



HAL
open science

F-isocristaux surconvergens et surcohérence différentielle

Daniel Caro

► **To cite this version:**

| Daniel Caro. *F*-isocristaux surconvergens et surcohérence différentielle. 2006. hal-00111132

HAL Id: hal-00111132

<https://hal.science/hal-00111132>

Preprint submitted on 3 Nov 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

***F*-isocristaux surconvergens et surcohérence différentielle**

D. Caro *

Université Paris-Sud, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Orsay Cedex 91405, France,
e-mail: daniel.caro@math.u-psud.fr

The date of receipt and acceptance will be inserted by the editor

Résumé Soient \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, de corps résiduel parfait k , \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse, T un diviseur de la fibre spéciale P de \mathcal{P} , U l'ouvert de P complémentaire de T , Y un sous- k -schéma fermé lisse de U . Nous prouvons que la catégorie des F -isocristaux surconvergens sur Y est équivalente à celle des F -isocristaux surcohérents sur Y (voir [Car, 6.2.1 et 6.4.3.a]). Plus généralement, nous établissons par recollement une telle équivalence pour tout k -schéma séparé lisse Y . Nous vérifions de plus que les F -complexes de $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules à cohomologie bornée et $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérente se dévissent en F -isocristaux surconvergens.

Key words. Arithmetical \mathcal{D} -modules, overconvergent isocrystal, Frobenius

Table des matières

1. \mathcal{D} -modules arithmétiques associés aux F -isocristaux surconvergens	5
2. Surcohérence différentielle des F -isocristaux surconvergens sur les variétés lisses	15
3. Autour de la dévissabilité en F -isocristaux surconvergens	22

Introduction

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Nous savons depuis les années 60 que la constructibilité en cohomologie étale l -adique sur les k -variétés algébriques (i.e. k -schémas séparés de type fini) est, lorsque $l \neq p$,

* L'auteur a bénéficié du soutien du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE MRTN-CT-2003-504917).

stable par les « six opérations cohomologiques de Grothendieck », à savoir \otimes , $\mathcal{H}om$, f_* , f^* , $f_!$ et $f^!$. Nous souhaitons un analogue p -adique, i.e., disposer d'une cohomologie p -adique stable et définie sur les k -variétés algébriques. Or, les complexes de \mathcal{D} -modules (par défaut à gauche) à cohomologie bornée, holonome et régulière sur les variétés algébriques sur *un corps de caractéristique nulle* sont stables par ces six opérations. Berthelot et, par une approche voisine (on dispose de théorèmes de comparaison entre les deux constructions, voir [NH03]), Mebkhout et Narvaez-Macarro (voir [MNM90]) ont alors construit une version p -adique de la théorie des \mathcal{D} -modules, i.e., « les \mathcal{D} -modules arithmétiques » (voir [Ber96b], [Ber00], [Ber02]). Nous utiliserons exclusivement dans ces travaux les \mathcal{D} -modules arithmétiques au sens de Berthelot, même si la version de Mebkhout et Narvaez-Macarro a été une source d'inspiration dans notre travail. À l'instar de la caractéristique nulle, certains F -complexes (le F indique que l'objet est muni d'une structure de Frobenius) de \mathcal{D} -modules arithmétiques devraient constituer les coefficients p -adiques d'une cohomologie p -adique stable (voir par exemple [Car05b]). La construction des \mathcal{D} -modules arithmétiques s'est fortement inspirée de celle des isocristaux surconvergens, coefficients p -adiques de la cohomologie rigide. Cette cohomologie rigide représente une unification des deux précédentes cohomologies p -adiques : celle cristalline et celle de Dwork-Monsky-Washnitzer (voir [Ber74], [MW68], [Ber86] et [Ber96a]). Les F -isocristaux surconvergens correspondent à un analogue p -adique des \mathbb{Q}_l -faisceaux constructibles lisses (on bénéficie ainsi de la stabilité par image inverse mais nous ne disposons pas de notion d'images directes de F -isocristaux surconvergens), tandis que les F -complexes de \mathcal{D} -modules arithmétiques contiennent un analogue p -adique des \mathbb{Q}_l -faisceaux constructibles.

Après avoir replacé notre travail dans son contexte, expliquons en gros ses principaux résultats. Nous avons vérifié dans [Car] que pour toute k -variété lisse Y , il existe un ouvert \tilde{Y} affine et dense de Y tel que la catégorie des F -isocristaux surconvergens sur \tilde{Y} soit incluse dans celle des F - \mathcal{D} -modules arithmétiques sur \tilde{Y} . Nous prolongeons ici cette inclusion sur Y tout entier. La propriété essentielle caractérisant cette image est la « surcohérence différentielle » (pour la notion de surcohérence, on se référera à [Car04, 3]). Réciproquement, nous vérifierons que les F -complexes de \mathcal{D} -modules arithmétiques à cohomologie bornée et surcohérente se dévissent en F -isocristaux surconvergens. Comme la surcohérence est stable par image directe par un morphisme propre, image inverse extraordinaire, foncteur cohomologique local à support strict dans un sous-schéma fermé (la stabilité par les autres opérations reste encore à établir), nous avons ainsi englobé la catégorie des F -isocristaux surconvergens sur Y dans une catégorie notamment stable par image directe par un morphisme propre (ou autrement dit, l'image directe par un morphisme propre d'un F -isocristal surconvergent sur Y n'est pas a priori un F -isocristal surconvergent mais un F -complexe de \mathcal{D} -modules arithmétiques à cohomologie bornée et surcohérente).

Précisons à présent le contenu de ce papier. Soient \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques, de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse, T un diviseur de la fibre spéciale P de \mathcal{P} , \mathcal{U} l'ouvert de \mathcal{P} complémentaire de T , Y un sous- k -schéma fermé lisse de la fibre spéciale U de \mathcal{U} , \bar{Y} l'adhérence de Y dans P . Nous avons défini dans [Car, 6.2.1 et 6.4.3.a)] une sous-catégorie pleine de celle des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules surcohérents constituée par « les F -isocristaux surcohérents sur Y ». Dans la première partie, lorsque Y est en outre affine, nous prouvons que la catégorie des F -isocristaux surconvergens sur Y est équivalente à celle des F -isocristaux surcohérents sur Y (voir 1.3.6). Afin d'étendre cette équivalence de catégories au cas où Y est une k -variété lisse quelconque (qui ne se plonge plus forcément dans un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse etc.), nous donnons, dans cette même partie, une procédure de recollement que l'on utilisera à la fois pour construire la catégorie des F -isocristaux surconvergens sur Y et celle des F -isocristaux surcohérents sur Y (voir 1.1.2). La vérification de la procédure de recollement concernant les F -isocristaux surconvergens fait l'objet de la première partie (voir 1.1.4) tandis que celle concernant les F -isocristaux surcohérents est traitée dans la seconde partie (voir 2.2.4). On obtient alors par recollement l'équivalence de catégories voulue dans le cas général (voir 2.3.1). Cette équivalence entraîne que la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules surcohérents \mathcal{E} à support dans \bar{Y} tels que $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$ soit dans l'image essentielle de $\text{sp}_{Y \hookrightarrow \mathcal{U},+}$ (pour la description de cette image essentielle, voir [Car05a, 4.1.9]) est équivalente à celle des F -isocristaux surcohérents sur Y (voir 2.3.2). Dans la dernière partie, nous en déduisons que les F -complexes de $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules à cohomologie bornée et $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérente sont dévissables en F -isocristaux surconvergens (voir 3.1.2), ce qui généralise [Car, 8.1.4-8.1.5]. En étendant la notion de dévissabilité en F -isocristaux surconvergens au cas des F -complexes quasi-cohérents (nous conservons les notations de [Car06, 1.1.3]), nous construisons ensuite la sous-catégorie pleine $F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{dév}}^{\text{b}}({}^{\text{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T))$ de $F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^{\text{b}}({}^{\text{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T))$ des F -complexes dévissables en F -isocristaux surconvergens (voir 3.2.19). Cette définition est compatible avec celle de la sous-catégorie pleine $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{dév}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ de $F\text{-}\mathcal{D}_{\text{coh}}^{\text{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ des F -complexes dévissables en F -isocristaux surconvergens que nous avons construite en [Car, 8.1.1] (voir 3.2.24). Nous vérifions enfin que $F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{dév}}^{\text{b}}({}^{\text{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T))$ est la plus petite sous-catégorie pleine triangulée de $F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^{\text{b}}({}^{\text{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T))$ contenant les F -isocristaux surconvergens sur les sous-variétés lisses de P (voir 3.2.23).

Notations

Soit \mathcal{V} un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, de corps de fractions K de caractéristique 0. De

plus, $s \geq 1$ sera un entier et F la puissance s -ème de l'endomorphisme de Frobenius. Les modules sont par défaut des modules à gauche. Si \mathcal{E} est un faisceau abélien, on pose $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}} := \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

En général, les \mathcal{V} -schémas formels faibles seront désignés par des lettres romanes surmontées du symbole « † », les \mathcal{V} -schémas formels par des lettres calligraphiques ou gothiques, les k -schémas par des lettres romanes, e.g., X^\dagger , \mathfrak{X} , X . De plus, si X^\dagger est un \mathcal{V} -schéma formel faible, X désignera sa fibre spéciale et \mathfrak{X} le \mathcal{V} -schéma formel égal à son complété p -adique etc.

Si $f : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ est un morphisme de \mathcal{V} -schémas formels lisses, $f_0 : P' \rightarrow P$ sera le morphisme induit (et de même pour les morphismes de \mathcal{V} -schémas formels faibles lisses). Par abus de notations, on pourra encore l'indiquer par f . Lorsque T est un diviseur de P tel que $f^{-1}(T)$ soit un diviseur de P' nous désignerons par f_T^\dagger ou f^\dagger l'image inverse extraordinaire par f à singularités surconvergentes le long de T et par $f_{T,+}$ ou f_+ l'image directe par f à singularités surconvergentes le long de T (voir [Ber02, 3.4, 3.5, 4.3] et [Car06, 1.1.5]). De plus, si Z est un sous-schéma fermé de P , le foncteur cohomologique local à support strict dans Z et le foncteur restriction en dehors de Z sont respectivement notés $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger$ et $(\dagger Z)$ (voir [Car04, 2.2.6]). Ces foncteurs sont bien définis sur la catégorie des $(F-)$ complexes quasi-cohérents $(F-)\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ (notations de [Car06, 1.1.3]). Si $\mathcal{E} \in (F-)\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$, on utilisera aussi la notation $\mathcal{E}(\dagger Z)$ à la place de $(\dagger Z)(\mathcal{E})$. Pour tout diviseur T de P , nous désignerons par $\mathbb{D}_{\mathcal{P},T}$ ou \mathbb{D}_T , le dual $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire (voir [Vir00, I.3.2]). Si T est l'ensemble vide, nous omettrons de l'indiquer dans toutes ces opérations. Sauf mention du contraire, on supposera (sans nuire à la généralité) les k -schémas réduits.

Soient \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel lisse et T un diviseur de P . De façon similaire à [Ber02, 4.2.2], on dispose du foncteur $\varinjlim : \underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \rightarrow D(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Celui-ci induit une équivalence entre $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ et une sous-catégorie pleine de $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$, notée $\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{coh}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ (voir [Ber02, 4.2.4] et [Car06, 1.1.3]). On dispose du même résultat pour les F -complexes. Il nous arrivera d'omettre d'indiquer le foncteur \varinjlim , surtout lorsque l'on aura affaire à des F -complexes cohérents.

De plus, on désigne par $\text{sp} : \mathcal{P}_K \rightarrow \mathcal{P}$ le morphisme de spécialisation du \mathcal{V} -schéma formel lisse \mathcal{P} ci-dessus (voir [Ber96a, 0.2.2.1]). Soient X, Z deux sous-schémas fermés de P . On note $j_{Z,X}$ l'inclusion ouverte $X \setminus Z \subset X$ ou simplement j_Z lorsque aucune confusion n'est à craindre. On dispose alors du foncteur j_Z^\dagger (voir [Ber96a, 2.1.1]) de la catégorie des $\mathcal{O}_{|X|_{\mathcal{P}}}$ -modules dans celle des $j_Z^\dagger \mathcal{O}_{|X|_{\mathcal{P}}}$ -modules (rappelons que $|X|_{\mathcal{P}} := \text{sp}^{-1}(X)$ est le tube de X dans \mathcal{P}_K). La catégorie des $j_T^\dagger \mathcal{O}_{|X|_{\mathcal{P}}}$ -modules cohérents munis d'une connexion surconvergente et d'une structure compatible de Frobenius sera notée $F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}, T, X/K)$. En notant $Y := X \setminus T$, cette ca-

tégorie est canoniquement isomorphe à celle des F -isocristaux sur Y surconvergents le long de T et notée $F\text{-Isoc}^\dagger(Y, X/K)$ (voir [Ber96a, 2.3.2 et 2.3.7]). Ainsi, lorsque P est propre, $F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \cong F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}, T, X/K)$. Si \mathcal{P} est le complété p -adique d'un \mathcal{V} -schéma formel faible propre et lisse P^\dagger , on pose $F\text{-Isoc}^\dagger(P^\dagger, T, X/K) := F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}, T, X/K)$. On note cv_Y , le foncteur canonique de restriction $(F\text{-})\text{Isoc}^\dagger(Y/K) \rightarrow (F\text{-})\text{Isoc}(Y/K)$. Si $E \in (F\text{-})\text{Isoc}^\dagger(Y/K)$, on écrit aussi $\widehat{E} := cv_Y(E)$.

1. \mathcal{D} -modules arithmétiques associés aux F -isocristaux surconvergents

1.1. F -isocristaux surconvergents sur les variétés lisses

Soit Y un k -schéma séparé, lisse. En général, il n'existe pas de \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathcal{P} , de diviseur T de P tel que Y soit un sous-schéma fermé de $\mathcal{P} \setminus T$. Cependant, nous donnons dans cette section une procédure de recollement qui nous permet, en nous ramenant à cette situation géométrique, de construire la catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$ des F -isocristaux surconvergents sur Y (voir 1.1.4). Cette procédure est surtout intéressante car elle sera exactement reprise pour définir les « F -isocristaux surcohérents sur Y » (voir 2.2.4).

Notations 1.1.1. Soit Y un k -schéma séparé, lisse, intègre. On choisit un recouvrement fini ouvert $(Y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de Y tel que, pour tout $\alpha \in \Lambda$, il existe un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathcal{P}_α , un sous-schéma fermé X_α de P_α et un diviseur T_α de P_α tels que $Y_\alpha = X_\alpha \setminus T_\alpha$. De tels recouvrements existent bien. En effet, si Y_α est un ouvert affine de Y , il existe une immersion fermée de la forme $Y_\alpha \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$. Il suffit alors de prendre \mathcal{P}_α égal au complété p -adique de l'espace projectif \mathbb{P}_k^n , T_α le diviseur (réduit) de \mathbb{P}_k^n complémentaire de \mathbb{A}_k^n et X_α l'adhérence schématique de Y_α dans \mathbb{P}_k^n .

Pour tous α, β et $\gamma \in \Lambda$, on note $p_1^{\alpha\beta} : \mathcal{P}_\alpha \times_S \mathcal{P}_\beta \rightarrow \mathcal{P}_\alpha$ et $p_2^{\alpha\beta} : \mathcal{P}_\alpha \times_S \mathcal{P}_\beta \rightarrow \mathcal{P}_\beta$ les projections canoniques, $X_{\alpha\beta}$ l'adhérence schématique de $Y_\alpha \cap Y_\beta$ dans $P_\alpha \times P_\beta$ (via l'immersion $Y_\alpha \cap Y_\beta \hookrightarrow Y_\alpha \times Y_\beta \hookrightarrow P_\alpha \times P_\beta$), $T_{\alpha\beta} = p_1^{\alpha\beta-1}(T_\alpha) \cup p_2^{\alpha\beta-1}(T_\beta)$. On remarque que $F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}_\alpha \times \mathcal{P}_\beta, T_{\alpha\beta}, X_{\alpha\beta}/K) \cong F\text{-Isoc}^\dagger(Y_\alpha \cap Y_\beta/K)$. En notant $X_{\alpha\beta\gamma}$ l'adhérence schématique de $Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma$ dans $P_\alpha \times P_\beta \times P_\gamma$ et $T_{\alpha\beta\gamma}$ la réunion des images inverses de $T_\alpha, T_\beta, T_\gamma$ par les projections de $\mathcal{P}_\alpha \times \mathcal{P}_\beta \times \mathcal{P}_\gamma$ sur $\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{P}_\beta, \mathcal{P}_\gamma$, on obtient $F\text{-Isoc}^\dagger(Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma/K) \cong F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}_\alpha \times \mathcal{P}_\beta \times \mathcal{P}_\gamma, T_{\alpha\beta\gamma}, X_{\alpha\beta\gamma}/K)$. On dispose des mêmes remarques en remplaçant « $F\text{-Isoc}^\dagger$ » par « $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}$ » (voir [Car, 6.4]).

Soient $j_1^{\alpha\beta} : Y_\alpha \cap Y_\beta \subset Y_\alpha, j_2^{\alpha\beta} : Y_\alpha \cap Y_\beta \subset Y_\beta, j_{12}^{\alpha\beta\gamma} : Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma \subset Y_\alpha \cap Y_\beta, j_{23}^{\alpha\beta\gamma} : Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma \subset Y_\beta \cap Y_\gamma$ et $j_{13}^{\alpha\beta\gamma} : Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma \subset Y_\alpha \cap Y_\gamma$ les immersions ouvertes.

La projection canonique d'espaces analytiques rigides $p_{1K}^{\alpha\beta} : \mathcal{P}_{\alpha K} \times \mathcal{P}_{\beta K} \rightarrow \mathcal{P}_{\alpha K}$ induit le morphisme $]X_{\alpha\beta}[_{\mathcal{P}_\alpha \times \mathcal{P}_\beta} \rightarrow]X_\alpha[_{\mathcal{P}_\alpha}$ que l'on note encore $p_{1K}^{\alpha\beta}$.

D'où le foncteur canonique $j_1^{\alpha\beta*} := j_{T_{\alpha\beta}}^{\dagger} p_{1K}^{\alpha\beta*} : F\text{-Isoc}^{\dagger}(\mathcal{P}_{\alpha}, T_{\alpha}, X_{\alpha}/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^{\dagger}(\mathcal{P}_{\alpha} \times \mathcal{P}_{\beta}, T_{\alpha\beta}, X_{\alpha\beta}/K)$. On définit de façon similaire $j_2^{\alpha\beta*}$, $j_{12}^{\alpha\beta\gamma*}$, $j_{13}^{\alpha\beta\gamma*}$, $j_{23}^{\alpha\beta\gamma*}$.

D'après [Car, 6.4.3.b)], on bénéficie aussi du foncteur $j_1^{\alpha\beta*} := \mathbb{R}\Gamma_{X_{\alpha\beta}}^{\dagger} \circ (\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_1^{\alpha\beta!} : F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}_{\alpha}, T_{\alpha}, X_{\alpha}/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}_{\alpha} \times \mathcal{P}_{\beta}, T_{\alpha\beta}, X_{\alpha\beta}/K)$, etc.

Définition 1.1.2. 1. Avec les notations 1.1.1, on construit de la façon suivante la catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger}(Y, (Y_{\alpha}, \mathcal{P}_{\alpha}, T_{\alpha}, X_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}/K)$:

- Un objet est constitué par la donnée, pour tout $\alpha \in \Lambda$, d'un élément E_{α} de $F\text{-Isoc}^{\dagger}(\mathcal{P}_{\alpha}, T_{\alpha}, X_{\alpha}/K)$ et, pour tous $\alpha, \beta \in \Lambda$, d'un isomorphisme $\eta_{\alpha\beta} : j_2^{\alpha\beta*}(E_{\beta}) \xrightarrow{\sim} j_1^{\alpha\beta*}(E_{\alpha})$ dans $F\text{-Isoc}^{\dagger}(\mathcal{P}_{\alpha} \times \mathcal{P}_{\beta}, T_{\alpha\beta}, X_{\alpha\beta}/K)$, ces isomorphismes vérifiant dans $F\text{-Isoc}^{\dagger}(Y_{\alpha} \cap Y_{\beta} \cap Y_{\gamma}/K)$ la condition de cocycle $j_{13}^{\alpha\beta\gamma*}(\eta_{\alpha\gamma}) = j_{12}^{\alpha\beta\gamma*}(\eta_{\alpha\beta}) \circ j_{23}^{\alpha\beta\gamma*}(\eta_{\beta\gamma})$. La famille d'isomorphismes $(\eta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}$ est appelée *donnée de recollement* de $(E_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$.
- Une flèche $((E_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}, (\eta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}) \rightarrow ((E'_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}, (\eta'_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda})$ est une famille de morphismes $E_{\alpha} \rightarrow E'_{\alpha}$ de $F\text{-Isoc}^{\dagger}(\mathcal{P}_{\alpha}, T_{\alpha}, X_{\alpha}/K)$ commutant aux données de recollement respectives.

2. En remplaçant les expressions « $F\text{-Isoc}^{\dagger}$ » par « $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}$ », on définit de même $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_{\alpha}, \mathcal{P}_{\alpha}, T_{\alpha}, X_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}/K)$. Par convention, on notera plutôt dans ce cas « \mathcal{E} » pour « E », « $\theta_{\alpha\beta}$ » pour « $\eta_{\alpha\beta}$ ».

Lorsque les diviseurs T_{α} sont vides, on écrit $F\text{-Isoc}^{\dagger}(X, (X_{\alpha}, \mathcal{P}_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}/K)$ et $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(X, (X_{\alpha}, \mathcal{P}_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}/K)$.

Remarques 1.1.3. On garde les notations 1.1.2 mais on remplace l'hypothèse « il existe un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathcal{P}_{α} » par « il existe un \mathcal{V} -schéma formel séparé et lisse \mathcal{P}_{α} ». On définit alors Les catégories $F\text{-Isoc}^{\dagger}(Y, (Y_{\alpha}, \mathcal{P}_{\alpha}, T_{\alpha}, X_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}/K)$ et $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_{\alpha}, \mathcal{P}_{\alpha}, T_{\alpha}, X_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}/K)$ de la même façon qu'en 1.1.2.

Proposition 1.1.4 *On conserve les notations et hypothèses de 1.1.2. La catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger}(Y, (Y_{\alpha}, \mathcal{P}_{\alpha}, T_{\alpha}, X_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda})$ ne dépend canoniquement pas du choix de la famille $(Y_{\alpha}, \mathcal{P}_{\alpha}, T_{\alpha}, X_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$. On la note alors sans ambiguïté $F\text{-Isoc}^{\dagger}(Y/K)$.*

Si Y est un k -schéma séparé, lisse et si $(Y_l)_{l=1, \dots, N}$ sont ses composantes connexes, on pose alors $F\text{-Isoc}^{\dagger}(Y/K) := \prod_l F\text{-Isoc}^{\dagger}(Y_l/K)$. Ses objets sont les F -isocristaux surconvergens sur Y .

Démonstration. Cela résulte des trois étapes suivantes :

- i) Supposons d'abord qu'il existe un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathcal{P} , un sous-schéma fermé X de \mathcal{P} tels que, pour tout $\alpha \in \Lambda$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\alpha}$, $X =$

X_α et $T := \bigcap_{\alpha \in \Lambda} T_\alpha$ soit un diviseur de P . Prouvons alors que le foncteur canonique

$$F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}, T, X/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K), \quad (1.1.4.1)$$

qui à $E \in F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}, T, X/K)$ associe $((j_{T_\alpha}^\dagger E)_{\alpha \in \Lambda}, (\eta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda})$, où $\eta_{\alpha\beta} : j_{T_{\alpha\beta}}^\dagger P_{2K}^{\alpha\beta*} j_{T_\beta}^\dagger E \xrightarrow{\sim} j_{T_{\alpha\beta}}^\dagger P_{1K}^{\alpha\beta*} j_{T_\alpha}^\dagger E$ est l'isomorphisme canonique, est une équivalence de catégories (en notant $\delta : \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ l'immersion fermée diagonale, $\eta_{\alpha\beta}$ est l'unique morphisme induisant l'isomorphisme canonique $\delta_K^*(\eta_{\alpha\beta}) : j_{T_\alpha \cup T_\beta}^\dagger j_{T_\beta}^\dagger E \xrightarrow{\sim} j_{T_\alpha \cup T_\beta}^\dagger j_{T_\alpha}^\dagger E$).

D'abord, sa pleine fidélité est immédiate. Établissons à présent son essentielle surjectivité. Or, avec les notations de 1.1.3 et en posant $\mathcal{P}_\alpha := \mathcal{P} \setminus T_\alpha$ et $X_\alpha := X \setminus T_\alpha$, on bénéficie du foncteur canonique :

$F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$ défini par $((E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\eta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}) \mapsto ((E_\alpha || X[\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_{\alpha K}])_{\alpha \in \Lambda}, (\eta_{\alpha\beta} || X[\mathcal{P} \times \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_{\alpha K} \times \mathcal{P}_{\beta K}])_{\alpha, \beta \in \Lambda})$. On vérifie sans peine la pleine fidélité de ce dernier. De plus, d'après la procédure de recollement de [Ber96a, 2.3.2.iii)], le foncteur composé obtenu $F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}, T, X/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$ est une équivalence de catégories. Il en résulte que l'essentielle surjectivité du foncteur canonique $F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}, T, X/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K)$.

ii) Soit un recouvrement fini ouvert $(Y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ (resp. $(Y'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Lambda'}$) de Y (resp. Y') tel qu'il existe un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse \mathcal{P}_α (resp. $\mathcal{P}'_{\alpha'}$), un sous-schéma fermé X_α de P_α (resp. $X'_{\alpha'}$ de $P'_{\alpha'}$) et un diviseur T_α de P_α (resp. $T'_{\alpha'}$ de $P'_{\alpha'}$) tels que $Y_\alpha = X_\alpha \setminus T_\alpha$ (resp. $Y'_{\alpha'} = X'_{\alpha'} \setminus T'_{\alpha'}$). Grâce à l'étape i), quitte à prendre un recouvrement plus fin que $(Y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ et $(Y'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Lambda'}$, on se ramène à traiter le cas où $\Lambda = \Lambda'$ et $Y_\alpha = Y'_{\alpha'}$.

iii) Quitte à remplacer \mathcal{P}'_α par $\mathcal{P}'_\alpha \times_S \mathcal{P}_\alpha$, on peut supposer qu'il existe un morphisme propre et lisse $f_\alpha : \mathcal{P}'_\alpha \rightarrow \mathcal{P}_\alpha$ dont la restriction à Y_α induit l'identité de Y_α . Or, on dispose de l'équivalence canonique de catégories $Id_{Y_\alpha}^* : F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}_\alpha, X_\alpha, T_\alpha/K) \cong F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}'_\alpha, X'_\alpha, T'_\alpha/K)$ (voir [Ber96a, 2.3.5.i]). Si $(E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ est une famille d'objets E_α de $F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha/K)$ munie d'une donnée de recollement, on lui associe la famille $(Id_{Y_\alpha}^*(E_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$, qui est munie d'une structure canonique induite de donnée de recollement. Ce foncteur est une équivalence de catégories. \square

1.2. Construction : cas de la compactification lisse

Avec les notations et hypothèses de 1.1.3, on suppose de plus qu'il existe un \mathcal{V} -schéma formel séparé et lisse \mathcal{P} , un sous-schéma fermé lisse intègre X de P tels que, pour tout $\alpha \in \Lambda$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\alpha$, $X = X_\alpha$, $T := \bigcap_{\alpha \in \Lambda} T_\alpha$ soit un diviseur de P . L'équivalence de catégories 1.1.4.1 reste encore valable dans ce cas. On dispose ainsi d'une équivalence canonique de catégories $F\text{-Isoc}^\dagger(Y, X/K) \cong F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K)$.

Soit $((E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\eta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}) \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K)$. On pose $\mathcal{E}_\alpha := \text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T_\alpha, +}(E_\alpha)$ (voir [Car05a]) et on définit l'isomorphisme $\theta_{\alpha\beta}$ via la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\Gamma_{X_{\alpha\beta}}^\dagger \circ (\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_2^{\alpha\beta!} \text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T_\beta, +}(E_\beta) & \xrightarrow[\sim]{\theta_{\alpha\beta}} & \mathbb{R}\Gamma_{X_{\alpha\beta}}^\dagger \circ (\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_1^{\alpha\beta!} (\text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T_\alpha, +}(E_\alpha)) \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ \text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{P}, T_{\alpha\beta}, +}(j_{T_{\alpha\beta}}^\dagger p_{2K}^{\alpha\beta*} E_\beta) & \xrightarrow[\sim]{\eta_{\alpha\beta}} & \text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{P}, T_{\alpha\beta}, +}(j_{T_{\alpha\beta}}^\dagger p_{1K}^{\alpha\beta*} E_\alpha), \end{array}$$

où les flèches verticales viennent de [Car05a, 4.1.2, 4.1.8]. D'où le foncteur $\text{sp}_+ : F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K)$ défini par $((E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\eta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}) \mapsto ((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda})$. Puisque notamment $\text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T_\alpha, +} : F\text{-Isoc}^\dagger(\mathcal{P}, T_\alpha, X/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T_\alpha, X/K)$ est une équivalence de catégories (ainsi que $\text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{P}, T_{\alpha\beta}, +}$, etc.), on vérifie qu'il en est de même de sp_+ . Il en résulte par composition l'équivalence de catégories :

$$F\text{-Isoc}^\dagger(Y, X/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K). \quad (1.2.0.2)$$

1.3. Surcohérence des F -isocristaux surconvergentes : cas affine et lisse

Pour mémoire, on dispose de la proposition suivante (voir [Car02, 6.3.1]).

Proposition 1.3.1 *Soit \tilde{k} un corps quelconque, \tilde{P} un \tilde{k} -schéma propre et lisse, \tilde{T} un sous-schéma fermé de \tilde{P} de complémentaire \tilde{U} . Si \tilde{U} est affine et dense dans \tilde{P} alors \tilde{U} est le support d'un diviseur.*

Le lemme suivant fournit une extension de [Car, 6.5.1].

Lemme 1.3.2 *Soient \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse, T un diviseur de \mathcal{P} , $\mathcal{U} := \mathcal{P} \setminus T$, Y un sous-schéma fermé intègre et lisse de \mathcal{U} , X l'adhérence de Y dans \mathcal{P} . Soit le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} Y' & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{u'} & \mathcal{P}' \\ \downarrow b & & \downarrow a & & \downarrow f \\ Y & \longrightarrow & X & \xrightarrow{u} & \mathcal{P}, \end{array} \quad (1.3.2.1)$$

où f est un morphisme propre et lisse de \mathcal{V} -schémas formels lisses, le carré de gauche est cartésien, X' est un k -schéma lisse, u' est une immersion fermée, a est un morphisme projectif, surjectif, génériquement fini et étale tel que $a^{-1}(T \cap X)$ soit un diviseur à croisement normaux de X' (voir [Car, 6.3.1]). Notons $T' := f^{-1}(T)$, $\mathcal{U}' := \mathcal{P}' \setminus T'$, $g : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$ le morphisme induit.

Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$, $\phi : \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f^!(\mathcal{E}_1) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f^!(\mathcal{E}_2)$ un morphisme de $\text{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X'/K)$ et $\psi : \mathcal{E}_1|_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{E}_2|_{\mathcal{U}}$ un morphisme de $\text{Isoc}^\dagger(\mathcal{U}, Y/K)$. Si ϕ et ψ induisent dans $\text{Isoc}^\dagger(\mathcal{U}', Y'/K)$ le même morphisme $\mathbb{R}\Gamma_{Y'}^\dagger g^!(\mathcal{E}_1|_{\mathcal{U}}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Y'}^\dagger g^!(\mathcal{E}_2|_{\mathcal{U}})$, alors il existe un et un seul morphisme $\theta : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ de $\text{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ induisant ϕ et ψ .

Démonstration. Pour $i = 1, 2$, en reprenant la preuve de [Car, 6.3.1], nous construisons la suite de morphismes $\mathcal{E}_i \rightarrow f_{T,+} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f_T^{\dagger}(\mathcal{E}_i) \rightarrow \mathcal{E}_i$ dont le composé est un isomorphisme (nous avons pour cela besoin de la structure de Frobenius de \mathcal{E}_i car nous utilisons le théorème de pleine fidélité de Kedlaya [Ked04]). De manière analogue à la preuve de [Car, 6.5.1], nous construisons alors le morphisme $\theta : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ de $\text{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ (via le diagramme [Car, 6.5.1.1]). En calquant la suite de la preuve de [Car, 6.5.1], il suffit alors d'établir la fidélité du foncteur $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f_T^{\dagger} f_{T+} : \text{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X'/K) \rightarrow D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}'}^{\dagger}(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$. Cela se vérifie comme dans [Car, 6.5.1] en utilisant [Tsu02, 4.1.1] et [Ber96b, 4.3.12] à la place de [Tsu02, 4.1.2] et [Ked04]. \square

Lemme 1.3.3 *Soient \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel séparé et lisse, X un sous-schéma fermé lisse de P , $T \subset T'$ deux diviseurs de P tels que $T \cap X$ et $T' \cap X$ soient des diviseurs de X , E un $(F-)$ isocristal sur $X \setminus T$ surconvergent le long de T . En notant $\mathcal{E}' := \text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T', +}(\mathcal{D}_{T'}^{\dagger} E)$, on obtient $\mathcal{E}', \mathbb{D}_T(\mathcal{E}') \in (F-)D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$.*

Démonstration. Cela découle de [Car, 6.1.4] et de $\mathcal{E}' \xrightarrow{\sim} (\dagger T') \text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}(E)$ (voir [Car05a, 4.1.2]). \square

Lemme 1.3.4 *Avec les notations et hypothèses de 1.3.3, le foncteur $(\dagger T') : (F-)\text{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) \rightarrow (F-)\text{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T', X/K)$ est pleinement fidèle.*

Démonstration. Cela résulte du diagramme commutatif à isomorphisme canonique près (voir [Car05a, 4.1.2]) :

$$\begin{array}{ccc} (F-)\text{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) & \xrightarrow{(\dagger T')} & (F-)\text{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T', X/K) \\ \text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +} \uparrow \cong & & \cong \uparrow \text{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T', +} \\ (F-)\text{Isoc}^{\dagger}(Y/K) & \xrightarrow{j_{T'}^{\dagger}} & (F-)\text{Isoc}^{\dagger}(Y'/K), \end{array}$$

où les flèches verticales sont des équivalences de catégories (voir [Car, 6.2.2] avec des structures de Frobenius, mais cela reste de même valable sans structures de Frobenius, via [Car05a, 2.5.10], [Car06, 2.2.12] et [Car, 6.1.4]) et celle du bas est pleinement fidèle (voir [Tsu02, 4.1.1]). \square

Proposition 1.3.5 *Soient P^{\dagger} un \mathcal{V} -schéma formel faible propre et lisse, T un diviseur de P , $U^{\dagger} := P^{\dagger} \setminus T$, $Y^{\dagger} \hookrightarrow U^{\dagger}$ une immersion fermée de \mathcal{V} -schémas formels faibles lisses avec Y^{\dagger} affine. Soit $E \in F\text{-Isoc}^{\dagger}(Y/K)$.*

Le $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module $\text{sp}_{Y^{\dagger} \hookrightarrow U^{\dagger}, T, +}(E)$ est alors muni d'une structure canonique de $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module. En outre, $\text{sp}_{Y^{\dagger} \hookrightarrow U^{\dagger}, T, +}(E) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$.

Démonstration. Il ne coûte rien de supposer Y intègre. Notons X l'adhérence schématique de Y dans P , $\mathcal{E} := \text{sp}_{Y^{\dagger} \hookrightarrow U^{\dagger}, T, +}(E)$. Soit Z un sous-schéma fermé (réduit) de X . Prouvons, par récurrence sur $(\dim Z, \text{cmax} Z)$

(pour l'ordre lexicographique), où $c_{\max} Z$ désigne le nombre de composantes irréductibles de Z de dimension $\dim Z$, l'assertion suivante :

$$\ll \text{Si } \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}), \text{ alors } \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \mathcal{E}, \mathbb{D}_T \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \mathcal{E} \in F\text{-}D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}). \gg \quad (1.3.5.1)$$

Traisons d'abord le cas où $\dim Z = 0$. Il existe alors un \mathcal{V} -schéma formel faible lisse Z^\dagger qui relève Z . Le cas où $Z \subset T$ est immédiat. De même, quitte à utiliser l'hypothèse de récurrence, on se ramène au cas où $T \cap Z = \emptyset$. En notant $u : Z^\dagger \hookrightarrow Y^\dagger$ un relèvement de l'immersion fermée canonique $Z \hookrightarrow Y$, il résulte de [Car, 5.2.6] l'isomorphisme : $\text{sp}_{Z^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T, +}(u^* E)[d_{Z/Y}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \mathcal{E}$. Comme Z est lisse, $Z \subset Z$ se désingularise idéalement et donc, d'après [Car, 7.2.4], $\text{sp}_{Z^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T, +}(u^* E)$ est muni d'une structure canonique de $F\text{-}D_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module et $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \mathcal{E}, \mathbb{D}_T \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \mathcal{E} \in F\text{-}D_{\text{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Supposons à présent $\dim Z > 0$. Soient Z_1, \dots, Z_r les composantes irréductibles de Z avec $\dim Z_1 = \dim Z$. Si $T \supset Z_1$ alors $\mathbb{R}\Gamma_{Z_1}^\dagger \mathcal{E} = 0$ et donc $\mathbb{R}\Gamma_{Z_2 \cup \dots \cup Z_r}^\dagger \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \mathcal{E}$ (voir [Car04, 2.2.16]). Quitte à utiliser l'hypothèse de récurrence, on se ramène donc au cas où $T \not\supset Z_1$. Soit $x \in Z_1 \setminus (Z_2 \cup \dots \cup Z_r \cup T)$. Il existe un ouvert affine \tilde{U} de P tel que $x \in \tilde{U}$ et $\tilde{U} \cap (Z_2 \cup \dots \cup Z_r \cup T) = \emptyset$. Ainsi, $\tilde{U} \cap Z = \tilde{U} \cap Z_1$ et $\tilde{U} \cap Z$ est dense dans Z_1 . Par 1.3.1, $\tilde{T} := P \setminus \tilde{U}$ est le support d'un diviseur. Quitte à rétrécir \tilde{U} , grâce à [Car, 7.4.1], on peut en outre supposer $\tilde{U} \cap Z$ lisse et muni d'un modèle idéal. En notant \tilde{Y}^\dagger (resp. \tilde{U}^\dagger) l'ouvert de Y^\dagger (resp. U^\dagger) complémentaire de \tilde{T} et $\tilde{E} := j_{\tilde{T}}^\dagger E$ le F -isocristal surconvergent sur \tilde{Y} déduit de E , on obtient $(\dagger \tilde{T}) \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \text{sp}_{\tilde{Y}^\dagger \hookrightarrow \tilde{U}^\dagger, \tilde{T}, +}(\tilde{E})$ (voir [Car, 5.2.3]). Comme $\tilde{Y} \cap Z = \tilde{U} \cap Z$ est affine et lisse, il existe d'après Elkik (voir [Elk73]) un \mathcal{V} -schéma formel faible affine et lisse \tilde{Y}_Z^\dagger le relevant. Par [Car, 5.2.6], comme $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\dagger \tilde{T}) \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (\dagger \tilde{T}) \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \mathcal{E} \in D_{\text{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger \tilde{T})_{\mathbb{Q}})$, en désignant par $a : \tilde{Y}_Z^\dagger \hookrightarrow \tilde{Y}^\dagger$ une immersion fermée relevant $\tilde{Y} \cap Z \hookrightarrow \tilde{Y}$, il en résulte l'isomorphisme : $\text{sp}_{\tilde{Y}_Z^\dagger \hookrightarrow \tilde{U}^\dagger, \tilde{T}, +}(a^* \tilde{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\dagger \tilde{T}) \mathcal{E}[-d_{\tilde{Y}_Z/\tilde{Y}}] =: \mathcal{F}$. Avec [Car, 7.2.4], il en découle que $\mathcal{F} \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, \tilde{T}, Z_1/K)$. En utilisant le théorème de désingularisation de de Jong (voir [dJ96]), de manière analogue à [Car, 6.3.1], on obtient le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{U} & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longlongequal{\quad} & \mathcal{P} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ \tilde{Y} & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ a \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\ \tilde{Y} \cap Z_1 & \longrightarrow & Y \cap Z_1 & \longrightarrow & Z_1 & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ b \uparrow & & \uparrow & & h \uparrow & & f \uparrow \\ \tilde{V}' & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & \mathcal{P}', \end{array}$$

dans lequel les carrés des deux colonnes de gauche sont cartésiens, Z' est lisse, f est un morphisme propre et lisse de \mathcal{V} -schémas formels propres et lisses, h est un morphisme projectif, surjectif, génériquement fini et étale,

tel que $h^{-1}(\widetilde{Z}_1 \cap \widetilde{T})$ soit un diviseur de Z' , les flèches horizontales des carrés de droite sont des immersions fermées. On pose $T' := f^{-1}(T)$ et $\widetilde{T}' := f^{-1}(\widetilde{T})$. Comme Z' est lisse et $Z' \cap \widetilde{T}'$ est un diviseur de Z' , alors $Z' \cap T$ est aussi un diviseur de Z' . D'après [Car, 6.3.1], \mathcal{F} est un facteur direct de $f_+ \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger f^!(\mathcal{F})$ et il existe un (unique à isomorphisme près) F -isocristal \widetilde{E}' surconvergent sur \widetilde{V}' tel que $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger f^!(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{Z' \hookrightarrow \mathcal{P}, \widetilde{T}'}(\widetilde{E}')$. Grâce au théorème de pleine fidélité de Kedlaya (voir [Ked04]), en notant $c : \widetilde{V}' \rightarrow Y$ le morphisme canonique induit par h , on vérifie $\widetilde{E}' \xrightarrow{\sim} b^*(a^* \widetilde{E}) \xrightarrow{\sim} c^*(E)$. En particulier, \widetilde{E}' provient d'un F -isocristal surconvergent sur V' . Par 1.3.3, $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger f^!(\mathcal{F})$ et $\mathbb{D}_{T'} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger f^!(\mathcal{F}) \in F\text{-}D_{\mathrm{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}'}^\dagger(\dagger T')_{\mathbb{Q}})$. Par [Car04, 3.1.9] et [Car06, 1.2.7], $f_+ \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger f^!(\mathcal{F})$ et $\mathbb{D}_T f_+ \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger f^!(\mathcal{F}) \in F\text{-}D_{\mathrm{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. D'où $\mathcal{F}, \mathbb{D}_T \mathcal{F} \in F\text{-}D_{\mathrm{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Le triangle de localisation en \widetilde{T} de $\mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \mathcal{E}$ s'écrit :

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z \cap \widetilde{T}}^\dagger \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_Z^\dagger(\dagger \widetilde{T}) \mathcal{E} \rightarrow +1. \quad (1.3.5.2)$$

Il en dérive que $\mathbb{R}\Gamma_{Z \cap \widetilde{T}}^\dagger \mathcal{E} \in D_{\mathrm{coh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. Comme $Z_1 \cap \widetilde{U}$ est dense dans Z_1 , $\dim Z_1 \cap \widetilde{T} < \dim Z_1 = \dim Z$. Ainsi, soit $\dim Z \cap \widetilde{T} < \dim Z$ soit $\dim Z \cap \widetilde{T} = \dim Z$ et $\mathrm{cmac} Z \cap \widetilde{T} < \mathrm{cmac} Z$. Par hypothèse de récurrence, il en découle que $\mathbb{R}\Gamma_{Z \cap \widetilde{T}}^\dagger \mathcal{E}, \mathbb{D}_T \mathbb{R}\Gamma_{Z \cap \widetilde{T}}^\dagger \mathcal{E} \in F\text{-}D_{\mathrm{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$. On conclut la récurrence via 1.3.5.2 et le triangle distingué induit en lui appliquant \mathbb{D}_T .

En appliquant 1.3.5.1 au cas où $Z = X$, on obtient $\mathcal{E} \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$. Il reste à établir que \mathcal{E} est muni d'une structure *canonique* de Frobenius. Mise à part X et $\mathcal{E} := \mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T, +}(E)$, oublions à présent les notations introduites au cours de la preuve.

Grâce au théorème de désingularisation de de Jong ([dJ96]), il existe un morphisme projectif et surjectif $a : X' \rightarrow X$, qui se décompose en une immersion fermée $X' \hookrightarrow \mathbb{P}_X^r$ suivie de la projection canonique $\mathbb{P}_X^r \rightarrow X$, tel que X' soit intègre et lisse, a soit génériquement fini et étale et $a^{-1}(T \cap X)$ soit un diviseur de X' . On pose $P'^\dagger := \mathbb{P}_{P'}^r$, $f : P'^\dagger \rightarrow P^\dagger$ la projection canonique, $T' := f^{-1}(T)$, $U'^\dagger := P'^\dagger \setminus T'$, $g : U'^\dagger \rightarrow U^\dagger$ le morphisme induit par f . La fin de la preuve s'établit via les trois étapes suivantes.

(a) Si T_1 est un diviseur de P contenant T , on pose alors $Y_1^\dagger := Y^\dagger \setminus T_1$, $Y_1' := a^{-1}(Y_1)$, $T_1' := f^{-1}(T_1)$, $U_1^\dagger := P^\dagger \setminus T_1$, $U_1'^\dagger := P'^\dagger \setminus T_1'$, $g_1 : U_1'^\dagger \rightarrow U_1^\dagger$ le morphisme induit par f . D'après [Car, 7.4.1] et sa preuve, on peut choisir T_1 tel que $Y_1 := Y \setminus T_1$ soit affine et lisse, le morphisme $b_1 : Y_1' \rightarrow Y_1$ induit par a soit fini et étale, l'immersion fermée $Y_1' \hookrightarrow \mathbb{P}_{Y_1}^r$ se relève en une immersion fermée de \mathcal{V} -schémas formels faibles lisses de la forme $Y_1'^\dagger \hookrightarrow \mathbb{P}_{Y_1^\dagger}^r$ (en particulier $Y_1 \subset X$ se désingularise idéalement). Notons $E_1 := j_{T_1}^\dagger(E)$.

On dispose des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}_{Y_1^{\dagger} \hookrightarrow U_1^{\dagger}, T_1^{\dagger}, +}(b_1^* E_1) &\xrightarrow[\sim]{[\mathrm{Car}, 5.2.6]} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f^! \mathrm{sp}_{Y_1^{\dagger} \hookrightarrow U_1^{\dagger}, T_1^{\dagger}, +}(E_1) \xrightarrow[\sim]{[\mathrm{Car}, 5.2.3]} \\ &\xrightarrow[\sim]{[\mathrm{Car}, 5.2.3]} (\dagger T_1') \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f^! \mathrm{sp}_{Y^{\dagger} \hookrightarrow U^{\dagger}, T, +}(E) = (\dagger T_1') \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f^! \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (1.3.5.3)$$

Comme X' est lisse, $Y' \subset X'$ se désingularise idéalement. Par [Car, 7.2.4], le $\mathcal{D}_{\mathcal{P}'}(\dagger T_1')_{\mathbb{Q}}$ -module $\mathrm{sp}_{Y_1^{\dagger} \hookrightarrow U_1^{\dagger}, T_1^{\dagger}, +}(b_1^* E_1)$ est muni d'une structure canonique de Frobenius (i.e. de F - $\mathcal{D}_{\mathcal{P}'}(\dagger T_1')_{\mathbb{Q}}$ -module) induite par celle de E . Comme Frobenius commute canoniquement à toutes les opérations cohomologiques de la théorie des \mathcal{D} -modules arithmétiques (voir [Ber02], [Ber00], [Car04] etc.), on déduit alors de 1.3.5.3, l'isomorphisme canonique $(\dagger T_1') \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f^! \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (\dagger T_1') \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f^! F^* \mathcal{E}$. Or, comme X' est lisse et que $T_1' \cap X'$, $T' \cap X'$ sont des diviseurs de X' , le foncteur $(\dagger T_1') : \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X'/K) \rightarrow \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T_1', X'/K)$ est, d'après 1.3.4, pleinement fidèle. Puisque $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f^! \mathcal{E} \in \mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X'/K)$, de même en remplaçant \mathcal{E} par $F^* \mathcal{E}$, il en découle l'isomorphisme canonique $\phi : \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f^! (\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f^! (F^* \mathcal{E})$.

(b) On construit l'isomorphisme canonique : $\psi : \mathcal{E}|_{\mathcal{U}} \rightarrow F^* \mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$ via le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sp}_{Y \hookrightarrow \mathcal{U}, +}(\widehat{E}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{sp}_{Y \hookrightarrow \mathcal{U}, +}(\widehat{E}) \xrightarrow[\sim]{[\mathrm{Car}, 5.2.4]} \mathcal{E}|_{\mathcal{U}} \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow \quad \sim \downarrow \psi \\ \mathrm{sp}_{Y \hookrightarrow \mathcal{U}, +}(F^* \widehat{E}) & \xrightarrow[\sim]{[\mathrm{Car}05a, 4.1.9]} F^* \mathrm{sp}_{Y \hookrightarrow \mathcal{U}, +}(\widehat{E}) \xrightarrow[\sim]{[\mathrm{Car}, 5.2.4]} F^* \mathcal{E}|_{\mathcal{U}}, \end{array} \quad (1.3.5.4)$$

où la flèche de gauche provient de l'isomorphisme tautologique $\widehat{E} \xrightarrow{\sim} F^* \widehat{E}$ munissant \widehat{E} d'une structure de Frobenius.

(c) On vérifie par construction la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f^! (\mathcal{E})|_{\mathcal{U}'_1} & \xrightarrow[\sim]{} & \mathbb{R}\Gamma_{Y'}^{\dagger} g^! (\mathcal{E}|_{\mathcal{U}})|_{\mathcal{U}'_1} \quad (1.3.5.5) \\ \sim \downarrow \phi & & \sim \downarrow \psi \\ \mathbb{R}\Gamma_{X'}^{\dagger} f^! (F^* \mathcal{E})|_{\mathcal{U}'_1} & \xrightarrow[\sim]{} & \mathbb{R}\Gamma_{Y'}^{\dagger} g^! (F^* \mathcal{E}|_{\mathcal{U}})|_{\mathcal{U}'_1}, \end{array}$$

Par 1.3.4 et [Ber96b, 4.3.12], $|\mathcal{U}'_1 : \mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathcal{U}', Y'/K) \rightarrow \mathrm{Isoc}^{\dagger}(\mathcal{U}'_1, Y'_1/K)$ est fidèle. Le diagramme 1.3.5.5 reste ainsi commutatif si on enlève les termes « $|\mathcal{U}'_1$ ». Les isomorphismes ϕ et ψ induisent donc canoniquement le même isomorphisme de la forme $\mathbb{R}\Gamma_{Y'}^{\dagger} g^! (\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Y'}^{\dagger} g^! (F^* \mathcal{E}|_{\mathcal{U}})$. Il résulte alors de 1.3.2 l'existence d'un isomorphisme canonique $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^* \mathcal{E}$ induisant ϕ et ψ . \square

Proposition 1.3.6 *Soit Y un k -schéma affine et lisse. On dispose d'une équivalence canonique de catégories*

$$\mathrm{sp}_{Y,+} : F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K).$$

Démonstration. Grâce au théorème de relèvement d'Elkik (voir [Elk73]), il existe P^\dagger un \mathcal{V} -schéma formel faible propre et lisse, T un diviseur de P , $U^\dagger := P^\dagger \setminus T$, $Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger$ une immersion fermée de \mathcal{V} -schémas formels faibles lisses. Par [Car04, 6.5.3], nous disposons du foncteur pleinement fidèle $\rho_Y : F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$. D'après 1.3.5, on bénéficie de la factorisation : $\mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T, +} : F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$. En utilisant notamment 1.3.5.4 et la peine fidélité du foncteur canonique de restriction $F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \rightarrow F\text{-Isoc}(Y/K)$ (voir [Ked04]), on vérifie par construction que ces deux foncteurs, ρ_Y et $\mathrm{sp}_{Y^\dagger \hookrightarrow U^\dagger, T, +}$, sont quasi-inverses et induisent donc des équivalences de catégories. \square

1.4. Construction : cas du recouvrement affine et lisse

1.4.1. Soit $b : Y'^\dagger \rightarrow Y^\dagger$ un morphisme de \mathcal{V} -schémas formels faibles affines et lisses. La catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$ est canoniquement isomorphe à celle des $F\text{-}\mathcal{D}_{Y^\dagger, \mathbb{Q}}$ -modules à gauche globalement de présentation finie, $\mathcal{O}_{Y^\dagger, \mathbb{Q}}$ -cohérent (voir [Ber96a, 2.5.7]). Par [Ber96a, 2.5.6], le foncteur $b^* = \mathcal{O}_{Y'^\dagger, \mathbb{Q}} \otimes_{b^{-1}\mathcal{O}_{Y^\dagger, \mathbb{Q}}} -$ est canoniquement isomorphe au foncteur de [Ber96a, 2.3.6] $b_0^* : F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(Y'/K)$. De plus, le foncteur canonique de restriction $cv_Y : F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \rightarrow F\text{-Isoc}(Y/K)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{O}_{Y, \mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y^\dagger, \mathbb{Q}}} -$ (voir [Car, 5.1.3]). Le foncteur $\widehat{b}^* = \mathcal{O}_{Y', \mathbb{Q}} \otimes_{b^{-1}\mathcal{O}_{Y, \mathbb{Q}}} -$ s'identifie canoniquement au foncteur image inverse $F\text{-Isoc}(Y'/K) \rightarrow F\text{-Isoc}(Y/K)$ de [Ber96a, 2.3.2.2]. Enfin, on dispose d'un isomorphisme canonique $cv_{Y'} \circ b^* \xrightarrow{\sim} \widehat{b}^* \circ cv_Y$.

1.4.2. Avec les notations de 1.4.1, soient deux morphismes $b, b' : Y'^\dagger \rightarrow Y^\dagger$ de \mathcal{V} -schémas formels faibles affines et lisses tels que $b_0 = b'_0$. Pour tout $E \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$, on bénéficie d'un isomorphisme canonique $b^*(E) \xrightarrow{\sim} b'^*(E)$, transitif pour la composition de morphismes de \mathcal{V} -schémas formels faibles affines et lisses. En effet, on définit d'abord l'isomorphisme canonique $cv_{Y'}(b^*(E)) \xrightarrow{\sim} cv_{Y'}(b'^*(E))$ via la commutativité du diagramme ci-après :

$$\begin{array}{ccc} cv_{Y'}(b^*(E)) & \xrightarrow{\sim} & cv_{Y'}(b'^*(E)) \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ \widehat{b}^* cv_Y(E) & \xrightarrow{\sim} & \widehat{b}'^* cv_Y(E), \end{array}$$

dont l'isomorphisme du bas est [Ber96a, 2.2.17.i]. On conclut ensuite par pleine fidélité de $cv_{Y'}$ (voir [Ked04]).

1.4.3. Soit Y un k -schéma séparé, lisse, intègre. Soit $(Y_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un recouvrement fini de Y par des ouverts affines et, pour tout $\alpha \in \Lambda$, soient P_α^\dagger un \mathcal{V} -schéma formel faible propre et lisse, X_α un sous-schéma fermé de P_α et T_α un diviseur de P_α tel que $Y_\alpha = X_\alpha \setminus T_\alpha$ (on peut toujours en construire grâce à [Elk73]).

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$, on note $p_1^{\alpha\beta} : P_\alpha^\dagger \times_S P_\beta^\dagger \rightarrow P_\alpha^\dagger$ et $p_2^{\alpha\beta} : P_\alpha^\dagger \times_S P_\beta^\dagger \rightarrow P_\beta^\dagger$ les projections canoniques, $X_{\alpha\beta}$ l'adhérence schématique de $Y_\alpha \cap Y_\beta$ dans $P_\alpha \times P_\beta$, $T_{\alpha\beta} = p_1^{\alpha\beta-1}(T_\alpha) \cup p_2^{\alpha\beta-1}(T_\beta)$. De même, on note $X_{\alpha\beta\gamma}$ l'adhérence schématique de $Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma$ dans $P_\alpha \times P_\beta \times P_\gamma$ et $T_{\alpha\beta\gamma}$ la réunion des images inverses de T_α, T_β et T_γ par les projections de $P_\alpha^\dagger \times P_\beta^\dagger \times P_\gamma^\dagger$ sur $P_\alpha^\dagger, P_\beta^\dagger$ et P_γ^\dagger .

Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda$, soient $Y_{\alpha\beta}^\dagger$ et $Y_{\alpha\beta\gamma}^\dagger$ des \mathcal{V} -schémas formels faibles affines et lisses relevant respectivement $Y_\alpha \cap Y_\beta$ et $Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma$, soient $j_1^{\alpha\beta} : Y_{\alpha\beta}^\dagger \rightarrow Y_\alpha^\dagger$, $j_2^{\alpha\beta} : Y_{\alpha\beta}^\dagger \rightarrow Y_\beta^\dagger$, $j_{12}^{\alpha\beta\gamma} : Y_{\alpha\beta\gamma}^\dagger \rightarrow Y_{\alpha\beta}^\dagger$, $j_{23}^{\alpha\beta\gamma} : Y_{\alpha\beta\gamma}^\dagger \rightarrow Y_{\beta\gamma}^\dagger$ et $j_{13}^{\alpha\beta\gamma} : Y_{\alpha\beta\gamma}^\dagger \rightarrow Y_{\alpha\gamma}^\dagger$ des relèvements des immersions canoniques ouvertes.

1.4.4. Avec les notations et hypothèses de 1.4.3, on définit la catégorie $F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, P_\alpha^\dagger, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$ dont un objet est constitué par la donnée, pour tout $\alpha \in \Lambda$, d'un élément E_α de $F\text{-Isoc}^\dagger(Y_\alpha/K)$ et, pour tous $\alpha, \beta \in \Lambda$, d'un isomorphisme dans $F\text{-Isoc}^\dagger(Y_\alpha \cap Y_\beta/K)$ de la forme $j_2^{\alpha\beta*}(E_\beta) \xrightarrow{\sim} j_1^{\alpha\beta*}(E_\alpha)$ (voir 1.4.1 à propos des foncteurs $j_1^{\alpha\beta*}$ et $j_2^{\alpha\beta*}$), ces isomorphismes vérifiant dans $F\text{-Isoc}^\dagger(Y_\alpha \cap Y_\beta \cap Y_\gamma/K)$ la condition de cocycle $j_{13}^{\alpha\beta\gamma*}(\theta_{\alpha\gamma}) = j_{12}^{\alpha\beta\gamma*}(\theta_{\alpha\beta}) \circ j_{23}^{\alpha\beta\gamma*}(\theta_{\beta\gamma})$ (modulo les isomorphismes canoniques de 1.4.2).

D'après [Ber96a, 2.5.6], le foncteur $j_1^{\alpha\beta*}$ (voir 1.4.1) est canoniquement isomorphe à celui défini dans 1.1.1. Il en découle l'équivalence canonique de catégories :

$$F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K) \cong F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, P_\alpha^\dagger, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K). \quad (1.4.4.1)$$

Proposition 1.4.5 Avec les notations et hypothèses 1.4.3, on dispose d'une équivalence canonique de catégories :

$$F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K). \quad (1.4.5.1)$$

Démonstration. Posons $U_\alpha^\dagger := P_\alpha^\dagger \setminus T_\alpha$, $U_{\alpha\beta}^\dagger := P_\alpha^\dagger \times P_\beta^\dagger \setminus T_{\alpha\beta}$ et fixons $Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger$, $Y_{\alpha\beta}^\dagger \hookrightarrow U_{\alpha\beta}^\dagger$ des relèvements respectifs de $Y_\alpha \subset U_\alpha$, $Y_{\alpha\beta} \subset U_{\alpha\beta}$. Soient $((E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\eta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}) \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, P_\alpha^\dagger, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$. Pour tous $\alpha, \beta \in \Lambda$, notons $\mathcal{E}_\alpha := \text{sp}_{Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger, T_\alpha, +}(E_\alpha) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y_\alpha/K)$ (voir 1.3.5) et $\theta_{\alpha\beta}$

l'isomorphisme $j_2^{\alpha\beta*}(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} j_1^{\alpha\beta*}(\mathcal{E}_\alpha)$ défini via le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\Gamma_{X_{\alpha\beta}}^\dagger \circ (\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_2^{\alpha\beta!}(\mathrm{sp}_{Y_\beta^\dagger \hookrightarrow U_\beta^\dagger, T_\beta, +}(E_\beta)) & \xrightarrow[\theta_{\alpha\beta}]{\sim} & \mathbb{R}\Gamma_{X_{\alpha\beta}}^\dagger \circ (\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_1^{\alpha\beta!}(\mathrm{sp}_{Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger, T_\alpha, +}(E_\alpha)) \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ \mathrm{sp}_{Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger, T_\alpha, +} j_2^{\alpha\beta*}(E_\beta) & \xrightarrow[\mathrm{sp}_{Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger, T_\alpha, +}(\eta_{\alpha\beta})]{\sim} & \mathrm{sp}_{Y_\alpha^\dagger \hookrightarrow U_\alpha^\dagger, T_\alpha, +} j_1^{\alpha\beta*}(E_\alpha), \end{array} \quad (1.4.5.2)$$

où les isomorphismes verticaux résultent de [Car, 5.2.3 et 5.2.6] (par fidélité, ces isomorphismes commutent à Frobenius car c'est le cas en dehors de $T_{\alpha\beta}$). Par transitivité des isomorphismes verticaux de 1.4.5.2, on vérifie la condition de cocycle de la famille $(\theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}$. D'où le foncteur sp_+ : $F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, P_\alpha^\dagger, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$ défini par $((E_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\eta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}) \mapsto ((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda})$. Il résulte de 1.3.6 que $\mathrm{sp}_{(Y_\alpha, P_\alpha^\dagger, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, +}$ est une équivalence de catégories. Or, via 1.1.4 et 1.4.4.1, on obtient $F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \cong F\text{-Isoc}^\dagger(Y, (Y_\alpha, P_\alpha^\dagger, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$. D'où le résultat par composition de ces équivalences. \square

2. Surcohérence différentielle des F -isocristaux surconvergents sur les variétés lisses

2.1. Contagiosité de la surcohérence

Précisons et étendons d'abord la remarque [Car04, 2.2.7] :

Proposition 2.1.1 *Soient \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel lisse, T un diviseur de P , $\mathfrak{U} := \mathcal{P} \setminus T$. Soit E un isocristal sur U surconvergent le long de T , i.e., un $j_T^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{P}_K}$ -module cohérent muni d'une connexion surconvergente. Pour tous sous-schémas fermés Z et Z' de P , on dispose alors d'un isomorphisme canonique :*

$$\mathbb{R}\mathrm{sp}_* \Gamma_{Z'}^\dagger(j_Z^\dagger(E)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger(\dagger Z)\mathrm{sp}_*(E). \quad (2.1.1.1)$$

Démonstration. Établissons d'abord l'existence d'un isomorphisme (non nécessairement canonique) de la forme 2.1.1.1. Via les triangles distingués

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}\mathrm{sp}_* \Gamma_{Z'}^\dagger(\Gamma_{Z'}^\dagger(E)) \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{sp}_* \Gamma_{Z'}^\dagger(E) \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{sp}_* \Gamma_{Z'}^\dagger(j_Z^\dagger(E)) \rightarrow +1, \\ \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger(\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger \mathrm{sp}_*(E)) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger(\mathrm{sp}_*(E)) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger((\dagger Z)\mathrm{sp}_*(E)) \rightarrow +1, \end{array}$$

on se ramène au cas où Z est vide. Prouvons alors le lemme par récurrence sur le nombre minimum de diviseurs d'intersection Z' . Lorsque Z' est un diviseur, $\mathbb{R}\mathrm{sp}_* j_{Z'}^\dagger(E) \leftarrow \mathrm{sp}_* j_{Z'}^\dagger(E) \xrightarrow{\sim} (\dagger Z')\mathrm{sp}_*(E)$. En utilisant le triangle de localisation en Z' de $\mathrm{sp}_*(E)$ (voir [Car04, 2.2.6]) et en appliquant $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*$ à la suite exacte $0 \rightarrow \Gamma_{Z'}^\dagger(E) \rightarrow E \rightarrow j_{Z'}^\dagger(E) \rightarrow 0$ (voir [Ber96a, 2.1.6]), il en résulte $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger(\mathrm{sp}_*(E)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{sp}_* \Gamma_{Z'}^\dagger(E)$. De plus, si T_1, \dots, T_r sont des

diviseurs d'intersection Z' avec $r \geq 2$, en appliquant $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*$ à une suite exacte de Mayer Vietoris (cela découle de [Ber96a, 2.1.7]), on obtient le triangle distingué :

$$\mathbb{R}\mathrm{sp}_* \Gamma_{Z'}^\dagger(E) \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{sp}_* \Gamma_{T_1 \cap \dots \cap T_{r-1}}^\dagger(E) \oplus \mathbb{R}\mathrm{sp}_* \Gamma_{T_r}^\dagger(E) \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{sp}_* \Gamma_{(T_1 \cap \dots \cap T_{r-1}) \cup T_r}^\dagger(E) \rightarrow +1.$$

Comme on bénéficie du triangle distingué de Mayer Vietoris (voir [Car04, 2.2.16])

$$\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger \mathrm{sp}_*(E) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{T_1 \cap \dots \cap T_{r-1}}^\dagger \mathrm{sp}_*(E) \oplus \mathbb{R}\Gamma_{T_r}^\dagger \mathrm{sp}_*(E) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{(T_1 \cap \dots \cap T_{r-1}) \cup T_r}^\dagger \mathrm{sp}_*(E) \rightarrow +1,$$

on conclut la récurrence.

Prouvons à présent que l'existence d'un isomorphisme de la forme 2.1.1.1 nous permet d'en construire un canoniquement. En appliquant le foncteur $(\dagger Z) \circ \mathbb{R}\mathrm{sp}_*$ à la suite exacte $0 \rightarrow \Gamma_{Z'}^\dagger(E) \rightarrow E \rightarrow j_Z^\dagger(E) \rightarrow 0$, on obtient un triangle distingué dont le terme de gauche est nul grâce à (l'isomorphisme de la forme) 2.1.1.1. Il en dérive l'isomorphisme canonique $(\dagger Z) \circ \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(E) \xrightarrow{\sim} (\dagger Z) \circ \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(j_Z^\dagger(E))$. Par 2.1.1.1 (et [Car04, 2.2.14]), le morphisme canonique $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(j_Z^\dagger(E)) \rightarrow (\dagger Z) \circ \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(j_Z^\dagger(E))$ est un isomorphisme. D'où l'isomorphisme canonique $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(j_Z^\dagger(E)) \xrightarrow{\sim} (\dagger Z) \circ \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(E)$ puis $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(j_Z^\dagger(E)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger (\dagger Z) \circ \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(E)$. De même, en appliquant le foncteur $\mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger \circ \mathbb{R}\mathrm{sp}_*$ à la suite exacte $0 \rightarrow \Gamma_{Z'}^\dagger(j_Z^\dagger(E)) \rightarrow j_Z^\dagger(E) \rightarrow j_{Z \cup Z'}^\dagger(E) \rightarrow 0$, on obtient les isomorphismes canoniques : $\mathbb{R}\mathrm{sp}_*(\Gamma_{Z'}^\dagger(j_Z^\dagger(E))) \xleftarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger \circ \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(\Gamma_{Z'}^\dagger(j_Z^\dagger(E))) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Z'}^\dagger \circ \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(j_Z^\dagger(E))$. Il en résulte par composition la construction de l'isomorphisme canonique 2.1.1.1. \square

Proposition 2.1.2 Soient \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel lisse, $\mathcal{E} \in \underline{LD}_{\mathbb{Q}, \mathrm{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet})$, T un diviseur de P , T_1, \dots, T_r des diviseurs de P d'intersection T .

(a) Pour tout $\alpha = 1, \dots, r$, supposons qu'il existe un (F) -isocrystal E_α sur $P \setminus T_\alpha$ surconvergent le long de T_α et un isomorphisme $(F)\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire $\mathcal{E}(\dagger T_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E_\alpha)$ (on omet d'indiquer le foncteur \varinjlim). Il existe alors un (F) -isocrystal E sur $P \setminus T$ surconvergent le long de T tel que $j_{T_\alpha}^\dagger E \xrightarrow{\sim} E_\alpha$ qui induit une famille compatible d'isomorphismes $(F)\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaires $\mathcal{E}(\dagger T_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(j_{T_\alpha}^\dagger E)$ (i.e., ils induisent canoniquement les mêmes isomorphismes $\mathcal{E}(\dagger T_{\alpha \cup \beta}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(j_{T_{\alpha \cup \beta}}^\dagger E)$).

(b) Soit E un (F) -isocrystal sur $P \setminus T$ surconvergent le long de T tel que, pour tout $\alpha = 1, \dots, r$, il existe un isomorphisme $(F)\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T_\alpha)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire : $\mathcal{E}(\dagger T_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(j_{T_\alpha}^\dagger E)$. Il existe alors un isomorphisme $(F)\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire de la forme $\mathcal{E}(\dagger T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E)$. Si les isomorphismes $\mathcal{E}(\dagger T_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(j_{T_\alpha}^\dagger E)$ sont en outre compatibles, il existe alors un unique isomorphisme $(F)\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -linéaire $\mathcal{E}(\dagger T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E)$ induisant canoniquement pour tout $\alpha = 1, \dots, r$ les isomorphismes $\mathcal{E}(\dagger T_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(j_{T_\alpha}^\dagger E)$.

Démonstration. Prouvons d'abord (a). On construit les isomorphismes canoniques $j_{T_\alpha}^\dagger E_\beta \xrightarrow{\sim} j_{T_\beta}^\dagger E_\alpha$ via le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\dagger T_\beta)(\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\sim} & (\dagger T_\beta)(\mathrm{sp}_*(E_\alpha)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(j_{T_\beta}^\dagger E_\alpha) \\ \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\ (\dagger T_\alpha)(\dagger T_\beta)(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\sim} & (\dagger T_\alpha)(\mathrm{sp}_*(E_\beta)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(j_{T_\alpha}^\dagger E_\beta). \end{array} \quad (2.1.2.1)$$

Comme ces isomorphismes vérifient la condition de cocycle, il découle alors de [Ber96a, 2.1.12] l'existence d'un $(F-)$ isocristal E sur $P \setminus T$ surconvergent le long de T tel que $E_\alpha \xrightarrow{\sim} j_{T_\alpha}^\dagger E$. La compatibilité est tautologique (on complète le diagramme 2.1.2.1 en ajoutant $\mathcal{E}(\dagger T_{\alpha\cup\beta})$ et $\mathrm{sp}_*(j_{T_{\alpha\cup\beta}}^\dagger E)$).

Traitons à présent (b). Pour cela, vérifions par récurrence sur l'entier s tel que $1 \leq s \leq r$ l'assertion suivante : « pour tous diviseurs T'_1, \dots, T'_s de P contenant respectivement T_1, \dots, T_s , $\mathcal{E}(\dagger T'_1 \cap \dots \cap T'_s) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathrm{sp}_*(j_{T'_1 \cap \dots \cap T'_s}^\dagger E)$ ».

Lorsque $s = 1$, $\mathcal{E}(\dagger T_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_* j_{T_1}^\dagger(E)$ implique $\mathcal{E}(\dagger T'_1) \xrightarrow{\sim} (\dagger T'_1) \circ \mathrm{sp}_* j_{T_1}^\dagger(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_* j_{T'_1}^\dagger(E)$. Supposons à présent $s \geq 2$. En notant, pour $\beta = 1, \dots, s-1$, $T''_\beta := T'_\beta \cup T'_s$, on dispose des triangles distingués de Mayer Vietoris (voir [Car04, 2.2.16] pour le premier) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\dagger T'_1 \cap \dots \cap T'_s) &\rightarrow \mathcal{E}(\dagger T'_1 \cap \dots \cap T'_{s-1}) \oplus \mathcal{E}(\dagger T'_s) \rightarrow \mathcal{E}(\dagger T''_1 \cap \dots \cap T''_{s-1}) \rightarrow +1, \\ \mathbb{R}\mathrm{sp}_* j_{T'_1 \cap \dots \cap T'_s}^\dagger(E) &\rightarrow \mathbb{R}\mathrm{sp}_* j_{T'_1 \cap \dots \cap T'_{s-1}}^\dagger(E) \oplus \mathbb{R}\mathrm{sp}_* j_{T'_s}^\dagger(E) \rightarrow \mathbb{R}\mathrm{sp}_* j_{T''_1 \cap \dots \cap T''_{s-1}}^\dagger(E) \rightarrow +1. \end{aligned}$$

On conclut ainsi la récurrence. En particulier, le cas $r = s$ fournit un isomorphisme $\mathcal{E}(\dagger T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E)$.

Supposons à présent la famille d'isomorphismes $\mathcal{E}(\dagger T_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(j_{T_\alpha}^\dagger E)$ compatible. Avec [Car, 6.1.4] (l'hypothèse séparé est ici inutile car elle ne sert qu'à construire par recollement les foncteurs de la forme $\mathrm{sp}_{X \hookrightarrow \mathcal{P}, T, +}$), il en découle que $\mathcal{E}(\dagger T), \mathrm{sp}_*(E) \in (F-)\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, P/K)$. Comme le foncteur $(\dagger T_\alpha) : (F-)\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, P/K) \rightarrow (F-)\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T_\alpha, P/K)$ est pleinement fidèle (voir 1.3.4), il existe un unique isomorphisme $\mathcal{E}(\dagger T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E)$ induisant $\mathcal{E}(\dagger T_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(j_{T_\alpha}^\dagger E)$ via les isomorphismes canoniques de la forme $\mathcal{E}(\dagger T)(\dagger T_\alpha) \xrightarrow{\sim} (\dagger T_\alpha)$ et $\mathrm{sp}_*(E)(\dagger T_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(j_{T_\alpha}^\dagger E)$. La compatibilité entraîne que cet isomorphisme $\mathcal{E}(\dagger T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E)$ ne dépend pas du choix de α . \square

Notations 2.1.3. Soient \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse, $u : X \hookrightarrow P$ une immersion fermée, T un diviseur de P , \mathcal{U} l'ouvert de \mathcal{P} complémentaire de T . On suppose $Y := X \setminus T$ lisse sur k .

Théorème 2.1.4 Avec les notations de 2.1.3, soient \mathcal{E} un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent à support dans X , T_1, \dots, T_r des diviseurs de P d'intersection T .

Si, pour tout $\alpha = 1, \dots, r$, $\mathcal{E}(\dagger T_\alpha) \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T_\alpha, X/K)$ alors $\mathcal{E} \in F\text{-}\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$.

Démonstration. Il ne coûte rien de supposer Y dense dans X et X irréductible (on peut utiliser [Car, 6.3.3]). D'après [Car, 6.3.1], on dispose d'un diagramme de la forme 1.3.2.1 (on conserve les notations et hypothèses de 1.3.2.1). Notons $\mathcal{E}' := \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f^!(\mathcal{E})$, $T'_\alpha := f^{-1}(T_\alpha)$, $Y'_\alpha := Y' \setminus T'_\alpha$. Le fait que $T' \cap X'$ soit un diviseur de X' , $T' \subset T'_\alpha$ et X' soit lisse implique que les $T'_\alpha \cap X'$ sont aussi des diviseurs de X' . Notons alors E'_α le F -isocristal surconvergent sur Y'_α associé à $\mathcal{E}'(\dagger T'_\alpha)$ (via $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}, T'_\alpha, +}$). Comme X' est lisse, le foncteur $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}, T', +}$ induit l'équivalence de catégories : $F\text{-Isoc}^\dagger(Y'/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X'/K)$. Via la description de l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}, T', +}$ (voir [Car05a, 4.1.9]), le fait que $\mathcal{E}' \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X'/K)$ est donc local en \mathcal{P}' . Pour le vérifier, on peut ainsi supposer qu'il existe un relèvement $u' : \mathfrak{X}' \hookrightarrow \mathcal{P}'$ de $X' \hookrightarrow \mathcal{P}'$. Dans ce cas, $(\dagger T'_\alpha \cap X')(u'^!(\mathcal{E}')) \xrightarrow{\sim} u'^!(\mathcal{E}'(\dagger T'_\alpha)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E'_\alpha)$, où $\mathrm{sp} : \mathfrak{X}_K \rightarrow \mathfrak{X}$ est le morphisme de spécialisation. Par 2.1.2, il existe alors un unique F -isocristal E' surconvergent sur Y' tel que $u'^!(\mathcal{E}') \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_*(E')$. Il en résulte que $\mathcal{E}' \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X'/K)$. De la même façon, on établit via 2.1.2 que $\mathcal{E}|\mathcal{U}$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y \hookrightarrow \mathcal{U}, +}$. Il en découle que le F -complexe $\mathbb{D}_T(\mathcal{E})$ est isomorphe à un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module cohérent à support dans X (car c'est le cas en dehors de T puis on utilise [Ber96b, 4.3.12]). Comme, pour tout $1 \leq \alpha \leq r$, $(\dagger T_\alpha)(\mathbb{D}_T \mathcal{E}) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T_\alpha, X/K)$, on obtient de même que $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\mathbb{D}_T \mathcal{E}) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}', T', X'/K)$. En outre, on vérifie l'isomorphisme : $\mathbb{D}_T \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f^!(\mathbb{D}_T \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f^!(\mathcal{E})$ (comme Y est lisse, cela est aisé en dehors T' puis on utilise [Car, 6.5.2]). Or, on dispose des morphismes

$$\begin{aligned} f_{T,+} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\mathcal{E}) &\rightarrow \mathcal{E}, \\ \mathcal{E} &\rightarrow f_{T,+} \mathbb{D}_T \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\mathbb{D}_T \mathcal{E}), \end{aligned}$$

le premier se construisant par adjonction, le second s'en déduisant via les isomorphismes de bidualité (voir [Vir00, 1.3.6]) et de dualité relative (voir [Car06, 1.2.7]). D'où les flèches :

$$\mathcal{E} \rightarrow f_{T,+} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}. \quad (2.1.4.1)$$

Comme notamment $\mathcal{E}|\mathcal{U}$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{Y \hookrightarrow \mathcal{U}, +}$, on vérifie que le composé de 2.1.4.1 est un isomorphisme en dehors de T . Par [Ber96b, 4.3.12], il en résulte que celui-ci est un isomorphisme et donc que \mathcal{E} est un facteur directe de $f_{T,+} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\mathcal{E})$. On conclut via [Car, 6.1.3]. \square

Proposition 2.1.5 *Avec les notations de 2.1.3, soit T_1 un diviseur de P contenant T tel que $Y_1 := X \setminus T_1$ soit affine. Soient $E \in F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$ et $\mathcal{E}_1 \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T_1, X/K)$ tel que $\mathrm{sp}_{Y_1,+}(J_{T_1}^\dagger E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1$ (notation de 1.3.6). Alors, \mathcal{E}_1 et $\mathbb{D}_T(\mathcal{E}_1)$ sont $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérents.*

Démonstration. On peut supposer X irréductible et $T \not\supset X$. Avec ses notations et hypothèses, on dispose alors du diagramme 1.3.2.1. Notons $\mathcal{E}'_1 := \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f^!(\mathcal{E}_1)$, $T'_1 := f^{-1}(T_1)$, $Y'_1 := Y' \setminus T'_1$, E' le F -isocristal surconvergent sur Y' égal à $b^*(E)$. L'isomorphisme $\mathrm{sp}_{Y'_1,+}(j_{T'_1}^\dagger E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1$ induit le suivant $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}, T'_1,+}(j_{T'_1}^\dagger E') \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_1$ (en effet, grâce à la pleine fidélité de [Car, 6.5.2], il suffit de le valider en dehors de T'_1 , ce qui est immédiat car tout est lisse en dehors des diviseurs). Il en résulte que $(\dagger T'_1) \circ \mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}, T'_1,+}(E') \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_1$. Par [Car, 6.1.4], il en dérive que \mathcal{E}'_1 et $\mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E}'_1)$ sont $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T')$ -surcohérents. Or, d'après [Car, 6.3.1], \mathcal{E}_1 est un facteur direct de $f_+(\mathcal{E}'_1)$. Il en résulte, via le théorème de dualité relative (voir [Car06, 1.2.7]), que $\mathbb{D}_T(\mathcal{E}_1)$ est un facteur direct de $f_+ \circ \mathbb{D}_{T'}(\mathcal{E}'_1)$. On conclut avec la stabilité de la surcohérence par l'image directe d'un morphisme propre (voir [Car04, 3.1.9]). \square

Remarques 2.1.6. Avec les notations de 2.1.3, soient T_1 un diviseur de P contenant T , $Y_1 := X \setminus T_1$. Le foncteur $(\dagger T_1) : F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T_1, X/K)$ est pleinement fidèle. En effet, on dispose du diagramme commutatif (à isomorphisme près) :

$$\begin{array}{ccc} F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) & \longrightarrow & F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T_1, X/K) \\ \rho_Y \downarrow & & \rho_{Y_1} \downarrow \\ F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) & \longrightarrow & F\text{-Isoc}^\dagger(Y_1/K), \end{array}$$

dont les flèches verticales et du bas sont pleinement fidèles (voir respectivement [Car, 6.5.3] et [Tsu02, 4.1.2]).

2.2. F -isocristaux surcohérents sur les variétés lisses

Notations 2.2.1. Soient \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse, $u : X \hookrightarrow P$ une immersion fermée, T un diviseur de P , \mathcal{U} l'ouvert de \mathcal{P} complémentaire de T . On suppose P intègre, $Y := X \setminus T$ intègre et lisse sur k . De plus, soient $(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ un recouvrement fini d'ouverts affines de \mathcal{P} , $Y_\alpha := P_\alpha \cap Y$ et $T_\alpha := T \cup (P \setminus P_\alpha)$ (ce dernier est un diviseur de P vérifiant $X \setminus T_\alpha = Y_\alpha$).

Remarques 2.2.2. Avec les notations 2.2.1, soit $((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K)$. Notons respectivement p_1 et p_2 les projections à gauche et à droite $\mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $T_{\alpha\beta} := p_1^{-1}(T_\alpha) \cup p_2^{-1}(T_\beta)$ et $\delta : \mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ l'immersion fermée diagonale. En appliquant $\delta^!$ à $\theta_{\alpha\beta} : \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger \circ (\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_2^!(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger \circ (\dagger T_{\alpha\beta}) \circ p_1^!(\mathcal{E}_\alpha)$, on obtient l'isomorphisme $\vartheta_{\alpha\beta} : (\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} (\dagger T_\beta)(\mathcal{E}_\alpha)$. Ainsi, $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K)$ est équivalente à la catégorie dont les objets sont de la forme $((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\vartheta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda})$, où $\mathcal{E}_\alpha \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T_\alpha, X/K)$ et $\vartheta_{\alpha\beta} : (\dagger T_\alpha)(\mathcal{E}_\beta) \xrightarrow{\sim} (\dagger T_\beta)(\mathcal{E}_\alpha)$ (la donnée de recollement) est un isomorphisme vérifiant la condition de cocycle $(\dagger T_\beta)(\vartheta_{\alpha\gamma}) = (\dagger T_\gamma)(\vartheta_{\alpha\beta}) \circ (\dagger T_\alpha)(\vartheta_{\beta\gamma})$, dont les morphismes de la forme

$((\mathcal{E}'_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\vartheta'_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda}) \rightarrow ((\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}, (\vartheta_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in \Lambda})$ sont les morphismes $\mathcal{E}'_\alpha \rightarrow \mathcal{E}_\alpha$ de $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T_\alpha, X/K)$ commutant aux données de recollement.

Proposition 2.2.3 *Avec les notations de 2.2.1, on dispose de l'équivalence canonique de catégories :*

$$F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K).$$

Démonstration. On construit le foncteur $\mathcal{L}oc : F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K)$ de la manière suivante : on associe à $\mathcal{E} \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$, $(\mathcal{E}(\dagger T_\alpha), \vartheta_{\alpha\beta}) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K)$, où $\vartheta_{\alpha\beta}$ est l'isomorphisme canonique : $(\dagger T_\alpha)(\dagger T_\beta)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T_\beta)(\dagger T_\alpha)(\mathcal{E})$ (voir la remarque 2.2.2). Il découle de 2.1.6 que $\mathcal{L}oc$ est pleinement fidèle. Prouvons à présent via les étapes (a) et (b) ci-dessous son essentielle surjectivité.

(a) Avec ses notations et hypothèses, on bénéficie du diagramme 1.3.2.1. On pose aussi $\mathcal{U}_\alpha := \mathcal{P} \setminus T_\alpha$, $T'_\alpha := f^{-1}(T_\alpha)$, $\mathcal{U}'_\alpha := \mathcal{P}' \setminus T'_\alpha$, $Y'_\alpha := Y' \setminus T'_\alpha$. On dispose alors du foncteur canonique $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y', (Y'_\alpha, \mathcal{P}', T'_\alpha, X')_{\alpha \in \Lambda}/K)$ via $(\mathcal{E}_\alpha, \theta_{\alpha\beta}) \mapsto (\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\mathcal{E}_\alpha), \theta'_{\alpha\beta})$, où $\theta'_{\alpha\beta}$ est l'isomorphisme canonique induit par $\theta_{\alpha\beta}$ (on utilise les isomorphismes canoniques [Car04, 2.2.18]). On bénéficie aussi du foncteur canonique $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$ via $(\mathcal{E}_\alpha, \theta_{\alpha\beta}) \mapsto (\mathcal{E}_\alpha|_{\mathcal{U}_\alpha}, \theta_{\alpha\beta}|_{\mathcal{U}_\alpha \times \mathcal{U}_\beta})$, de même avec des primes. Par 1.2.0.2, on a $F\text{-Isoc}^\dagger(Y'/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y', (Y'_\alpha, \mathcal{P}', T'_\alpha, X')_{\alpha \in \Lambda}/K)$, $F\text{-Isoc}(Y/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$, $F\text{-Isoc}(Y'/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y', (Y'_\alpha, \mathcal{U}'_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}/K)$. D'où le foncteur :

$$F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(Y'/K) \times_{F\text{-Isoc}(Y'/K)} F\text{-Isoc}(Y/K). \quad (2.2.3.1)$$

Or, on bénéficie de l'équivalence de catégories (voir la preuve de [Car, 6.5.3]) :

$$F\text{-Isoc}^\dagger(Y'/K) \times_{F\text{-Isoc}(Y'/K)} F\text{-Isoc}(Y/K) \cong F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K). \quad (2.2.3.2)$$

On obtient alors $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K) \rightarrow F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$, que l'on notera ρ_Y , en composant 2.2.3.1 et 2.2.3.2.

(b) Soient $(\mathcal{E}_\alpha, \vartheta_{\alpha\beta}) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}, T_\alpha, X)_{\alpha \in \Lambda}/K)$. Avec l'étape (a), on pose $E := \rho_Y(\mathcal{E}_\alpha, \vartheta_{\alpha\beta})$. Construisons alors $\mathcal{E} \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ tel que $\mathcal{L}oc(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}_\alpha, \vartheta_{\alpha\beta})$. Or, $\text{sp}_{Y_\alpha, +}(j_{T_\alpha}^\dagger E)|_{\mathcal{U}_\alpha} \xrightarrow{\sim} \text{sp}_{Y_\alpha \hookrightarrow \mathcal{U}_\alpha, +}(\widehat{E}|_{\mathcal{U}_\alpha}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\alpha|_{\mathcal{U}_\alpha}$ (voir [Car, 5.2.4]). Par pleine fidélité du foncteur restriction $|_{\mathcal{U}_\alpha}$ (voir [Car, 6.5.2]), il en découle l'isomorphisme $\text{sp}_{Y_\alpha, +}(j_{T_\alpha}^\dagger E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\alpha$. D'après 2.1.5, cela implique que \mathcal{E}_α est $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent. En notant $\mathcal{E}_{\alpha\beta} := (\dagger T_\beta)(\mathcal{E}_\alpha)$, on dispose des deux flèches $\mathcal{E}_\alpha \rightarrow \mathcal{E}_{\alpha\beta}$ et $\mathcal{E}_\beta \rightarrow \mathcal{E}_{\beta\alpha} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{\alpha\beta}$. On pose alors

$$\mathcal{E} := \ker(\oplus_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{E}_\alpha \xrightarrow{\quad} \oplus_{\alpha, \beta \in \Lambda} \mathcal{E}_{\alpha\beta}).$$

Comme pour tous $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\mathcal{E}_\alpha, \mathcal{E}_{\alpha\beta}$ sont $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérents, \mathcal{E} est $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent (voir les propriétés de stabilité de la surcohérence de [Car04]). Comme, pour tout $\alpha \in \Lambda$, $\mathcal{E}(\dagger T_\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\alpha \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T_\alpha, X/K)$, d'après 2.1.4, on obtient même $\mathcal{E} \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$. Par construction, $\mathcal{L}oc(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}_\alpha, \vartheta_{\alpha\beta})$. \square

Proposition 2.2.4 *Avec les notations et hypothèses de 1.1.2, la catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, (Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda})$ ne dépend pas du choix de la famille $(Y_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, T_\alpha, X_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. On la notera alors $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$.*

Plus généralement, si Y est un k -schéma séparé, lisse et $(Y_l)_{l=1, \dots, N}$ sont ses composantes connexes, on pose $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K) := \prod_l F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y_l/K)$. Ses objets sont les F -isocristaux surcohérents sur Y .

Démonstration. Il suffit de vérifier la validité des trois étapes analogues à celles de la preuve de 1.1.4. Pour l'étape i), cela correspond à 2.2.3. L'étape ii) s'établit de façon analogue tandis que pour la dernière, il s'agit de remplacer l'utilisation de l'équivalence de catégories [Ber96a, 2.3.5.i)] par celle de [Car, 6.4.3.a)]. \square

Remarques 2.2.5. Grâce à [Car, 6.3.3], la définition de 2.2.4 est compatible avec celle que l'on connaissait (i.e., [Car, 6.4.3.b)]).

2.3. Équivalence entre F -isocristaux surconvergents et surcohérents

Théorème 2.3.1 *Soit Y une k -variété lisse. On dispose d'une équivalence canonique de catégories*

$$\text{sp}_{Y,+} : F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K).$$

Démonstration. Il ne coûte rien de supposer Y intègre. En choisissant un recouvrement de Y satisfaisant les conditions de 1.4.3, cela résulte de 1.4.5.1 (et de 1.1.4, 2.2.4). \square

Il résulte de cette équivalence de catégories la description suivante des F -isocristaux surcohérents :

Théorème 2.3.2 *Avec les notations 2.1.3, la catégorie $F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K)$ est équivalente à celle des $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -modules surcohérents \mathcal{E} à support dans X tels que $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$ soit dans l'image essentielle de $\text{sp}_{Y \hookrightarrow \mathcal{U},+}$.*

Démonstration. Soit \mathcal{E} un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module surcohérent à support dans X tels que $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}}$ soit dans l'image essentielle de $\text{sp}_{Y \hookrightarrow \mathcal{U},+}$. En notant X_1, \dots, X_r les composantes irréductibles de X , le morphisme canonique $\bigoplus_r \mathbb{R}\Gamma_{X_r}^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$ est un isomorphisme car il l'est en dehors de T (voir [Ber96b, 4.3.12]). Par [Car, 6.3.3], on peut alors supposer X irréductible. Avec ses notations et hypothèses, on dispose du diagramme 1.3.2.1. Via la caractérisation de

l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}, T', +}$ (voir [Car05a, 4.1.9]), il existe un (unique) F -isocrystal E' surconvergent sur Y' tels que $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}, T', +}(E')$. Grâce à l'équivalence de catégories 2.2.3.2, il existe donc un unique (à isomorphisme près) F -isocrystal surconvergent E sur Y induisant E' et le F -isocrystal convergent sur Y correspondant à $\mathcal{E}|\mathcal{U}$.

Avec 2.3.1, soit $\tilde{\mathcal{E}} := \mathrm{sp}_{Y, +}(E) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$. En utilisant le théorème de pleine fidélité du foncteur restriction en dehors de T' (voir [Car, 6.5.2]), on vérifie $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\tilde{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}_{X' \hookrightarrow \mathcal{P}, T', +}(E')$. D'où $\mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\tilde{\mathcal{E}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\mathcal{E})$. Or, lors de la preuve de [Car, 6.3.1], on a construit un morphisme $\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow f_{T, +} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\tilde{\mathcal{E}})$. En le composant avec le morphisme d'adjonction $f_{T, +} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger f_T^!(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$, on obtient $\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$ qui est par construction un isomorphisme en dehors de T . On conclut la preuve avec [Ber96b, 4.3.12]. \square

3. Autour de la dévissabilité en F -isocristaux surconvergents

Soit \mathcal{P} un \mathcal{V} -schéma formel propre et lisse. Si Y est un sous-schéma de P , on notera \bar{Y} l'adhérence schématique de Y dans P .

3.1. Dévissage des F -complexes surcohérents en F -isocristaux surconvergents

Déduisons maintenant du théorème 2.3.2 le lemme et le théorème suivants.

Lemme 3.1.1 *Soient T un diviseur de P , Y un sous-schéma fermé de $P \setminus T$, Y_1 une composante irréductible de Y et \mathcal{E} un $F\text{-}\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}}$ -module surcohérent à support dans \bar{Y} .*

Il existe un diviseur $T' \supset T$ de P tel que, en notant $Y' := \bar{Y} \setminus T'$, Y' soit intègre, lisse, inclus et dense dans Y_1 , $\mathcal{E}(\dagger T') \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T', \bar{Y}/K) = F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y'/K)$.

Démonstration. Comme P est somme de ses composantes irréductibles, il ne coûte rien de supposer P intègre. Soit \mathcal{U}' un ouvert affine de \mathcal{P} inclus dans $\mathcal{P} \setminus T$ tel que $U' \cap Y$ soit intègre, lisse, inclus et dense dans Y_1 . Ainsi, $\mathcal{E}|\mathcal{U}'$ est à support dans $U' \cap Y$. Via [Car06, 2.2.17], quitte à diminuer \mathcal{U}' , on peut même supposer que $\mathcal{E}|\mathcal{U}'$ est dans l'image essentielle de $\mathrm{sp}_{U' \cap Y \hookrightarrow \mathcal{U}', +}$ (voir [Car05a, 4.1.9]). Avec 1.3.1, $T' := P \setminus U'$ est un diviseur. Le théorème 2.3.2 nous permet de conclure. \square

Théorème 3.1.2 *Soient T un diviseur de P , Y un sous-schéma fermé de $P \setminus T$, $\mathcal{E} \in F\text{-}\mathcal{D}_{\mathrm{surcoh}}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^\dagger(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ à support dans \bar{Y} .*

Il existe alors des diviseurs T_1, \dots, T_r contenant T avec $T_r = T$ tels que, en notant $T_0 := \bar{Y}$, pour $i = 0, \dots, r-1$, le schéma $Y_i := T_0 \cap \dots \cap T_i \setminus T_{i+1}$ soit lisse et, pour tout entier j ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^j(\mathbb{R}\Gamma_{T_0 \cap \dots \cap T_i}^\dagger(\dagger T_{i+1})(\mathcal{E})) &\in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T_{i+1}, T_0 \cap \dots \cap T_i/K) \\ &= F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y_i/K) \cong F\text{-Isoc}^\dagger(Y_i/K). \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise successivement 3.1.1 jusqu'à ce que l'ouvert dense soit l'espace tout entier (i.e., avec les notations de 3.1.1, $T' = T$). \square

Remarques 3.1.3. De la même manière, on établit que le lemme 3.1.1 est encore valable en remplaçant « Y' soit intègre, lisse, inclus et dense dans Y_1 » par « Y' soit intègre, affine, lisse, inclus et dense dans Y_1 et muni d'un modèle idéal » (voir [Car, 7.4.1 et 7.4.2]). On vérifie alors que le théorème 3.1.2 reste valable en remplaçant « le schéma $Y_i := Y \cap T_0 \cap \dots \cap T_i \setminus T_{i+1}$ soit lisse » par « le schéma $Y_i := Y \cap T_0 \cap \dots \cap T_i \setminus T_{i+1}$ soit affine, lisse et muni d'un modèle idéal ».

3.2. Sur la définition de la dévissabilité en F -isocristaux surconvergens

3.2.1. Soient X, X', T, T' des sous-schémas fermés de P tels que $X \setminus T = X' \setminus T'$. Pour tout $\mathcal{E} \in (F\text{-})LD_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet})$, on dispose de l'isomorphisme canonique :

$$\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\dagger T)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\dagger T')(\mathcal{E}). \quad (3.2.1.1)$$

En effet, $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\dagger T)(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\dagger T)(\mathcal{O}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}}^{\mathbb{L}\dagger} \mathcal{E}$ (voir [Car04, 2.2.6.1]), de même avec des primes. On se ramène ainsi au cas où $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}$. Or, comme $\mathcal{O}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}$ est $\mathcal{D}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}^\dagger$ -surcohérent, on déduit de [Car04, 2.2.8, 2.2.14, 3.2.4] l'isomorphisme $\mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\dagger T)(\mathcal{O}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{X \cap X'}^\dagger(\dagger T \cup T')(\mathcal{O}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}})$. D'où le résultat par symétrie.

- En posant $Y := X \setminus T$, on note alors sans ambiguïté $\mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E})$ l'un des deux $(F\text{-})$ complexes de 3.2.1.1.
- Si Y et Y' sont deux sous-schémas de P , pour tout $\mathcal{E} \in (F\text{-})LD_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet})$, il résulte de [Car04, 2.2.8 et 2.2.14] l'isomorphisme canonique :

$$\mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger \circ \mathbb{R}\Gamma_{Y'}^\dagger(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Y \cap Y'}^\dagger(\mathcal{E}). \quad (3.2.1.2)$$

- Soit $\mathcal{E} \in (F\text{-})LD_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet})$. Si Y' est un ouvert (resp. un fermé) de Y , on dispose du morphisme canonique $\mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Y'}^\dagger(\mathcal{E})$ (resp. $\mathbb{R}\Gamma_{Y'}^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E})$). Si Y' est un fermé de Y , on bénéficie aussi du triangle distingué de localisation : $\mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}\Gamma_{Y \setminus Y'}^\dagger(\mathcal{E}) \rightarrow +1$.

3.2.2. Soient X et X' deux sous-schémas fermés de P , T et T' deux diviseurs de P tels que $X \setminus T = X' \setminus T'$. On suppose $Y := X \setminus T$ lisse. Pour tous $\mathcal{E} \in F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)})$, $j \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{H}^j(\lim_{\rightarrow} \mathbb{R}\Gamma_X^\dagger(\dagger T)(\mathcal{E})) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T, X/K)$ si et seulement si $\mathcal{H}^j(\lim_{\rightarrow} \mathbb{R}\Gamma_{X'}^\dagger(\dagger T')(\mathcal{E})) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(\mathcal{P}, T', X'/K)$ (cela découle de [Car, 6.3.4]).

On dira alors sans ambiguïté que « les espaces de cohomologie de $\mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E})$ sont associés à des F -isocristaux surconvergens sur Y » si, pour tout entier j , $\mathcal{H}^j(\lim_{\rightarrow} \mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E})) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y/K) \cong F\text{-Isoc}^\dagger(Y/K)$ (voir 2.3.1).

Le lemme suivant est aisé.

Lemme 3.2.3 *Soit Y un sous-schéma lisse de P tel qu'il existe un diviseur T de P vérifiant $Y = \bar{Y} \setminus T$. La sous-catégorie pleine de $F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b(\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)})$ des F -complexes \mathcal{E} tels que les espaces de cohomologie de $\mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E})$ soient associés à des F -isocristaux surconvergens sur Y est triangulée.*

Lemme 3.2.4 *Soient Y, Y' deux sous-schémas de P tels qu'il existe des diviseurs T, T' de P satisfaisant $Y = \bar{Y} \setminus T$ et $Y' = \bar{Y}' \setminus T'$. On suppose Y et $Y \cap Y'$ lisses. Soit $\mathcal{E} \in F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)})$ tel que les espaces de cohomologie de $\mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E})$ soient associés à des F -isocristaux surconvergens sur Y . Alors les espaces de cohomologie de $\mathbb{R}\Gamma_{Y \cap Y'}^\dagger(\mathcal{E})$ sont associés à des F -isocristaux surconvergens sur $Y \cap Y'$.*

Démonstration. Cela dérive de [Car, 6.3.2 et 6.3.5] et de 3.2.1.2. \square

Étendons à présent la notion de dévissabilité en F -isocristaux surconvergens définie en [Car, 8.1.1] au cas des F -complexes quasi-cohérents. Une première définition est donnée ci-dessous, une seconde plus générale est obtenue en 3.2.14.

Définition 3.2.5. Soient $\mathcal{E} \in F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)})$, Y un sous-schéma de P . On suppose qu'il existe un diviseur T de P tel que $Y = \bar{Y} \setminus T$.

Le F -complexe \mathcal{E} « se dévisse au dessus de Y en F -isocristaux surconvergens » s'il existe des diviseurs T_1, \dots, T_r contenant T avec $T_r = T$ tels que, pour $i := 0, \dots, r-1$ et avec $T_0 := \bar{Y}$, $Y_i := T_0 \cap T_1 \cap \dots \cap T_i \setminus T_{i+1}$ soit lisse et les espaces de cohomologie de $\mathbb{R}\Gamma_{Y_i}^\dagger(\mathcal{E})$ soient associés à des F -isocristaux surconvergens sur Y_i (voir 3.2.2).

On dira aussi que le F -complexe « \mathcal{E} se dévisse au-dessus de la stratification $Y = \sqcup_{i=0, \dots, r-1} Y_i$ en F -isocristaux surconvergens » ou que « (T_1, \dots, T_r) fournit un dévissage sur Y de \mathcal{E} en F -isocristaux surconvergens ».

Remarques 3.2.6. Avec les notations et hypothèses de 3.2.5, le fait qu'un F -complexe \mathcal{E} de $F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)})$ « se dévisse au-dessus de la stratification $Y = \sqcup_{i=0, \dots, r-1} Y_i$ en F -isocristaux surconvergens » ne dépend ni du

choix du diviseur T tel que $Y = \bar{Y} \setminus T$, ni de celui du r -uplet (T_1, \dots, T_r) où les T_i sont des diviseurs contenant T_r tels que $Y_i = T_0 \cap \dots \cap T_i \setminus T_{i+1}$ où $T_0 := \bar{Y}$ (on remarque que cela implique $Y = \bar{Y} \setminus T_r$). Les définitions de 3.2.5 n'engendrent donc aucune ambiguïté. On remarque enfin que cela ne change rien si on remplace \bar{Y} par un sous-schéma fermé X de P tel que $Y = X \setminus T$.

Proposition 3.2.7 *Soient $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^{\text{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet})$, Y un sous-schéma de P tel qu'il existe un diviseur T de P satisfaisant $Y = \bar{Y} \setminus T$. Soient T_1, \dots, T_r des diviseurs de P contenant T avec $T_r = T$ et, pour $i := 0, \dots, r-1$, $Y_i := T_0 \cap T_1 \cap \dots \cap T_i \setminus T_{i+1}$ avec $T_0 := \bar{Y}$.*

Si, pour tout $i := 0, \dots, r-1$, \mathcal{E} est dévissable sur Y_i en F -isocristaux surconvergers alors \mathcal{E} l'est sur Y .

Démonstration. Plus précisément, nous prouvons le lemme 3.2.8 ci-après :

Lemme 3.2.8 *On garde les notations et hypothèses de 3.2.7. Pour tout $i = 0, \dots, r-1$, il existe donc des diviseurs $T_{(i,1)}, \dots, T_{(i,r_i)}$ contenant T_{i+1} avec $T_{(i,r_i)} = T_{i+1}$ tels que, en notant $T_{(i,0)} := \bar{Y}_i$, pour $h = 0, \dots, r_i - 1$, le k -schéma $Y_{(i,h)} := T_{(i,0)} \cap \dots \cap T_{(i,h)} \setminus T_{(i,h+1)}$ soit lisse et, pour tout entier j ,*

$$\mathcal{H}^j(\varinjlim \mathbb{R}\Gamma_{Y_{(i,h)}}^{\dagger} \mathcal{E}) \in F\text{-Isoc}^{\dagger\dagger}(Y_{(i,h)}/K) \cong F\text{-Isoc}^{\dagger}(Y_{(i,h)}/K).$$

Alors $(T_{(0,1)}, \dots, T_{(0,r_0)}, T_{(1,1)}, \dots, T_{(1,r_1)}, \dots, T_{(r-1,1)}, \dots, T_{(r-1,r_{r-1})})$ fournit un dévissage en F -isocristaux surconvergers de \mathcal{E} au-dessus de la stratification

$$Y = Y_{(0,0)} \sqcup \dots \sqcup Y_{(0,r_0-1)} \sqcup Y_{(1,0)} \sqcup \dots \sqcup Y_{(1,r_1-1)} \sqcup \dots \sqcup Y_{(r-1,0)} \sqcup \dots \sqcup Y_{(r-1,r_{r-1}-1)}. \quad (3.2.8.1)$$

Démonstration. On procède par récurrence sur r . Lorsque $r = 1$, c'est tautologique. Supposons donc la proposition valable pour $r-1 \geq 1$ et prouvons-le pour r . On dispose de la décomposition :

$$Y = (Y \setminus T_{(0,1)}) \sqcup (Y \cap T_{(0,1)} \setminus T_{(0,2)}) \sqcup \dots \sqcup (Y \cap T_{(0,1)} \cap \dots \cap T_{(0,r_0-1)} \setminus T_{(0,r_0)}) \sqcup (Y \cap T_{(0,1)} \cap \dots \cap T_{(0,r_0)}). \quad (3.2.8.2)$$

Pour tout $h = 0, \dots, r_0 - 1$, comme $T_{(0,h)} \supset T_1 \supset T$ (resp. et $T_{(0,r_0)} = T_1$), on obtient $Y \cap T_{(0,1)} \cap \dots \cap T_{(0,h)} \setminus T_{(0,h+1)} = Y_{(0,h)}$ (resp. $Y \cap T_{(0,1)} \cap \dots \cap T_{(0,r_0)} = Y \cap T_1$). La décomposition 3.2.8.2 est ainsi exactement :

$$Y = Y_{(0,0)} \sqcup Y_{(0,1)} \sqcup \dots \sqcup Y_{(0,r_0-1)} \sqcup (Y \cap T_1). \quad (3.2.8.3)$$

La décomposition 3.2.8.3 signifie donc que $(T_{(0,1)}, \dots, T_{(0,r_0)})$ fournit le début d'un dévissage sur Y (le dévissage ne s'arrête pas car à priori $T_{(0,r_0)} \neq T$, i.e. $Y \cap T_1 \neq \emptyset$) de \mathcal{E} en F -isocristaux surconvergers. Enfin, par hypothèse de récurrence appliquée à \mathcal{E} sur $Y \cap T_1$ pour (T_2, \dots, T_r) , la famille de diviseurs $(T_{(1,1)}, \dots, T_{(1,r_1)}, \dots, T_{(r-1,1)}, \dots, T_{(r-1,r_{r-1})})$ induit un dévissage en F -isocristaux surconvergers de \mathcal{E} au-dessus de la stratification $Y \cap T_1 = Y_{(1,0)} \sqcup \dots \sqcup Y_{(1,r_1-1)} \sqcup \dots \sqcup Y_{(r-1,0)} \sqcup \dots \sqcup Y_{(r-1,r_{r-1}-1)}$. $\square \quad \square$

Lemme 3.2.9 Soient $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^{\text{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{P}}^{\bullet})$, $Y' \subset Y$ deux sous-schémas de P . On suppose qu'il existe deux diviseurs T, T' de P tels que $Y = \bar{Y} \setminus T$ et $Y' = \bar{Y}' \setminus T'$. Si \mathcal{E} est dévissable sur Y en F -isocristaux surconvergens alors \mathcal{E} l'est sur Y' .

Démonstration. Quitte à remplacer T' par $T \cup T'$, on peut supposer $T' \supset T$. Soient T_1, \dots, T_r des diviseurs de P contenant T avec $T_r = T$ tels que (T_1, \dots, T_r) fournisse un dévissage sur Y de \mathcal{E} en F -isocristaux surconvergens. Notons $T_0 := \bar{Y}$, $T'_0 := \bar{Y}'$ et, pour $i = 0, \dots, r-1$, $T'_{i+1} := T_{i+1} \cup T'$, $Y_i := T_0 \cap \dots \cap T_i \setminus T_{i+1}$, $Y'_i := T'_0 \cap \dots \cap T'_i \setminus T'_{i+1}$. Pour $i = 0, \dots, r-1$, comme $Y'_i = Y_i \cap \bar{Y}' \setminus T'_{i+1}$ et comme $\mathbb{R}\Gamma_{Y_i}^{\dagger} \mathcal{E}$ est $\mathcal{D}_{\mathbb{P}}^{\dagger}(\dagger T_{i+1})_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent, par stabilité de la surcohérence par foncteur cohomologique local à support strict dans un sous-schéma fermé (voir [Car04, 3.1.5]), il en résulte que $\mathbb{R}\Gamma_{Y'_i}^{\dagger} \mathcal{E}$ est $\mathcal{D}_{\mathbb{P}}^{\dagger}(\dagger T'_{i+1})_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent. Par 3.1.2, il en découle que \mathcal{E} se dévisse sur Y'_i en F -isocristaux surconvergens. La proposition 3.2.7 nous permet de conclure. \square

Lemme 3.2.10 Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^{\text{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{P}}^{\bullet})$, Y un sous-schéma de P tel qu'il existe un diviseur T de P vérifiant $Y = \bar{Y} \setminus T$. Si \mathcal{E} et \mathcal{E}' se dévissent sur Y en F -isocristaux surconvergens alors, il existe des diviseurs T_1, \dots, T_r contenant T avec $T_r = T$ tels que (T_1, \dots, T_r) induise un dévissage sur Y de \mathcal{E} et \mathcal{E}' en F -isocristaux surconvergens.

La sous-catégorie pleine de $F\text{-LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^{\text{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{P}}^{\bullet})$ des F -complexes qui se dévissent sur Y en F -isocristaux surconvergens est alors triangulée.

Démonstration. Il existe des diviseurs T_1, \dots, T_r contenant T avec $T_r = T$ tels que (T_1, \dots, T_r) donne un dévissage sur Y de \mathcal{E} en F -isocristaux surconvergens. Notons $T_0 := \bar{Y}$ et, pour $i = 0, \dots, r-1$, $Y_i := T_0 \cap \dots \cap T_i \setminus T_{i+1}$. Il découle de 3.2.9 que \mathcal{E}' se dévisse sur Y_i en F -isocristaux surconvergens. D'après 3.2.8 et avec notations, \mathcal{E}' se dévisse en F -isocristaux surconvergens au-dessus d'une stratification de la forme 3.2.8.1. En utilisant 3.2.4, on vérifie que \mathcal{E} l'est de même sur cette stratification 3.2.8.1.

La dernière assertion résulte de 3.2.3. \square

Lemme 3.2.11 Soient T, T' des diviseurs de P , X un sous-schéma fermé de P , $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^{\text{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathbb{P}}^{\bullet})$.

1. Si le F -complexe \mathcal{E} se dévisse sur $X \setminus T'$ en F -isocristaux surconvergens alors $\mathcal{E}(\dagger T)$ l'est sur $X \setminus (T \cup T')$.
2. Le F -complexe $\mathcal{E}(\dagger T)$ se dévisse sur $X \setminus T'$ en F -isocristaux surconvergens si et seulement si $\mathcal{E}(\dagger T)$ l'est sur $X \setminus (T \cup T')$.

Démonstration. Si (T'_1, \dots, T'_r) fournit un dévissage de \mathcal{E} sur $X \setminus T'$ en F -isocristaux surconvergens, alors $(T'_1 \cup T, \dots, T'_r \cup T)$ en fournit un sur $X \setminus (T \cup T')$ à $\mathcal{E}(\dagger T)$. D'où 1). La nécessité de 2) découle de 3.2.9 (ou de

1)). Réciproquement, si $\mathcal{E}(\dagger T)$ se dévisse sur $X \setminus (T' \cup T)$ en F -isocristaux surconvergens, comme $\mathbb{R}\Gamma_{(X \setminus T') \cap T}^\dagger(\mathcal{E}(\dagger T)) = 0$ et $X \setminus T' = (X \setminus (T' \cup T)) \sqcup ((X \setminus T') \cap T)$, la proposition 3.2.7 (on prend $T_1 = T \cup T'$ et $T_2 = T'$) nous permet de conclure. \square

Lemme 3.2.12 *Soient T', T_1, \dots, T_r des diviseurs de P , X un sous-schéma fermé de P , $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b({}^e\widehat{\mathcal{D}}_P^\bullet)$. On pose $T := \cap_{i=1}^r T_i$, $Y' := X \setminus T'$.*

Le F -complexe $\mathcal{E}(\dagger T)$ est dévissable sur Y' en F -isocristaux surconvergens si et seulement si, pour tout $i = 1, \dots, r$, $\mathcal{E}(\dagger T_i)$ l'est sur Y' .

Démonstration. D'après respectivement 3.2.11.1) et 2), si $\mathcal{E}(\dagger T)$ est dévissable sur Y' en F -isocristaux surconvergens alors $\mathcal{E}(\dagger T_i)$ l'est sur $Y' \setminus T_i$ et donc sur Y' . Établissons à présent la suffisance. Pour cela, prouvons par récurrence sur s tel que $1 \leq s \leq r$ que, pour tous diviseurs T'_1, \dots, T'_s chacun égaux à des réunions de T_1, \dots, T_r , $\mathcal{E}(\dagger T'_1 \cap \dots \cap T'_s)$ est dévissable sur Y' en F -isocristaux surconvergens. Le cas où $s = 1$ découle de 3.2.11.1) et 2). Soient T'_1, \dots, T'_{s+1} des diviseurs chacun égaux à des réunions de T_1, \dots, T_r et, pour $i = 1, \dots, s$, $T''_i := T'_i \cup T'_{s+1}$. On dispose du triangle distingué de Mayer-Vietoris (voir [Car04, 2.2.16]) :

$$\mathcal{E}(\dagger T'_1 \cap \dots \cap T'_{s+1}) \rightarrow \mathcal{E}(\dagger T'_1 \cap \dots \cap T'_s) \oplus \mathcal{E}(T'_{s+1}) \rightarrow \mathcal{E}(\dagger T''_1 \cap \dots \cap T''_s) \rightarrow +1.$$

Par hypothèse de récurrence, les termes du milieu et de droite sont dévissables sur Y' en F -isocristaux surconvergens. Avec 3.2.10, il en résulte qu'il en est de même du terme de gauche. \square

Lemme 3.2.13 *Soient Y et Y' des sous-schémas de P tels qu'il existe des diviseurs T, T' vérifiant $Y = \overline{Y} \setminus T$, $Y' = \overline{Y'} \setminus T'$. Soit $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q}, \text{qc}}^b({}^e\widehat{\mathcal{D}}_P^\bullet)$ tel que $\mathbb{R}\Gamma_{Y'}^\dagger(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E})$. Alors \mathcal{E} est dévissable sur Y en F -isocristaux surconvergens si et seulement s'il l'est sur Y' .*

Démonstration. Quitte à remplacer Y par $Y \cap Y'$ et T par $T \cup T'$, on se ramène via 3.2.1.2 au cas où $Y \subset Y'$ et $T \supset T'$. La réciproque étant 3.2.9, supposons \mathcal{E} dévissable sur Y en F -isocristaux surconvergens et prouvons alors que \mathcal{E} l'est sur Y' . Or, en notant $\mathcal{F} := \mathbb{R}\Gamma_{\overline{Y'}}^\dagger(\mathcal{E})$, \mathcal{E} est dévissable sur Y' en F -isocristaux surconvergens si et seulement si $(\dagger T')(\mathcal{F})$ l'est. De plus, l'isomorphisme $\mathbb{R}\Gamma_{Y'}^\dagger(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E})$ implique le suivant $(\dagger T')(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} (\dagger T)\mathcal{F}$ (on utilise [Car04, 2.2.14]). Par 3.2.11.2), il suffit alors de prouver que $(\dagger T')(\mathcal{F})$ est dévissable sur $Y' \setminus T$ en F -isocristaux surconvergens, ce qui revient à traiter le cas $T = T'$. Supposons donc $T = T'$. Soient (T_1, \dots, T_r) des diviseurs fournissant sur Y un dévissage de \mathcal{E} en F -isocristaux surconvergens. Notons $T_0 := \overline{Y'}$ et, pour $i = 0, \dots, r-1$, $Y'_i := T_0 \cap \dots \cap T_i \setminus T_{i+1}$. Par définition, les espaces de cohomologie de $\mathbb{R}\Gamma_{Y'_i \cap Y}^\dagger(\mathcal{E})$ sont associés à des F -isocristaux surconvergens sur $Y'_i \cap Y$. Or, avec 3.2.1.2 et par hypothèse, on obtient $\mathbb{R}\Gamma_{Y'_i}^\dagger(\mathcal{E}) = \mathbb{R}\Gamma_{Y'_i \cap Y}^\dagger(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Y'_i \cap Y}^\dagger(\mathcal{E})$. Ainsi, $\mathbb{R}\Gamma_{Y'_i}^\dagger(\mathcal{E})$ est

$\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T_{i+1})_{\mathbb{Q}}$ -surcohérent. Par 3.1.2, cela implique que \mathcal{E} se dévise sur Y'_i en F -isocristaux surconvergents. Le F -complexe \mathcal{E} l'est donc sur Y' (voir 3.2.7). \square

Définition 3.2.14. Soient $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b({}^{\mathfrak{e}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet})$, Y un sous-schéma de P .

Le F -complexe \mathcal{E} est « dévissable sur Y en F -isocristaux surconvergents » s'il existe un recouvrement fini ouvert $(Y_l)_l$ de Y , des diviseurs T_l de P tels que, pour tout l , $Y_l = \overline{Y}_l \setminus T_l$ et \mathcal{E} soit dévissable sur Y_l en F -isocristaux surconvergents (voir 3.2.5).

Proposition 3.2.15 Soient $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b({}^{\mathfrak{e}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet})$, Y un sous-schéma de P . Le F -complexe \mathcal{E} se dévise sur Y en F -isocristaux surconvergents si et seulement si, pour tout sous-schéma $Y' \subset Y$ tel qu'il existe un diviseur T' de P satisfaisant $Y' = \overline{Y}' \setminus T'$, \mathcal{E} se dévise sur Y' en F -isocristaux surconvergents.

Démonstration. La suffisance est tautologique. Traitons à présent la nécessité. Il existe un recouvrement fini ouvert $(Y_l)_l$ de Y , des diviseurs T_l de P tels que, pour tout l , $Y_l = \overline{Y}_l \setminus T_l$ et \mathcal{E} soit dévissable sur Y_l en F -isocristaux surconvergents. Soit maintenant $Y' \subset Y$ un sous-schéma tel qu'il existe un diviseur T' de P satisfaisant $Y' = \overline{Y}' \setminus T'$. Par 3.2.9, \mathcal{E} l'est alors sur $Y' \cap Y_l$ (comme $Y_l = Y \setminus T_l$, on remarque que $Y' \cap Y_l = \overline{Y}' \setminus (T' \cup T_l)$). On en déduit, via 3.2.11.1), 2), que $(\dagger T_l)(\mathcal{E})$ l'est sur Y' . Par 3.2.12, $(\dagger \cap_l T_l)(\mathcal{E})$ l'est donc sur Y' . Comme $Y' \setminus (\cap_l T_l) = Y'$ (et donc $\mathbb{R}\Gamma_{Y'}^{\dagger}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Y'}^{\dagger}((\dagger \cap_l T_l)(\mathcal{E}))$), cela équivaut à dire que \mathcal{E} l'est sur Y' . \square

On déduit de 3.2.15 les deux corollaires suivants.

Corollaire 3.2.16 Soient $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b({}^{\mathfrak{e}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet})$, $Y' \subset Y$ deux sous-schémas de P . Si le F -complexe \mathcal{E} se dévise sur Y en F -isocristaux surconvergents alors \mathcal{E} l'est sur Y' .

Corollaire 3.2.17 Soient $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b({}^{\mathfrak{e}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet})$, Y', Y deux sous-schémas de P . Le F -complexe \mathcal{E} est dévissable sur $Y \cup Y'$ en F -isocristaux surconvergents si et seulement s'il l'est sur Y et Y' .

Proposition 3.2.18 Soient $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},\text{qc}}^b({}^{\mathfrak{e}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet})$, Y, Y_1, Y_2 trois sous-schémas de P .

Si $\mathbb{R}\Gamma_{Y_1}^{\dagger}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{Y_2}^{\dagger}(\mathcal{E})$ alors \mathcal{E} est dévissable sur $Y \cap Y_1$ en F -isocristaux surconvergents si et seulement s'il l'est sur $Y \cap Y_2$.

Démonstration. Supposons \mathcal{E} dévissable sur $Y \cap Y_1$ en F -isocristaux surconvergents. Avec 3.2.1.2, on obtient : $\mathbb{R}\Gamma_{(Y \setminus Y_1) \cap Y_2}^{\dagger}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_{(Y \setminus Y_1) \cap Y_1}^{\dagger}(\mathcal{E}) = 0$. Comme $Y \cap Y_2 = (Y \cap Y_2 \cap Y_1) \cup (Y \cap Y_2 \setminus Y_1)$, grâce à 3.2.16 et 3.2.17, on conclut alors que \mathcal{E} est dévissable sur $Y \cap Y_2$ en F -isocristaux surconvergents. \square

Définition 3.2.19. Soient T un diviseur de P , $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},qc}^b({}^{\mathcal{E}}\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)}(T))$ ($\subset F\text{-LD}_{\mathbb{Q},qc}^b({}^{\mathcal{E}}\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)})$). Le F -complexe \mathcal{E} « se dévisse en F -isocristaux surconvergents » si \mathcal{E} se dévisse sur P (ou sur $P \setminus T$ d'après 3.2.11.2) en F -isocristaux surconvergents.

La sous-catégorie pleine de $F\text{-LD}_{\mathbb{Q},qc}^b({}^{\mathcal{E}}\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)}(T))$ des F -complexes dévissables en F -isocristaux surconvergents sera noté $F\text{-LD}_{\mathbb{Q},dév}^b({}^{\mathcal{E}}\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)}(T))$.

Dans la suite, T désignera un diviseur de P .

Proposition 3.2.20 *La catégorie $F\text{-LD}_{\mathbb{Q},dév}^b({}^{\mathcal{E}}\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)}(T))$ est une sous-catégorie pleine triangulée de $F\text{-LD}_{\mathbb{Q},qc}^b({}^{\mathcal{E}}\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)}(T))$.*

Démonstration. Cela résulte de 3.2.10. □

Définition 3.2.21. Soient n un entier naturel, $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},qc}^b({}^{\mathcal{E}}\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)}(T))$. On définit la notion de « n -dévissabilité en F -isocristaux surconvergents » par récurrence sur n de la manière suivante :

- Le F -complexe \mathcal{E} est 0-dévissable en F -isocristaux surconvergents s'il existe un sous-schéma lisse Y de P , un diviseur $T' \supset T$ de P tels que $Y = \overline{Y} \setminus T'$, $\mathbb{R}\Gamma_Y^\dagger(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$ et les espaces de cohomologie de \mathcal{E} soient associés à des F -isocristaux surconvergents sur Y ;
- Si $n \geq 1$, le F -complexe \mathcal{E} est n -dévissable en F -isocristaux surconvergents s'il existe un triangle distingué de la forme :

$$\mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{n-1} \rightarrow \mathcal{E}_0[1],$$

où \mathcal{E}_0 est 0-dévissable en F -isocristaux surconvergents et \mathcal{E}_{n-1} est $n-1$ -dévissable en F -isocristaux surconvergents.

Enfin, « \mathcal{E} est ∞ -dévissable en F -isocristaux surconvergents » s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que \mathcal{E} soit n -dévissable en F -isocristaux surconvergents.

La définition 3.2.21 paraît asymétrique. La proposition 3.2.22 implique qu'il n'en est rien.

Proposition 3.2.22 *Soient $n_1, n_2 \geq 0$ deux entiers, $\mathcal{E}_{n_1} \rightarrow \mathcal{E}_{n_2} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{n_1}[1]$ un triangle distingué de $F\text{-LD}_{\mathbb{Q},qc}^b({}^{\mathcal{E}}\widehat{\mathcal{D}}_P^{(\bullet)}(T))$ tel que \mathcal{E}_{n_1} soit n_1 -dévissable en F -isocristaux surconvergents, \mathcal{E}_{n_2} soit n_2 -dévissable en F -isocristaux surconvergents. Alors \mathcal{E} est $n_1 + n_2 + 1$ -dévissable en F -isocristaux surconvergents.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n_2 . Si $n_2 = 0$, c'est tautologique. Supposons $n_2 \geq 1$. Par définition, on dispose d'un triangle distingué $\mathcal{E}_{n_2} \rightarrow \mathcal{E}_{n_2-1} \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}_{n_2}[1]$, où \mathcal{E}_{n_2-1} est n_2-1 -dévissable en F -isocristaux surconvergents et \mathcal{E}_0 est 0-dévissable en F -isocristaux surconvergents. On obtient par composition un morphisme $\mathcal{E}_{n_1} \rightarrow \mathcal{E}_{n_2-1}$. En notant $\mathcal{E}_{n_1+n_2}$ son cône, par hypothèse de récurrence, $\mathcal{E}_{n_1+n_2}$ est $n_1 + n_2$ -dévissable

en F -isocristaux surconvergens. L'axiome de l'octaèdre nous donne un triangle distingué de la forme : $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_{n_1+n_2} \rightarrow \mathcal{E}_0 \rightarrow \mathcal{E}[1]$. D'où le résultat. \square

Proposition 3.2.23 *Un F -complexe $\mathcal{E} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},qc}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ est dévissable en F -isocristaux surconvergens si et seulement s'il est ∞ -dévissable en F -isocristaux surconvergens. De plus, $F\text{-LD}_{\mathbb{Q},dév}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ est la plus petite sous-catégorie pleine triangulée de $F\text{-LD}_{\mathbb{Q},qc}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ contenant les F -complexes 0-dévissables en F -isocristaux surconvergens.*

Démonstration. Cela résulte de 3.2.20. \square

On dispose en outre de la sous-catégorie pleine $F\text{-}D_{dév}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ de $F\text{-}D_{coh}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ des F -complexes dévissables en F -isocristaux surconvergens (voir [Car, 8.1.1]). La proposition qui suit indique que ces deux notions de dévissabilité se rejoignent.

Proposition 3.2.24 *Le foncteur \varinjlim induit une équivalence de catégories :*

$$\varinjlim : F\text{-LD}_{\mathbb{Q},dév}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cap F\text{-LD}_{\mathbb{Q},coh}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong F\text{-}D_{dév}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}). \quad (3.2.24.1)$$

Démonstration. Soit $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},dév}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cap F\text{-LD}_{\mathbb{Q},coh}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$.

Via l'équivalence $\varinjlim : F\text{-LD}_{\mathbb{Q},coh}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T)) \cong F\text{-}D_{coh}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$, on note $\mathcal{E} := \varinjlim(\mathcal{E}^{(\bullet)})$, X son support et $Y := X \setminus T$. Par 3.2.9, $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ se dévise en F -isocristaux surconvergens au-dessus d'une stratification de la forme $Y = \sqcup_{i=0,\dots,r-1} Y_i$. Avec 3.1.3, on peut dévisser $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ au-dessus de Y_i en utilisant une stratification dont les strates sont affines, lisses et munis de modèles idéaux. En utilisant 3.2.8, on obtient ainsi un dévissage de \mathcal{E} au sens de [Car, 8.1.1] (car les strates sont munies de modèles idéaux). Le foncteur \varinjlim de 3.2.24.1 est donc bien défini. Comme sa pleine fidélité est immédiate, vérifions à présent son essentielle surjectivité. Soient $\mathcal{E} \in F\text{-}D_{dév}^b(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$, X son support et $Y := X \setminus T$. Il existe $\mathcal{E}^{(\bullet)} \in F\text{-LD}_{\mathbb{Q},coh}^b({}^{\mathfrak{g}}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{(\bullet)}(T))$ tel que $\varinjlim(\mathcal{E}^{(\bullet)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$. Dans la définition de la dévissabilité de [Car, 8.1.1], on peut, grâce à 3.2.8 et 3.1.3, éviter l'hypothèse « X_r (notation de [Car, 8.1.1]) est lisse ». Ainsi $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ se dévise sur Y en F -isocristaux surconvergens (sens de 3.2.14). Comme \mathcal{E} est à support dans X , par 3.2.13, $\mathcal{E}^{(\bullet)}$ est donc dévissable en F -isocristaux surconvergens. \square

Dans [Car05b, 3.17], pour toute k -variété Y , nous avons défini la notion de $F\text{-}\mathcal{D}_Y$ -module arithmétique surholonome (resp. $F\text{-}\mathcal{D}_Y$ -complexe arithmétique surholonome). En gros, un F -complexe cohérent et bornée de \mathcal{D} -modules arithmétiques est surholonome si sa cohérence est stable par foncteurs duaux, par images inverses extraordinaires par un morphisme lisse,

par foncteurs restrictions en dehors d'un diviseur et par composition de tels foncteurs. Énonçons à présent les deux conjectures ci-dessous.

Conjecture 3.2.25. 1. Soit Y une k -variété lisse. Pour tout F -isocristal E surconvergent sur Y , $\mathrm{sp}_{Y^+}(E)$ est un F - \mathcal{D}_Y -module arithmétique surholonome.

2. On dispose de l'égalité :

$$F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\mathrm{dév}}^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T)) = F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\mathrm{dév}}^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T)) \cap F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T)).$$

Remarques 3.2.26. 1. En notant $U := P \setminus T$, la conjecture 3.2.25.1) implique aussitôt 3.2.25.2) ainsi que les équivalences de catégories (notation de [Car05b, 3.13]) :

$$F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\mathrm{dév}}^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T)) \cong F\text{-}\underline{D}_{\mathrm{dév}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}}) \cong F\text{-}\underline{D}_{\mathrm{surhol}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_U).$$

2. La conjecture [Car, 8.1.6] est équivalente à 3.2.25.1). En effet, avec les notations et hypothèses de 3.2.25.1), on peut toujours dévisser $\mathrm{sp}_{Y^+}(E)$ au-dessus d'une stratification dont les strates sont affines, lisses et munis de modèles idéaux (voir 3.1.3). Cela entraîne que la conjecture [Car, 8.1.6] implique 3.2.25.1). La réciproque est une tautologie.

3. Toutes les constructions (e.g. fonctions L généralisant celles de Étesse et Le Stum de [ÉLS93] ou [ÉLS97], notion de poids, stabilité du poids par image directe etc.) et résultats de [Car, 8] sont encore valables en remplaçant $F\text{-}\underline{D}_{\mathrm{dév}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{D}_{\mathcal{P}}^{\dagger}(\dagger T)_{\mathbb{Q}})$ par $F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\mathrm{dév}}^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T))$.

La proposition qui suit valide la conjecture 3.2.25.2).

Proposition 3.2.27 Si P est de dimension au plus 1 alors

$$F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\mathrm{dév}}^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T)) = F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\mathrm{dév}}^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T)) \cap F\text{-}\underline{LD}_{\mathbb{Q},\mathrm{coh}}^{\mathrm{b}}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{P}}^{\bullet}(T)).$$

Démonstration. Cela résulte de l'holonomie des F -isocristaux surconvergents sur les courbes lisses (voir [Car06, 4.3.4]). \square

Références

- Ber74. P. BERTHELOT – *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* , Springer-Verlag, Berlin, 1974, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 407. 2
- Ber86. — , « Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p », *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* (1986), no. 23, p. 3, 7–32, Introductions aux cohomologies p -adiques (Luminy, 1984). 2
- Ber96a. — , « Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie », Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes, 1996. 2, 4, 5, 7, 13, 14, 15, 16, 17, 21
- Ber96b. — , « -modules arithmétiques. I. Opérateurs différentiels de niveau fini », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **29** (1996), no. 2, p. 185–272. 2, 9, 12, 18, 21, 22

- Ber00. — , « \mathcal{D} -modules arithmétiques. II. Descente par Frobenius », *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* (2000), no. 81, p. vi+136. 2, 12
- Ber02. — , « Introduction à la théorie arithmétique des \mathcal{D} -modules », *Astérisque* (2002), no. 279, p. 1–80, Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques, II. 2, 4, 12
- Car. D. CARO – « Dévissages des F -complexes de \mathcal{D} -modules arithmétiques en F -isocristaux surconvergents », à paraître dans *Inventiones Mathematicae*. 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 30, 31
- Car02. — , « Fonctions L associées aux \mathcal{D} -modules arithmétiques », Thèse, Université de Rennes1, 2002. 8
- Car04. — , « \mathcal{D} -modules arithmétiques surcohérents. Application aux fonctions L », *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **54** (2004), no. 6, p. 1943–1996. 2, 4, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 23, 26, 27
- Car05a. — , « \mathcal{D} -modules arithmétiques associés aux isocristaux surconvergents. Cas lisse », *ArXiv Mathematics e-prints* (2005). 3, 8, 9, 12, 18, 22
- Car05b. — , « \mathcal{D} -modules arithmétiques surholonomes. », *ArXiv Mathematics e-prints* (2005). 2, 30, 31
- Car06. — , « Fonctions L associées aux \mathcal{D} -modules arithmétiques. Cas des courbes », *Compositio Mathematica* **142** (2006), no. 01, p. 169–206. 3, 4, 9, 11, 18, 19, 22, 31
- dJ96. A. J. DE JONG – « Smoothness, semi-stability and alterations », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1996), no. 83, p. 51–93. 10, 11
- Elk73. R. ELKIK – « Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **6** (1973), p. 553–603 (1974). 10, 13, 14
- ÉLS93. J.-Y. ÉTESSE et B. LE STUM – « Fonctions L associées aux F -isocristaux surconvergents. I. Interprétation cohomologique », *Math. Ann.* **296** (1993), no. 3, p. 557–576. 31
- ÉLS97. — , « Fonctions L associées aux F -isocristaux surconvergents. II. Zéros et pôles unités », *Invent. Math.* **127** (1997), no. 1, p. 1–31. 31
- Ked04. K. S. KEDLAYA – « Full faithfulness for overconvergent F -isocrystals », *Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2004, p. 819–835. 9, 11, 13
- MNM90. Z. MEBKHOUT et L. NARVÁEZ-MACARRO – « Sur les coefficients de de Rham-Grothendieck des variétés algébriques », *p -adic analysis* (Trento, 1989), *Lecture Notes in Math.*, vol. 1454, Springer, Berlin, 1990, p. 267–308. 2
- MW68. P. MONSKY et G. WASHNITZER – « Formal cohomology. I », *Ann. of Math. (2)* **88** (1968), p. 181–217. 2
- NH03. C. NOOT-HUYGHE – « Un théorème de comparaison entre les faisceaux d'opérateurs différentiels de Berthelot et de Mebkhout–Narváez-Macarro », *J. Algebraic Geom.* **12** (2003), no. 1, p. 147–199. 2
- Tsu02. N. TSUZUKI – « Morphisms of F -isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F -isocrystals », *Duke Math. J.* **111** (2002), no. 3, p. 385–418. 9, 19
- Vir00. A. VIRRION – « Dualité locale et holonomie pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques », *Bull. Soc. Math. France* **128** (2000), no. 1, p. 1–68. 4, 18