



**HAL**  
open science

# Modélisation viscoélastique du comportement global des systèmes poroélastiques

Patrick de Buhan, Alain Corfdir, Luc Dormieux

► **To cite this version:**

Patrick de Buhan, Alain Corfdir, Luc Dormieux. Modélisation viscoélastique du comportement global des systèmes poroélastiques. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, 1997, 324, pp.73-82. 10.1016/S1251-8069(99)80010-4. hal-00111569

**HAL Id: hal-00111569**

**<https://hal.science/hal-00111569v1>**

Submitted on 19 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# Modélisation viscoélastique du comportement global des systèmes poroélastiques

Patrick de BUHAN, Alain CORFDIR et Luc DORMIEUX

Laboratoire de Mécanique des Solides, URA 317, ENPC-CERCSO, 6 et 8, avenue Blaise-Pascal, Cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée, cedex 2, France.

On démontre, en s'appuyant sur la propriété de linéarité des équations définissant le problème, que le comportement global d'une structure en matériau poroélastique linéaire, exprimé dans le formalisme des paramètres de chargements mécaniques et hydrauliques, est du type poroviscoélastique, mettant en jeu des fonctions de retard et de relaxation liant ces paramètres. L'analyse fait en particulier apparaître la décomposition additive de la déformation généralisée du système en une composante élastique instantanée, associée à une évolution non drainée, et une composante visqueuse. Sur le plan thermodynamique, on met en évidence que la dissipation observée à l'échelle macroscopique trouve son origine physique dans la conduction de la masse fluide au sein du squelette poreux. Toutes ces notions sont illustrées sur le problème classique de la consolidation unidimensionnelle, pour lequel la matrice des fonctions de retard est explicitée.

## ***A viscoelastic model for describing the global behaviour of poroelastic systems***

*Making use of the linearity of the equations which govern the problem, it is shown that the global constitutive behaviour of a linear poroelastic system, expressed within the formalism of hydraulic and mechanical loading parameters, is of the poroviscoelastic type, involving creep and relaxation functions between those parameters. It follows, in particular, that the generalized strain variables of the system may be split into an elastic part associated with the undrained loading, and a viscous component corresponding to the delayed response. From a thermodynamical standpoint, the dissipation observed on the macroscopic scale should be clearly attributed to the fluid mass transport throughout the skeleton. These notions are illustrated on the classical problem of one-dimensional consolidation, for which explicit forms of the creep functions are given.*

## Abridged English Version

Under the small perturbation hypothesis, solving a poroelastic evolution problem consists of exhibiting a statically admissible stress field  $\underline{\sigma}$  along with a pore pressure distribution  $p$  related through the constitutive equations (1a) and (1b) to a linearized kinematically admissible strain field  $\underline{\varepsilon}$  and a scalar field  $\bar{m}$ , where  $\bar{m} = m/\rho_0^f$  is the fluid volume increase. Due to the fluid mass diffusion equation (1c), all these fields appear to be functions of time. The linearity of the above governing equations thus makes it possible to apply a superposition principle establishing a linear relationship between the solution of the evolution problem and the prescribed loading. Such a loading may be described by means of a finite number of parameters forming a couple of vectors  $(\underline{Q}, \underline{P})$ , in duality with  $(\underline{q}, \underline{V})$ , so that  $\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}$  represents the work expanded by the external forces in the skeleton velocity field, while  $\underline{P} \cdot \underline{\dot{V}}$  is the work of the pore pressure applied to the system's boundary  $\partial\Omega$  in the fluid apparent velocity  $\underline{w}/\rho^f$  [eq. (3)]. It then follows from the above-mentioned superposition principle that the evolution of  $(\underline{Q}, \underline{P})$  is related to that of  $(\underline{q}, \underline{V})$  through equations (4) where:

- $\gamma_i G_{\beta_i}^*$  (resp.  $\gamma_i F_{\beta_i}^{\alpha_i}$ ) denotes the relaxation (resp. creep) function which represents the evolution of variable  $\alpha_i$  when an evolution of the form  $H(t)$  (Heaviside function) is prescribed for variable  $\beta_i$ , all the other  $\beta_k$  and  $\gamma_k$  being kept equal to zero;
- $(\cdot)'$  is the derivative with respect to time and  $*$  is the convolution product.

As a consequence, these constitutive equations between generalized variables which describe the behaviour of the system as a whole, have the same form as those postulated by Coussy (1995) for modelling the poroviscoelastic behaviour of a material.

Referring to a thermomechanical point of view, equations (9) show that the global dissipation  $D$  of the system which is the difference between the total mechanical and hydraulic work furnished to both the skeleton and the fluid mass (equal to  $\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} + \underline{P} \cdot \underline{\dot{V}}$ ) and the so-called material derivative of the free energy  $\dot{F}$ , defined by (5), is clearly associated with the fluid flow governed by Darcy's conduction law.

The generalized strain variable  $\underline{q}$  may be written as the sum of an elastic part  $\underline{q}^{el}$  which is recoverable at any time by instantly removing the load parameters  $\underline{Q}$ , and a viscous component  $\underline{q}^{vis}$  (eq. 11);  $\underline{q}^{el}$  thus corresponds to the undrained elastic behaviour of the system. On the other hand, it can be shown that there is no such elastic component as regards the generalized vector  $\underline{V}$  which describes the global increase in fluid volume of the system. This primarily comes from the fact that any evolution of the system under an instantly varying load  $\underline{Q}$  is locally undrained.

The classical problem of one-dimensional consolidation of a poroelastic layer shown in *figure 1* is finally examined for illustrative purpose. The global constitutive behaviour of the layer as a whole is expressed by means of either equation (15a) or (15b).

## 1. Introduction

L'approche traditionnelle du problème de la consolidation unidimensionnelle consiste à considérer une couche de sol saturée soumise à une surcharge verticale uniforme dont l'évolution dans le temps est de type échelon (*fig. 1*). On sait qu'il en résulte un tassement instantané et un tassement différé qui apparaît à mesure que les surpressions interstitielles se dissipent. En raison de l'existence de déforma-

tions différées, l'analogie du comportement global de la couche avec le comportement viscoélastique est souvent évoquée. Elle a été exploitée par Coussy (1995). A la connaissance des auteurs, elle n'a cependant pas fait l'objet d'un examen approfondi.

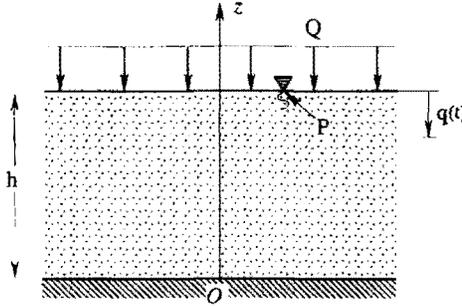


Fig. 1. – Problème de la consolidation unidimensionnelle d'une couche poroélastique.

Fig. 1. – One-dimensional consolidation problem of a poroelastic layer.

L'objet de cette note est d'établir que le comportement macroscopique d'un système constitué d'un matériau poroélastique est de type viscoélastique linéaire non vieillissant. A titre d'illustration, on donne notamment les fonctions de retard pour le problème de la consolidation.

## 2. Mode de chargement d'un système poroélastique dépendant d'un nombre fini de paramètres

On considère un système constitué d'un matériau poroélastique linéaire initialement dans l'état naturel (contraintes et pressions interstitielles nulles). On note respectivement  $\Omega_0$  et  $\Omega$  les configurations initiale et actuelle du squelette. Les deux équations d'état fournissent respectivement le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et la pression interstitielle  $p$  en fonction des deux variables d'état : la déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  du squelette et l'apport de masse fluide  $\bar{m} = m/\rho_0^f$  rapporté à la masse volumique initiale du fluide  $\rho_0^f$  :

$$\underline{\underline{\sigma}} = C : \underline{\underline{\varepsilon}} - M \underline{\underline{B}} \bar{m} \quad (1a)$$

$$p = M(-\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \bar{m}) \quad (1b)$$

où  $M$  et  $\underline{\underline{B}}$  sont respectivement le module et le coefficient de Biot et  $C$  représente le tenseur des modules d'élasticité non drainés. Par ailleurs, la loi de conduction de la masse fluide étant la loi de Darcy (tenseur de perméabilité  $\underline{\underline{k}}$ ), on sait que la combinaison de celle-ci avec la loi de conservation de la masse fluide conduit à l'équation de diffusion de la masse fluide :

$$\dot{\bar{m}} = \text{div} (\underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{\text{grad}}} p) \quad (1c)$$

Rappelons que la solution d'un problème de poroélasticité est un quadruplet fonction du temps  $(\underline{\sigma}, \underline{\xi}, p, \bar{m})$  où  $\underline{\sigma}$  (resp.  $\underline{\xi}$ ) est un champ de contraintes (resp. de déplacements) statiquement (resp. cinématiquement) admissible, où le champ de pressions  $p$  satisfait les conditions aux limites hydrauliques, et tel que les équations (1a, b, c) soient satisfaites par  $\underline{\sigma}, p, \bar{m}$  et le champ de déformations linéarisé  $\underline{\varepsilon}$  associé à  $\underline{\xi}$ . Les équations (1a, b, c) et l'équation de l'équilibre à vérifier de surcroît par  $\underline{\sigma}$  étant linéaires, le principe de superposition est donc applicable pour les problèmes de poroélasticité dans l'hypothèse des petites perturbations (qui suppose la transformation infinitésimale et  $|\bar{m}| \ll 1$ , et qui permet de confondre  $\Omega_0$  et  $\Omega$ ).

On suppose ici que le chargement mécanique peut être décrit par un nombre fini de paramètres rassemblés dans le vecteur effort généralisé  $\underline{Q}$ . On note  $\underline{\dot{q}}$  le vecteur vitesse de déformation généralisée, dual de  $\underline{Q}$  au sens où la puissance de déformation d'un champ de contraintes statiquement admissible avec  $\underline{Q}$  dans un champ de vitesses  $\underline{U}$  cinématiquement admissible avec  $\underline{\dot{q}}$  vérifie :

$$\underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} = \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\dot{d}} \, d\Omega \quad (2)$$

où  $\underline{\dot{d}}$  désigne le taux de déformation associé à  $\underline{U}$ .

De manière analogue, on suppose que les conditions aux limites hydrauliques portent sur une partie de la frontière  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  sur la pression  $p$  du fluide et sur son complémentaire sur le débit volumique de fluide  $\underline{w} \cdot \underline{n} / \rho^f$ , où  $\underline{w}$  désigne le vecteur courant de masse fluide et  $\underline{n}$  la normale unitaire sortante. On se place de plus dans la situation où la pression et le débit dépendent linéairement, là où ils sont prescrits, d'un nombre fini de paramètres. Il existe alors un vecteur pression généralisée  $\underline{P}$  et un vecteur débit (volumique) généralisé  $\underline{\dot{V}}$  tels que :

$$\underline{P} \cdot \underline{\dot{V}} = - \int_{\partial\Omega} \frac{P}{\rho^f} \underline{w} \cdot \underline{da} \quad (3)$$

A l'échelle d'observation globale du système  $\Omega$ , son évolution est décrite par les histoires d'effort et de pression généralisés  $[\underline{Q}(t), \underline{P}(t)]$  et les histoires duales de déformation et d'apport de fluide généralisés  $[\underline{\dot{q}}(t), \underline{\dot{V}}(t)]$ . La validité du principe de superposition en poroélasticité assure que ces histoires sont reliées par des produits de convolution faisant intervenir les fonctions appropriées de relaxation [équations (4a)] et de retard [équations (4b)] et que le comportement global du système est de type viscoélastique linéaire non vieillissant (cf. par exemple Salençon, 1983) :

$$\begin{pmatrix} \underline{Q} \\ \underline{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_v G_q^Q & {}_q G_v^Q \\ {}_v G_q^P & {}_q G_v^P \end{pmatrix}' * \begin{pmatrix} \underline{\dot{q}} \\ \underline{\dot{V}} \end{pmatrix} \quad (4a)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\dot{q}} \\ \underline{\dot{V}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_p F_Q^q & {}_q F_p^q \\ {}_p F_Q^V & {}_q F_p^V \end{pmatrix}' * \begin{pmatrix} \underline{Q} \\ \underline{P} \end{pmatrix} \quad (4b)$$

où  ${}_v G_{\beta_j}^{\alpha_i}$  (resp.  ${}_v F_{\beta_j}^{\alpha_i}$ ) représente la fonction de relaxation (resp. de retard) correspondant à l'évolution de la grandeur  $\alpha_i$  dans un chargement défini par un échelon unité de la grandeur  $\beta_j$ , les autres  $\beta_k$  et tous les  $\gamma_k$  étant fixés à 0.  $(\cdot)'$  désigne l'opération de dérivation (au sens des distributions) par

rapport au temps, et  $*$  le produit de convolution. En particulier,  ${}_v G_q^Q$  et  ${}_p F_q^P$  s'interprètent respectivement comme la matrice des fonctions de relaxation en condition globalement non drainée ( $\underline{V}=0$ ) et la matrice des fonctions de retard en condition globalement drainée ( $\underline{P}=0$ ).

On notera que les équations (4a, b) sont formellement identiques aux équations du comportement poroviscoélastique linéaire données par Coussy (1995), reliant localement le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  et la pression  $p$  au tenseur de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et à l'apport de volume fluide  $\underline{\underline{m}}$ , où  $\underline{Q}$ ,  $\underline{P}$ ,  $\underline{q}$  et  $\underline{V}$  jouent respectivement le rôle de  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $p$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et  $\underline{\underline{m}}$ . La viscoélasticité globale du système est clairement due à l'équation (1c) de diffusion de la masse fluide qui résulte de la loi de Darcy, laquelle traduit, à l'échelle macroscopique, la viscosité du fluide à l'échelle microscopique. Dans un contexte différent, on peut noter que Sanchez-Palencia (1980) obtient un tel comportement viscoélastique macroscopique dans le cadre d'une méthode d'homogénéisation périodique appliquée à un mélange fluide visqueux - solide élastique.

### 3. Point de vue énergétique. Origine physique de la dissipation visqueuse

On désigne par  $\psi$  la densité volumique lagrangienne d'énergie libre du matériau poreux :  $d\Omega_0$  désignant un élément de volume de milieu poreux dans la configuration initiale du squelette et  $d\Omega$  le transporté convectif de  $d\Omega_0$  dans la transformation (infinitésimale) du squelette,  $\psi d\Omega_0$  représente l'énergie libre contenue dans  $d\Omega$  (fluide et solide). L'énergie libre totale  $F$  du système en configuration actuelle est donc  $F = \int_{\Omega_0} \psi d\Omega_0$ . On note encore  $\dot{F}$  la dérivée de l'énergie libre du système *fermé* :

$$\dot{F} = \int_{\Omega_0} \dot{\psi} d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega} \varphi_m \underline{w} \cdot \underline{da} \quad (5)$$

où  $\varphi_m$  désigne l'énergie libre spécifique du fluide. Par ailleurs, la nullité de la dissipation intrinsèque s'écrit :

$$\dot{\psi} = J \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + \left( \varphi_m + \frac{p}{\rho^f} \right) \dot{m} \quad \text{avec} \quad J = d\Omega/d\Omega_0 \quad (6)$$

L'intégration de (6) sur  $\Omega_0$ , compte tenu de (2), conduit à

$$\dot{F} = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}} + \int_{\Omega_0} \left( \frac{p}{\rho^f} + \varphi_m \right) \dot{m} d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega} \varphi_m \underline{w} \cdot \underline{da} \quad (7)$$

En écrivant la conservation de la masse fluide sous la forme  $\dot{m} + J \operatorname{div} \underline{w} = 0$  et, en utilisant (3) ainsi que l'équation d'état du fluide, il vient :

$$\int_{\Omega_0} p \frac{\dot{m}}{\rho^f} d\Omega_0 = \underline{P} \cdot \underline{\dot{V}} + \int_{\Omega} \underline{\operatorname{grad}} p \cdot \frac{\underline{w}}{\rho^f} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{w} \cdot \underline{\operatorname{grad}} \varphi_m d\Omega \quad (8)$$

dont l'introduction dans (7) donne finalement :

$$\underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} + \underline{P} \cdot \dot{\underline{V}} = \dot{\underline{F}} + D \quad (9a)$$

$$D = \int_{\Omega} \frac{w}{\rho^f} \cdot \underline{k}^{-1} \cdot \frac{w}{\rho^f} d\Omega \quad (9b)$$

où l'on s'est servi de la loi de Darcy qui s'écrit  $\underline{w}/\rho^f = -\underline{k}^{-1} \cdot \underline{\text{grad}} p$ ,  $\underline{k}$  désignant le tenseur de perméabilité du milieu. L'identité (9a), dans laquelle le groupement  $\underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} + \underline{P} \cdot \dot{\underline{V}}$  représente la puissance mécanique fournie à la matière (fluide et solide) contenue dans  $\Omega$  (Coussy, 1995), conduit à interpréter  $D$  comme la dissipation dans  $\Omega$ . L'équation (9b) révèle l'origine physique de la dissipation macroscopique  $D$ . Elle est de type Darcy, c'est-à-dire qu'elle est associée à la conduction de la masse fluide.

#### 4. Décomposition de la déformation généralisée en contributions élastique et visqueuse

On peut définir la contribution élastique  $\underline{q}^{\text{el}}$  à la déformation généralisée dans l'état actuel de chargement comme la déformation correspondant à une recharge instantanée faisant suite à une décharge totale elle-même instantanée dans laquelle le chargement  $\underline{Q}$  est, par définition, ramené de la valeur actuelle à 0 (voir Auriault et Sanchez-Palencia, 1977). Une telle décharge instantanée s'effectue localement de manière non drainée. Le milieu élastique fictif constitué du matériau en évolution non drainée subit sous le chargement  $\underline{Q}$  un champ de déformation  $\underline{\varepsilon}^{\text{el}}$  cinématiquement admissible avec une déformation généralisée notée  $\underline{q}^{\text{el}}$  proportionnelle à  $\underline{Q}$  :

$$\underline{Q} = \underline{L} \cdot \underline{q}^{\text{el}} \quad (10)$$

où la matrice  $\underline{L}$  caractérise l'élasticité du système, la contribution visqueuse  $\underline{q}^{\text{vis}}$  étant définie par différence :

$$\underline{q} = \underline{q}^{\text{el}} + \underline{q}^{\text{vis}} \quad (11)$$

Dans le même esprit, il est naturel de s'interroger sur l'existence d'une contribution élastique à l'apport de fluide généralisé  $\underline{V}$ . Notant  $H(t)$  la fonction de Heaviside, cela revient à déterminer la variation  $[\underline{V}] = \underline{V}(0^+) - \underline{V}(0^-)$  au cours d'une charge instantanée de type échelon  $\underline{Q}H(t)$  amenant le chargement de 0 à la valeur  $\underline{Q}$ . On peut considérer ce dernier comme la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 d'une rampe linéaire  $\underline{Q} r_{\varepsilon}(t)$  avec  $r_{\varepsilon}(t) = \frac{t}{\varepsilon} H(t)$ , appliquée pendant l'intervalle de temps  $[0, \varepsilon]$ , suivie d'un plateau au-delà de  $t = \varepsilon$  (fig. 2). On raisonnera pour simplifier sur le cas d'un unique paramètre de chargement hydraulique. Notant  $\underline{w}_{\varepsilon}$  le courant de masse fluide obtenu en réponse à la rampe de pente  $\varepsilon$ , on a :

$$[V] = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} d\tau \int_{\partial\Omega} \underline{w}_{\varepsilon} / \rho^f \cdot \underline{d}u \quad (12)$$

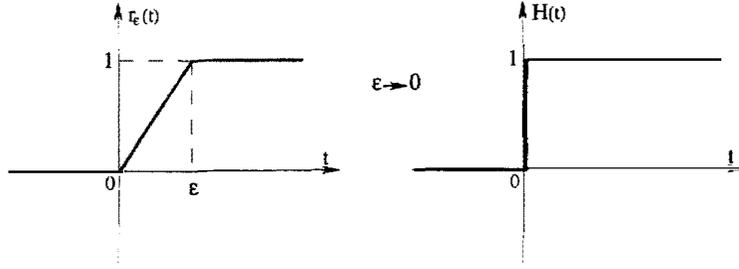


Fig. 2. - Approximation de la fonction échelon.  
 Fig. 2. - Approximating the Heaviside function.

La réponse en pression  $p_\epsilon(\underline{x}, t)$  à la rampe de pente  $\epsilon$  n'est autre, en vertu du principe de superposition, que  $\frac{1}{\epsilon} p_1(\underline{x}, t)$  (où  $p_1$  désigne la pression dans le cas de la rampe de pente unité), en sorte que la loi de Darcy conduit à :

$$\underline{w}_\epsilon / \rho^f = -\frac{1}{\epsilon} \underline{k} \cdot \underline{\text{grad}} p_1 \quad (13)$$

dont on déduit, en vertu de la continuité par rapport au temps du champ  $p_1(\underline{x}, t)$ , que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \underline{w}_\epsilon(\underline{x}, \tau) / \rho^f d\tau = -\underline{k} \cdot \underline{\text{grad}} p_1(\underline{x}, t = 0^+) \quad (14)$$

La nullité de  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^t \underline{w}_\epsilon / \rho^f d\tau$ , résulte alors de celle du champ de pression  $p_1(\underline{x}, t = 0^+)$ . Finalement, la nullité de  $[V]$  est la conséquence immédiate de (12).

### 5. Exemple illustratif : problème de la consolidation unidimensionnelle

On considère une couche homogène d'un matériau poreux saturé dont le comportement est poroélastique linéaire isotrope (le tenseur  $C$  est caractérisé par les modules  $\lambda$  et  $\mu$ ,  $\underline{B} = b\underline{1}$ ,  $\underline{k} = k\underline{1}$ ). Elle est limitée inférieurement par le plan  $z = 0$ , supposé fixe et imperméable, et supérieurement par le plan  $z = h$ . L'état initial est naturel (contraintes  $\underline{\sigma}$  et pressions interstitielles  $p$  nulles). Les forces surfaciques et les pressions de fluide agissant sur le plan  $z = h$  sont uniformes et valent respectivement  $-Q\underline{e}_z$  et  $P$ . On note  $q$  le tassement de la couche et  $V$  le volume de fluide traversant le plan  $z = h$ . Du point de vue global, le comportement de la couche peut être décrit par la relation entre les couples  $(Q, p)$  et  $(q, V)$  et prend la forme :

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_V G_q^Q & {}_q G_V^Q \\ {}_V G_q^P & {}_q G_V^P \end{pmatrix}' * \begin{pmatrix} q \\ V \end{pmatrix} \quad (15a)$$

ou bien

$$\begin{pmatrix} q \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}_P F_Q^q & {}_Q F_P^q \\ {}_P F_Q^V & {}_Q F_P^V \end{pmatrix}' * \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \quad (15b)$$

Dans toutes les sollicitations appliquées à la couche, le champ de déplacement  $\xi$  sera de la forme  $\xi(z, t) \underline{e}_z$ . Il en résulte que la direction verticale  $\underline{e}_z$  est une direction principale de  $\underline{\sigma}$ , et l'équation d'équilibre indique que la contrainte verticale  $\sigma_{zz}$  est uniforme dans la couche, égale à la valeur prise en  $z = h$ , notée  $-Q(t)$ . On note  $E' = \lambda + 2\mu$  et  $E'_0 = \lambda + 2\mu - Mb^2$  respectivement les modules dits œdométriques non drainé et drainé, et  $r = E'/E'_0 - 1$ . On démontre alors les deux identités suivantes :

$$\bar{m} = \alpha p + \beta Q \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1+r}{M} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{-r}{bM} \quad (16a)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{Q}{E'_0} - \beta p \quad (16b)$$

Par ailleurs, étant données les hypothèses d'homogénéité et d'isotropie, l'équation de diffusion (1c) combinée aux équations d'état (1a et b) donne :

$$\frac{\partial \bar{m}}{\partial t} = c_m \Delta \bar{m} \quad \text{avec} \quad c_m = \frac{Mk}{1+r} \quad (17)$$

### 5.1 Identification de la matrice de retard

La fonction  ${}_p F_Q^q$ , correspond par définition à la réponse en tassement à un échelon de surcharge  $Q_0 H(t)$  unité ( $Q_0 = 1$ ), en fixant la valeur de la pression  $P$  à 0 (expérience de consolidation).  ${}_p F_Q^q$  s'interprète à ce titre comme la fonction de retard drainée. La fonction  ${}_p F_Q^V(t)$  apparaît, au facteur  $Q_0$  près, comme la variation de l'apport de volume fluide (par unité de surface horizontale) dans l'expérience de consolidation précédente. Les deux autres fonctions intervenant dans la matrice de retard, c'est-à-dire  ${}_Q F_P^q$  et  ${}_Q F_P^V$ , se rattachent à une expérience dans laquelle on effectue un échelon de pression  $P_0 H(t)$  unité ( $P_0 = 1$ ) en surface tout en maintenant nulle la surcharge ( $Q = 0$ ). On trouve :

$$\begin{pmatrix} q \\ V \end{pmatrix} = h \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{E'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} + F' \begin{pmatrix} \frac{1}{E'_0} & -\frac{1}{E'} \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} \right\} \quad (18)$$

où l'on a introduit la fonction

$$F(t) = H(t) \left\{ \sum_0^{\infty} \frac{8}{\pi^2 (2k+1)^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 (2k+1)^2 t}{4 t_c}\right) \right] \right\} \quad (19)$$

dans laquelle apparaît  $t_c = h^2 / c_m$ , souvent appelé « temps caractéristique de diffusion de la masse fluide ». (18) fait apparaître la décomposition du couple  $(q, V)$  selon les contributions élastique et visqueuse. Elle indique en particulier que la matrice du retard est symétrique. On se propose de retrouver directement cette propriété à partir d'un raisonnement de changement d'échelle d'espace.

### 5.3. Symétrie de la matrice de retard

En intégrant les relations (16a, b) entre  $z = 0$  et  $h$ , on montre que

$$\begin{pmatrix} q \\ V \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \frac{1}{E'} & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ \langle p \rangle \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \langle p \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h p(z, t) dz \quad (20)$$

Pour démontrer la symétrie dans (18) à partir de (20), on est amené à exprimer  $\langle p \rangle$  en fonction de  $Q$  et  $P$ . A cet effet, on introduit la fonction  $f(z, t)$  solution de (17) pour la condition initiale  $f(z, 0^+) = 0$  et les conditions aux limites  $\partial f / \partial z(0, t) = 0$  et  $f(h, t) = H(t)$ . Compte tenu de (16a) écrite en  $z = h$  et en vertu de la linéarité de (17), il est possible d'exprimer  $\overline{m}$  en fonction de  $P(t)$  et  $Q(t)$  sous la forme  $f' * (\alpha P + \beta Q)$ . En utilisant à nouveau (16a), il en résulte que

$$p(z, t) = f' * \left( P + \frac{\beta}{\alpha} Q \right) - \frac{\beta}{\alpha} Q \quad (21)$$

dont l'intégration en espace conduit à :

$$\langle p \rangle(t) = F' * \left( P + \frac{\beta}{\alpha} Q \right) - \frac{\beta}{\alpha} Q \quad \text{où} \quad F(t) = \int_0^h f(z, t) dz \quad (22)$$

On obtient (18) en réarrangeant (20) compte tenu de l'expression (22) de  $\langle p \rangle$ . On notera que la symétrie de la matrice dans (20) est la conséquence directe de l'existence d'un potentiel thermodynamique qui n'est autre que l'énergie libre  $\psi$  du matériau poreux. Le changement d'échelle par intégration spatiale a permis de faire remonter cette symétrie de l'échelle locale à l'échelle globale où elle se traduit par l'égalité des fonctions de retard  ${}_P F_Q^V$  et  ${}_Q F_P^q$ .

## 6. Conclusion

L'analyse mécanique du comportement global d'un milieu poroélastique révèle que la relation entre les paramètres de chargement et de pression, d'une part, les paramètres de déformation généralisée et d'apport de fluide, d'autre part, est du type poroviscoélastique linéaire non vieillissant. La contribution élastique à la déformation généralisée n'est autre que la déformation généralisée sous le même chargement en condition non drainée, et la déformation visqueuse est alors définie comme l'écart de la déformation totale par rapport à la déformation élastique. En revanche, l'apport de fluide ne comporte aucune composante élastique instantanée. A l'échelle globale, la dissipation s'identifie à la dissipation de type « Darcy ».

Sur l'exemple de la consolidation unidimensionnelle, l'expression analytique des fonctions de retard a été donnée. Le lien entre la symétrie de la matrice de retard et l'existence d'un potentiel thermodynamique pour le comportement local a pu être établi par un changement d'échelle d'espace. Cependant, la question de la généralité de cette propriété reste ouverte.

## Références bibliographiques

- Auriault J.-L. et Sanchez-Palencia E., 1977.** Étude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. *J. de Méc.*, vol. 16, n° 4, p. 575-603.
- Coussy O., 1995.** *Mechanics of Porous Continua*. John Wiley.
- Salençon J., 1983.** *Viscoélasticité*. Ed. Presses de l'ENPC.
- Sanchez-Palencia E., 1980.** Non-homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, 127, Springer-Verlag, chap. 8.