



**HAL**  
open science

# Optimisation des portiques élastoplastiques : état limite des portiques élastoplastiques sous chargement répété mobile

Edmond Codjo Adjovi, Cyprien Gnanvo, Amos Foudjet, Bernard Halphen

► **To cite this version:**

Edmond Codjo Adjovi, Cyprien Gnanvo, Amos Foudjet, Bernard Halphen. Optimisation des portiques élastoplastiques : état limite des portiques élastoplastiques sous chargement répété mobile. *Journal des Sciences pour l'Ingénieur*, 2004, 4, pp.50-59. hal-00111415

**HAL Id: hal-00111415**

**<https://hal.science/hal-00111415v1>**

Submitted on 13 Jan 2025

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation des portiques élastoplastiques : état limite des portiques élastoplastiques sous chargement répété mobile

E. C. Adjovi<sup>1</sup>, C. Gnanvo<sup>2</sup>, A. Foudjet<sup>3</sup>, B. Halphen<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Collège Polytechnique Universitaire, Université de Abomey Calavi, 01BP 2009 Cotonou, Bénin

<sup>2</sup>Faculté des Sciences et Techniques, Université de Abomey Calavi, 01BP 2009 Cotonou, Bénin

<sup>3</sup>CRESA FORET BOIS, Université de Dschang, BP 8114 Yaoundé, Cameroun

<sup>4</sup>Laboratoire de mécanique des solides, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex

**RÉSUMÉ.** La présente étude propose la généralisation de la notion de l'état d'auto contrainte de provenance statique des contours fermés au premier théorème d'adaptation "Bleich-Melan" pour l'analyse élastoplastique des portiques sous un système de charges répétées mobiles. La formulation adoptée dans ce travail conduit à la programmation linéaire et nécessite l'utilisation de la méthode SIMPLEX. La méthode développée permet de définir l'état de contrainte réel d'un portique donné sous un chargement donné. Les résultats de l'étude sont complétés par une application numérique.

**ABSTRACT.** This survey proposes the generalization of the notion of self state constraint of static origin for the closed contours and to first adaptation theorem "Bleich-Melan" for elastoplastic analysis of frames under a system of repeated mobile loads. The formulation adopted leads to the linear programming problem and necessitates the utilization of SIMPLEX method. The results of the survey are completing by a numerical application.

**MOTS-CLÉS :** Etat limite/portique élastoplastique, charge répétée mobile, auto-contrainte, contrainte résiduelle, programmation linéaire.

**KEYWORDS:** Ultimate state/elastoplastic frame, repeated mobile load, auto constraint, stresses residual, linear programming.

## 1. Introduction

La prise en compte des propriétés plastiques des matériaux dans le calcul des constructions joue un rôle important pour le problème pratique d'ingénieur. Une quantité importante d'analyses théoriques et expérimentales est consacré à cette question [1][2][3][4][5]. Une série de propositions pratiques ont découlé de ces analyses. Ces propositions permettent en principe une application au calcul des systèmes de poutres plastiques lors de leur conception. Avant de présenter de quoi il est question dans la présente étude, arrêtons-nous d'abord sur quelques travaux, qui ont été consacrés à l'établissement des théories d'analyse des structures statiquement indéterminées en matériau élastoplastique idéal sous chargement alterné, basée sur l'adaptation des portiques.

La première étude, montrant la possibilité de la rupture des systèmes élastoplastiques statiquement indéterminés par le développement continu des déformations suite à l'action de la charge répétée, plus petite que la charge limite à paramètre unique est certainement le travail de Gruning [6]. Dans cette même étude, la position qui anticipe le théorème statique est énoncée.

Un peu plus tard Bleich [7] a démontré le théorème d'adaptation pour le système statiquement indéterminé de degrés deux.

Dans les années 30, en Russie sont apparues les publications de Gvosdev [8][9] où la formulation précise du théorème statique et cinématique par rapport aux propriétés extrêmes de la charge de rupture a été donnée.

Dans les travaux [10] et [11], Melan a justifié le théorème d'adaptation pour les milieux continus élastoplastiques. Il a développé ainsi les principales idées des travaux de Gvosdev [8][9].

Une nouvelle démonstration du théorème d'adaptation utilisant la représentation géométrique des états d'auto contrainte a été donnée par Rjanissin [12].

C'est dans les années 50 que les premiers travaux sur la création des méthodes pratiques de calcul des portiques élastoplastiques à la charge répétée ont vu le jour en Europe occidentale. Une série de méthode a été proposée par Neal et Symonds [13][14][15]. La méthode développée dans le travail [13] est basée sur l'utilisation du théorème statique. L'obtention des solutions du problème nécessite la résolution du système

d'équations exprimant les conditions du théorème d'adaptation.

Koiter a donné quelques remarques importantes sur le théorème d'adaptation [16]. Il a noté que, les hypothèses établissant que, les sections doivent être symétriques par rapport à l'axe neutre et que, les propriétés élastoplastiques du matériau pour toute la section doivent être les mêmes lors du travail du matériau à la traction et compression sont très essentielles pour les démonstrations du théorème d'adaptation pour les systèmes fléchis statiquement indéterminés.

Le théorème d'adaptation est largement utilisé dans les travaux de Maier [17][18][19]. Il a montré que le théorème d'adaptation des portiques peut être résolu par la méthode de la programmation linéaire.

Tin et Vamonssatit [20] ont généralisé le théorème d'adaptation de Bleich-Melan pour développer la méthode de calcul alternatif de la sécurité des portiques élastoplastiques en acier sous charges répétées. Ils ont reposé leur approche sur les modèles des structures discrètes et sur la programmation mathématique développés par Maier [17][18][19][23].

Dans la présente étude, il est question de la détermination de l'état limite des portiques élastoplastiques sous chargement répété mobile. Le problème principal résolu dans ce travail est la détermination du paramètre du moment limite engendré par le chargement répété mobile d'un portique élastoplastique. Un modèle mathématique sera développé sur la base du théorème d'adaptation et de la notion d'état d'auto contrainte de provenance statique pour les contours fermés (cadres). Ce modèle conduit à la recherche des solutions du problème par la méthode SIMPLEX de la programmation linéaire [21]. Un exemple numérique sera donné pour montrer l'intérêt de l'algorithme de calcul élaboré.

## 2. Formulation du problème posé

L'étude de projet optimal d'une construction se réalise sous divers aspects, par exemple par rapport à sa masse (volume), à son coût, à son déboursé sec, etc. Cependant il n'est pas possible de satisfaire toutes ou partie de ces exigences, parce qu'il est difficile de formuler mathématiquement certaines d'entre elles. De même la prise en compte de plusieurs exigences à la fois complique le problème.

Le critère d'optimisation couramment utilisé est celui de la masse minimale de la construction. L'expression du critère doit être en rapport avec les grandeurs mécaniques entrant dans les modèles mathématiques. Pour les systèmes élastoplastiques les grandeurs mécaniques sont les moments limites,

qui définissent l'état réel de contrainte du système. Ces moments sont fonctions de la grandeur de la section de l'élément et de la grandeur de la limite d'écoulement du matériau, ils sont appelés moments de plastification de la section et sont des caractéristiques de cette section. Ils conditionnent non seulement les qualités économiques de l'élément mais aussi de toute la construction dans son ensemble.

Les méthodes de calcul des portiques élastoplastiques élaborées présentement permettent de transiter sur des problèmes d'optimisation. Dans ce domaine des résultats importants sont déjà obtenus [22][23].

L'un des chemins de résolution des problèmes d'optimisation est l'utilisation des méthodes de la programmation mathématique et au premier rang, les méthodes de la programmation linéaire. Nonobstant que cette possibilité de résolution de problème d'optimisation a été indiquée relativement longtemps, les méthodes de la programmation linéaire trouvent une mise en application faible lors de la résolution des problèmes d'optimisation des portiques. Ceci de notre point de vue s'explique par le fait que premièrement la méthode en elle-même est absente dans les programmes des cours d'ingénieur et, deuxièmement, les méthodes de calcul des portiques élastoplastiques sous l'influence de chargement répété ou mobile ne sont pas suffisamment élaborées.

### 2.1. Géométrie, statique et cinématique

Dans le but d'utiliser au maximum les capacités mécaniques d'un portique quelconque à section droite rectangulaire, il est nécessaire de trouver la distribution des moments résiduels à une charge donnée. On considère que la configuration géométrique du portique, les limites de la variation, le sens de déplacement, la direction de la charge intermittente roulante qui agit sur lui sont connus (figure 1).

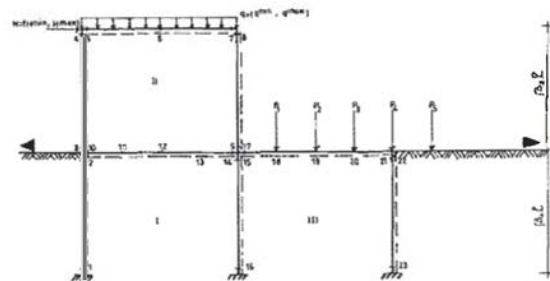


Figure 1. Portique élastique plastique

L'idée principale de la possibilité de calcul développée dans la présente étude consiste à

rechercher les valeurs des grandeurs des moments résiduels, satisfaisant aux conditions du théorème d'adaptation sous la forme de somme des états d'auto contrainte linéaires indépendants. Pour l'obtention de la solution économique (optimale), cette valeur doit encore posséder les propriétés telles que, leur somme avec les moments élastiques enveloppes, correspondant à la charge limite répétée mobile entraîne la formation de rotules plastiques dans autant de sections qu'il faut pour transformer tout ou partie du portique en mécanisme.

Pour déterminer la distribution des moments résiduels à la charge donnée, utilisons le premier théorème sur l'adaptations dénommé théorème de Bleich-Mélan, qui est identique au théorème statique et s'énonce comme suit : *si pour un portique il est possible de trouver une telle distribution des moments résiduels telle que, combinée avec tous les moments élastiques de toutes les combinaisons de charges forme la distribution admissible des moments, donc la destruction cyclique plastique des moments correspond à la valeur minimale du paramètre du moment limite  $M_i^{lim}$ .*

$$\begin{cases} M_i^{max} + m_i \leq M_i^{lim} \\ M_i^{min} + m_i \geq -M_i^{lim} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{avec } m_i = \sum_{k=1}^r m_{ik}' Y_k \quad (2)$$

## 2.2. Règle des signes

Les moments de flexion seront considérés positifs s'ils correspondent aux fibres tendues situées du côté du pointillé (figure 1).

## 2.3 Loi de comportement

Le matériau a un comportement élastique plastique parfait (figure 2).

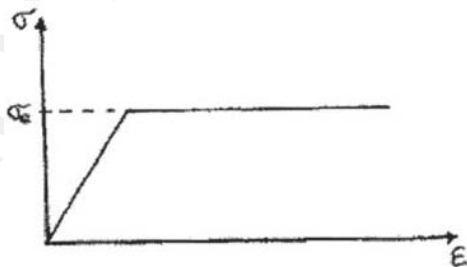


Figure 2. Loi de comportement d'un corps élastique plastique

## 3. Résultats et discussions

Construisons le modèle mathématique du problème posé permettant de définir les grandeurs des moments limites qui déterminent l'état de contrainte réel à la rupture plastique d'un portique. Conformément au théorème statique sur le déchargement progressif, le moment résiduel  $m_i$  dans chaque section doit être encadré par  $-M_i^{lim} - M_i^{min}$  et  $M_i^{lim} - M_i^{max}$  et s'exprime par un couple d'inégalité pour chaque section étudiée. Les inégalités (3) et (4) caractérisent la distribution des moments de flexion dans les sections où des rotules plastiques peuvent se former.

$$-M_i^{lim} - M_i^{min} \leq m_i \leq M_i^{lim} - M_i^{max} \quad (3)$$

$$\begin{cases} M_i^{lim} - m_i \geq M_i^{max} \\ M_i^{lim} + m_i \geq -M_i^{min} \end{cases} \quad (4)$$

avec  $i=1,2,\dots,n$ .

On se place désormais dans l'hypothèse où les rapports entre les moments limites des différentes sections des éléments du portique sont connus. Donc le moment limite dans n'importe quelle section  $i$  s'exprime par la formule:

$$M_i^{lim} = \alpha_i M^{lim} \quad i=1,2,\dots,n \quad (5)$$

où  $M^{lim}$  est le paramètre du moment limite. Cette grandeur est positive du fait que la résistance des éléments fléchis n'est pas fonction du signe du moment de flexion.

En mettant (2) dans (4), et en prenant en compte (5), l'expression (4) se présente comme suit :

$$\begin{cases} \alpha_1 M^{lim} - m_{11}' Y_1 - m_{12}' Y_2 - \dots - m_{1r}' Y_r \geq M_1^{max} \\ \alpha_2 M^{lim} - m_{21}' Y_1 - m_{22}' Y_2 - \dots - m_{2r}' Y_r \geq M_2^{max} \\ \dots \\ \alpha_n M^{lim} - m_{n1}' Y_1 - m_{n2}' Y_2 - \dots - m_{nr}' Y_r \geq M_n^{max} \\ \dots \\ \alpha_1 M^{lim} + m_{11}' Y_1 + m_{12}' Y_2 + \dots + m_{1r}' Y_r \geq -M_1^{min} \\ \alpha_2 M^{lim} + m_{21}' Y_1 + m_{22}' Y_2 + \dots + m_{2r}' Y_r \geq -M_2^{min} \\ \dots \\ \alpha_n M^{lim} + m_{n1}' Y_1 + m_{n2}' Y_2 + \dots + m_{nr}' Y_r \geq -M_n^{min} \end{cases} \quad (6)$$

Ainsi le théorème statique sur la destruction cyclique plastique (théorème de Bleich-Mélan) s'écrit :



$$\begin{array}{l}
\min(M^{\text{lim}}, M^{\text{lim}} \geq 0) \\
\alpha_1 M^{\text{lim}} - m_{11}' Y_1 - m_{12}' Y_2 - \dots - m_{1r}' Y_r \geq M_1^{\text{max}} \\
\alpha_2 M^{\text{lim}} - m_{21}' Y_1 - m_{22}' Y_2 - \dots - m_{2r}' Y_r \geq M_2^{\text{max}} \\
\vdots \\
\alpha_n M^{\text{lim}} - m_{n1}' Y_1 - m_{n2}' Y_2 - \dots - m_{nr}' Y_r \geq M_n^{\text{max}} \quad (7) \\
\vdots \\
\alpha_1 M^{\text{lim}} + m_{11}' Y_1 + m_{12}' Y_2 + \dots + m_{1r}' Y_r \geq -M_1^{\text{min}} \\
\alpha_2 M^{\text{lim}} + m_{21}' Y_1 + m_{22}' Y_2 + \dots + m_{2r}' Y_r \geq -M_2^{\text{min}} \\
\vdots \\
\alpha_n M^{\text{lim}} + m_{n1}' Y_1 + m_{n2}' Y_2 + \dots + m_{nr}' Y_r \geq -M_n^{\text{min}}
\end{array}$$

L'une des principales étapes du calcul numérique des portiques par la présente méthode proposée est la formation et la résolution du système d'inéquations (7). La simplification du travail numérique à cette étape peut s'obtenir par le choix des états de d'auto contrainte, pour lesquels la détermination des coefficients  $m'_{ik}$  se fait sans difficulté. Il est souhaitable que ces coefficients se réduisent à zéro. Pour ça, il faut s'arranger pour que les états d'auto contrainte choisis soient linéaires et indépendants entre eux.

Les états d'auto contrainte "naturels" dans les portiques élastoplastiques naissent à l'issue du chargement des portiques au-delà de la limite d'élasticité du matériau et de leur déchargement successif.

Les états d'auto contrainte peuvent être aussi provoqués de façon artificielle. Pour cela, il est nécessaire pour le portique donné, de choisir le système de base statiquement déterminé en supprimant des liaisons, d'appliquer des efforts équilibrés suivant la direction des liaisons abandonnées, ensuite rétablir ces liaisons. Cependant le rétablissement des liaisons doit se faire sans aucune application d'efforts et par conséquent sans aucuns déplacements. Nommons les états de contrainte ainsi obtenus "états de contrainte de provenance statique"

Pour le présent travail, il est utile de dégager des états d'auto contrainte de provenance statique pour les contours fermés.

N'importe quel portique est composé de contours fermés, ne possédant pas en son sein des barres. Exemple le portique sur la figure 1 est composé de trois contours fermés et celui sur la figure 3 est composé de deux.

Les états d'auto contrainte des contours fermés se forment de la façon suivante (figure 4) Après avoir identifier les contours fermés, il faut dégager de façon imaginaire chaque contour fermé, choisir pour chacun d'eux le système de base statiquement déterminé, appliquer les efforts équilibrés dans la

direction des liaisons abandonnées, ensuite remettre les liaisons.

Les états de contrainte de provenance statique pour les contours fermés utilisés dans la résolution du problème (7) possèdent une série d'avantages en comparaison avec les états d'auto contrainte de provenance cinématique (qui apparaissent suite au déplacement des appuis ou à l'action de la chaleur) et les états d'auto contrainte naturels :

- Premièrement, la détermination du coefficient  $m'_{ik}$  conduit au calcul des moments de flexion engendrés par des efforts ponctuels dans des poutres brisées ou courbes.
- Deuxièmement, les états d'auto contrainte linéaires indépendants des contours fermés peuvent être obtenus par la combinaison des états d'auto contrainte linéaires indépendants pour l'ensemble du portique. Notons que l'obtention des états d'auto contrainte linéaires indépendants pour les contours fermés est étroitement liée aux questions d'utilisation des inconnues groupées lors du calcul des portiques par la méthode des forces.
- Troisièmement, le nombre des coefficients  $m'_{ik}$  dans le système d'inéquations se simplifie considérablement.

Le modèle (7) constitue un problème de programmation linéaire, et pour le résoudre, il faudra appliquer un programme standard ou spécial.

Il est connu que, les programmes standard exigent que toutes les inconnues soient positives. Formellement cette condition peut être satisfaite par la substitution de chaque grandeur  $Y_k$  dont le signe n'est pas connu a priori par la différence de deux inconnues positives, c'est-à-dire  $Y_k = Y_k' - Y_k''$  avec  $k=1, 2, \dots, r$ , ainsi le problème (7) prend la forme :

$$\begin{array}{l}
\min(M^{\text{lim}}, M^{\text{lim}} \geq 0, Y_k' \geq 0, Y_k'' \geq 0) \\
\alpha_i M^{\text{lim}} - \sum_{k=1}^r m_{ik}' Y_k' + \sum_{k=1}^r m_{ik}'' Y_k'' \geq M_i^{\text{max}} \quad (8) \\
\alpha_i M^{\text{lim}} + \sum_{k=1}^r m_{ik}' Y_k' - \sum_{k=1}^r m_{ik}'' Y_k'' \geq -M_i^{\text{min}}
\end{array}$$

Il est commode de présenter le modèle mathématique obtenu sous la forme générale, conformément aux désignations indiquées dans le travail [21][2] ce qui permet d'utiliser l'algorithme standard de la méthode simplexe. Ainsi désignons par la matrice  $A$  toutes les données situées à la partie gauche de l'inéquation, celles de la partie droite de la même inéquation par le vecteur  $B$  et enfin les inconnues (le paramètre du moment limite

et l'état réel d'auto contrainte) par  $X$ . Alors le problème (8) peut être formulé de la manière suivante: trouver la solution non négative du système d'inéquation :

$$\begin{cases} AX \geq B \\ X \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

qui assure le minimum de la fonction coût :

$$F = CX \rightarrow \min \quad (10)$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 - m_{11} - m_{12} - \dots - m_{1r} & m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1r} \\ \alpha_2 - m_{21} - m_{22} - \dots - m_{2r} & m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n - m_{n1} - m_{n2} - \dots - m_{nr} & m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nr} \\ \alpha_1 m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1r} & -m_{11} - m_{12} - \dots - m_{1r} \\ \alpha_2 m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2r} & -m_{21} - m_{22} - \dots - m_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nr} & -m_{n1} - m_{n2} - \dots - m_{nr} \end{bmatrix}$$

et :

$$B = [M_1^{\max} M_2^{\max} \dots M_n^{\max} - M_1^{\min} - M_2^{\min} \dots - M_n^{\min}]^t$$

$$X = [M_1^{\lim} Y_1' Y_2' \dots Y_r' Y_1'' Y_2'' \dots Y_r'']^t$$

$$C = [100 \dots 000 \dots 0]$$

Ici  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_j$ , ( $i=1, 2, \dots, m$  ( $m=2n$ )),  $j=1, 2, \dots, s$  ( $s=2r+1$ )) sont des nombres réels données et les  $x_j$  ( $j=1, 2, \dots, s$ ) sont des variables.

Dans le problème de définition de la distribution optimale des efforts, la fonction coût signifie le minimum du paramètre des moments limites.

#### 4. Exemple numérique du problème, définition de la distribution réelle des moments résiduels

En interprétant l'hypothèse (5) comme le fait que les sections des poutres constituant la structure restent dans des rapports constants  $\alpha_i$ , le calcul de la réponse élastique en moments est indépendant des valeurs réelles des sections. Alors, le calcul au stade élastique étant fait, on peut calculer la résistance au stade élastoplastique d'un portique à deux travées et un niveau (figure 3), obtenir une précision de l'épure (sur le portique il est indiqué 20 sections critiques possibles). Les rapports des moments limites des éléments séparés sont donnés de la façon suivante :

- pour les éléments verticaux  $\alpha=1$ ,

- pour les éléments horizontaux  $\alpha=2$ .

Alors la première colonne de la matrice  $A$  est égale à :

$$\alpha_i = [1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1]^t, (i=1, 2, \dots, 40)$$

Construisons pour le portique donné six états isolés linéairement indépendants d'auto contrainte de provenance statique (figures 4).

Les modèles mathématiques (9) et (10) représentent du point de vue volume un problème suffisamment complexe de programmation linéaire, dont la résolution n'a pas de sens sans l'application de l'outil informatique. C'est pour cette raison que nous allons utiliser un sous-programme standard "MERCUF".

Conformément aux modèles mathématiques (9) et (10) et prenant en compte l'épure enveloppe (figure 4) et les états isolés d'auto contrainte de provenance statique pour les cadres fermés, (figure 4a, 4b, 4c, 4d, 4e, 4f) toutes les conditions du problème sont écrites dans le tableau 1. Il est nécessaire de souligner que dans le tableau 1,  $x_1 = M_{lim}$ ;  $x_{k+1} = Y_k'$  ( $k=1, 2, \dots, 6$ );  $x_{k+7} = Y_k''$ . Dans la dernière colonne du tableau, on a le plan optimal du problème. Les états inconnus d'auto contrainte se définissent par l'expression  $Y_k = Y_k' - Y_k''$ , où  $Y_k' = x_{k+1}$ ,  $Y_k'' = x_{k+7}$ .

Conformément à l'équation (4) et en prenant en compte la grandeur réelle l'état d'auto contrainte, l'épure des moments résiduels a été construite (figure 5). Superposant cette épure avec l'épure enveloppe au stade élastique de travail du portique (figure 6), l'épure enveloppe des moments pour le portique élastique/plastique à la destruction sous l'effet du chargement intermittente roulante (figure 7) a été obtenue. Les valeurs des moments indiquées aux sections N° 1, 4, 10, 11, 19, 20 (voir figure 3) sur la figure 6 caractérisent l'apparition des rotules plastique qui transforment le portique en mécanisme. De même les résultats trouvés vérifient les inégalités (1).

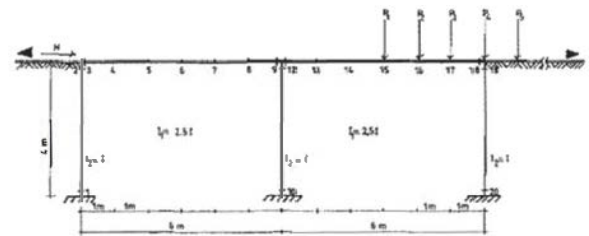


Figure 3. Portique élastique chargé par un système de charges répété mobile

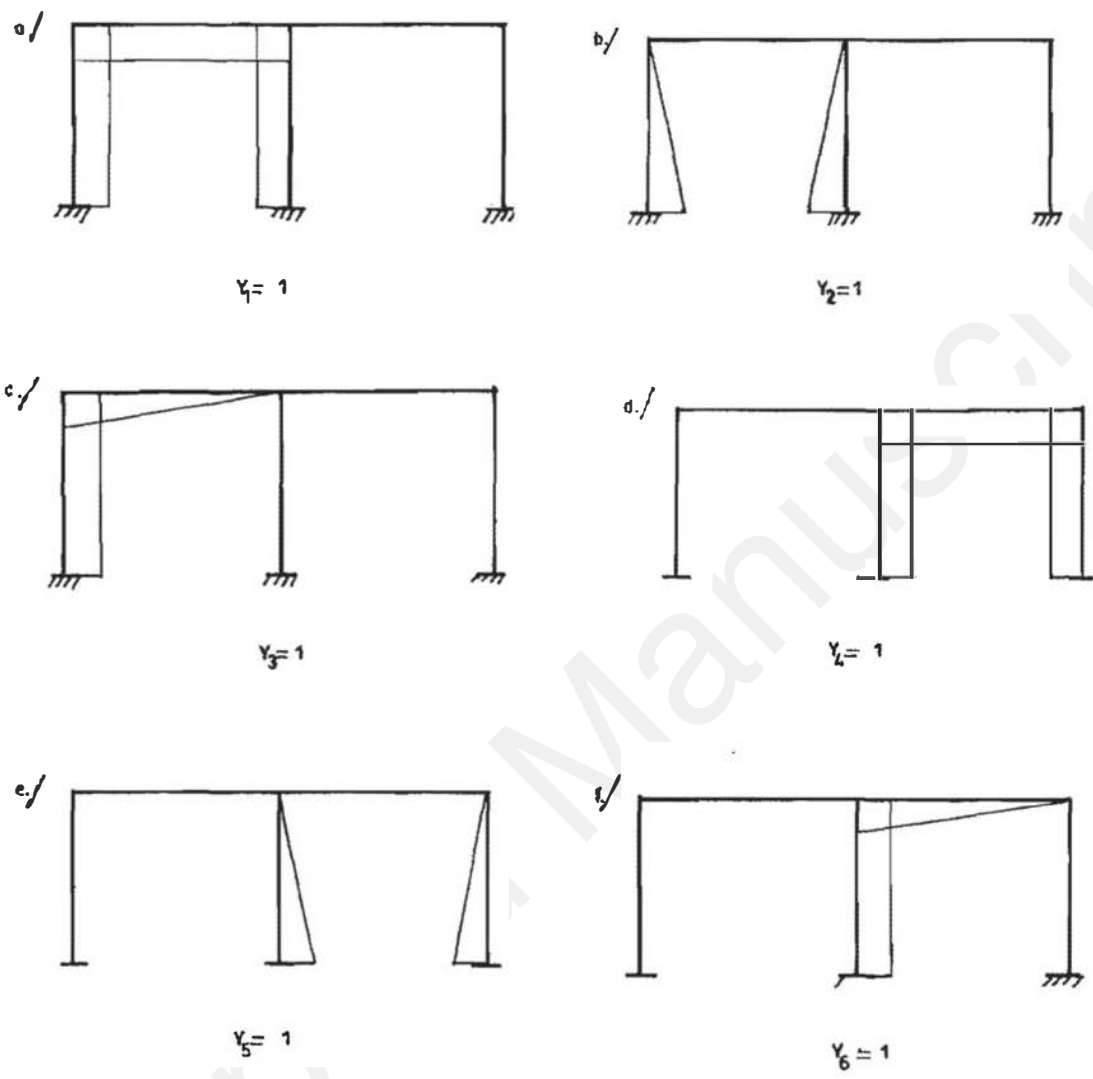


Figure 4. Etats d'auto contrainte

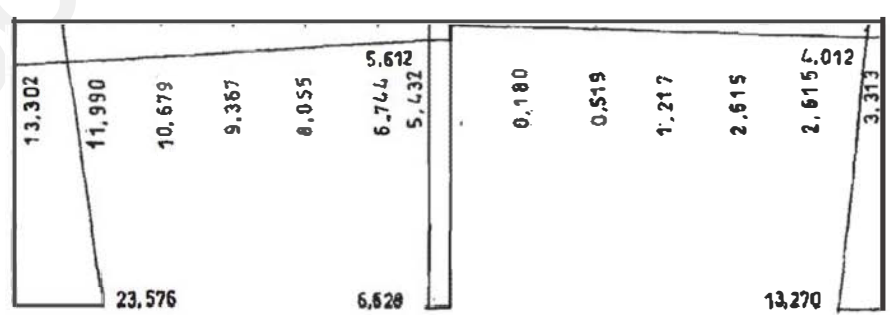


Figure 5. Epure des moments résiduels

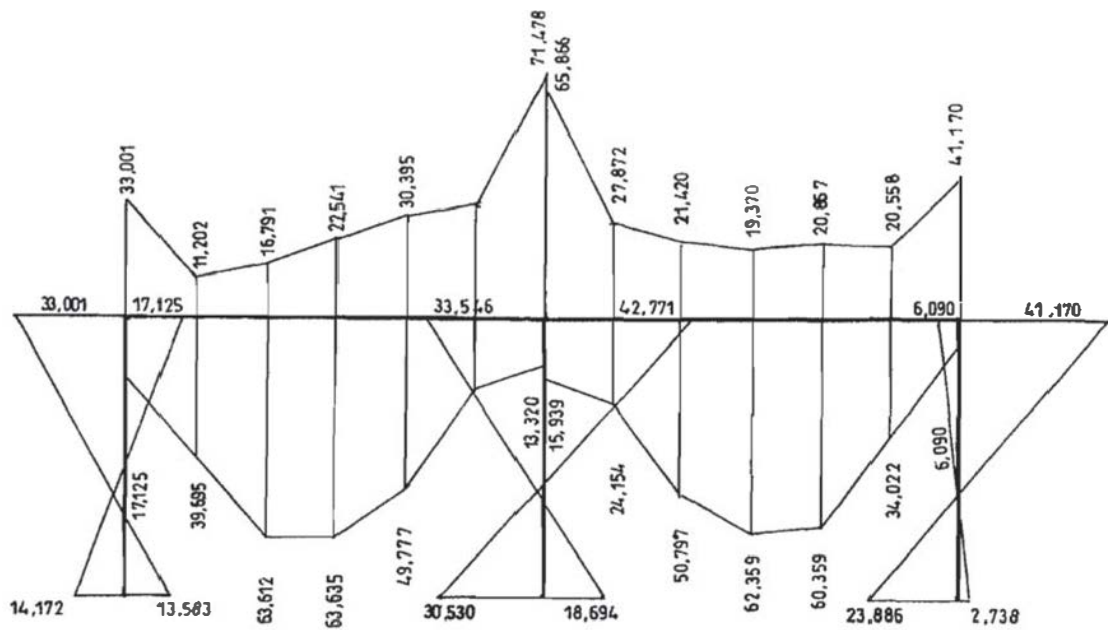


Figure 6. Epure enveloppe des moments de flexion élastiques

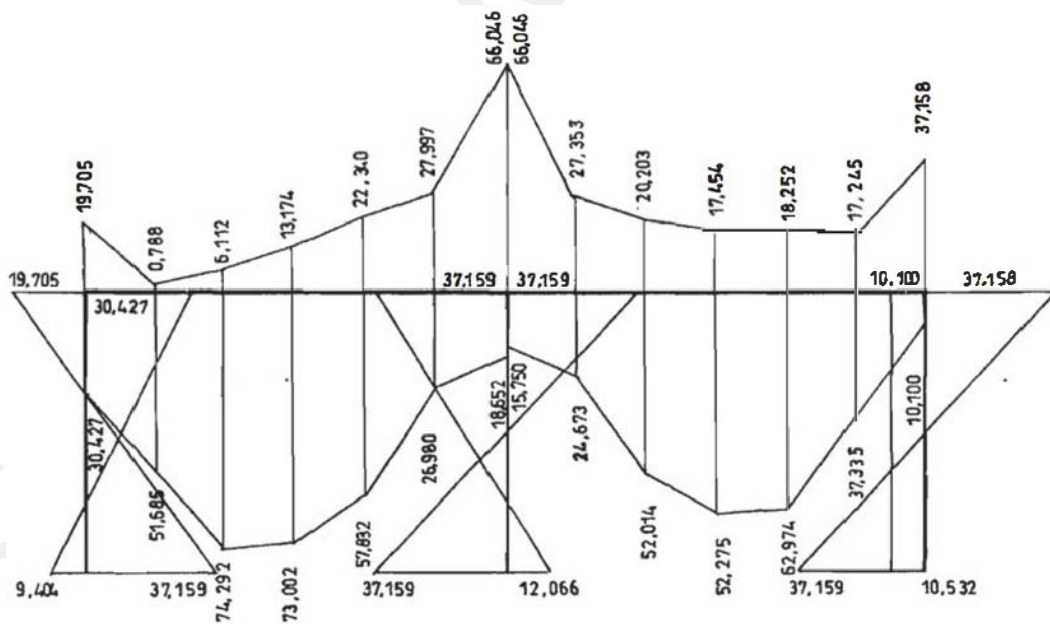


Figure 7. Epure enveloppe des moments de flexion plastiques



N°	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$	$x_{13}$	$b_i$
1	-1	-1	-1				1	1	1				13,583
2	-1		-1				1		1				17,125
3	-1		-1				1		1				17,125
4	-1		-5/6				1		5/6				39,695
5	-1		-2/3				1		2/3				63,612
6	-1		-1/2				1		1/2				63,635
7	-1		1/3				1		1/3				49,777
8	-1		-1/6				1		1/6				20,236
9	-1						1						13,220
10	1	1		-1	-1	-1	-1	-1		1			18,694
11	1			-1		-1	-1			1		1	42,771
12				-1		-1				1		1	15,939
13				-1		-5/6				1		1	24,154
14				-1		-2/3				1		5/6	50,797
15				-1		-1/2				1		2/3	62,359
16				-1		-1/3				1		1/2	60,359
17				-1		-1/6				1		1/3	34,022
18				-1						1		1/6	6,090
19				1					-1	-1			41,170
20				1	1				-1	-1			2,738
21	1	1	1				-1	-1	-1				14,172
22	1		1				-1		-5/6				33,007
23	1		1				-1		-2/3				33,007
24	1		5/6				-1		-1/2				11,202
25	1		2/3				-1		-1/3				16,791
26	1		1/2				-1		-1/6				22,541
27	1		1/3				-1						30,395
28	1		1/6				-1						34,742
29	1						-1						71,478
30	-1	-1		1	1	1	1	1		-1	-1	-1	30,531
31	-1			1			1			-1		-1	31,546
32				1			1			-1		-1	65,866
33				1			5/6			-1		-5/6	27,872
34				1			2/3			-1		-2/3	21,420
35				1			1/2			-1		-1/2	19,370
36				1			1/3			-1		-1/3	20,867
37				1			1/6			-1		-1/6	20,559
38				1						-1			41,170
39				-1						1			6,090
40				-1	-1					1	1		23,889
Min													
37.159	5,432	10,274	7,870	4,012	9,258	4,079						8,271	

Tableau 1. Conditions du problème conformément au modèle mathématique (9) (10)

## 5. Conclusion

Cet article décrit une nouvelle approche de résolution du problème d'optimisation des portiques élastoplastiques. La généralisation de la notion d'états d'auto contrainte de provenance statique pour les contours fermés au théorème d'adaptation de Bleich-Melan a permis de construire le modèle mathématique souple, qui exprime la qualité optimale d'une structure en portique, par exemple son poids minimum.

Avec l'application de l'algorithme de résolution du problème de la programmation linéaire, il a été procédé à la définition de l'état réel de contrainte d'un portique élastique-plastique à un niveau à doubles travées sous charge répétée mobile.

L'exemple numérique montre l'intérêt de l'algorithme de calcul élaboré en terme de temps de calcul et de minimisation de la masse d'un portique.

## 6. Bibliographie

- [1] Adjovi E. C., *Etats de contrainte et limite des systèmes de poutres élastiques et élastoplastiques sous chargement répété mobile*. Thèse de doctorat Ph.D. M., 1994.
- [2] Borkowski A., Tomaszczyk J., *Analyse of skeletal structural systems in the elastic and elastic-plastic range*, Developments in civil engineering, Warsaw, 1988.
- [3] Frangopol DM, Klisinski M., *Material behaviour and optimum design of structural systems*, Journal of structural engineering, 5, pp. 1054–1075, 1989.
- [4] Rozvany G.I. N., Hill R. D., *Optimal plastic design: Superposition principles and bounds on the minimum cost*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 13, pp. 151–173, 1978.
- [5] Halphen B., Salençon J., *Calcul des structures anélastiques. élastoplasticité 1*, Paris, 1985.
- [6] Gruing M., *Die tragfähigkeit statisch Unbestimmter tragwerke aus stahl bei beliebig häufig wiederholter Belastung*, Berlin, 1926.
- [7] Bleich h., *Über die Bemessung statisch unbestimmter stahltragwerke unter berücksichtigung des elastisch, Plastischen verhaltens des Baustoffes Bauingenieur*, 1932.
- [8] Gvosdev A. A., *Définition des grandeurs de la charge de rupture pour les systèmes statiquement indéterminés*, Projet et Standard, 8, pp. 12–26, 1934.
- [9] Gvosdev A. A., *Définition des grandeurs de la charge de rupture pour les systèmes plastiques statiquement indéterminés*. Acte de conférence sur les déformations plastiques, Moscou, URSS, pp. 81–95, 1938.
- [10] Melan E., *Theorie statisch unbestimmter Systeme ans ideal – plastischen*, Baustoff, Sitz Ber. Ak. Wiss, Wien, 1935.
- [11] Melan E., *Theorie statisch unbestimmter Systeme ans ideal – plastischen*, Baustoff, B. B. Kad. Wiss, 145, pp. 195–218, 1936.
- [12] Rjanissin A. R., *Calcul des structures avec la prise en compte des propriétés plastiques du matériau*, Moscou, 1949.
- [13] Neal B. G., Symonds P.S., *The calculation of failure load on plane frames under arbitrary loading programmes*, J. Inst. Civ. Engrs. 35, 41, 1950.
- [14] Neal B. G., *A method for calculating the failure load for a framed structure subjected to fluctuating loads*, J. Inst. Civ. Engrs., 35, 186, 1950.
- [15] Neal B. G., *Recent progress in the plastic methods of structural analysis*, J. Franklininst, 252, pp. 383–469, 1951.
- [16] Koiter W. I., *Some remarks on plastic shakedown theorems*, 8<sup>th</sup> Intern. Congr. Theor. and Appl. Mech. - Jesanbul, pp 267–294, 1952.
- [17] Maier G., *Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws: A finite element linear programming approach*, Meccanica, 3, pp. 250–260, 1969.
- [18] Maier G., *A shakedown matrix theory allowing for work hardening and second order effects*, A. Sawezuk (ed), Proc. Int. Symp., Foundations of Plasticity, Noordhoff, Leyden, The Netherlands. pp. 417–433, 1973.
- [19] Maier G., *Shakedown analysis, Engineering plasticity and mathematical programming*, NATO-ASI, New York, 1977.
- [20] Tin Loi F., Vmonsutit V., *Shakedown of frames with semi-rigid connections*, Journal of strural engineering, 6, pp. 1694–1711, 1993.
- [21] Danzig G. B., *Linear programming and Extensions*, Princeton, 1963.
- [22] Kuprianov V. V., *Conception optimale des portiques élastoplastiques, se trouvant dans les conditions de chargement répété*, Travaux UDP, 4, pp. 134–148, 1968.
- [23] Maier G., *On a matrix structural theory of piecewise-linear plasticity with translating yield plasticity with translating interacting yield planes*, Meccanica, 1, pp. 54–66, 1970.