



**HAL**  
open science

## Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité

Stéphane Andrieux, Amel Ben Abda, Huy Duong Bui

► **To cite this version:**

Stéphane Andrieux, Amel Ben Abda, Huy Duong Bui. Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 1997, 324, pp.1431-1438. 10.1016/S0764-4442(97)83588-4 . hal-00111565

**HAL Id: hal-00111565**

**<https://hal.science/hal-00111565v1>**

Submitted on 20 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité

Stéphane ANDRIEUX, Amel BEN ABDA et Huy Duong BUI

S. A. : EDF-Direction des Études et Recherches,

1, Avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart CEDEX, France ;

A. B. A. : IPEST, et École Nationale d'Ingénieur de Tunis,  
Laboratoire de Mathématiques Appliquées, BP 37, 1002 Tunis, Tunisie ;

H. D. B. : EDF-Direction des Études et Recherches,  
et Laboratoire de Mécanique des Solides,  
École Polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, France.

Email : bui@athena.polytechnique.fr

---

**Résumé.** Ce travail concerne l'identification d'une ou plusieurs fissures coplanaires, ou d'une ou plusieurs fissures colinéaires en 2D, par des données aux limites surabondantes sur tout le bord correspondant au problème de l'élastostatique. Nous donnons un procédé direct permettant de localiser le plan de la fissure et nous établissons un nouveau résultat d'identifiabilité de fissure 3D fournissant de plus une méthode constructive d'identification.

## *On the identification of planar cracks in elasticity via reciprocity gap concept*

**Abstract.** We consider the problem of identifying one or more planar cracks by overspecified boundary data corresponding to elastostatic equation. We give a direct process to locate the crack plane and we establish a new constructive identifiability result for 3D planar cracks.

---

## *Abridged English Version*

Let  $\Omega$  be a smooth open domain of  $\mathbb{R}^2$  or  $\mathbb{R}^3$ , and  $\Sigma$  a curve of  $\mathbb{R}^2$  or a surface of  $\mathbb{R}^3$ , smooth enough but not necessarily simply connected. We consider the following elastostatic problem:

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{in } \Omega \setminus \Sigma, \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_m & \text{on } \partial\Omega, \\ \sigma \cdot \mathbf{N} = 0 & \text{on } \Sigma, \end{cases}$$

with  $\sigma = \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{u})$  and  $\varepsilon(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u})^s$ .

---

Note présentée par Huy Duong Bui.

Conditions (4) and (5) are added in order to get a well posed problem. In this Note, we examine the question of identification of a planar crack provided the overspecified boundary data  $\mathbf{u}_m$  and  $\mathbf{F}_m$  are available. We are motivated here by Non Destructive Control techniques of materials or structures. Let  $\Pi$  be the plane containing the crack  $\Sigma$ , and  $\mathbf{N}$  a unit normal to  $\pi$ ; the equation of  $\pi$  is  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{x} + C = 0$ . For a function  $\mathbf{v}$  belonging to the Sobolev space  $[H^1(\Omega)]^3$ , we define the boundary integral  $\mathbf{RG}(\mathbf{v})$  (Reciprocity Gap Functional) involving only the data  $\mathbf{u}_m$  and  $\mathbf{F}_m$  by:

$$\mathbf{RG}(\mathbf{v}) = \int_{\partial\Omega} \{\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\}$$

We define then the second order tensor  $\mathbf{R}$ , of components  $\mathbf{RG}(\mathbf{v}^{ij})$ , by (10), where  $\mathbf{v}^{ij}$  is given by (8). We show first that the average of the jump  $[[\mathbf{u}]]$  of the displacement field across the cracks is given by:

$$\left| \int_{\Sigma} [[\mathbf{u}]] \right| = \sqrt{2 \mathbf{R}^2 - (\text{Tr } \mathbf{R})^2},$$

then we are able to establish the following result concerning the normalized average displacement discontinuity  $\mathbf{U}$  and the normal  $\mathbf{N}$  to the plane containing the cracks.

PROPOSITION 2. – *Let  $\bar{\mathbf{R}}$  be the tensor  $\bar{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{\sqrt{2 \mathbf{R}^2 - (\text{Tr } \mathbf{R})^2}}$ . Then, all possible vectors  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{N}$  can be obtained by permuting and changing the sign from the following couple of principal directions of  $\bar{\mathbf{R}}$  in the frame  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ :*

$$\{[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{-\lambda_2}, 0], [\sqrt{\lambda_1}, -\sqrt{-\lambda_2}, 0]\};$$

when  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$  are the non zero principal values of the tensor  $\bar{\mathbf{R}}$ .

This result shows that two distinct surface traction systems are needed for the complete determination of the plane containing the cracks.

Let us introduce a new frame of reference  $(\mathbf{O}, \mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{N})$ , and denote by  $\chi_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , the associated coordinates. Again, under the assumption that  $\int_{\Sigma} [[u]] \neq 0$ , we can prove:

PROPOSITION 3. – *The scalar constant  $C$  in the cartesian equation of the plane  $\Pi$  is given explicitly by the formula:*

$$(16) \quad |C| = \frac{1}{\sqrt{2 \mathbf{R}^2 - 2 \text{Tr}(\mathbf{R})^2}} \sqrt{\sum_{\alpha=T, V} \mathbf{RG}^2(v_{\alpha})},$$

where the auxilliary fields  $\mathbf{v}_{\alpha}$  are given by (17).

The identification process defined above is direct: it does not use any resolution of any elastostatic problem (provided that data  $\mathbf{u}_m$  and  $\mathbf{F}_m$  are available). Knowing  $\Pi$ , we can establish an identification theorem with a constructive proof:

THÉORÈME 1. – *If  $\Omega$  contains a (not necessarily simply connected) plane crack  $\Sigma$  and if  $\mathbf{F}_m$  is chosen such that  $\int_{\Sigma} [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{N} \neq 0$ , then  $\Sigma$  is uniquely determined by the overspecified data  $\mathbf{F}_m$  and  $\mathbf{u}_m$ .*

This identification result seems to be new. Note that here the simple connectedness of the crack is not used. The question of *a priori* selecting the prescribed surface traction in order to meet the condition  $\int_{\Sigma} [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{N} \neq 0$  remains open.

## 1. Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $\Sigma$  une courbe de  $\mathbb{R}^2$  ou une surface de  $\mathbb{R}^3$  suffisamment régulière mais non nécessairement simplement connexe (les fissures). Considérons le problème de l'élastostatique linéaire :

$$(1) \quad (P) \begin{cases} \operatorname{div} \sigma = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Sigma, \\ \sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_m & \text{sur } \partial\Omega, \\ \sigma \cdot \mathbf{N} = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Avec

– la relation de comportement élastique linéaire

$$(2) \quad \sigma = \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{u}),$$

– la relation liant le déplacement et la déformation linéarisée

$$(3) \quad \varepsilon(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u})^s$$

$\mathbf{A}$  est le tenseur des rigidités,  $\nabla$  désigne le gradient et  $(\cdot)^s$  désigne la partie symétrique de  $(\cdot)$ . Pour que le problème soit bien posé, nous ajoutons les conditions :

$$(4) \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{F}_m = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{F}_m = \mathbf{0},$$

$$(5) \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Omega} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

où  $O$  est un point quelconque de l'espace. On notera  $\mathbf{u}$  l'unique solution du problème ainsi posé.

L'objet de cette Note est de donner des résultats d'« identifiabilité » pour les fissures  $\Sigma$  que renferme le domaine  $\Omega$ , lorsque les données surdéterminées pour le problème (P) sont disponibles sur tout le bord extérieur  $\partial\Omega$  du domaine (densité surfacique d'effort donnée  $\mathbf{F}_m$ , et réponse en déplacement sur le bord noté  $\mathbf{u}_m$ , supposé connu).

À notre connaissance, les résultats théoriques sur l'« identifiabilité » de fissures sont assez peu nombreux et concernent essentiellement l'équation de conduction scalaire en dimension deux *voir* (Friedman & Vogelius [1], et aussi Alessandrini [2], Alessandrini & Diaz Valuenzia [3], et Bryan & Vogelius [4]). Toujours pour une équation de conduction scalaire, mais dans le cas particulier des fissures planes (ou rectilignes en dimension deux), et pour des données surdéterminées connues sur la totalité du bord du domaine, Andrieux & Ben Abda (*voir* [5]) ont démontré un résultat d'« identifiabilité » et un théorème d'identification basé sur un concept d'écart à la réciprocité. Andrieux (*voir* [6]) a étendu ce concept à d'autres type d'opérateurs (non symétriques).

La démonstration du théorème donnée dans (*voir* [5]) est constructive : après avoir montré l'identité entre le support de la discontinuité du champ à la traversée des fissures et le domaine occupée par les fissures, on identifie ce saut de température via sa série de Fourier. Ce résultat a été exploité numériquement par Bannour, Ben Abda et Jaoua (*voir* [7]) en deux et trois dimensions d'espace. On propose ici d'étudier le cas de l'élastostatique.

On considère ici un domaine tridimensionnel  $\Omega$ , renfermant une ou plusieurs fissures coplanaires  $\Sigma \subset \Pi$ ,  $\Pi$  un plan de  $\mathbb{R}^3$ . L'espace est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ,  $x_1, x_2$  et  $x_3$  désignent les coordonnées cartésiennes associées. L'équation du plan  $\Pi$  est donnée par :  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{x} + C = 0$ , où  $\mathbf{N}$  est une normale unitaire à  $\Pi$ .

Dans la section 2, on donne des formules explicites permettant de localiser le plan  $\Pi$ .

La section 3 est consacrée à l'identification complète des fissures.

## 2. Localisation du plan contenant les fissures

Soit  $V$  l'ensemble des champs réguliers dont le champ de contraintes associé par la relation de comportement élastique est à divergence nulle dans  $\Omega$  :

$$(6) \quad V = \{v \in [H^1(\Omega)]^3, \operatorname{div} \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \text{ dans } \Omega\}.$$

La fonctionnelle d'écart à la réciprocité pour le problème considéré est définie sur l'espace  $V$  par :

$$\operatorname{RG}(\mathbf{v}) = \int_{\partial\Omega} \{\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}\}$$

Notons que lorsque le domaine ne renferme aucune fissure ( $\Sigma = \emptyset$ ), cette fonctionnelle est identiquement nulle sur  $V$ , ce qui n'est autre que l'expression du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti en élastostatique. Cette remarque justifie l'appellation de la fonctionnelle RG (Reciprocity Gap Functional). Le lemme suivant relie la valeur de l'intégrale de bord RG définie uniquement à l'aide des données de bord, à une intégrale sur la ou les fissures.

LEMME 1. – Pour tout champ  $\mathbf{v}$  de  $V$ ,

$$(7) \quad \operatorname{RG}(\mathbf{v}) = \int_{\Sigma} [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{N},$$

où  $[[\mathbf{u}]]$  désigne le saut de  $\mathbf{u}$  à travers  $\Sigma$ .

Remarque. – En désignant par  $[[\mathbf{u}]]$  le prolongement à tout le plan  $\Pi$  de  $[[\mathbf{u}]]$  par zéro, on a immédiatement :

$$(7) \quad \mathbf{RG}(\mathbf{v}) = \int_{\Pi \cap \Omega} [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{A} \varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \vec{N}.$$

On se place désormais dans le cas particulier de l'élasticité isotrope,  $E$  et  $\nu$  seront respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. On introduit la famille de champs de déplacements  $(\mathbf{v}^{ij})$  suivante, indexée par  $(ij)$  et définie en composantes par :

$$(8) \quad \mathbf{v}^{ij}_k = A^{-1}_{klmn} E^{ij}_{mn} x_l$$

avec

–  $(\mathbf{E}_{ij})$  base canonique des tenseurs d'ordre deux symétriques de  $\mathbb{R}^3$  :

$$E^{ij}_{mn} = \frac{1}{2} (\delta_m^i \delta_n^j + \delta_n^i \delta_m^j),$$

–  $A^{-1}$  tenseur de souplesse du matériau (inverse du tenseur  $A$ ).

Les indices prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$  et  $\delta$  est le symbole de Kröner. On adopte la convention de sommation sur les indices répétés. On notera qu'alors les champs de contraintes  $\sigma^{ij}$  associés aux champs  $\mathbf{v}^{ij}$  sont des champs constants (donc à divergence nulle, la famille de champs introduite est bien dans l'espace  $V$ ) :

$$(9) \quad \sigma^{ij} \stackrel{def}{=} A \varepsilon(\mathbf{v}^{ij}) = \mathbf{E}^{ij}.$$

En utilisant le Lemme 1, il est alors immédiat de voir que :

$$(10) \quad \text{RG}(\mathbf{v}^{ij}) = \left( \mathbf{N} \otimes \int_{\Sigma} [[\mathbf{u}]] \right)_{ij} = R_{ij}.$$

Désignant par  $\mathbf{R}$  le tenseur de composantes  $\mathbf{R}_{ij}$  soit :

$$(11) \quad \mathbf{R} = \left( \mathbf{N} \otimes \int_{\Sigma} [[\mathbf{u}]] \right)_{\cdot}$$

on peut établir les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 1. – *La norme de la moyenne de la discontinuité de déplacement à travers les fissures s'exprime par la formule explicite*

$$(12) \quad \left| \int_{\Sigma} [[\mathbf{u}]] \right| = \sqrt{2\mathbf{R}^2 - (\text{Tr} \mathbf{R})^2};$$

de plus, en notant  $[[\mathbf{u}_t]]$  la discontinuité tangentielle,  $[[\mathbf{u}_t]] = [[\mathbf{u}]] - [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{N} \mathbf{N}$ ,

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{\Sigma} [[\mathbf{u}_t]] \right| = \sqrt{2\mathbf{R}^2 - 2(\text{Tr} \mathbf{R})^2}, \\ \int_{\Sigma} [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{N} = \text{Tr} \mathbf{R}. \end{array} \right.$$

On suppose désormais que les forces appliquées conduisent à un saut de déplacement tangentiel  $[[\mathbf{u}_t]]$  de moyenne non nulle, la sélection *a priori* de telles forces appliquées reste un problème ouvert. On se bornera à noter ici que la formule (12) permet de savoir facilement si cette hypothèse est satisfaite pour un système de forces donné.

Définissons le vecteur unitaire  $\mathbf{U} = \frac{\int_{\Sigma} [[\mathbf{u}]]}{\left| \int_{\Sigma} [[\mathbf{u}]] \right|}$ . L'équation (10) montre que l'identification de la normale au plan de fissure par la méthode d'écart à la réciprocity consiste à identifier les deux vecteurs unitaires  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{U}$  à partir de la donnée de  $\overline{\mathbf{R}}$  :

$$\overline{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{\sqrt{2\mathbf{R}^2 - (\text{Tr} \mathbf{R})^2}}$$

PROPOSITION 2. – *Les deux valeurs principales non nulles du tenseur  $\overline{\mathbf{R}}$  sont :*

$$\lambda_1 = \frac{1 + \text{Tr} \overline{\mathbf{R}}}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\frac{1 - \text{Tr} \overline{\mathbf{R}}}{2}, \quad \text{Tr} \overline{\mathbf{R}} \leq 1.$$

Tous les vecteurs  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{N}$  possibles peuvent être construits par permutation et changement de signe à partir du couple suivant, donné en composantes dans la base  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  des directions principales de  $\overline{\mathbf{R}}$  :

$$(14) \quad \{[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{-\lambda_2}, 0], [\sqrt{\lambda_1}, -\sqrt{-\lambda_2}, 0]\}.$$

Puisque l'on peut choisir *a priori* le demi espace contenant  $N$ , on constate donc que par la méthode proposée, deux systèmes de forces appliquées sont nécessaires pour sélectionner la normale. Si deux systèmes de forces appliquées 1, et 2, conduisent à deux tenseurs  $\underline{\mathbf{R}}_1$  et  $\underline{\mathbf{R}}_2$ , on a alors :

$$(15) \quad \mathbf{N} = \frac{\phi_3^1 \wedge \phi_3^2}{|\phi_3^1 \wedge \phi_3^2|},$$

à condition que ces deux systèmes soient discriminants pour la détection des fissures (au sens où les vecteurs  $\phi_3^1$  et  $\phi_3^2$  ne sont pas parallèles).

Cette normale  $N$  étant identifiée par la proposition précédente, soit  $(\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{N})$  une base orthonormée directe. Notons  $\chi_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , les nouvelles coordonnées dans le repère  $(O, \mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{N})$ , l'équation du plan contenant la fissure est maintenant donnée par :  $\Pi : \chi_3 + C = 0$ . Nous avons alors, toujours sous la condition  $\mathbf{U}_t \neq \mathbf{0}$  :

PROPOSITION 3 [Identification du plan de fissure]. – *La constante  $C$  déterminant le plan affine  $\Pi$  contenant la ou les fissures est donnée par :*

$$(16) \quad |C| = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{R}^2 - 2\text{Tr}(\mathbf{R})^2}} \sqrt{\sum_{\alpha=\mathbf{T}, \mathbf{V}} \text{RG}^2(\mathbf{v}_\alpha)},$$

où les champs  $\mathbf{v}_\alpha$  sont définis par :

$$(17a) \quad \mathbf{v}_T^1 = -X_1^2/2E - \nu X_2^2/2E + (2 + \nu) X_3^2/2E, \quad \mathbf{v}_T^2 = \nu X_1 X_2/E, \quad \mathbf{v}_T^3 = \nu X_1 X_3/E,$$

$$(17b) \quad \mathbf{v}_V^2 = -X_2^2/2E - \nu X_1^2/2E + (2 + \nu) X_3^2/2E, \quad \mathbf{v}_V^1 = \nu X_1 X_2/E, \quad \mathbf{v}_V^3 = \nu X_2 X_3/E.$$

Les résultats du lemme et des propositions précédentes restent valables pour des fissures débouchantes, c'est-à-dire lorsque  $\Sigma$  coupe  $\partial\Omega$ . Il faut également noter que le cas de conditions de contact unilatéral avec ou sans frottement sur lèvres des fissures entre sans modification dans le cadre des résultats énoncés. La seule difficulté supplémentaire réside dans le choix *a priori* des forces extérieures imposées assurant la non fermeture des fissures avec blocage du déplacement tangentiel par le frottement.

### 3. Identification complète

On propose dans cette section une méthode constructive pour achever l'identification de la fissure une fois le plan qui les contient déterminé par les méthodes données précédemment. Là encore, l'outil principal est la forme linéaire  $\text{RG}$ . Basée sur le lemme 1, l'identification de  $\Sigma$  se fait par une interprétation de  $[[\mathbf{u}]]$  comme forme linéaire continue de  $L^2(\Pi)$  (théorème de représentation de Riesz (voir [8])). La démarche comporte deux étapes. Dans un premier temps, on montre que le support de la discontinuité du déplacement coïncide avec le domaine occupé par les fissures (autrement dit, la discontinuité de déplacement ne peut s'annuler sur un ouvert de mesure nulle inclus dans le domaine  $\Sigma$ ). Dans un second temps, on construit deux nouvelles familles de champs  $\mathbf{v}$  permettant d'identifier la transformée de Fourier de la discontinuité de déplacement  $[[\mathbf{u}]]$ .

LEMME 2. – *Le support de  $[[\mathbf{u}]]$  coïncide avec le domaine  $\Sigma$  occupé par les fissures :*

$$\text{supp} [[\mathbf{u}]] = \Sigma.$$

*Démonstration.* – On a évidemment  $\text{supp} [[\mathbf{u}]] \subset \Sigma$ . Supposons l'inclusion stricte ; la démonstration repose sur le fait qu'alors la discontinuité est identiquement nulle, ce qui contredit l'hypothèse. Dans un premier temps, on montre qu'il existe un voisinage  $V_I$  de la fissure où le champ de contraintes est à divergence nulle, tandis que la discontinuité de déplacement est identiquement nulle ainsi que le vecteur contrainte sur la partie de la fissure incluse dans ce voisinage. Dans un second temps, on construit par réflexion à partir de la solution élastique dans l'intersection du demi-espace positif  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{N} > 0$  et de l'ouvert  $\Omega$ , un champ de déplacements dont le champ de contraintes associé est à divergence nulle et dont la discontinuité s'annule sur le plan  $\Pi$ . Sur le voisinage  $V_I$  ce champ coïncide avec la solution du problème initial ; par un théorème de prolongement unique pour le problème de l'élastostatique (voir Dang *et al.*, 1995 [10]), on en déduit qu'il en est de même sur tout l'ouvert  $\Omega$ , ce qui conduit à la contradiction annoncée.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'« identifiabilité » de fissures planes ■

**THÉORÈME.** – Si  $\Omega$  contient une fissure plane unique  $\Sigma$  non nécessairement connexe et si  $\mathbf{F}_m$  est choisi de telle sorte que  $\int_{\Sigma} [[\mathbf{u}]] \neq 0$ , alors  $\Sigma$  est déterminée de manière unique à partir des données de bord  $(\mathbf{F}_m, \mathbf{u}_m)$ .

*Démonstration.* – D'après le lemme 2, identifier  $\Sigma$  revient à identifier le support de  $[[\mathbf{u}]]$ . Comme dans [5], la reconstruction de  $[[\mathbf{u}]]$  se fait grâce à la fonctionnelle d'écart à la réciprocité, le cas de l'élastostatique traité ici est cependant plus compliqué et on identifie la transformée de Fourier de  $[[\mathbf{u}]]$  à l'aide de deux familles de champs de  $V$ .

Après un nouveau changement de repère  $(O', \mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{N})$ , de façon à ce que l'origine  $O'$  appartienne au plan  $\Pi$ , on introduit un indice  $\xi' := (\xi_1, \xi_2, 0)$  parcourant  $\mathbb{R}^2$  et les champs de vecteur  $\mathbf{Z}_{\xi'}$  et  $\mathbf{Z}_{\xi'}^*$  de  $\mathbb{R}^3 + i\mathbb{R}^3$  indexés par  $\xi'$  suivants :

$$(18) \quad \mathbf{Z}_{\xi'} = (\xi' + i|\xi'|\mathbf{N}), \quad \mathbf{Z}_{\xi'}^* = (\xi' - i|\xi'|\mathbf{N}).$$

S'inspirant de Calderon (voir [9]), on construit les familles de champs :

$$(19a) \quad \mathbf{w}^+(\mathbf{X}, \xi') = \nabla \exp(-i\mathbf{Z}_{\xi'} \cdot \mathbf{X}) + \nabla \exp(-i\mathbf{Z}_{\xi'}^* \cdot \mathbf{X}),$$

$$(19b) \quad \mathbf{w}^-(\mathbf{X}, \xi') = \nabla \exp(-i\mathbf{Z}_{\xi'}^* \cdot \mathbf{X}) - \nabla \exp(-i\mathbf{Z}_{\xi'} \cdot \mathbf{X}).$$

Ces champs appartiennent à l'espace  $V$ , car la divergence des champs de contraintes associées  $((\sigma^+(\mathbf{X}, \xi')$  et  $(\sigma^-(\mathbf{X}, \xi'))$  est nulle. On peut donc appliquer le lemme 1, on a alors :

$$\begin{aligned} \text{RG}(\mathbf{w}^+(\xi')) &= \frac{2E}{(1+\nu)} |\xi'|^2 [[\hat{\mathbf{u}}]]_{\mathbf{N}}(\xi'), \\ \text{RG}(\mathbf{w}^-(\xi')) &= \left\langle -\frac{2E}{(1+\nu)} i|\xi'| \xi', [[\hat{\mathbf{u}}]]_{\mathbf{t}}(\xi') \right\rangle, \end{aligned}$$

où  $[[\hat{\mathbf{u}}]]_{\mathbf{N}}$  et  $[[\hat{\mathbf{u}}]]_{\mathbf{t}}$  désignent les transformées de Fourier des composantes normale et tangentielle au plan de fissure du prolongement au plan  $\Pi$  de la discontinuité de déplacement  $[[\mathbf{u}]]$ . On est ainsi conduit aux égalités suivantes :

$$(20a) \quad [[\hat{\mathbf{u}}]]_{\mathbf{N}} = \frac{(1+\nu)}{2E|\xi'|^2} \text{RG}(\mathbf{w}^+(\xi')),$$



$$(20b) \quad \langle |\xi'| \xi', [[\hat{\mathbf{u}}]]_{\mathbf{t}}(\xi') \rangle = \frac{(1 + \nu)}{2iE} \text{RG}(\mathbf{w}^-(\xi')),$$

qui montrent que la transformée de Fourier  $[[\hat{\mathbf{u}}]]$  peut être reconstruite uniquement à l'aide des données de bord  $(\mathbf{F}_m, \mathbf{u}_m)$  puisque le paramètre  $\xi'$  parcourt  $\mathbb{R}^2$ . Le support de la discontinuité, c'est-à-dire la fissure elle-même, est donc identifiable à l'aide des données de bord.

Note remise le 22 janvier 1997, acceptée après révision le 7 avril 1997.

### Références bibliographiques

- [1] **Friedman A. et Vogelius M., 1989.** Determining cracks by boundary measurements, *Indiana Univ. Math. J.*, 38, n°3, p. 527-556.
- [2] **Alessandrini G., 1988.** Stable determination of conductivity by boundary measurements, *Applicable Anal.*, 27, p. 153-172.
- [3] **Alessandrini G. et Diaz Valenzuela A., 1994.** Unique determination of multiple cracks by two measurements, *Quad. Mat. Univ. Trieste*,
- [4] **Bryan K. et Vogelius M., 1992.** A uniqueness result concerning the identification of a collection of cracks from finitely many electrostatic boundary measurements, *SIAM J. Math. Anal.*, 23, n° 4, p. 950-958.
- [5] **Andrieux S. et Ben Abda A., 1992.** Identification de fissures planes par une donnée de bord unique : un procédé direct de localisation et d'identification, *C. R. Acad. Sci. Paris*, série I.
- [6] **Andrieux S., 1995.** Fonctionnelles d'écart à la réciprocité généralisée et identification de fissures par des mesures surabondantes de surface, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 320, série I.
- [7] **Bannour T., Ben Abda A., Jaoua M., Décembre 1996.** A semi explicit algorithm for the reconstruction of 3D planar cracks, *Rapport de Recherche INRIA*, RR 3063.
- [8] **Brézis H., 1983.** *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris.
- [9] **Calderon A., 1980.** On an inverse boundary problem. *Seminar on numerical Analysis and Application to Continuum physics, Rio de Janeiro*, p. 65-73.
- [10] **Dang Dinh Ang, Dand Duc Trong et Yamamoto M., 1995.** Unique continuation and identification of boundary of an elastic body, *UTMS 95-57 preprint series*. Graduate school of mathematical sciences, University of Tokyo.