



**HAL**  
open science

## Calcul à la rupture: étude d'une suite de cinématiques, cas de l'axisymétrie

Alain Corfdir

► **To cite this version:**

Alain Corfdir. Calcul à la rupture: étude d'une suite de cinématiques, cas de l'axisymétrie. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série Iib, Mécanique, 1996, 322, pp.647-654. hal-00111517

**HAL Id: hal-00111517**

**<https://hal.science/hal-00111517>**

Submitted on 4 Sep 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Calcul à la rupture : étude d'une suite de cinématiques, cas de l'axisymétrie

Alain CORFDIR

Laboratoire de Mécanique des Solides (URA 317 du CNRS), ENPC/CERCSO,  
Central 2, La Courtine, 93167 Noisy-le-Grand CEDEX France.

---

**Résumé.** À partir d'une cinématique par blocs d'un type utilisé usuellement en calcul à la rupture, on construit une suite de cinématiques dont la limite est une cinématique axisymétrique. Cette suite de cinématiques pertinentes constitue pour plusieurs critères de résistance, des exemples mécaniques simples de la propriété bien connue de non continuité de la puissance résistante maximale pour la topologie faible et permet sur ces exemples de calculer effectivement le saut de la puissance résistante maximale lors du passage à la limite. La méthode de construction de cette suite peut aussi être utilisée pour une démonstration du fait que, sous certaines hypothèses, on peut se restreindre à des cinématiques axisymétriques pour l'étude cinématique d'un problème axisymétrique de calcul à la rupture. L'exemple de la suite étudiée met en évidence que la limite axisymétrique d'une suite peut conduire à une valeur de la puissance résistante maximale strictement inférieure à la borne inférieure des valeurs de la puissance résistante maximale correspondant aux termes de la suite.

## ***Yield design theory: study of a sequence of velocity fields, axisymmetric case***

**Abstract.** *We build out of a velocity field with rigid blocks, a sequence of velocity fields which converges to an axisymmetric velocity field. This sequence of relevant velocity fields provides us for different yield criteria, examples of the discontinuity of the maximum resisting power for the weak topology. The same method of building a sequence also provides a way to show that, on some assumptions, it is sufficient to consider only axisymmetric kinematic fields in solving an axisymmetric problem in yield design. The example of the studied sequence of kinematic fields shows that the maximum resisting power of the axisymmetric limit of the sequence can actually be less than the lower bound of the values of the maximum resisting power of the different terms of the sequence.*

---

## ***Abridged English Version***

The kinematic method in yield design theory is based upon the comparison of the maximum resisting power of internal stresses with the power of external loads (Salençon, 1983). The maximum resisting power (denoted by  $P_{rm}$ ), is calculated as the sum of the integral over the volume of a volume density of resisting power and of the integral over the surface where the velocity field is discontinuous of a surface density of resisting power (1). These densities are defined by (2). Velocity fields such that  $P_{rm} < \infty$  are called relevant.

We consider a cylinder (see *fig.*) with a discontinuous velocity field  $C_1$  (3). We build a sequence of velocity fields  $C_n$  defined by (4) out of the velocity field  $C_1$ . This sequence converges to a limit denoted by  $C_\infty$  (5).

Then, we introduce the space  $BD(\Omega)$  (Suquet, 1978), which is the set of the velocity fields which belong to  $L^1(\Omega)^3$  such that the strain rate tensor is a bounded measure. It can be proved (7), (8) that the sequence  $C_n$  meets the conditions (6) of convergence for the weak topology in  $BD(\Omega)$ , and that the limit belongs to  $BD(\Omega)$  (9).

Due to the definition of the sequence  $C_n$  and to the fact that the maximum resisting power is positively homogeneous of the first degree, the maximum resisting power of the sequence  $C_n$  is constant. We can put:  $\lim (P_{rm}(C_n)) = P_{rm}(C_1)$ .

We compare the maximum resisting power of  $C_n$  and of  $C_\infty$ , for different yield criteria: von Mises criterion (10), Tresca criterion (11), a bounded criterion (12) and Coulomb criterion. For most of the studied cases,  $P_{rm}(C_\infty)$  is different from  $\lim (P_{rm}(C_n))$ , even for yield criteria which ensure the equivalence of static and kinematic methods (Frémond and Friâa, 1982).

Using some results on convex functions of measures (Temam, 1983), it has been proved that the maximum resisting power is convex and lower semicontinuous for the weak topology of  $BD(\Omega)$  if the set of admissible stresses is a closed convex which is bounded or which contains the origin. Using the same method of construction of a sequence, we can deduce from this property a proof that, for an axisymmetric problem in yield design theory, it is sufficient to consider axisymmetric velocity fields.

The sequence of velocity fields (4) provides us an example showing that the maximum resisting power of the axisymmetric limit of the sequence can be less than the lower bound of the values of the maximum resisting power corresponding to the different terms of the sequence.

---

## **Introduction**

La méthode cinématique du calcul à la rupture (Salençon, 1983) est basée sur la comparaison de la puissance résistante maximale des efforts intérieurs et de la puissance des efforts extérieurs. Une condition nécessaire pour qu'un chargement soit potentiellement supportable est que pour toute cinématique admissible, cette puissance résistante maximale soit supérieure à la puissance des efforts extérieurs. Cette puissance résistante maximale  $P_{rm}$  est définie pour les champs de vitesse  $\underline{U}(x)$  de classe  $C^1$  par morceaux comme la somme (1) de l'intégrale sur le volume  $\Omega$  de la densité volumique de la puissance résistante maximale et, éventuellement, de l'intégrale sur la surface  $\Sigma$  de la densité surfacique de puissance résistante maximale associée à la discontinuité de vitesse. On note  $\underline{d}$  le tenseur des vitesses de déformation,  $\Sigma$  la surface (intérieure à  $\Omega$ ) où la vitesse est discontinue,  $[[\underline{U}]]$  la

discontinuité de la vitesse de part et d'autre de  $\Sigma$  et  $\underline{n}$  le vecteur normal à  $\Sigma$ .

$$(1) \quad P_{rm} = \int_{\Omega} \Pi(x, \underline{d}) d\Omega + \int_{\Sigma} \Pi(x, \underline{n}, \llbracket \underline{U} \rrbracket) d\Sigma.$$

Les densités volumique et surfacique de puissance résistante maximale (2) sont définies en chaque point de  $\Omega$  ou de  $\Sigma$  à partir de l'ensemble convexe fermé des tenseurs de contraintes admissibles noté  $G(x)$ .

$$(2) \quad \begin{cases} \Pi(x, \underline{d}) = \sup \{ \underline{d} : \underline{\sigma}(x)/\underline{\sigma}(x) \in G(x) \} \\ \Pi(x, \underline{n}, \llbracket \underline{U} \rrbracket) = \sup \{ \llbracket \underline{U} \rrbracket \cdot \underline{\sigma}(x) \cdot \underline{n}/\underline{\sigma}(x) \in G(x) \} = \Pi \left( x, \frac{1}{2} (\llbracket \underline{U} \rrbracket \otimes \underline{n} + \underline{n} \otimes \llbracket \underline{U} \rrbracket) \right) \end{cases}$$

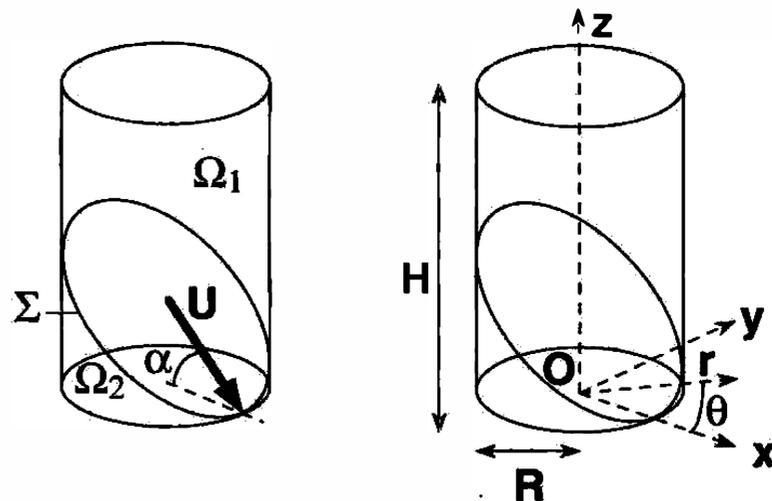
Les champs cinématiques pertinents (pour un critère de résistance donné) sont ceux qui ont une puissance résistante maximale bornée.

Nous allons construire à partir d'un champ cinématique par blocs une suite de champs tendant vers un champ axisymétrique et mettre en évidence sur cet exemple que la puissance résistante maximale de ce champ axisymétrique peut être strictement inférieure à la borne inférieure des valeurs de la puissance résistante maximale pour les différents termes de la suite qui sont autant d'approximations successives de ce champ axisymétrique.

### Construction d'une suite de cinématiques

Soit un solide cylindrique  $\Omega$  de hauteur  $H$  et de rayon  $R$ . Nous définissons une cinématique  $C_1$  par blocs sur ce solide (fig.).

Cinématique par blocs  $C_1$ .  
Velocity field  $C_1$  with two blocks.



Le solide est divisé en deux blocs séparés par le plan  $\Sigma$  qui fait un angle  $\alpha$  avec le plan  $Oxy$  et qui passe par le point  $x = R, y = z = 0$ . Le bloc inférieur  $\Omega_2$  est immobile, la vitesse  $U$  du bloc supérieur  $\Omega_1$ , dirigée vers le bas, est portée par l'intersection du plan  $\Sigma$  et du plan  $Oxz$ . Nous supposons dans la suite que la condition  $H > 2R \tan \alpha$  est vérifiée. Le champ de vitesse  $\underline{U}_1$  de la cinématique  $C_1$  s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$(3) \quad \begin{cases} \underline{U}_1 = U (\cos \alpha \cos \theta \underline{e}_r - \cos \alpha \sin \theta \underline{e}_\theta - \sin \alpha \underline{e}_z) & \text{si } r \cos \theta \sin \alpha + z \cos \alpha > R \sin \alpha \\ \underline{U}_1 = 0 & \text{si } r \cos \theta \sin \alpha + z \cos \alpha < R \sin \alpha. \end{cases}$$

On note  $\underline{U}_{1,\beta}$  le champ de vitesse déduit de  $\underline{U}_1$  par rotation d'angle  $\beta$  autour de l'axe  $Oz$ . On a :  $\underline{U}_{1,\beta}(r, \theta, z) = \underline{U}_1(r, \theta - \beta, z)$ .

Construisons à partir de  $C_1$  une suite de cinématiques  $C_n$  définie par :

$$(4) \quad \underline{U}_n(r, \theta, z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underline{U}_{1, 2k\pi/n}(r, \theta, z).$$

La limite  $\underline{U}_\infty$  de ce champ de vitesse quand  $n$  tend vers l'infini s'écrit :  $\underline{U}_\infty(r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underline{U}_{1, \beta}(r, \theta, z) d\beta$ . Nous obtenons en posant  $V = U \sin \alpha$  :

$$(5) \quad \begin{cases} \text{si } \frac{R \tan \alpha - z}{r \tan \alpha} > 1, & \underline{U}_\infty = 0 \\ \text{si } 1 \geq \frac{R \tan \alpha - z}{r \tan \alpha} \geq -1, & \underline{U}_\infty = \frac{V}{\pi} \left( \frac{1}{\tan \alpha} \sqrt{1 - \left( \frac{R \tan \alpha - z}{r \tan \alpha} \right)^2} \underline{e}_r - \arccos \left( \frac{R \tan \alpha - z}{r \tan \alpha} \right) \underline{e}_z \right) \\ \text{si } -1 \geq \frac{R \tan \alpha - z}{r \tan \alpha}, & \underline{U}_\infty = -V \underline{e}_z \end{cases}$$

On remarque que ce champ a la particularité d'être continu partout sauf au point  $(r = 0, z = R \tan \alpha)$  de l'axe  $Oz$ .

### Convergence de $C_n$ dans $BD(\Omega)$

L'espace  $BD(\Omega)$  est défini (Suquet, 1978) comme l'ensemble des champs de vitesse sur  $\Omega$  tels que les composantes  $U_i$  soient dans  $L^1(\Omega)$  et que les composantes  $d_{ij}$  du tenseur de déformation (définies à partir des dérivées au sens des distributions des composantes de  $\underline{U}$ ) soient des mesures bornées. Dans la suite, nous considérerons  $\underline{d}$  comme une mesure et nous noterons  $\int_\Omega \underline{\sigma} : \underline{d}$  l'intégrale de  $\underline{\sigma}$  par rapport à la mesure  $\underline{d}$ . Cet espace peut être muni d'une topologie appelée dans la suite topologie faible et caractérisée par la condition (6) de convergence au sens faible d'une suite  $\underline{U}_n$  vers une limite  $\underline{U}_\infty$  (cette topologie peut être définie précisément comme une topologie faible \* en considérant  $BD(\Omega)$  comme le dual d'un espace normé) :

$$(6) \quad \begin{cases} \underline{U}_n \rightarrow \underline{U}_\infty & \text{dans } L^1(\Omega)^3 \\ \int_\Omega \varphi d_{n_{ij}} \rightarrow \int_\Omega \varphi d_{\infty_{ij}} & \text{pour tout } (i, j) \text{ et pour tout } \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \end{cases}$$

La première de ces conditions est vérifiée pour la suite de cinématiques que nous venons de définir; ceci résulte du théorème de convergence dominée puisque la suite  $\underline{U}_n$  converge simplement en tout point de  $\Omega$  vers  $\underline{U}_\infty$  et est bornée en norme par  $U$ . En utilisant la définition de la dérivée d'une distribution, on obtient :

$$(7) \quad \int_\Omega \varphi d_{n_{ij}} = -\frac{1}{2} \int_\Omega \left( U_{n_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + U_{n_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) d\Omega.$$

Alors la convergence au sens de  $L^1$  de la suite  $\underline{U}_n$  suffit à démontrer la convergence  $\int_\Omega \varphi d_{n_{ij}} \rightarrow \int_\Omega \varphi d_{\infty_{ij}}$ . Pour conclure que la suite  $\underline{U}_n$  converge dans  $BD(\Omega)$  vers  $\underline{U}_\infty$ , il faut que  $\underline{U}_\infty$  soit un élément de  $BD(\Omega)$ . Il reste donc à vérifier que  $d_{\infty_{ij}}$  est une mesure bornée pour tout  $(i, j)$ . En utilisant (7), on obtient :

$$(8) \quad \int_\Omega \varphi d_{n_{ij}} = \int_\Omega \varphi_n d_{1_{ij}}$$

avec  $\varphi_n(r, \theta, z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(r, \theta + \frac{2k\pi}{n}, z\right)$ . Si le sup de  $|\varphi|$  est inférieur ou égal à 1, il en est de même pour  $|\varphi_n|$ . Et on peut conclure :

$$(9) \quad \sup_{|\varphi| \leq 1} \int_{\Omega} \varphi d_{n_{ij}} = \sup_{|\varphi| \leq 1} \int_{\Omega} \varphi_n d_{1_{ij}} \leq \sup_{|\varphi| \leq 1} \int_{\Omega} \varphi d_{1_{ij}}$$

et donc que  $d_{\infty_{ij}}$  est une mesure bornée pour tout  $(i, j)$  si  $d_{1_{ij}}$  est bien une mesure bornée, ce que l'on vérifie directement.

### Étude de $P_{rm}(C_n)$

Pour cette suite de cinématiques, qui sont des cinématiques par blocs, la puissance résistante maximale se réduit au terme correspondant aux discontinuités de vitesse au passage des surfaces de discontinuité. Nous pouvons écrire :  $P_{rm}(C_n) = \int_{\Sigma_n} \Pi(\underline{n}, \llbracket \underline{U}_n \rrbracket) d\Sigma$ . La surface de discontinuité  $\Sigma_n$  est constituée de  $n$  copies de la surface de discontinuité  $\Sigma_1$  ayant subi une rotation de  $2k\pi/n$ . Supposant le matériau homogène et isotrope, nous avons donc :  $P_{rm}(C_n) = n \int_{\Sigma_1} \Pi\left(\underline{n}, \frac{\llbracket \underline{U}_1 \rrbracket}{n}\right) d\Sigma$ . En utilisant le fait que la fonction  $\Pi$  est positivement homogène de degré 1, nous concluons  $P_{rm}(C_n) = P_{rm}(C_1)$ . La suite  $P_{rm}(C_n)$  est donc une suite constante.

### Exemples de discontinuité de $P_{rm}$

Il est connu que la puissance résistante maximale n'est pas continue en général pour la topologie faible. Il suffit de considérer une suite de cinématiques non pertinentes ayant comme limite une cinématique pertinente. A cet effet, on peut prendre le problème traité jusqu'ici et modifier la cinématique  $C_1$  en ajoutant à  $\underline{U}$  une composante normale non nulle. Dans le cas d'un matériau de Tresca, le champ de vitesses ainsi défini n'est pas pertinent et la puissance résistante maximale est infinie. Si l'on fait tendre vers zéro cette composante normale, on définit une suite de cinématiques qui converge faiblement vers  $C_1$  dont la puissance résistante maximale est finie.

D'un point de vue pratique, l'utilisateur du calcul à la rupture ne s'intéresse qu'aux cinématiques pertinentes; la propriété générale précédente n'aura d'intérêt pour lui que si l'on peut exhiber des exemples portant sur des suites de cinématiques pertinentes. La suite  $(C_n)$  va nous fournir de tels exemples.

La valeur de  $P_{rm}(C_\infty)$  se détermine directement comme  $\int_{\Omega} \Pi(\underline{d}_{\infty}) d\Omega$ . En effet, après le passage à la limite, il n'y a plus de surface de discontinuité, le champ de vitesse étant continu partout sauf en un point. Nous allons maintenant comparer  $P_{rm}(C_\infty)$  et  $P_{rm}(C_n) = P_{rm}(C_1)$  pour divers critères de résistance.

#### a) Cas du critère de Mises

Nous obtenons en utilisant l'expression correspondante des fonctions  $\Pi$  (Salençon, 1983) :

$$(10) \quad \begin{cases} P_{rm}(C_1) = \frac{kV\pi R^2}{\sin \alpha \cos \alpha}; \\ P_{rm}(C_\infty) = 2kVR^2 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \tan \alpha\right)^2 - 1\right) u^2 + u^4} du. \end{cases}$$

On vérifie que l'on a  $P_{rm}(C_1) > P_{rm}(C_\infty)$ . Numériquement, on trouve pour  $\alpha = \pi/4$ ,  $P_{rm}(C_1) \approx 1,07 P_{rm}(C_\infty)$ .

On peut expliquer ceci de manière intuitive en remarquant que la convexité de la fonction  $\Pi$  fait diminuer (au sens large) la puissance résistante maximale lorsque l'on superpose des cinématiques ayant la même puissance résistante maximale. Mais dans le cas particulier que nous considérons, cette convexité ne va pas jouer avant le passage à la limite (tant que l'on a superposé un nombre fini de cinématiques, la superposition n'intéresse que des parties de  $\Omega$  de volume et de surface nulles) et la suite des valeurs de la puissance résistante maximale est constante. Au passage à la limite, le champ cinématique change de nature : il cesse d'être un champ par blocs pour devenir un champ de déformation, et la baisse de la puissance résistante maximale due à la convexité intervient alors.

Pour le problème de la compression simple d'un cylindre à bords collés, la cinématique envisagée permet dans le cas où  $H = 2R$  en prenant  $\alpha = \pi/4$ , d'améliorer certains résultats antérieurs.

Ainsi, nous obtenons la borne supérieure de la force appliquée  $F^+ \leq 1,868 k \pi R^2$ , à comparer avec le résultat analytique de Kobayashi et Thomsen (1965)  $F^+ \leq 1,901 k \pi R^2$  et le résultat obtenu par Reynaud (1979)  $F^+ \leq 1,90 k \pi R^2$  (valeur lue sur un graphique).

b) *Cas du critère de Tresca*

Nous obtenons cette fois :

$$(11) \quad \begin{cases} P_{rm}(C_1) = \frac{\sigma_0 V \pi R^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha}; \\ P_{rm}(C_\infty) = \frac{\sigma_0}{2} V R^2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-u^2}} \left( (1-u^2) + \sqrt{1 + \left( \tan^2 \alpha + \frac{1}{\tan^2 \alpha} \right) u^2 + u^4} \right) du. \end{cases}$$

On vérifie que l'on a  $P_{rm}(C_1) > P_{rm}(C_\infty)$  sauf pour  $\tan \alpha = 1$ , où il y a égalité. Ce cas d'égalité était attendu puisque la cinématique par blocs  $C_1$  avec  $\tan \alpha = 1$  donne la borne exacte dans le cas de la compression simple d'un cylindre en matériau de Tresca de hauteur suffisante.

L'étude de ce cas peut être abordée par la méthode des caractéristiques appliquée aux problèmes axisymétriques. Ainsi, Shield (1955) a obtenu par cette méthode, pour ce problème de la compression simple d'un cylindre en matériau de Tresca, des champs cinématiques égaux dans certaines zones au champ  $\underline{U}_\infty$ . La présence d'une discontinuité isolée (avec un saut borné) de la vitesse au point ( $r = 0$ ,  $z = R \tan \alpha$ ) est un exemple du fait que ce type de singularité ne se propage pas (Salençon, 1974).

c) *Cas d'un critère borné*

On choisit le critère très simple suivant :  $\sum_{i,j} \sigma_{ij}^2 \leq k^2$ ; on se limite au cas  $\alpha = \pi/4$ . On trouve :

$$(12) \quad \begin{cases} P_{rm}(C_1) = k \sqrt{2} V \pi R^2; \\ P_{rm}(C_\infty) = k \sqrt{2} V R^2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-u^2}} \sqrt{1-u^2+u^4} du \approx 2,93 k \sqrt{2} V R^2. \end{cases}$$

Dans le cas  $\alpha = \pi/4$ , on trouve la même valeur relative de la discontinuité que pour le critère de Mises. On rappelle que dans le cas d'un critère convexe fermé et borné, comme dans ceux des critères de Tresca et de Mises, il y a équivalence de la méthode cinématique et de la méthode statique (Frémond et Friâa, 1982).

Ce résultat peut aussi être interprété comme le fait que la suite  $C_n$  qui converge dans la topologie faible ne converge pas pour la topologie intermédiaire définie par la distance  $D$  suivante entre deux cinématiques  $C_1$  et  $C_2$  (Temam, 1983) :

$$(13) \quad D(C_1, C_2) = \|\underline{U}_1 - \underline{U}_2\|_{L^1(\Omega)^3} + \left| \int_{\Omega} |\underline{d}(\underline{U}_1)| - \int_{\Omega} |\underline{d}(\underline{U}_2)| \right|.$$

Pour ce critère borné, on a  $P_{rm}(C) = k \int_{\Omega} |\underline{d}(\underline{U})|$  et donc la distance entre  $C_n$  et  $C_{\infty}$  ne tend pas vers 0.

#### d) Cas du critère de Coulomb

En prenant la vitesse  $U$  faisant un angle  $\beta \geq \varphi$  avec le plan  $\Sigma$ , on obtient une nouvelle cinématique  $C_1$  pertinente pour le critère de Coulomb d'angle de frottement interne  $\varphi$ . On observe dans ce cas que  $P_{rm}(C_{\infty}) = P_{rm}(C_1)$ .

#### Propriétés de $\int_{\Omega} \Pi(\underline{d})$

Rappelons des résultats établis grâce aux méthodes de l'analyse convexe appliquées à des problèmes de mécanique notamment par Temam (1983) et Frémond et Friâa (1982). Le domaine de résistance  $G$  est supposé convexe et fermé. Nous supposerons de plus que ce domaine  $G$  est identique en tout point du solide et, dans un premier temps, qu'il est borné. On peut étendre la définition de  $\Pi(\underline{d})$  donnée par (2) au cas où  $\underline{d}$  est une mesure bornée ( $\Pi(\underline{d})$  alors une mesure) et définir ainsi une fonction :  $\int_{\Omega} \Pi(\underline{d})$ . Pour les champs cinématiques utilisés en calcul à la rupture qui sont suffisamment réguliers et qui satisfont les conditions aux limites, cette fonction est égale à la puissance résistante maximale. De plus, on a l'égalité :  $\int_{\Omega} \Pi(\underline{d}) = \sup_{\underline{\sigma} \in D_f(C_0^{\infty})} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{d}$ . Le sup est pris sur

$D_f(C_0^{\infty}) = \{\underline{\sigma} \in C_0^{\infty} / \psi(\underline{\sigma}) \in L^1(\Omega)\}$  où  $\psi$  est la fonction indicatrice de l'ensemble convexe  $G$ . Sous cette forme, on voit que la fonction  $\int_{\Omega} \Pi(\underline{d})$  est convexe et semi-continue inférieurement pour la topologie faible. Cette propriété peut être étendue au cas où  $G$  n'est pas borné mais contient l'origine.

#### Calcul à la rupture en symétrie axiale

La méthode de construction utilisée pour la suite de cinématiques étudiée précédemment peut fournir une démonstration de la possibilité de se restreindre pour un problème de calcul à la rupture axisymétrique à des cinématiques axisymétriques. En effet, à partir d'une cinématique de départ  $C'_1$  satisfaisant les conditions aux limites, on peut, en utilisant la même méthode que précédemment, construire une suite de cinématiques  $C'_n$  dont on peut extraire une sous-suite  $C'_m$  en prenant seulement les termes de la forme  $m = 2^p$ . Moyennant des hypothèses peu contraignantes sur  $C'_1$ , vérifiées pour les champs utilisés en calcul à la rupture ( $\underline{U}'_1$  appartenant à  $BD(\Omega)$ ,  $\underline{U}'_1$  borné et les fonctions  $\theta \rightarrow \underline{U}'_1(r, \theta, z)$  intégrables au sens de Riemann), les arguments utilisés précédemment pour l'étude de la suite  $C_n$  restent valables et on peut conclure que  $C'_n$  tend vers  $C'_{\infty}$  au sens faible dans  $BD(\Omega)$ . La suite  $P_{rm}(C'_m)$  est décroissante à cause de la convexité et bornée inférieurement, elle tend donc vers une limite qui est supérieure ou égale à  $P_{rm}(C'_{\infty})$  à cause de la semi-continuité inférieure. Comme la puissance des forces extérieures est la même pour toutes ces cinématiques, on voit qu'il suffit de considérer la cinématique  $C'_{\infty}$ .

#### Conclusions

Pour divers critères, la suite de cinématiques que nous avons construite constitue des exemples simples du fait que la puissance résistante maximale n'est pas continue pour la topologie faible, même en se restreignant à des cinématiques pertinentes ou en utilisant un critère de résistance borné. La méthode de construction de cette suite peut aussi être utilisée pour montrer que, sous certaines hypothèses, l'étude cinématique d'un problème de calcul à la rupture axisymétrique peut être restreinte aux cinématiques axisymétriques.

Enfin, l'exemple de la suite particulière étudiée met en évidence des cas où la limite axisymétrique d'une suite de cinématiques a une puissance résistante maximale strictement inférieure à la borne inférieure des puissances résistantes maximales obtenues avec les termes de la suite. Cette construction effective a permis de calculer sur cet exemple le saut de la puissance résistante maximale au moment du passage à la limite.

### Références bibliographiques

- Frémond M. et Friâa A., 1982.** Les méthodes statique et cinématique en calcul à la rupture et en analyse limite, *Journal de Mécanique théorique et appliquée*, 1, n° 5, p. 881-905.
- Kobayashi S. et Thomsen E., 1965.** Upper and lower bound solutions to axisymmetric compression and extrusion problems, *Int. J. Mech. Sci.*, 7, p. 127-143.
- Reynaud G., 1979.** Application du calcul variationnel à quelques problèmes axisymétriques de mécanique des sols, *Thèse de troisième cycle*, Université scientifique et médicale et Institut national polytechnique de Grenoble.
- Salençon J., 1974.** *Applications of the theory of plasticity in soil mechanics*, John Wiley & sons.
- Salençon J., 1983.** *Calcul à la rupture et analyse limite*, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées.
- Shield R. T., 1955.** On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry, *Proc. Roy. Soc.*, 233, A, 183, p. 267-287.
- Suquet P., 1978.** Sur un nouveau cadre fonctionnel pour les équations de la plasticité, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 286, série A, p. 1129-1132.
- Temam R., 1983.** *Problèmes mathématiques en plasticité*, Gauthier-Villars, 1983.