \in V \mid f = 0, M : \nabla \dot{u} > 0\}$.

En notant la fonctionnelle de Hill par $H(\dot{u}) = \int_V \mathcal{U}(\nabla \dot{u}) dV - \dot{\lambda}\{F, \dot{u}\}$, il est classiquement connu que :

- si $V_+^p \subset V_{a+}^p$ alors $H(\dot{u}) < H(\dot{u}_a)$;
- pour un même niveau de charge proche de la charge de bifurcation, la solution comportant une plus petite zone plastique active est associée à un niveau plus bas d'énergie dépensée. $E_a^\xi - E^\xi = (H(\dot{u}_a) - H(\dot{u})) \xi^2 + o(\xi^2) > 0$.

La considération du problème en terme de vitesses permet donc de choisir en un point de bifurcation la direction d'énergie la plus basse lorsque $H(\dot{u}_a) \neq H(\dot{u})$. Cette estimation n'est plus valable en un point de bifurcation vérifiant la condition du module tangent pour lequel $V_+^p \equiv V_{a+}^p \equiv V^p$ et $H(\dot{u}_a) = H(\dot{u})$. On examine ce cas ici en se plaçant dans le cadre des hypothèses habituelles.

– La branche fondamentale C_a admet pour équation $u = u_a(\lambda)$ sous charge croissante. Elle satisfait en outre la condition de charge totale $M_c : \nabla u'_{ac} \geq \Delta > 0 \forall x \in V_p^c$.

– Hypothèse de mode simple. Le mode de flambage X et la charge critique de flambage λ_c s'obtiennent par la résolution du problème aux valeurs propres

$$K\{u_a(\lambda_c)\} [X, \delta u] = \int_V \nabla X : \mathcal{L}\{u_a(\lambda_c)\} : \nabla \delta u \, dV = 0$$

avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}^p$ dans la zone plastique actuelle V^p , et $\mathcal{L} = \mathcal{L}^e$ dans la zone élastique actuelle V^e .

– Hypothèse de transversalité. Cette hypothèse concerne la branche fondamentale et se traduit par le fait que la plus petite valeur propre $\gamma(\lambda)$ de la forme $K\{u_a(\lambda)\}$ traverse franchement la valeur 0 au point de bifurcation :

$$\mathcal{F}_r = \int_V \nabla X : \partial \mathcal{L}_c [\nabla u'_{ac}] : \nabla X \, dV = \left(\frac{d\gamma}{d\lambda} \right)^c \int_V \nabla X : \nabla X \, dV < 0 \quad (5)$$

2. Bifurcation sous module tangent

L'analyse de bifurcation sous module tangent de la branche fondamentale C_a est maintenant bien connue [2–4].

– La possibilité de *bifurcation sans décharge* est explorée en cherchant une branche bifurquée C_* de la forme :

$$\lambda = \lambda_c + \lambda_1^{he} \zeta + \lambda_2^* \zeta^2 + o(\zeta^2), \quad u^* = u_a(\lambda) + X + v_2^* \zeta + o(\zeta) \quad (6)$$

L'équation d'équilibre en vitesses, $\int_V \dot{b} : \nabla \delta u \, dV - \dot{\lambda} \{F, \delta u\} = 0$, écrite pour la branche fondamentale et la branche bifurquée considérée, donne alors :

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} \lambda_1^{he} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{A} = \int_V \nabla X : \partial \mathcal{L}_c [\nabla X] : \nabla X \, dV \quad (7)$$

$$\mathcal{B} = \int_V (\nabla u'_{ac} : \partial \mathcal{L}_c [\nabla X] : \nabla X + \nabla X : \partial \mathcal{L}_c [\nabla u'_a] : \nabla X) \, dV \quad (8)$$

– La possibilité de *bifurcation avec décharge* en une autre branche C , associée à l'apparition et à l'extension d'une zone de décharge V_- , est également possible si :

$$\lambda_1 = \max_{x \in V_p^c} \left\{ \frac{-M_c : \nabla X}{M_c : \nabla u'_a} \right\}_x > 0 \quad (9)$$

Cela signifie qu'il existe une solution en vitesses présentant une charge neutre en un (ou plusieurs) point x_a réalisant ce maximum dans la zone plastique actuelle, associée à la vitesse λ_1 de la variable de contrôle. Lorsque l'ensemble des points de charge neutre se réduit à des points de la frontière du solide, grâce à un changement de variable adéquate $Z = Z(z, \zeta)$ envoyant V_- sur un domaine fini V^* , Hutchinson a établi [2, 3] la validité d'un développement asymptotique de la forme :

$$\lambda = \lambda_c + \lambda_1 \zeta + \lambda_2 \zeta^1 \blacksquare^\beta + o(\zeta^{1+\beta}), \quad \dot{u} = \dot{u}_a(\lambda) + X + w(x, \zeta) \zeta^\beta + o(\zeta^\beta) \quad (10)$$

où $\zeta \geq 0$ et $0 < \beta$ est un nombre à déterminer, ζ^β donne la profondeur de V_- et $w(z, \zeta) = w^*(Z) \zeta^\beta$. On a aussi :

$$\nabla w = \dot{\lambda} \nabla u'_a + \nabla X + \nabla^*(Z) \zeta^\beta + o(\zeta^\beta), \quad \dot{b} = \dot{\lambda} b'_a + b_1 + b^*(Z) \zeta^\beta + o(\zeta^\beta) \quad (11)$$

avec $b'_a = \mathcal{L} : \nabla u'_a$, $b_1 = \mathcal{L} : \nabla X$, $b^*(Z) = \mathcal{L}_{cd}^e : \nabla^* + (1 + \beta) \lambda_2 f(Z) M_{cd}$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}'_c$ dans V_c^p , $\mathcal{L} = \mathcal{L}^e_c$. La fonction $f(Z) > 0$ représente les termes du premier ordre de $M_{cd} : \nabla u'_{acd} + M_c : (\lambda_1 \nabla u'_{ac} + \nabla X) > 0$. Dans ces expressions, les indices c, b, d se réfèrent respectivement à l'état critique de bifurcation, à la branche bifurquée et au point de décharge x_d . En particulier, la valeur du paramètre β dépend de la forme du solide au voisinage de x_d , mais λ_2 est donnée par l'expression générale :

$$\lambda_2^3 Q(X) = \mathcal{B}(\lambda_1^{he} - \lambda_1), \quad Q(X) = (1 + \beta)^3 \nabla X_d : (\mathcal{L}_{cd}^e : \phi + M_{cd}) \int_{V^*} f(Z) dV^* \quad (12)$$

Les signes de $Q(X)$ et de \mathcal{B} sont a priori arbitraires. On a cependant $\mathcal{B} = 2\mathcal{F}_r < 0$ si la symétrie (4) est assurée.

3. Comparaison des énergies dépensées

On se place d'abord dans le cas de bifurcation sans décharge. Pour la branche bifurquée, l'énergie dépensée quand t varie de 0 à ξ est :

$$E_*^\xi = \int_V \int_0^\xi \left\{ \left(b_c + \int_0^t \mathcal{L} : (\nabla \dot{u}_a + \nabla X + \nabla v_*^2) ds \right) : \right. \\ \left. (\nabla \dot{u}_a + \nabla X + \nabla v_*^2) \right\} dt dV - \lambda(\xi) F \cdot u(\xi) - \lambda_c F \cdot u_c + \dots$$

Il en résulte après diverses simplifications l'expression suivante de la différence de l'énergie entre la branche fondamentale et la branche bifurquée :

$$E_*^\xi - E_a^\xi = \frac{\xi^3}{12} \mathcal{B} \lambda_1^{he} \quad (13)$$

Lorsque la bifurcation s'effectue avec décharge, on obtient pour la branche bifurquée :

$$E^\xi = \int_0^\xi \int_V \left\{ b_c + b'_{ac}(\lambda_1 t + \lambda_2 t^{1+\beta}) + b_1 t + \int_0^t b^*(Z(z, s)) s^\beta ds \right\} : \\ \left\{ \nabla u'_a(\lambda_1 + (1 + \beta) \lambda_2 t^\beta) + \nabla X + \nabla^* t^\beta + \dots \right\} dV dt \\ - \lambda(\xi) F \cdot \left(u_c + u'_a(\lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi^{1+\beta}) + X \xi + \int_0^\xi w^*(Z(z, s)) s^{2\beta} ds \right) + \lambda_c F \cdot u_c + \dots$$

Il en résulte que :

$$E^\xi - E_a^\xi = \xi \left\{ \int_V b_c : \nabla(\dot{u}_{bc} - \dot{u}_{ac}) dV - \lambda_c F \cdot (\dot{u}_{bc} - \dot{u}_{ac}) \right\} \\ + \xi^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} \int_V \dot{b}_{bc} : \nabla \dot{u}_{bc} dV - \lambda_1 F \cdot \dot{u}_{bc} \right) - \left(\frac{1}{2} \int_V \dot{b}_{ac} : \nabla \dot{u}_{ac} dV - \lambda_1 F \cdot \dot{u}_{ac} \right) \right\} \\ + \xi^{2+\beta} \lambda_2 \left\{ \int_V \nabla X : \mathcal{L}'_c : \nabla u'_a dV - F \cdot X \right\} + \int_0^\xi \int_V \left\{ \int_0^t b^*(Z(z, s)) s^\beta ds \right\} : \nabla \dot{u}_{bc} dV dt \\ + \frac{\xi^3}{6} \int_V \left\{ \nabla X : \partial \mathcal{L}_c[\nabla X] : \nabla X + \lambda_1(\nabla X : \partial \mathcal{L}_c[\nabla u'_{ac}] : \nabla X + 2\nabla X : \partial \mathcal{L}_c[\nabla X] : \nabla u'_{ac}) \right. \\ \left. + \lambda_1^2(2\nabla X : \partial \mathcal{L}_c[\nabla u'_{ac}] : \nabla u'_{ac} + \nabla u'_{ac} : \partial \mathcal{L}_c[\nabla X] : \nabla u'_{ac}) \right\} dV + \dots$$

Le terme d'ordre ξ est nul car b_c vérifie l'équilibre actuel. Le terme d'ordre ξ^2 est nul car les valeurs de la fonctionnelle de Hill sont identiques pour ces deux solutions en vitesses. Les termes d'ordre $\xi^{2+\beta}$ s'annulent aussi. Le terme suivant s'écrit :

$$\int_{\bullet}^{\xi} \int_0^t s \int_{V^*} b^*(Z) : \nabla \dot{u}_{bcd} dV^* ds dt = \frac{\xi^3}{6} \lambda_2^3 Q(\dot{u}_{bc}) \quad (14)$$

il s'agit d'un terme d'ordre 3. Or, dans l'expression $Q(\dot{u}_{bc}) = (1+\beta)^3 (\phi : \mathcal{L}_{cd}^e : \nabla \dot{u}_{bcd} + M_{cd} : \nabla \dot{u}_{bcd}) \int_{V^*} f(Z) dV^*$, on a $\phi : \mathcal{L}_{cd}^e : \nabla \dot{u}_{bcd} = 0$ car $\dot{b}_{bcd} = \mathcal{L}_{cd}^e : \nabla \dot{u}_{bcd}$ vérifie au point x_d la condition $\dot{b}_{bcd} \cdot n_d = 0$. Comme $M_{cd} : \nabla \dot{u}_{bcd} = 0$, on en déduit que $Q(\dot{u}_{bc}) = 0$. Certains termes en λ_1^2 s'annulent aussi d'après les équations de la branche fondamentale. La différence d'énergie dépensée s'écrit donc :

$$E^\xi - E_a^\xi = \frac{\xi^3}{6} \int_V \{ \nabla X : \partial \mathcal{L}_c[\nabla X] : \nabla X + \lambda_1^2 \nabla u'_{ac} : \nabla \mathcal{L}_c[\nabla X] : \nabla u'_{ac} + \lambda_1 (\nabla X : \partial \mathcal{L}_c[\nabla u'_{ac}] : \nabla X + 2 \nabla X : \partial \mathcal{L}_c[\nabla X] : \nabla u'_{ac}) \} dV \quad (15)$$

ou, lorsque la condition de symétrie de la proposition 1 est assurée :

$$E^\xi - E_a^\xi = \frac{\xi^3}{12} (3\mathcal{B}\lambda_1 - 2\mathcal{A}) = \frac{\xi^3}{6} (3\lambda_1 - 2\lambda_1^{he}) \mathcal{F}_r \quad (16)$$

Elle est négative d'après les conditions $\lambda_1 > \lambda_1^{he}$, $\lambda_1 > 0$ et $\mathcal{F}_r < 0$. On retrouve, comme en flambage élastique [5], la comparaison de l'énergie dépensée lors d'une bifurcation sous charge croissante.

PROPOSITION 2. – (i) La différence d'énergie dépensée est d'ordre ξ^3 . (ii) Par rapport à la branche fondamentale, la branche bifurquée avec décharge correspond à une énergie dépensée plus faible lorsque la possibilité de bifurcation sans décharge est exclue et lorsque la condition de symétrie (4) est assurée.

Dans cette note, les résultats originaux correspondent aux propositions 1 et 2. Il est remarquable que pour un solide quelconque, la différence d'énergie soit d'ordre ξ^3 , quelle que soit la forme géométrique du solide dans la zone de décharge. Par ailleurs, la condition de symétrie (4) est essentielle pour comparer les énergies. On vérifie sans peine que les exemples de poutres de section uniforme, en flambage plastique sous compression simple, remplissent les hypothèses annoncées et entrent dans le cadre étudié.

Références bibliographiques

- [1] Pełryk H., On energy criteria of plastic instability, Int. Symp. Plastic Instability Considère Mem., Presses ENPC, Paris, 1985, pp. 215–226.
- [2] Hutchinson J.W., Post-bifurcation behaviour in the plastic range, J.M.P.S. 21 (1973) 163–190.
- [3] Hutchinson J.W., Plastic buckling, Adv. Appl. Mech. 14 (1974) 67–114.
- [4] Léger A., Potier-Ferry M., Sur le flambage plastique, J. Méc. Théor. Appl. 7 (6) (1988) 819–857.
- [5] Nguyen Q.S., Stabilité des structures élastiques, Mathématiques & Applications, Springer-Verlag, Paris, 1995, p. 50.