



**HAL**  
open science

# Etude thermodynamique de l'évolution sous chargement dynamique de structures délaminées

Rachel Marie Pradeilles-Duval

## ► To cite this version:

Rachel Marie Pradeilles-Duval. Etude thermodynamique de l'évolution sous chargement dynamique de structures délaminées. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, 2001, 329, pp.535-540. 10.1016/S1620-7742(01)01364-2 . hal-00111326

**HAL Id: hal-00111326**

**<https://hal.science/hal-00111326v1>**

Submitted on 15 Feb 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# Étude thermodynamique de l'évolution sous chargement dynamique de structures délaminées

Rachel Marie PRADEILLES-DUVAL

Département de Mécanique, Laboratoire de Mécanique des Solides, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France  
Courriel : rachel@lms.polytechnique.fr

**Résumé.** On considère un assemblage de plaques modélisant une structure stratifiée se délaminant. La propagation du délaminage est caractérisée par la transformation d'une plaque en deux autres. On examine dans le cadre du formalisme hamiltonien l'influence d'un chargement dynamique sur une telle structure, d'un point de vue thermodynamique. L'étude du taux de restitution associé à la propagation de la fissure, considérée comme une source de chaleur localisée sur le front de délaminage, est discutée.

**solides et structures / délaminage / propagation / chargement dynamique / taux de restitution d'énergie**

***Evolution of delaminated structures under dynamic loading:  
a thermodynamical approach***

**Abstract.** *In order to study the evolution of damage in a delaminated structure, the assemblage of plates is considered under dynamic loading. Using a general result of the thermodynamic coupling approach, with the Hamiltonian formulation in the general case, the energy release rate associated with the propagation of the delamination is presented as a heat source.*

***solids and structures / delamination / propagation / dynamic loading / energy release rate***

## ***Abridged English version***

Using classical modeling of delaminated structures [1–3], an assemblage of three plates is considered, one of which represents the undamaged part (subscripted 0) and the two other plates correspond to the plates above (subscripted 1) and below (subscripted 2) the delamination (*figure 1*).

$e$ ,  $h$  denote respectively the thickness and the vertical position of the plate compared to the plate 0. The displacement is given in each plate by  $\vec{u}(x_1, x_2)$  the plane displacement,  $w(x_1, x_2)\vec{e}_z$  the transverse displacement and  $\vec{\theta}(x_1, x_2)$  the rotation of a small segment initially normal to the plate. The plate behavior is characterized by the volume free energy denoted by  $W$  which is a function of  $\epsilon(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\nabla\vec{u} + {}^T\nabla\vec{u})$ ,  $\kappa(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\nabla\vec{\theta} + {}^T\nabla\vec{\theta})$ ,  $\vec{\gamma}(x_1, x_2) = \nabla w - \vec{\theta}$ ,  $T(x_1, x_2, z)$  the temperature and  $\alpha(x_1, x_2, z)$  the internal variables. Their evolution is governed by the convex dissipation potential  $D(\dot{\alpha})$ .

As  $\rho$  represents the volume mass, using the definitions of potential and kinetic energy of the structure, the Hamiltonian of the system is given by equation (2) because of the kinematic relations along  $\Gamma_t$  due to the perfect interface (equation (1)).

The conservation law is obtained here as a global relation on the surface mass  $[[\langle \rho \rangle]]_{\Gamma} = 0$ , or  $\langle \rho \rangle_0 = \langle \rho \rangle_1 + \langle \rho \rangle_2$ . The evolution of the system is deduced from the global evolution equations (equation (3)), the first and second principles of thermodynamics (equation (7)). Thus,  $\vec{u}$ ,  $w$ ,  $\vec{\theta}$ , the velocities  $\vec{u}$ ,  $\dot{w}$ , et  $\vec{\theta}$ , the rate of internal variables  $\dot{\alpha}$  are governed by the local evolution equations (behaviour relations and equations (4), (5)) and by  $A = -\partial W_i / \partial \alpha = \partial D_i / \partial \dot{\alpha}$  in  $\Omega_i$ .

Thanks to Hadamard's relations when the propagation occurs (equation (6)), the calorific energy is constituted by two terms: one is due to the irreversible evolution of internal variables and supported by the whole structure; the second is associated with the moving boundary  $\Gamma_t$ . It is linearly dependant on the normal velocity of the front denoted by  $\phi$  and allows one to define an energy release rate  $G_{\text{dyn}}$  which is associated to  $\partial H / \partial \Gamma_t$ , the derivative of the Hamiltonian with respect to the evolution of the front (equation (8)). Similarly to what has been obtained in [4], the production of entropy is not associated with such a derivative. Equation (10) shows that the production of entropy due to the propagation of front  $\Gamma_t$  is also linearly dependent on  $\phi$  and another energy release rate is obtained  $\tilde{G}_{\text{th}}$ , whose integral value on the depth, denoted by  $\langle \tilde{G}_{\text{th}} \rangle_0 = G_{\text{th}}$ , is different from  $G_{\text{dyn}}$ . Thus, the general Hamiltonian approach is necessary to consider simultaneously the total dissipation and heat source during the evolution.

When the temperature is uniform on the structure, a pseudo Hamiltonian can be defined, denoted by  $\hat{H}$  (equation (11)). Then, the energy release rate obtained (equation (12)) is similar to what has been obtained in quasi-static evolution [1]; but the kinetic surface energy is added to the free surface energy. This result corresponds to what was shown in brittle fracture [8].

## 1. Introduction

Une des applications de l'étude de l'évolution des systèmes avec changement de caractéristiques mécaniques est l'étude de la propagation des délaminages dans les structures stratifiées. En effet, le délaminage peut être considéré comme le changement de caractéristiques brutal entre la partie saine (plaque ou coque stratifiée originelle) et la partie endommagée (plaque ou coque délaminée).

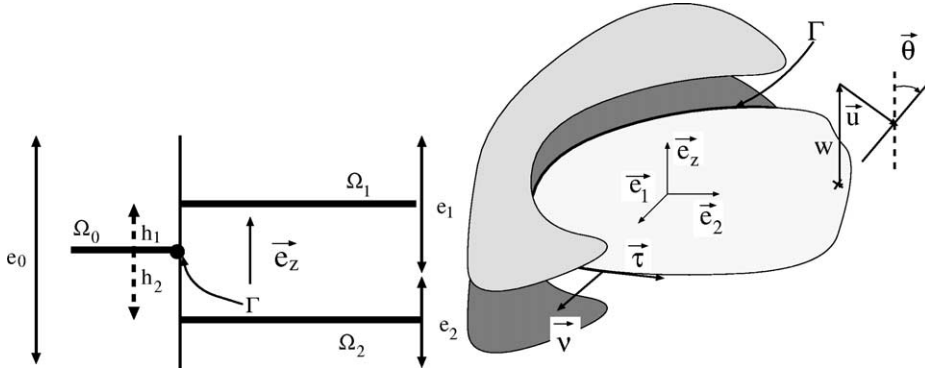
L'un des types de modélisation simplifiée du délaminage, introduit dans [1–3], correspond à l'assemblage de plaques raccordées entre elles de façon plus ou moins parfaite. La partie saine de la structure est modélisée par une plaque. La partie délaminée est modélisée par deux plaques de part et d'autre de la fissure, assemblées à la partie saine en tenant compte des choix cinématiques faits pour chaque plaque.

Dans cette Note, on se placera dans le cadre du formalisme hamiltonien [4], afin de généraliser les résultats donnés en quasi-statique dans [1] et, comme dans [4], on établit le lien entre l'Hamiltonien et le taux de restitution d'énergie apparaissant lors de la détermination de la puissance calorifique reçue par le système. On montre qu'il est différent du terme obtenu lors de l'étude de la création d'entropie.

## 2. Modélisation du délaminage

On se place dans le cadre d'une formulation lagrangienne des mouvements. Le plan moyen des plaques considérées est parallèle à  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ,  $\vec{e}_z$  représentant leur vecteur normal. On nomme  $\Omega_0$  le domaine du milieu sain, les domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  représentent les plaques de part et d'autre du délaminage.  $\Gamma_t$  correspond à l'interface entre les domaines sain et endommagé : c'est le front de délaminage. Les notations seront les suivantes (cf. *figure 1*) :

- Les indices indiqueront la plaque à laquelle se rapporte la quantité considérée et seront issus de l'ensemble  $\{0, 1, 2\}$  ; si aucune indication n'est donnée, toutes les expressions adoptent la sommation sur les indices muets doubles.
- $e_i$  est l'épaisseur de la plaque  $i$  avec  $e_0 = e_1 + e_2$ ,  $h_i$  la cote de la plaque  $i$  par rapport au plan médian de la plaque saine,  $\rho(x_1, x_2, z)$  la masse volumique au point considéré.



**Figure 1.** Modélisation du délaminage par un assemblage de plaques.

**Figure 1.** Delaminated structures modelled by an assemblage of three plates.

- $\vec{n}$  représente la normale dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  à  $\partial\Omega_t$ , extérieure au domaine  $\Omega_t = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ ,  $\vec{v}$  est la normale dans le plan  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  à  $\Gamma_t$  extérieure au domaine  $\Omega_0$ . La vitesse de propagation de l'interface  $\Gamma_t$  est notée  $-\phi(s)\vec{v}$  où  $\phi \geq 0$  en tout point d'abscisse curviligne  $s$ .
- On note  $\langle f \rangle_i$  la valeur intégrée de la quantité  $f$  sur l'épaisseur de la plaque  $i$ ,  $\dot{f} = df/dt$  la dérivée particulière de la quantité  $f$ . De plus,  $[[f]]_{\Gamma} = f_0 - f_1 - f_2$  sur  $\Gamma_t$  et  $[[f]]_i = f_0 - f_i$  sur  $\Gamma_t$ .
- $\vec{u}(x_1, x_2) - (z - h)\vec{\theta}(x_1, x_2) + w(x_1, x_2)\vec{e}_z$  est le déplacement d'une particule située au point de coordonnées  $(x_1, x_2, z)$ .  $\epsilon(\vec{u}) = (\nabla\vec{u} + {}^T\nabla\vec{u})/2$  correspond au tenseur de déformations de membrane,  $\kappa(\vec{\theta}) = (\nabla\vec{\theta} + {}^T\nabla\vec{\theta})/2$  au tenseur de courbures et  $\vec{\gamma}(w, \vec{\theta}) = \nabla w - \vec{\theta}$  au glissement, en transformations infinitésimales.
- $W_i(\epsilon, \kappa, \gamma, \alpha, T)$  est la densité d'énergie libre volumique où  $T(x_1, x_2, z)$  est la température absolue de la plaque  $i$ .  $\alpha(x_1, x_2, z)$  représente les paramètres internes associés à la force thermodynamique  $A = -\partial W_i/\partial\alpha$  et dont l'évolution est caractérisée par le potentiel de dissipation convexe en  $\dot{\alpha}$ ,  $D(\dot{\alpha})$ , de sorte que, classiquement,  $A = \partial D/\partial\dot{\alpha}$ .
- $\mathcal{P}_e(\vec{u}, w, \vec{\theta}, \Gamma_t, \lambda)$  est la puissance des efforts extérieurs paramétrés par  $\lambda = \lambda(t)$ .

L'assemblage considéré ici sera rigide en fond de fissure. On souligne que d'autres raccords cinématiques peuvent entraîner des différences sensibles sur les raccords statiques en fond de délaminage et ainsi introduire une certaine raideur par rapport au problème réel, notamment par une non-prise en compte des effets tridimensionnels au voisinage du front de fissure [5]. D'autres types de plaques (en particulier le modèle linéaire de Kirchhoff–Love et celui non-linéaire de Von Karman) ont été étudiés (voir [6]). Dans le cas présenté ici, les équations de continuités s'écrivent

$$w_0 - w_i = [[w]]_i = 0, \quad [[\vec{u}]]_i - h_i\vec{\theta}_0 = \vec{0}, \quad [[\vec{\theta}]]_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad [[T]]_i = 0 \quad \text{pour } i \in \{1, 2\} \text{ sur } \Gamma_t \quad (1)$$

*Formalisme hamiltonien.* – L'énergie potentielle totale et l'énergie cinétique du système sont de la forme :

$$E^{\text{pot}}(\vec{u}, w, \vec{\theta}, \alpha, \Gamma_t, T, \lambda) = \sum_{i=0}^2 \int_{\Omega_i} \int_{-e/2}^{e/2} W_i(\epsilon(\vec{u}), \kappa(\vec{\theta}), \gamma(w, \vec{\theta}), \alpha, T) dz da - \mathcal{P}_e(\vec{u}, w, \vec{\theta}, \Gamma_t, \lambda)$$

$$E^c(\dot{\vec{u}}, \dot{w}, \dot{\vec{\theta}}, \Gamma_t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} (\langle \rho \rangle (\dot{\vec{u}} \cdot \dot{\vec{u}} + \dot{w}^2) - 2\langle \rho z \rangle (\dot{\vec{u}} \cdot \dot{\vec{\theta}}) + \langle \rho z^2 \rangle \dot{\vec{\theta}} \cdot \dot{\vec{\theta}}) da = \int_{\Omega_t} e_C da$$

Ainsi l'Hamiltonien associé au système est donc défini par :

$$H = E^c + E^{\text{Pot}} + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_t} (\vec{\pi}_i \cdot (\llbracket \vec{u} \rrbracket_i - h_i \vec{\theta}_0) + \vec{\mu}_i \cdot \llbracket \vec{\theta} \rrbracket_i + \tau_i \llbracket w \rrbracket_i) ds + \int_{\Omega_t} \int_{-e/2}^{e/2} \rho S T dz da \quad (2)$$

l'impulsion associée à  $(\vec{u}, \dot{w}, \vec{\theta})$  étant  $(\vec{p} = \langle \rho \rangle \dot{\vec{u}} - \langle \rho z \rangle \dot{\vec{\theta}}, q = \langle \rho \rangle \dot{w}, \vec{r} = \langle \rho z^2 \rangle \dot{\vec{\theta}} - \langle \rho z \rangle \dot{\vec{u}})$  et l'entropie volumique étant définie par  $\rho S = -\partial W / \partial T$ .

### 3. Équations d'évolution

*Conservation de la masse.* – La masse de l'assemblage de plaques devant être conservée, on obtient :  $\llbracket \langle \rho \rangle \rrbracket_{\Gamma} = 0$ , c'est-à-dire  $\langle \rho \rangle_0 = \langle \rho \rangle_1 + \langle \rho \rangle_2$ .

*Équations du mouvement.* – Les équations du mouvement sont obtenues [7] grâce à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \delta \vec{p} + \frac{\partial H}{\partial \vec{r}} \delta \vec{r} + \frac{\partial H}{\partial q} \delta q &= \int_{\Omega_t} \{ \dot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{p} + \dot{w} \delta q + \dot{\vec{\theta}} \cdot \delta \vec{r} \} da \\ \frac{\partial H}{\partial \vec{u}} \delta \vec{u} + \frac{\partial H}{\partial \vec{\theta}} \delta \vec{\theta} + \frac{\partial H}{\partial w} \delta w &= -\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} \{ \vec{p} \cdot \delta \vec{u} + q \delta w + \vec{r} \cdot \delta \vec{\theta} \} da \right) \end{aligned} \quad (3)$$

avec  $(\delta \vec{p}, \delta q, \delta \vec{r})$  continu par morceaux sur  $\Omega_t$  et  $(\delta \vec{u}, \delta w, \delta \vec{\theta})$  cinématiquement admissibles notamment sur  $\Gamma_t$  (voir équation (1)) à l'instant considéré. Les champs  $(\vec{u}, \dot{w}, \vec{\theta})$  sont alors solutions du système comportant :

- la loi de comportement dans chaque plaque  $\Omega_i$  :  $\mathbf{N}_i = \langle \partial W_i / \partial \epsilon \rangle_i$ , efforts d'extension,  $\mathbf{M}_i = \langle \partial W_i / \partial \kappa \rangle_i$ , efforts de flexion, et  $Q_i = \langle \partial W_i / \partial \gamma \rangle_i$ , effort tranchant ;
- les équations de champs dans chaque plaque, en l'absence d'efforts répartis :

$$\text{div } \mathbf{N} = \langle \rho \rangle \ddot{\vec{u}} - \langle \rho z \rangle \ddot{\vec{\theta}}, \quad \text{div } Q = \langle \rho \rangle \ddot{w}, \quad \text{div } \mathbf{M} + Q = \langle \rho z^2 \rangle \ddot{\vec{\theta}} - \langle \rho z \rangle \ddot{\vec{u}} \quad (4)$$

- les conditions classiques sur les bords du système ;
- les conditions de raccords en efforts sur  $\Gamma_t$ , associés aux raccords cinématiques :

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{N} \cdot \vec{\nu} \rrbracket_{\Gamma} &= \phi \llbracket \langle \rho \rangle \dot{\vec{u}} - \langle \rho z \rangle \dot{\vec{\theta}} \rrbracket_{\Gamma} \quad \text{et} \quad \llbracket Q \cdot \vec{\nu} \rrbracket_{\Gamma} = \phi \llbracket \langle \rho \rangle \dot{w} \rrbracket_{\Gamma} \\ \llbracket \mathbf{M} \cdot \vec{\nu} \rrbracket_{\Gamma} + h_i \mathbf{N}^i \cdot \vec{\nu} &= \phi \llbracket \langle \rho z^2 \rangle \dot{\vec{\theta}} - \langle \rho z \rangle \dot{\vec{u}} \rrbracket_{\Gamma} + \phi \sum_{i=1}^2 h_i \{ \langle \rho \rangle_i \dot{\vec{u}}_i - \langle \rho z \rangle_i \dot{\vec{\theta}}_i \} \end{aligned} \quad (5)$$

- les conditions de raccord en déplacements et température (relations d'Hadamard) :

$$\begin{aligned} \llbracket \dot{T} \rrbracket_i &= \llbracket \nabla T \cdot \vec{\nu} \rrbracket_i \phi, \quad \llbracket \dot{w} \rrbracket_i = \llbracket \nabla w \cdot \vec{\nu} \rrbracket_i \phi, \quad \llbracket \dot{\vec{\theta}} \rrbracket_i = \llbracket \nabla \vec{\theta} \cdot \vec{\nu} \rrbracket_i \phi \quad \text{et} \\ \llbracket \dot{\vec{u}} \rrbracket_i - h_i \dot{\vec{\theta}}_0 &= (\llbracket \nabla \vec{u} \cdot \vec{\nu} \rrbracket_i - h_i \nabla \vec{\theta}_0 \cdot \vec{\nu}) \phi \end{aligned} \quad (6)$$

### 4. Étude thermodynamique

*Premier et second principes.* – Compte tenu de [7], le premier et le second principes se traduisent par :

$$\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} - \int_{\partial \Omega_t} \int_{-e/2}^{e/2} (-\vec{q} \cdot \vec{n}) dz ds = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \int_{-e/2}^{e/2} \rho S dz da + \int_{\partial \Omega_t} \int_{-e/2}^{e/2} \frac{\vec{q} \cdot \vec{n}}{T} dz ds \geq 0 \quad (7)$$

où l'on ne considère que les évolutions réelles et avec  $-\vec{q} \cdot \vec{n}$  représentant le flux surfacique de chaleur reçue sur la frontière  $\partial\Omega_t$ .

En utilisant les relations ci-dessus, on montre que les sources de chaleur sont de deux types : l'une volumique est due aux variables internes dans chacune des plaques, l'autre se répartit uniquement sur le front de délaminage et est associée au taux de restitution d'énergie :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \int_{-e/2}^{e/2} -\operatorname{div} \vec{q} \, dz \, da + \int_{\Gamma_t} \int_{-e/2}^{e/2} \llbracket \vec{q} \cdot \vec{\nu} \rrbracket_{\Gamma} \, dz \, ds &= \frac{\partial H}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial H}{\partial \Gamma_t} \dot{\Gamma}_t \\ &= - \int_{\Omega_t} \int_{-e/2}^{e/2} A \dot{\alpha} \, dz \, da - \int_{\Gamma_t} G_{\text{dyn}} \phi \, ds \end{aligned} \quad (8)$$

avec

$$\begin{aligned} G_{\text{dyn}} &= \llbracket \langle W + \rho S T \rangle \rrbracket_{\Gamma} - \vec{\nu} \cdot \bar{\mathbf{N}}_i \cdot (\llbracket \nabla \vec{u} \rrbracket_i - h_i \nabla \vec{\theta}_0) \cdot \vec{\nu} - \vec{\nu} \cdot \bar{\mathbf{M}}_i \cdot \llbracket \nabla \vec{\theta} \rrbracket_i \cdot \vec{\nu} - \vec{\nu} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_i \llbracket \nabla w \rrbracket_i \cdot \vec{\nu} \\ &\quad + (\llbracket \langle \rho z \rangle \rrbracket_{\Gamma} - h_i \langle \rho \rangle_i) \dot{\vec{u}}_0 \cdot \dot{\vec{\theta}}_0 + \frac{1}{2} (\llbracket \langle \rho z^2 \rangle \rrbracket_{\Gamma} - 2h_i \langle \rho z \rangle_i + h_i^2 \langle \rho \rangle_i) \dot{\vec{\theta}}_0 \cdot \dot{\vec{\theta}}_0 \end{aligned}$$

Les efforts moyens  $\bar{\mathbf{N}}_i$ ,  $\bar{\mathbf{M}}_i$  et  $\bar{\mathbf{Q}}_i$  représentent alors des quantités objectives et s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{N}}_i \cdot \vec{\nu} &= \mathbf{N}_i \cdot \vec{\nu} + \frac{1}{2} \langle \rho \rangle_i \phi (\llbracket \dot{\vec{u}} \rrbracket_i - h_i \dot{\vec{\theta}}_0) - \frac{1}{2} \langle \rho z \rangle_i \phi \llbracket \dot{\vec{\theta}} \rrbracket_i \\ \bar{\mathbf{M}}_i \cdot \vec{\nu} &= \mathbf{M}_i \cdot \vec{\nu} + \frac{1}{2} \langle \rho z^2 \rangle_i \phi \llbracket \dot{\vec{\theta}} \rrbracket_i - \frac{1}{2} \langle \rho z \rangle_i \phi (\llbracket \dot{\vec{u}} \rrbracket_i - h_i \dot{\vec{\theta}}_0) \\ \bar{\mathbf{Q}}_i \cdot \vec{\nu} &= \mathbf{Q}_i \cdot \vec{\nu} + \frac{1}{2} \langle \rho \rangle_i \phi \llbracket \dot{w} \rrbracket_i \end{aligned}$$

Dans le cas fréquent où la conservation de la masse est locale, soit  $\llbracket \rho(s, z) \rrbracket_i = 0$  si  $z \in [h_i - e_i/2, h_i + e_i/2]$   $\forall s \in \Gamma_t$ , le taux de restitution d'énergie associé à la propagation du front de délaminage se simplifie car les deux derniers termes de l'équation (8) disparaissent.

*Evolution de l'entropie.* Compte tenu des équations (7), la production intérieure d'entropie a pour expression :

$$\int_{\Omega_t} \int_{-e/2}^{e/2} \left( \rho \dot{s} + \frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{q} \right) \, dz \, da - \int_{\Omega_t} \int_{-e/2}^{e/2} \vec{q} \cdot \frac{\nabla T}{T^2} \, dz \, da - \int_{\Gamma_t} \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \llbracket \rho S \rrbracket_{\Gamma} \phi + \frac{\llbracket \vec{q} \cdot \vec{\nu} \rrbracket_{\Gamma}}{T} \right\} \, dz \, ds \geq 0 \quad (9)$$

Ainsi, grâce à la continuité de la température et en admettant la séparabilité des dissipations dues aux variables internes d'une part et à l'évolution de  $\Gamma_t$  d'autre part, la production d'entropie liée à la propagation de  $\Gamma_t$  est de la forme :

$$- \int_{\Gamma_t} \int_{-e/2}^{e/2} \left\{ \llbracket \rho S \rrbracket_{\Gamma} \phi + \frac{\llbracket \vec{q} \rrbracket_{\Gamma} \cdot \vec{\nu}}{T} \right\} \, dz \, ds = \int_{\Gamma_t} \left( \int_{-e/2}^{e/2} \frac{\tilde{G}_{\text{th}}}{T} \, dz \right) \phi \, ds \quad (10)$$

où

$$\tilde{G}_{\text{th}} = \llbracket \mathbf{W} \rrbracket_{\Gamma} - \frac{1}{e} \left\{ \vec{\nu} \cdot \bar{\mathbf{N}}^i \cdot (\llbracket \nabla \vec{u} \rrbracket_i - h_i \nabla \vec{\theta}_0) \cdot \vec{\nu} + \vec{\nu} \cdot \bar{\mathbf{M}}^i \cdot \llbracket \nabla \vec{\theta} \rrbracket_i \cdot \vec{\nu} + \vec{\nu} \cdot \bar{\mathbf{Q}}^i \llbracket \nabla w \rrbracket_i \cdot \vec{\nu} \right\}$$

Cette production d'entropie linéique n'est donc pas directement liée à la dérivée  $\partial H / \partial \Gamma_t$ . De plus, le terme  $\tilde{G}_{\text{th}}$  est défini localement en tout point de l'épaisseur du front si aucune hypothèse supplémentaire sur la température n'est considérée. Si  $T$  est homogène selon  $z$  et si la conservation de la masse est locale, alors on peut définir sur le front  $\Gamma_t$ ,  $G_{\text{th}} = \langle \tilde{G}_{\text{th}} \rangle_0 = G_{\text{dyn}} - \llbracket \langle \rho S T \rangle \rrbracket_{\Gamma}$ , qui correspond au produit du taux de restitution d'entropie par la température du front.

La seconde partie de cette création d'entropie est un terme classique associé à l'évolution des variables internes à l'intérieur du domaine  $\Omega_t$ .

## 5. Cas isotherme

Si l'on se place à présent dans le cas isotherme, un pseudo-hamiltonien peut être introduit :

$$\widehat{H} = E^c + E^{\text{pot}}(\vec{u}, w, \vec{\theta}, \alpha, \Gamma_t, \lambda) + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_t} (\vec{\pi}_i \cdot (\llbracket \vec{u} \rrbracket_i - h_i \vec{\theta}_0) + \vec{\mu}_i \cdot \llbracket \vec{\theta} \rrbracket_i \, ds + \tau_i \llbracket w \rrbracket_i) \, ds \quad (11)$$

Dans ce cas, la variation de  $\widehat{H}$  fournit la puissance totale dissipée  $\frac{d\widehat{H}}{dt} - \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = \frac{\partial \widehat{H}}{\partial \alpha} \dot{\alpha} - \int_{\Gamma_t} \widehat{G}_{\text{dyn}} \phi \, ds$  avec

$$\widehat{G}_{\text{dyn}} \phi = \llbracket \langle W \rangle + e_C \rrbracket_{\Gamma} \phi - \llbracket \vec{v} \cdot \mathbf{N} \cdot \dot{\vec{u}} + \vec{v} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\vec{\theta}} + \vec{v} \cdot \vec{Q} \dot{w} \rrbracket_{\Gamma} \quad (12)$$

La forme ainsi obtenue est similaire à celle apparue lors de l'étude du taux de restitution d'énergie associé à la propagation du front en évolution quasi-statique [1], l'énergie cinétique surfacique venant dans le cadre présent s'ajouter à l'énergie libre surfacique. Ce résultat est à rapprocher de ceux obtenus dans le cas de la mécanique de la rupture fragile sous les mêmes hypothèses [8].

## 6. Conclusions

Comme dans [4], on a donc obtenu les relations entre le mouvement du front de délaminage et les variations de l'énergie totale du système caractérisée ici par l'Hamiltonien du système. Deux quantités objectives et différentes  $G_{\text{dyn}}$  et  $G_{\text{th}}$ , correspondant à des taux de restitution d'énergie associés à la propagation apparaissent lors de l'étude de la production d'entropie et de la source de chaleur obtenue lors l'évolution du délaminage. Dans l'analyse et la modélisation de la propagation notamment sous impact de structures stratifiées délaminées, il sera nécessaire de différentier celui qui permet de régir la propagation par l'emploi d'un critère énergétique de type Griffith généralisé. On note cependant que dans le cas de l'analyse isotherme, suffisante dans la majorité des applications, une modification très simple de l'écriture du taux de restitution d'énergie en quasi-statique est nécessaire et permet donc d'étendre simplement les outils d'analyse déjà utilisés en quasi-statique.

**Remerciements.** L'auteur remercie C. Stolz pour ses commentaires fructueux.

## Références bibliographiques

- [1] Cochelin B., Taux de restitution de l'énergie en théorie des poutres, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 307 (1988) 129–132.
- [2] Larson P.L., On multiple delamination buckling and growth in composite plates, Int. J. Solids Structures 27 (13) (1991) 1623–1637.
- [3] Storakers B., Nonlinear aspects of delamination in structural members, in: Proceeding XVIIIth International Congress Theoretical Applied Mechanics, 1991, pp. 315–336.
- [4] Stolz C., Pradeilles-Duval R.M., Approche énergétique de la propagation dynamique des discontinuités mécaniques, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 322 (1996) 525–532.
- [5] Anquez L., Gilleta de Saint-Joseph D., Jeggy T., Renard J., Study of the delamination of composite bar: comparison between various computation methods, European J. Mech. A/Solids 9 (4) (1990) 283–311.
- [6] Pradeilles-Duval R.M., Evolution des systèmes avec surfaces de discontinuités mobiles : Application au délaminage, Thèse, École Polytechnique, décembre 1992.
- [7] Stolz C., Sur les équations générales de la dynamique des milieux continus anélastiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 307 (1988) 1997–2000.
- [8] Ehlacher A., Résultats d'analyses des problèmes de corps fissurés en élasto-dynamique, Annales des Ponts et Chaussées 4 (1980) 1–24.